

د. خالد جلال

079 - 9948198



طريق التفوق في الرياضيات

للتوجيهي (الأدبي)

2005

الوحدة الأولى

الاقترانات الأسية واللوغاريتمية

الوحدة الاولى

الاقترانات الاسية و اللوغاريتمية



الاقترانات الأسية

Exponential Functions

الدرس

1

مثال 1

أجد قيمة كل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

1 $f(x) = 4^x, x = 3$

2 $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x, x = -2$

أتحقق من فهمي 

أجد قيمة كل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

a) $f(x) = 3^x, x = 4$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x, x = -1$

مثال 2

إذا كان: $f(x) = 2^x$ ، فأجيب عن الأسئلة الآتية:

- 1 أمثل الاقتران بيانياً، ثم أجد مجاله ومداه وخطوط التقارب.
- 2 أجد المقطعين من المحورين الإحداثيين.
- 3 هل الاقتران $f(x)$ متزايد أم متناقص؟
- 4 هل الاقتران $f(x)$ واحد لواحد؟

أتحقق من فهمي 

إذا كان: $f(x) = 3^x$ ، فأجيب عن الأسئلة الآتية:

- a) أمثل الاقتران بيانياً، ثم أحدد مجاله ومداه وخطوط التقارب.
- b) أجد المقطعين من المحورين الإحداثيين.
- c) هل الاقتران $f(x)$ متزايد أم متناقص؟
- d) هل الاقتران $f(x)$ واحد لواحد؟

مثال 3

إذا كان: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ، فأجيب عن الأسئلة الآتية:

- 1 أمثل الاقتران بيانياً، ثم أحدد مجاله ومداه وخطوط التقارب.
- 2 أجد المقطعين من المحورين الإحداثيين.
- 3 هل الاقتران $f(x)$ متزايد أم متناقص؟
- 4 هل الاقتران $f(x)$ واحد لواحد؟

أتحقق من فهمي 

إذا كان: $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ، فأجيب عن الأسئلة الآتية:

- (a) أمثل الاقتران بيانياً، ثم أحدد مجاله ومداه وخطوط التقارب.
 (b) أجد المقطعين من المحورين الإحداثيين.
 (c) هل الاقتران $f(x)$ متزايد أم متناقص؟
 (d) هل الاقتران $f(x)$ واحد لواحد؟

مثال 4

أجد خط التقارب الأفقي لكل اقتران مما يأتي، ثم أحدد مجاله ومداه، مُبيِّناً إذا كان مُتناقصاً أم مُتزايداً:

1 $f(x) = 5(3)^{x+1} - 2$ 2 $f(x) = 7(2)^{-x} + 3$ 3 $f(x) = -3(4)^x + 1$

أتحقق من فهمي 

أجد خط التقارب الأفقي لكل اقتران مما يأتي، ثم أحدد مجاله ومداه، مُبيِّناً إذا كان مُتناقصاً أم مُتزايداً:

a) $f(x) = 2(3)^{x+2} - 1$ b) $f(x) = 4(5)^{-x}$ c) $f(x) = -\frac{1}{4}(3)^{x-1} + 2$

مثال 5 : من الحياة



حشرات: يُمثل الاقتران: $f(x) = 30(2)^x$ عدد حشرات خنفساء الدقيق في كيسٍ دقيق، حيث x عدد الأسابيع منذ بداية رصد وجودها في الكيس:

- 1 أجد عدد هذه الحشرات في كيس الدقيق بعد 6 أسابيع. 2 بعد كم أسبوعاً يصبح عددها في الكيس 7680 حشرة؟

أتحقق من فهمي 

بكتيريا: يُمثل الاقتران: $f(x) = 500(2)^x$ عدد الخلايا البكتيرية في عيّنة مخبرية، حيث x الزمن بالساعات:

- (a) أجد عدد الخلايا البكتيرية في العيّنة بعد 5 ساعات.
 (b) بعد كم ساعة يصبح عدد الخلايا البكتيرية في العيّنة 4000 خلية؟

أتدرب وأحل المسائل 

أجد قيمة كل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

- 1 $f(x) = (11)^x, x = 3$ 2 $f(x) = -5(2)^x, x = 1$
 3 $f(x) = 3\left(\frac{1}{7}\right)^x, x = 2$ 4 $f(x) = -(5)^x + 4, x = 4$
 5 $f(x) = 3^x + 1, x = 5$ 6 $f(x) = \left(\frac{1}{9}\right)^x - 3, x = 2$

أمثل كل اقتران ممّا يأتي بيانيًا، ثم أجد مجاله ومداه:

7 $f(x) = 4^x$

8 $f(x) = 9^{-x}$

9 $f(x) = 7\left(\frac{1}{7}\right)^x$

10 $f(x) = 3(6)^x$

أجد خط التقارب الأفقي لكل اقتران ممّا يأتي، ثم أحدد مجاله ومداه، مُبيّنًا إذا كان مُتناقصًا أم مُتزايدًا:

11 $f(x) = 5^{x-1} + 2$

12 $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 5$

13 $f(x) = 3\left(\frac{1}{7}\right)^{x+5} - 6$

14 $f(x) = 3(7)^{x-2} + 1$

بكتيريا: يُمثّل الاقتران: $f(x) = 7000 (1.2)^x$ عدد الخلايا البكتيرية في تجربة مخبرية، حيث x الزمن بالساعات:

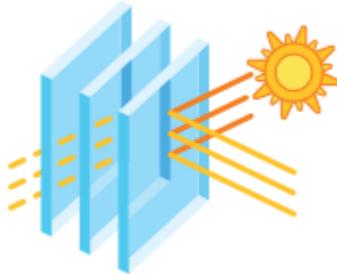
15 أجد عدد الخلايا البكتيرية في بداية التجربة.

16 أجد عدد الخلايا البكتيرية بعد 12 ساعة.

17 بعد كم ساعة يصبح عدد الخلايا البكتيرية 10080 خلية؟

ضوء: يُمثّل الاقتران: $f(x) = 100 (0.97)^x$ النسبة المئوية للضوء المارّ خلال x

من الألواح الزجاجية المتوازية:



18 أجد النسبة المئوية للضوء المارّ خلال لوح زجاجي واحد.

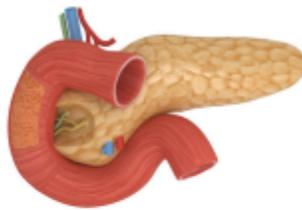
19 أجد النسبة المئوية للضوء المارّ خلال 3 ألواح زجاجية.

سرطان البنكرياس: يُمثّل الاقتران: $P(t) = 100(0.3)^t$

النسبة المئوية للمتعافين من مرضى سرطان البنكرياس،

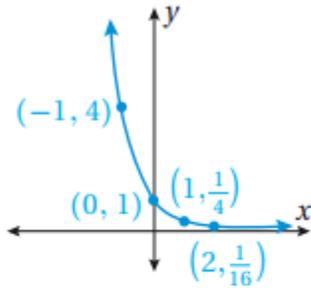
ممن هم في المرحلة المُتقدّمة، حيث تعافوا بعد t سنة من

التشخيص الأوّلي للمرض:



20 أجد النسبة المئوية للمتعافين بعد سنة من التشخيص الأوّلي للمرض.

21 بعد كم سنة تصبح النسبة المئوية للمتعافين 9%؟



مهارات التفكير العليا

22 تبرير: يُبيّن الشكل المجاور التمثيل البياني لمنحنى الاقتران:

$$f(x) = ab^x. \text{ أجد } f(3), \text{ مُبرَّرًا إيجابيًا.}$$

23 أكتشف المُختلف: أيّ الاقترانات الآتية مُختلف، مُبرَّرًا إيجابيًا؟

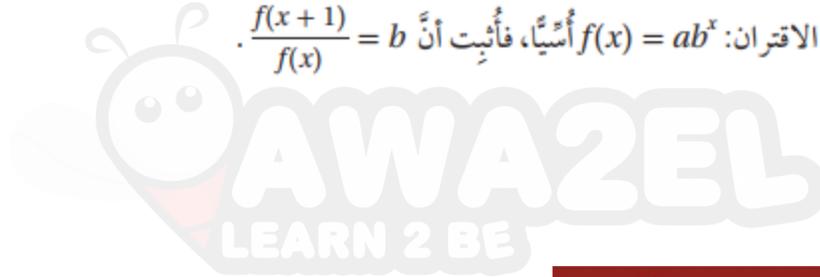
$$y = 3^x$$

$$f(x) = 2(4)^x$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

$$y = 5(3)^x$$

24 تحدّد: إذا كان الاقتران: $f(x) = ab^x$ فأثبت أنّ $\frac{f(x+1)}{f(x)} = b$.



تعلم الرياضيات كما يجب ان تكون
و تكلم الرياضيات بطلاقة
معي انا د. خالد جلال
0799948198

طلاب وطالبات التوجيهي



يعلم الدكتور
خالد جلال
مدرس الرياضيات
للتوجيهي العلمي والادبي
(المنهاج الجديد)
عن بدء حجز المجموعات
للعام الدراسي الجديد
٠٧٩٩٩٤٨١٩٨
المجموعة من ٣-٥ طلاب

النمو والاضمحلال الأسّي

Exponential Growth and Decay

الدرس 2

اقتران النمو الأسّي

مفهوم أساسي

بالكلمات: اقتران النمو الأسّي هو كل اقتران أسّي يتزايد بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية.

بالرموز:

$$A(t) = a(1+r)^t$$

الكمية الابتدائية a ، النسبة المئوية للنمو r ، عامل النمو t ، الفترة الزمنية للنمو t

LEARN 2 BE

مثال 1: من الحياة



خِراف: في دراسة شملت إحدى مزارع الأغنام، تبين أن عدد الخراف في المزرعة يزداد بنسبة 31% سنويًا.

1 أكتب اقتران النمو الأسّي الذي يُمثل عدد الخراف بعد t سنة، علمًا بأن عددها في المزرعة عند بدء الدراسة هو 1524 خروفًا.

2 أجد عدد الخراف بعد 5 سنوات من بدء الدراسة.

أتتحقق من فهمي

في دراسة شملت إحدى مزارع الأبقار، تبين أن عدد الأبقار في المزرعة يزداد بنسبة 18% سنويًا:

(a) أكتب اقتران النمو الأسّي الذي يُمثل عدد الأبقار بعد t سنة، علمًا بأن عددها في المزرعة عند بدء الدراسة هو 327 بقرة.

(b) أجد عدد الأبقار بعد 3 سنوات من بدء الدراسة.

اقتران الاضمحلال الأسّي

مفهوم أساسي

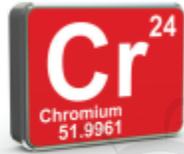
بالكلمات: اقتران الاضمحلال الأسّي هو اقتران أسّي يتناقص بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية.

بالرموز:

$$A(t) = a(1 - r)^t$$

الكمية الابتدائية a ، النسبة المئوية للاضمحلال r ، الفترة الزمنية للاضمحلال t ، عامل الاضمحلال $A(t)$

مثال 2 : من الحياة



كيمياء: تتناقص 5 g من عنصر الكروم بما نسبته 2.45% يومياً نتيجة تفاعله مع الهواء:

- 1 أكتب اقتران الاضمحلال الأسّي الذي يُمثل كمية الكروم (بالغرام) بعد t يوماً.
- 2 أجد كمية الكروم (بالغرام) بعد 3 أيام.

أتحقق من فهمي



سيارة: اشترت سوسن سيارة هجينة قابلة للشحن بمبلغ JD 28500. إذا كان ثمن السيارة يقلُّ بنسبة 5% سنوياً، فأجيب عن السؤالين الآتيين:

- (a) أكتب اقتران الاضمحلال الأسّي لثمن السيارة بعد t سنة. (b) أجد ثمن السيارة بعد 4 سنوات.

الربح المُركَّب

مفهوم أساسي

بالكلمات: يُمكن حساب جُملة المبلغ المستحق في حالة الربح المُركَّب باستعمال الصيغة الآتية:

بالرموز:

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{nt}$$

مُعدّل الفائدة السنوي الذي يُكتَب في صورة عشرية. r ، عدد مرّات إضافة الربح المُركَّب في السنة. n ، عدد السنوات. t ، جُملة المبلغ. A ، المبلغ الأصلي. P

مثال 3

استثمر سليمان مبلغ JD 9000 في شركة صناعية، بنسبة ربح مُركَّب تبلغ %1.46، وتضاف كل 3 أشهر. أجد جُملة المبلغ بعد 3 سنوات.

أتحقق من فهمي

استثمرت تهاني مبلغ JD 5000 في شركة، بنسبة ربح مُركَّب تبلغ %2.25، وتضاف كل 6 أشهر. أجد جُملة المبلغ بعد 5 سنوات.

الاقتران الأسي الطبيعي

الربح المُركَّب المستمر

مفهوم أساسي

بالكلمات: يُمكن حساب جُملة المبلغ المستحق في حالة الربح المُركَّب المستمر باستعمال الصيغة الآتية:

بالرموز:

$$A = P e^{rt}$$

جُملة المبلغ.

المبلغ الأصلي.

r : مُعدّل الفائدة المستمر الذي يُكتَب في صورة عشرية.
 t : عدد السنوات.

مثال 4



أودع علي مبلغ JD 4500 في حساب بنكي، بنسبة ربح مُركَّب مستمر مقدارها %4. أجد جُملة المبلغ بعد 10 سنوات.

أتحقق من فهمي

أودعت سارة مبلغ JD 6300 في حساب بنكي، بنسبة ربح مُركَّب مستمر مقدارها %3.2. أجد جُملة المبلغ بعد 9 سنوات.

أَتَدَرَّبُ وَأُحِلُّ الْمَسَائِلَ 



يبلغ عدد المشاركين في مؤتمر طبي 150 طبيباً هذه السنة، ويُتَوَقَّعُ زيادة هذا العدد بنسبة 8% كل سنة:

- 1 أكتب اقتران النمو الأسي الذي يُمثِّلُ عدد المشاركين بعد t سنة.
- 2 أجد عدد المشاركين المُتَوَقَّعُ بعد 5 سنوات.

استخدم 50 ألف شخص موقعاً إلكترونيّاً تعليمياً سنة 2019م، ثم ازداد عدد مستخدمي الموقع بنسبة 15% كل سنة:

- 3 أكتب اقتران النمو الأسي الذي يُمثِّلُ عدد مستخدمي الموقع بعد t سنة.
- 4 أجد عدد مستخدمي الموقع سنة 2025م.



سيّارة: يتناقص ثمن سيّارة سعرها JD 17350 بنسبة 3.5% سنويّاً:

- 5 أكتب اقتران الاضمحلال الأسي لثمن السيّارة بعد t سنة.
- 6 أجد ثمن السيّارة بعد 3 سنوات.

بكتيريا: يتناقص عدد الخلايا البكتيرية في عيّنة مخبرية بنسبة 27% كل ساعة بعد إضافة مضاد حيوي إلى العيّنة:

- 7 أكتب اقتران الاضمحلال الأسي الذي يُمثِّلُ عدد الخلايا البكتيرية بعد t ساعة، علماً بأنَّ عددها عند إضافة المضاد الحيوي هو 15275 خلية.
- 8 أجد عدد الخلايا البكتيرية في العيّنة بعد 7 ساعات.

- 9 دجاج: يَنفَقُ الدجاج في مزرعة للدواجن بنسبة 25% يومياً نتيجة إصابته بمرض ما. أجد العدد المُتَبَقِّي منه بعد 5 أيام من بَدء المرض، علماً بأنَّ عدده الأوّل في المزرعة هو 1550 دجاجة.

استثمر ربيع مبلغ JD 1200 في شركة، بنسبة ربح مُرَكَّب تبلغ 10%، وتضاف كل شهر:

- 10 أكتب صيغة تُمثِّلُ جُمْلَةُ المبلغ بعد t سنة.
- 11 أجد جُمْلَةُ المبلغ بعد 5 سنوات.

استثمرت هند مبلغ JD 6200 في شركة، بنسبة ربح مُركَّب تبلغ 8.4%، وتضاف كل يوم:

12 أكتب صيغة تُمثِّل جُمْلَة المبلغ بعد t سنة.

13 أجد جُمْلَة المبلغ بعد 6 سنوات.

14 أودع حسام مبلغ JD 9000 في حساب بنكي، بنسبة ربح مُركَّب مستمر مقدارها 3.6%. أجد جُمْلَة المبلغ بعد 7 سنوات.

15 أودعت ليلي مبلغ JD 8200 في حساب بنكي، بنسبة ربح مُركَّب مستمر مقدارها 4.9%. أجد جُمْلَة المبلغ بعد 9 سنوات.



16 ذباب الفاكهة: أعدَّ باحث دراسة عن تكاثر ذباب الفاكهة، وتوصَّل إلى أنَّه يُمكن تمثيل العدد التقريبي للذباب بالافتران: $P(t) = 20e^{0.03t}$ ، حيث P عدد الذباب بعد t ساعة. أجد عدد ذباب الفاكهة بعد 72 ساعة من بدء الدراسة، مُقرَّبًا إجابتي إلى أقرب عدد صحيح.

مهارات التفكير العليا

17 أكتشف الخطأ: أوجد رامي جُمْلَة مبلغ مقداره JD 250 بعد إيداعه في حساب بنكي بعد 3 سنوات، بنسبة ربح مُركَّب تبلغ 1.25%، وتضاف كل 3 أشهر، كما يأتي:

$$A = 250 \left(1 + \frac{1.25}{4}\right)^{4(3)}$$

$$= 6533.29$$



أكتشف الخطأ في حلِّ رامي، ثم أصحَّحه.

18 تحدُّ: أكتب اقتراحًا يُمثِّل عدد المصابين بالإنفلونزا الموسمية بعد t أسبوعًا، علمًا بأنَّ العدد يتضاعف بمقدار 3 مرَّات كل أسبوع.

الاقتوانات اللوغاريتمية Logarithmic Functions

الدرس

3

مثال 1

أكتب كل معادلة لوغاريتمية ممّا يأتي في صورة أُسية:

1 $\log_2 8 = 3$

2 $\log_{23} 23 = 1$

3 $\log_{10} \left(\frac{1}{100} \right) = -2$

4 $\log_7 1 = 0$

أتحقق من فهمي  أكتب كل معادلة لوغاريتمية ممّا يأتي في صورة أُسية:

a) $\log_2 16 = 4$

b) $\log_7 7 = 1$

c) $\log_3 \left(\frac{1}{243} \right) = -5$

d) $\log_9 1 = 0$

مثال 2

أكتب كل معادلة أُسية ممّا يأتي في صورة لوغاريتمية:

1 $8^3 = 512$

2 $25^{\frac{1}{2}} = 5$

3 $(5)^{-3} = \frac{1}{125}$

4 $27^0 = 1$

أتحقق من فهمي 

أكتب كل معادلة أُسية ممّا يأتي في صورة لوغاريتمية:

a) $7^3 = 343$

b) $49^{\frac{1}{2}} = 7$

c) $(2)^{-5} = \frac{1}{32}$

d) $17^0 = 1$

مثال 3

أجد قيمة كل ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

1 $\log_2 64$

2 $\log_{13} \sqrt{13}$

3 $\log_{36} 6$

4 $\log_{10} 0.1$

أتحقق من فهمي 

أجد قيمة كلِّ ممَّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

- a) $\log_5 25$ b) $\log_8 \sqrt{8}$ c) $\log_{81} 9$ d) $\log_3 \frac{1}{27}$

مثال 4

أجد قيمة كلِّ ممَّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

- 1 $\log_3 1$ 2 $\log_{17} \sqrt{17}$
3 $\log_5 5$ 4 $7^{\log_7 5}$

أتحقق من فهمي 

أجد قيمة كلِّ ممَّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

- a) $\log_2 1$ b) $\log_{32} \sqrt{32}$ c) $\log_9 9$ d) $8^{\log_8 13}$

مثال 5

أمثل كل اقتران ممَّا يأتي بيانياً، ثمَّ أحدد مجاله ومداه ومقطعيه من المحورين الإحداثيين وخطوط تقاربه، مُبيِّناً إذا كان مُتناقِصاً أم مُتزايداً:

- 1 $f(x) = \log_2 x$ 2 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

أتحقق من فهمي 

أمثل كل اقتران ممَّا يأتي بيانياً، ثمَّ أحدد مجاله ومداه ومقطعيه من المحورين الإحداثيين وخطوط تقاربه، مُبيِّناً إذا كان مُتناقِصاً أم مُتزايداً:

- a) $f(x) = \log_3 x$ b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

مثال 6

أجد مجال كل اقتران لوغاريتمي ممَّا يأتي:

- 1 $f(x) = \log_4 (x + 3)$ 2 $f(x) = \log_5 (8 - 2x)$

أتحقق من فهمي 

أجد مجال كل اقتران لوغاريتمي ممَّا يأتي:

- a) $f(x) = \log_7 (5 - x)$ b) $f(x) = \log_5 (9 + 3x)$

أدرب وأحل المسائل 

أكتب كل معادلة لوغاريتمية ممَّا يأتي في صورة أُسية:

1 $\log_7 343 = 3$

2 $\log_4 256 = 4$

3 $\log_{125} 5 = \frac{1}{3}$

4 $\log_{36} 6 = 0.5$

5 $\log_9 1 = 0$

6 $\log_{57} 57 = 1$

أكتب كل معادلة أُسية ممَّا يأتي في صورة لوغاريتمية:

7 $2^6 = 64$

8 $4^{-3} = \frac{1}{64}$

9 $6^3 = 216$

10 $5^{-3} = 0.008$

11 $(51)^1 = 51$

12 $9^0 = 1$

أجد قيمة كل ممَّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

13 $\log_3 81$

14 $\log_{25} 5$

15 $\log_2 32$

16 $\log_{49} 343$

17 $\log_{10} 0.001$

18 $\log_{\frac{3}{2}} 1$

19 $\log_{\frac{1}{4}} 4$

20 $(10)^{\log_{10} \frac{1}{8}}$

21 $\log_2 \frac{1}{\sqrt{(2)^7}}$

22 $\log_a \sqrt[5]{a}$

23 $\log_{10} (1 \times 10^{-9})$

24 $8^{\log_8 5}$

أمثل كل اقتران ممَّا يأتي بياناً، ثمَّ أحدد مجاله ومداه ومقطعيه من المحورين الإحداثيين وخطوط تقاربه، مُبيِّناً إذا كان مُتناقضاً أم مُترايلاً:

25 $f(x) = \log_5 x$

26 $g(x) = \log_4 x$

27 $h(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$

28 $r(x) = \log_{\frac{1}{8}} x$

29 $f(x) = \log_{10} x$

30 $g(x) = \log_6 x$

أجد مجال كل اقتران لوغاريتمي ممَّا يأتي:

31 $f(x) = \log_3 (x - 2)$

32 $f(x) = 5 - 2 \log_7 (x + 1)$

33 $f(x) = -3 \log_4 (-x)$

34 أجد قيمة a التي تجعل منحنى الاقتران: $f(x) = \log_a x$ يمرُّ بالنقطة $(5, 32)$.

35 أجد قيمة c التي تجعل منحنى الاقتران: $f(x) = \log_c x$ يمرُّ بالنقطة $(\frac{1}{4}, -4)$.



إعلانات: يُمثَّل الاقتران: $P(a) = 10 + 20 \log_5 (a + 1)$ مبيعات شركة (بآلاف الدنانير) من مُنتَج جديد، حيث a المبلغ (بمئات الدنانير) الذي تُنفقه الشركة على إعلانات المُنتَج. وتعني القيمة: $P(1) \approx 19$ أنَّ إنفاق JD 100 على الإعلانات يُحقِّق إيرادات قيمتها JD 19000 من بيع المُنتَج:

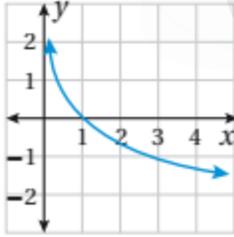
36 أجد $P(4)$ ، و $P(24)$ ، و $P(124)$. 37 أفسِّر معنى القِيم التي أوجدتها في الفرع السابق.

مهارات التفكير العليا

تبرير: أكتب بجانب كل اقتران ممَّا يأتي رمز تمثيله البياني المناسب، مُبرِّزًا إجابتي:

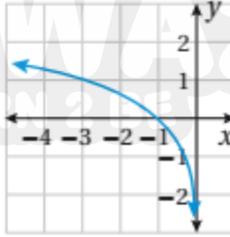
38 $f(x) = \log_3 (x)$

a)



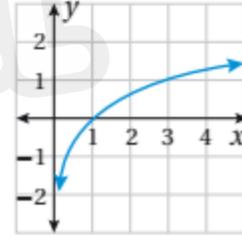
39 $f(x) = \log_3 (-x)$

b)



40 $g(x) = -\log_3 x$

c)



تحذُّر: أجد مجال كل اقتران لوغاريتمي ممَّا يأتي، مُحدِّدًا خط (خطوط) تقاربه الرأسي:

41 $f(x) = \log_3 (x^2)$

42 $f(x) = \log_3 (x^2 - x - 2)$

43 $f(x) = \log_3 \left(\frac{x+1}{x-5} \right)$

44 أكتشف الخطأ: كتبت منى المعادلة الأُسِّية: $4^{-3} = \frac{1}{64}$ في صورة لوغاريتمية كما يأتي:

$$\log_4 (-3) = \frac{1}{64} \quad \text{X}$$

أكتشف الخطأ الذي وقعت فيه منى، ثم أصحِّحه.

قوانين اللوغاريتمات

Laws of Logarithms

الدرس

4

مثال 1

إذا كان: $\log_a 5 \approx 2.32$ وكان: $\log_a 3 \approx 1.59$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

1 $\log_a 15$

2 $\log_a \frac{3}{5}$

3 $\log_a 125$

4 $\log_a \frac{1}{9}$

✍️ اتحقق من فهمي

إذا كان: $\log_b 7 \approx 1.21$ وكان: $\log_b 2 \approx 0.43$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

a) $\log_b 14$

b) $\log_b \frac{2}{7}$

c) $\log_b 32$

d) $\log_b \frac{1}{49}$

مثال 2

أكتب كل مقدار لوغاريتمي مما يأتي بالصورة المطوّلة، علماً بأنّ المتغيّرات جميعها تُمثّل أعداداً حقيقية موجبة:

1 $\log_5 x^7 y^2$

2 $\log_7 \frac{(5x+3)^2}{4}$

3 $\log_4 \frac{xy^3}{z^2}$

4 $\log_a \sqrt{\frac{x^2 y^3}{a^5}}$

✍️ اتحقق من فهمي

أكتب كل مقدار لوغاريتمي مما يأتي بالصورة المطوّلة، علماً بأنّ المتغيّرات جميعها تُمثّل أعداداً حقيقية موجبة:

a) $\log_2 a^2 b^9$

b) $\log_5 \frac{(x+1)^3}{8}$

c) $\log_3 \frac{x^7 y^3}{z^5}$

d) $\log_b \sqrt[3]{\frac{x^7 b^2}{y^5}}$

مثال 3

أكتب كل مقدار لوغاريتمي مما يأتي بالصورة المختصرة، علماً بأنّ المتغيّرات جميعها تُمثّل أعداداً حقيقية موجبة:

1 $3 \log_2 x + 4 \log_2 y$

2 $5 \log_a x + \frac{1}{3} \log_a y - 7 \log_a z$

✍️ اتحقق من فهمي

أكتب كل مقدار لوغاريتمي مما يأتي بالصورة المختصرة، علماً بأنّ المتغيّرات جميعها تُمثّل أعداداً حقيقية موجبة:

a) $\log_5 a + 3 \log_5 b$

b) $5 \log_b x + \frac{1}{2} \log_b y - 9 \log_b z$

مثال 4 : من الحياة 



نسيان: في تجربة لتحديد مدى تأثير المُدَّة الزمنية في درجة تذكُّر الطلبة للمعلومات، تقدَّمت مجموعة من الطلبة لاختبار في مادة مُعيَّنة، ثم لاختبارات مُكافئة لهذا الاختبار على مدار مُدَّة شهرية بعد ذلك، فوجد فريق البحث أنَّ النسبة المئوية

للموضوعات التي يتذكَّرها أحد الطلبة بعد t شهرًا من إنهائه دراسة المادة تعطى بالاقتران:

$$.M(t) = 85 - 25 \log_{10} (t + 1)$$

أجد النسبة المئوية للمادة التي يتذكَّرها هذا الطالب بعد 19 شهرًا من إنهائه دراستها، علمًا بأنَّ $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ، مُقرَّبًا إجابتي إلى أقرب عدد صحيح.

أتحقق من فهمي 

يُمثِّل الاقتران: $M(t) = 92 - 28 \log_{10} (t + 1)$ النسبة المئوية للموضوعات التي يتذكَّرها طالب من مادة مُعيَّنة بعد t شهرًا من إنهائه دراستها. أجد النسبة المئوية للموضوعات التي يتذكَّرها هذا الطالب بعد 29 شهرًا من إنهائه دراسة المادة، علمًا بأنَّ $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ، مُقرَّبًا إجابتي إلى أقرب عدد صحيح.

أدرب وأحل المسائل 

إذا كان: $\log_a 6 \approx 0.778$ ، وكان: $\log_a 5 \approx 0.699$ ، فأجد كلاً ممَّا يأتي:

1 $\log_a \frac{5}{6}$

2 $\log_a 30$

3 $\frac{\log_a 5}{\log_a 6}$

4 $\log_a \frac{1}{6}$

5 $\log_a 900$

6 $\log_a \frac{18}{15}$

7 $\log_a (6 a^2)$

8 $\log_a \sqrt[4]{25}$

9 $(\log_a 5)(\log_a 6)$

أكتب كل مقدار لوغاريتمي ممَّا يأتي بالصورة المُطوَّلة، علمًا بأنَّ المُتغيَّرات جميعها تُمثِّل أعدادًا حقيقية موجبة:

10 $\log_a x^2$

11 $\log_a \left(\frac{a}{bc} \right)$

12 $\log_a (\sqrt{x} \sqrt{y})$

13 $\log_a \left(\frac{\sqrt{z}}{y} \right)$

14 $\log_a \frac{1}{x^2 y^2}$

15 $\log_a \sqrt[5]{32x^5}$

16 $\log_a \frac{(x^2 y^3)^2}{(x^2 y^3)^3}$

17 $\log_a (x + y - z)^7, x + y > z$

18 $\log_a \sqrt{\frac{x^{12} y}{y^3 z^4}}$

أكتب كل مقدار لوغاريتمي مما يأتي بالصورة المُختصرة، علماً بأنَّ المُتغيّرات جميعها تُمثّل أعداداً حقيقية موجبة:

19 $\log_a x + \log_a y$

20 $\log_b (x+y) - \log_b (x-y), x > y$

21 $\log_a \frac{1}{\sqrt{x}} - \log_a \sqrt{x}$

22 $\log_a (x^2 - 4) - \log_a (x+2), x > 2$

23 $2 \log_b x - 3 \log_b y + \frac{1}{3} \log_b z$

24 $\log_b 1 + 2 \log_b b$



25 نمو: يُمثّل الاقتران: $f(x) = 29 + 48.8 \log_6 (x + 2)$ النسبة المئوية لطول

الطفل الذكر الآن من طوله عند البلوغ، حيث x عمره بالسنوات. أجد النسبة المئوية

لطول طفل عمره 10 سنوات من طوله عند البلوغ، علماً بأنَّ $\log_6 2 \approx 0.3869$.

LEARN 2 BE

مهارات التفكير العليا

26 تحدّ: أثبت أن $\frac{\log_a 216}{\log_a 36} = \frac{3}{2}$

27 أكتشف الخطأ: أكتشف الخطأ في الحُلّ الآتي، ثم أصحّحه:

$$\log_2 5x = (\log_2 5)(\log_2 x)$$



28 تبرير: أثبت أن $\log_b (b-3) + \log_b (b^2 + 3b) - \log_b (b^2 - 9) = 1$ حيث: $b > 3$ ، مُبرِّراً إجابتي.

المعادلات الأسية

Exponential Equations

الدرس

5

مثال 1

أستعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كلِّ ممَّا يأتي، مُقَرَّبًا إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة:

- 1 $\log 2.7$ 2 $\log (1.3 \times 10^5)$ 3 $\ln 17$

أتحقق من فهمي 

أستعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كلِّ ممَّا يأتي، مُقَرَّبًا إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة:

- a) $\log 13$ b) $\log (3.1 \times 10^4)$ c) $\ln 0.25$

مثال 2

أجد قيمة كلِّ ممَّا يأتي، مُقَرَّبًا إجابتي إلى أقرب جزء من مئة (إنَّ لزم):

- 1 $\log_3 16$ 2 $\log_{\frac{1}{2}} 10$

أتحقق من فهمي 

أجد قيمة كلِّ ممَّا يأتي، مُقَرَّبًا إجابتي إلى أقرب جزء من مئة (إنَّ لزم):

- a) $\log_3 51$ b) $\log_{\frac{1}{2}} 13$

مثال 3

أحلُّ المعادلات الأسية الآتية، مُقَرَّبًا إجابتي إلى أقرب منزلتين عشريتين:

- 1 $2^x = 13$ 2 $5 e^{3x} = 125$ 3 $2^{x+4} = 5^{3x}$ 4 $9^x + 3^x - 30 = 0$

أتحقق من فهمي 

أحل المعادلات الأسية الآتية، مُقَرَّبًا إجابتي إلى أقرب 4 منازل عشرية:

a) $7^x = 9$

b) $2e^{5x} = 64$

c) $7^{2x+1} = 2^{x-4}$

d) $4^x + 2^x - 12 = 0$

مثال 4 : من الحياة 



نمو سكاني: قُدِّر عدد سكان العالم بنحو 6.5 مليار نسمة عام 2006م. ويُمثَّل الاقتران: $P(t) = 6.5(1.014)^t$ عدد سكان العالم (بالمليار نسمة) بعد t عامًا منذ عام 2006م. بعد كم سنة من عام 2006م سيبلغ عدد سكان العالم 13 مليار نسمة؟

أتحقق من فهمي 

اعتمادًا على المعطيات الواردة في المثال السابق، بعد كم سنة من عام 2006م سيبلغ عدد سكان العالم 9 مليارات نسمة؟

أدرب وأحل المسائل 

أستعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي، مُقَرَّبًا إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة:

1 $\log 19$

2 $\log(2.5 \times 10^{-3})$

3 $\ln 3.1$

4 $\log_2 10$

5 $\log_3 e^2$

6 $\ln 5$

أجد قيمة كل مما يأتي، مُقَرَّبًا إجابتي إلى أقرب جزء من مئة (إن لزم):

7 $\log_3 33$

8 $\log_{\frac{1}{3}} 17$

9 $\log_6 5$

10 $\log_7 \frac{1}{7}$

11 $\log 1000$

12 $\log_3 15$

أحل المعادلات الأسية الآتية، مُقَرَّبًا إجابتي إلى أقرب 4 منازل عشرية:

13 $6^x = 121$

14 $-3e^{4x} = -27$

15 $5^{7x-2} = 3^{2x}$

16 $25^x + 5^x - 42 = 0$

17 $2(9)^x = 32$

18 $27^{2x+3} = 2^{x-5}$

طريق التفوق في الرياضيات : د. خالد جلال & ا. اياد الحمد 0799948198 & 0795604563

أودعت سميرة مبلغ P في حساب بنكي، بنسبة ربح مُركَّب مستمر مقدارها % 5:

19 بعد كم سنة تصبح جُملة المبلغ مثلي المبلغ الأصلي؟

20 بعد كم سنة تصبح جُملة المبلغ 3 أمثال المبلغ الأصلي؟

إرشاد: صيغة جُملة المبلغ للربح المُركَّب المستمر هي: $A = Pe^{rt}$.



21 كوالا: تناقصت أعداد حيوان الكوالا في إحدى الغابات وفق الاقتران: $N = 873e^{-0.078t}$ ،

حيث N العدد المُتبقّي من هذا الحيوان في الغابة بعد t سنة. بعد كم سنة يصبح في الغابة

97 حيوانًا من الكوالا؟

مهارات التفكير العليا

22 تبرير: أجد قيمة كل من k و h إذا وقعت النقطة $(-2, k)$ ، والنقطة $(h, 100)$ على منحنى الاقتران:

$$f(x) = e^{0.5x+3}, \text{ مُبرَّرًا إيجابتي.}$$

23 تحدّد: أحلّ المعادلة: $3^x + \frac{4}{3^x} = 5$.

تعلم الرياضيات كما يجب ان تكون

و تكلم الرياضيات بطلاقة

معي انا د. خالد جلال

0799948198



طلاب وطالبات التوجيهي

يعلم الدكتور

خالد جلال

مدرس الرياضيات

للتوجيهي العلمي والادبي

(المنهاج الجديد)

عن بدء حجز المجموعات
للعام الدراسي الجديد

٠٧٩٩٩٤٨١٩٨

المجموعة من ٣ - ٥ طلاب

طريق التفوق في الرياضيات : د. خالد جلال & ا. اياد الحمد 0799948198 & 0795604563

اجابات كتاب الطالب
وحدة الاقتترانات الاسية واللوغاريتمية

LEARN 2 BE

اعداد



المركز الوطني لتطوير المناهج

National Center for Curriculum Development



الدرس الأول: الاقترانات الأسية



مسألة اليوم يُمثل الاقتران: $P(t) = 325(0.25)^t$ تركيز دواء في دم مريض بعد t ساعة من تناوله. أجد تركيز الدواء بعد 5 ساعات من تناوله.

مسألة اليوم صفحة 8

$$P(t) = 325(0.25)^t$$

$$P(5) = 325(0.25)^5 \approx 0.32$$

اتحقق من فهمي صفحة 9

a

$$f(4) = 3^4$$

$$= 81$$

b

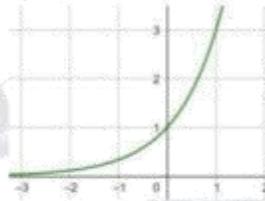
$$f(-1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$$

$$= 3$$

أتحقق من فهمي صفحة 10

a

$$f(x) = 3^x$$



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$

لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو المحور x

لا يوجد لهذا الاقتران مقطع مع المحور x

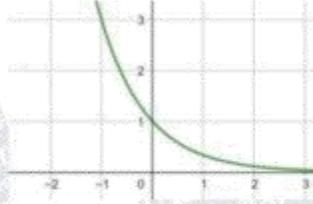
عندما $x = 0$ فإن $y = 1$ ، ومنه فإن المقطع y لهذا الاقتران هو 1

الاقتران $f(x)$ متزايد

الاقتران $f(x)$ هو اقتران واحد لواحد

أتحقق من فهمي صفحة 12

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$



a

مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$

لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو المحور x

b

لا يوجد لهذا الاقتران مقطع مع المحور x

عندما $x = 0$ فإن $y = 1$ ، ومنه فإن المقطع y لهذا الاقتران هو 1

c

الاقتران $f(x)$ متناقص

d

الاقتران $f(x)$ هو اقتران واحد لواحد

أتحقق من فهمي صفحة 15

$$f(x) = 2(3)^{x+2} - 1$$

a

لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = -1$

مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

مدى هذا الاقتران هو $(-1, \infty)$

الاقتران $f(x)$ متزايد

b

$$f(x) = 4(5)^{-x} = 4\left(\frac{1}{5}\right)^x$$

لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = 0$

مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$

الاقتران $f(x)$ متناقص

c

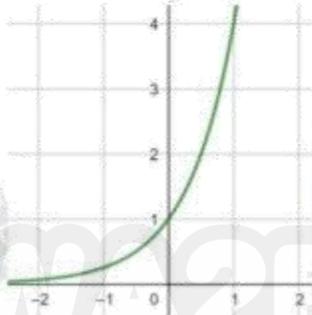
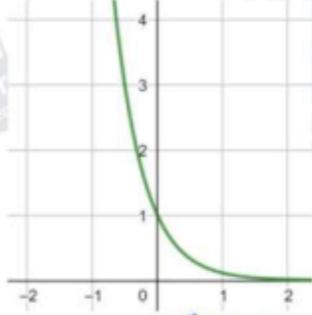
$$f(x) = -\frac{1}{4}(3)^{x-1} + 2$$

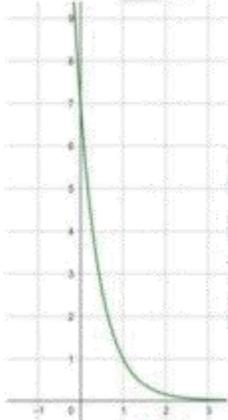
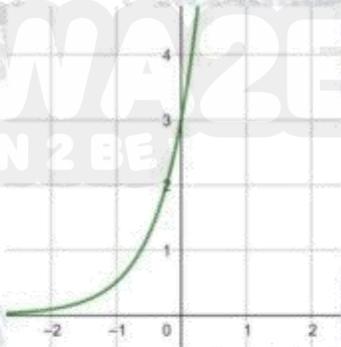
لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = 2$

مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

مدى هذا الاقتران هو $(-\infty, 2)$ الاقتران $f(x)$ متناقص

أتحقق من فهمي صفحة 16	
a	$f(5) = 500(2)^5$ $= 500(32)$ $= 16000$ <p>عدد الخلايا البكتيرية في العينة بعد 5 ساعات هو 16000 خلية</p>
b	$4000 = 500(2)^x$ $8 = (2)^x$ $(2)^3 = (2)^x$ $x = 3$ <p>بعد 3 ساعات يصبح عدد الخلايا البكتيرية في العينة 4000 خلية</p>
أتدرب وأحل المسائل صفحة 16	
1	$f(3) = (11)^3$ $= 1331$
2	$f(1) = -5(2)^1$ $= -5(2)$ $= -10$
3	$f(2) = 3\left(\frac{1}{7}\right)^2$ $= 3\left(\frac{1}{49}\right)$ $= \frac{3}{49}$
4	$f(4) = -(5)^4 + 4$ $= -(625) + 4$ $= -621$
5	$f(5) = (3)^5 + 1$ $= 243 + 1$ $= 244$

6	$f(2) = \left(\frac{1}{9}\right)^2 - 3$ $= \frac{1}{81} - 3$ $= \frac{1}{81} - \frac{243}{81}$ $= -\frac{242}{81}$
7	$f(x) = 4^x$  <p>مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$</p>
8	$f(x) = 9^{-x} = \left(\frac{1}{9}\right)^x$  <p>مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$</p>

9	$f(x) = 7\left(\frac{1}{7}\right)^x$  <p>مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$</p>
10	$f(x) = 3(6)^x$  <p>مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$</p>
11	$f(x) = 5^{x-1} + 2$ <p>لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = 2$ مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R مدى هذا الاقتران هو $(2, \infty)$ الاقتران $f(x)$ متزايد</p>
12	$f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 5$ <p>لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = -5$ مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R مدى هذا الاقتران هو $(-5, \infty)$</p>

13	$f(x) = 3\left(\frac{1}{7}\right)^{x+5} - 6$	<p>لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = -6$ مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R مدى هذا الاقتران هو $(-6, \infty)$ الاقتران $f(x)$ متناقص</p>
14	$f(x) = 3(7)^{x-2} + 1$	<p>لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = 1$ مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R مدى هذا الاقتران هو $(1, \infty)$ الاقتران $f(x)$ متزايد</p>
15	$\begin{aligned} f(0) &= 7000(1.2)^0 \\ &= 7000(1) \\ &= 7000 \end{aligned}$	<p>عدد الخلايا البكتيرية في بداية التجربة هو 7000 خلية</p>
16	$\begin{aligned} f(12) &= 7000(1.2)^{12} \\ &\approx 62413 \end{aligned}$	<p>عدد الخلايا البكتيرية بعد 12 ساعة هو 62413 خلية تقريبا</p>
17	$\begin{aligned} 10080 &= 7000(1.2)^x \\ 1.44 &= (1.2)^x \\ (1.2)^2 &= (1.2)^x \\ x &= 2 \end{aligned}$	<p>بعد ساعتين من بدء التجربة يصبح عدد الخلايا البكتيرية 10080 خلية</p>
18	$\begin{aligned} f(1) &= 100(0.97)^1 \\ &= 100(0.97) \\ &= 97 \end{aligned}$	<p>نسبة الضوء المرّ خلال لوح زجاجي واحد هي 97%</p>
19	$\begin{aligned} f(3) &= 100(0.97)^3 \\ &\approx 91 \end{aligned}$	<p>نسبة الضوء المرّ خلال 3 ألواح زجاجية هي 91%</p>
20	$\begin{aligned} P(1) &= 100(0.3)^1 \\ &= 100(0.3) \\ &= 30 \end{aligned}$	<p>نسبة المتعافين بعد سنة من التشخيص الأولي للمرض هي 30%</p>

21	$9 = 100(0.3)^t$ $0.09 = (0.3)^t$ $(0.3)^2 = (0.3)^t$ $t = 2$ <p>بعد سنتين تصبح نسبة المتعافين 9%</p>
22	$f(x) = ab^x$ <p>من التمثيل البياني نلاحظ أن المقطع y هو 1 ، إذن عندما $x = 0$ فإن $y = 1$ نعوض $x = 0$ و $y = 1$ في قاعدة الاقتران، فنحصل على:</p> $1 = ab^0$ $1 = a \times 1$ $a = 1$ <p>نلاحظ أيضًا أن النقطة $(1, \frac{1}{4})$ تقع على منحنى الاقتران، نعوض $x = 1$ و $y = \frac{1}{4}$ في قاعدة الاقتران، فنحصل على:</p> $\frac{1}{4} = ab^1$ $\frac{1}{4} = (1)b^1$ $b = \frac{1}{4}$ <p>ومنه فإن قاعدة هذا الاقتران هي: $f(x) = (\frac{1}{4})^x$</p> $f(3) = (\frac{1}{4})^3 = \frac{1}{64}$
23	<p>الاقتران المختلف هو $f(x) = (\frac{1}{3})^x$ لأنه الاقتران الوحيد المتناقص والاقترانات الأخرى متزايدة.</p>
24	$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{ab^{x+1}}{ab^x}$ $= \frac{b^{x+1}}{b^x}$ $= b$

الدرس الثاني: النمو والاضمحلال الأسي



مسألة اليوم بلغ عدد سكان المملكة الأردنية الهاشمية نحو 10.8 ملايين نسمة عام 2020م. إذا كانت نسبة النمو السكاني قرابة 2.6% سنويًا، فأجد العدد التقريبي للسكان عام 2030م.

مسألة اليوم صفحة 18

$$A(t) = a(1 + r)^t = 10.8(1 + 0.026)^t$$

$$t = 2030 - 2020 = 10$$

$$A(10) = 10.8(1 + 0.026)^{10} \approx 13.960$$

العدد التقريبي للسكان عام 2030م هو 13960000 نسمة

أتحقق من فهمي صفحة 19

a

$$A(t) = 327(1 + 0.18)^t$$

$$A(t) = 327(1.18)^t$$

b

$$A(3) = 327(1.18)^3$$

$$\approx 537$$

عدد الأبقار بعد 3 سنوات من بدء الدراسة هو 537 بقرة تقريبًا.

أتحقق من فهمي صفحة 21

a

$$A(t) = a(1 - r)^t$$

$$A(t) = 28500(1 - 0.05)^t$$

$$A(t) = 28500(0.95)^t$$

b

$$A(4) = 28500(0.95)^4$$

$$\approx 23213$$

ثمن السيارة بعد 4 سنوات هو 23213 دينارًا تقريبًا

أتحقق من فهمي صفحة 22

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$= 5000 \left(1 + \frac{0.0225}{2}\right)^{2 \times 5}$$

$$\approx 5591.85$$

جملة المبلغ بعد 3 سنوات: JD 5591.85 تقريباً.

أتحقق من فهمي صفحة 23

$$A = Pe^{rt}$$

$$= 6300e^{0.032 \times 9}$$

$$\approx 8402.67$$

جملة المبلغ بعد 9 سنوات: JD 8402.67 تقريباً.

أتدرب وأحل المسائل صفحة 24

1

$$A(t) = a(1 + r)^t$$

$$A(t) = 150(1 + 0.08)^t$$

$$A(t) = 150(1.08)^t$$

2

$$A(5) = 150(1.08)^5$$

$$\approx 220$$

عدد المشاركين بعد 5 سنوات 220 تقريباً.

3

$$A(t) = a(1 + r)^t$$

$$A(t) = 50000(1 + 0.15)^t$$

$$A(t) = 50000(1.15)^t$$

4

$$t = 2025 - 2019 = 6$$

$$A(6) = 50000(1.15)^6$$

$$\approx 115653$$

عدد مستخدمي الموقع سنة 2025م: 115653 تقريباً.

5

$$A(t) = a(1 - r)^t$$

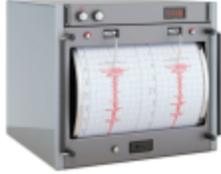
$$A(t) = 17350(1 - 0.035)^t$$

$$A(t) = 17350(0.965)^t$$

6	$A(3) = 17350(0.965)^3$ ≈ 15591.27	ثمن السيارة بعد 3 سنوات: JD15591.27 تقريباً.
7	$A(t) = a(1 - r)^t$ $A(t) = 15275(1 - 0.27)^t$ $A(t) = 15275(0.73)^t$	
8	$A(7) = 15275(0.73)^7$ ≈ 1687	عدد الخلايا البكتيرية في العينة بعد 7 ساعات: 1687 خلية تقريباً.
9	$A(t) = a(1 - r)^t$ $A(5) = 1550(1 - 0.25)^5$ $= 1550(0.75)^5$ ≈ 368	العدد المتبقي من الدجاج بعد 5 أيام من المرض: 368 دجاجة تقريباً.
10	$A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ $= 1200 \left(1 + \frac{0.10}{12}\right)^{12t}$	
11	$A = 1200 \left(1 + \frac{0.10}{12}\right)^{12 \times 5}$ ≈ 1974.37	جملة المبلغ بعد 5 سنوات: JD 1974.37 تقريباً.
12	$A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ $= 6200 \left(1 + \frac{0.084}{365}\right)^{365t}$	
13	$A = 6200 \left(1 + \frac{0.084}{365}\right)^{365 \times 6}$ ≈ 10262.45	جملة المبلغ بعد 6 سنوات: JD 10262.45 تقريباً.

14	$A = Pe^{rt}$ $= 9000e^{0.036 \times 7}$ ≈ 11579.36 <p>جملة المبلغ بعد 7 سنوات: JD 11579.36 تقريبا.</p>
15	$A = Pe^{rt}$ $= 8200e^{0.049 \times 9}$ ≈ 12744.94 <p>جملة المبلغ بعد 9 سنوات: JD 12744.94 تقريبا.</p>
16	$P(t) = 20e^{0.03t}$ $P(72) = 20e^{0.03 \times 72}$ ≈ 173 <p>عدد ذباب الفاكهة بعد 72 ساعة من بدء الدراسة: 173 ذبابة تقريبا.</p>
17	<p>الخطأ الذي ارتكبه رامي هو أنه كتب معدل الفائدة السنوي 1.25 وكان ينبغي كتابته: 0.0125</p> $A = 250 \left(1 + \frac{0.0125}{4} \right)^{4(3)} \approx 259.54$
18	<p>النسبة المئوية للزيادة 200%، فيكون عامل النمو $1 + \frac{200}{100} = 3$</p> <p>إذا كان عدد الإصابات في البداية يساوي N، فإن عددها بعد t أسبوعاً هو</p> $A(t) = N(1 + r)^t = N3^t$

الدرس الثالث: الاقترانات اللوغاريتمية



مسألة اليوم يُستعمل الاقتران: $R = \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right)$ لحساب قوة زلزال وفق مقياس ريختر، حيث I شدة الزلزال المراد قياسه، و I_0 أقل شدة للزلزال الذي يمكن للإنسان الإحساس به. ماذا يُمثّل الرمز \log في هذا الاقتران؟

مسألة اليوم صفحة 26

الرمز \log هو اختصار لكلمة logarithm (لوغاريتم) وهو معكوس الاقتران الأسّي. فإذا كان $b^x = a$ فنقول أن لوغاريتم a للأساس b هو x ، وبالرموز نكتب $\log_b a = x$.

أتحقق من فهمي مثال 1 صفحة 27

a $\log_2 16 = 4 \rightarrow 2^4 = 16$

b $\log_7 7 = 1 \rightarrow 7^1 = 7$

c $\log_3 \left(\frac{1}{243} \right) = -5 \rightarrow 3^{-5} = \frac{1}{243}$

d $\log_9 1 = 0 \rightarrow 9^0 = 1$

أتحقق من فهمي مثال 2 صفحة 27

a $7^3 = 343 \rightarrow \log_7 343 = 3$

b $49^{\frac{1}{2}} = 7 \rightarrow \log_{49} 7 = \frac{1}{2}$

c $(2)^{-5} = \frac{1}{32} \rightarrow \log_2 \frac{1}{32} = -5$

d $17^0 = 1 \rightarrow \log_{17} 1 = 0$

أتحقق من فهمي صفحة 28

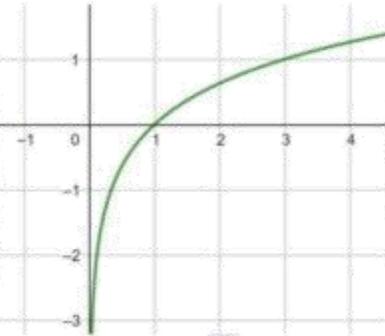
a $\log_5 25 = y$
 $5^y = 25$
 $5^y = 5^2$
 $y = 2$

إذن $\log_5 25 = 2$

b	$\log_8 \sqrt{8} = y$ $8^y = \sqrt{8}$ $8^y = 8^{\frac{1}{2}}$ $y = \frac{1}{2}$	$\log_8 \sqrt{8} = \frac{1}{2} \text{ إذن}$
c	$\log_{81} 9 = y$ $81^y = 9$ $9^{2y} = 9^1$ $2y = 1$ $y = \frac{1}{2}$	$\log_{81} 9 = \frac{1}{2} \text{ إذن}$
d	$\log_3 \frac{1}{27} = y$ $3^y = \frac{1}{27}$ $3^y = \frac{1}{3^3}$ $3^y = 3^{-3}$ $y = -3$	$\log_3 \frac{1}{27} = -3 \text{ إذن}$
<p>أتحقق من فهمي صفحة 29</p>		
a	$\log_2 1 = 0$	
b	$\log_{32} \sqrt{32} = \log_{32} 32^{\frac{1}{2}}$ $= \frac{1}{2}$	
c	$\log_9 9 = 1$	
d	$8^{\log_8 13} = 13$	

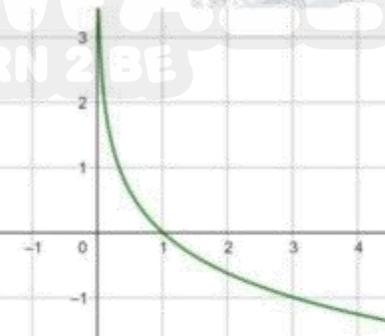
أتحقق من فهمي صفحة 31

$$f(x) = \log_3 x$$



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$
 مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R
 المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y
 لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y
 الاقتران متزايد

$$f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$$



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$
 مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R
 المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y
 لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y
 الاقتران متناقص

أتحقق من فهمي صفحة 33

$$f(x) = \log_7(5 - x)$$

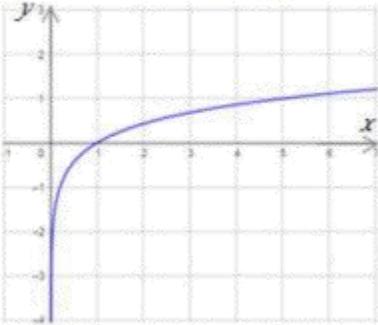
$$5 - x > 0$$

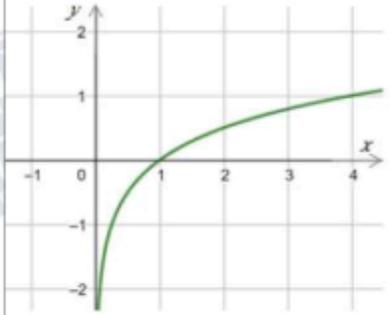
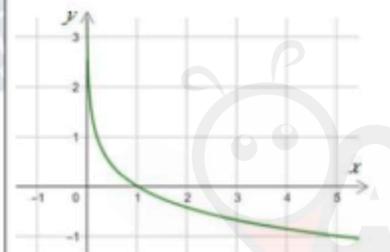
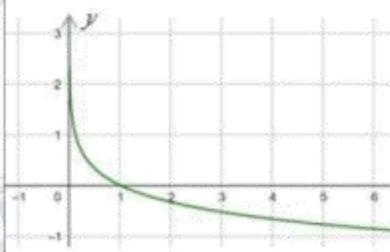
$$-x > -5$$

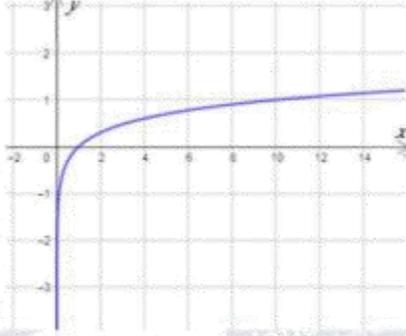
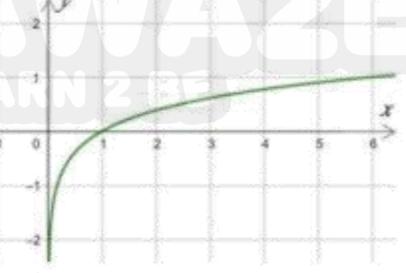
$$x < 5$$

مجال الاقتران هو $(-\infty, 5)$

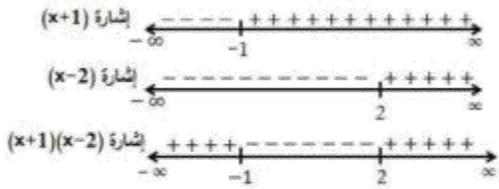
b	$f(x) = \log_5(9 + 3x)$ $9 + 3x > 0$ $3x > -9$ $x > -3$	مجال الاقتران هو $(-3, \infty)$
أتدرب وأحل المسائل صفحة 33		
1	$\log_7 343 = 3 \rightarrow 7^3 = 343$	
2	$\log_4 256 = 4 \rightarrow 4^4 = 256$	
3	$\log_{125} 5 = \frac{1}{3} \rightarrow 125^{\frac{1}{3}} = 5$	
4	$\log_{36} 6 = 0.5 \rightarrow 36^{0.5} = 6$	
5	$\log_9 1 = 0 \rightarrow 9^0 = 1$	
6	$\log_{57} 57 = 1 \rightarrow 57^1 = 57$	
7	$2^6 = 64 \rightarrow \log_2 64 = 6$	
8	$4^{-3} = \frac{1}{64} \rightarrow \log_4 \frac{1}{64} = -3$	
9	$6^3 = 216 \rightarrow \log_6 216 = 3$	
10	$5^{-3} = 0.008 \rightarrow \log_5 0.008 = -3$	
11	$51^1 = 51 \rightarrow \log_{51} 51 = 1$	
12	$9^0 = 1 \rightarrow \log_9 1 = 0$	
13	$\log_3 81 = \log_3 3^4$ $= 4$	
14	$\log_{25} 5 = y$ $25^y = 5$ $5^{2y} = 5^1$ $2y = 1$ $y = \frac{1}{2}$	إن $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$
15	$\log_2 32 = \log_2 2^5$ $= 5$	إن $\log_2 32 = 5$

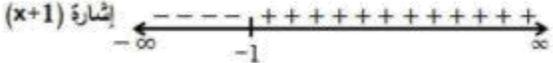
16	$\log_{49} 343 = y$ $49^y = 343$ $7^{2y} = 7^3$ $2y = 3$ $y = \frac{3}{2}$	إن $\log_{49} 343 = \frac{3}{2}$
17	$\log_{10} 0.001 = \log_{10} 10^{-3}$ $= -3$	
18	$\log_{\frac{3}{2}} 1 = 0$	
19	$\log_{\frac{1}{4}} 4 = y$ $\left(\frac{1}{4}\right)^y = 4$ $4^{-y} = 4^1$ $-y = 1$ $y = -1$	إن $\log_{\frac{1}{4}} 4 = -1$
20	$(10)^{\log_{10} \frac{1}{8}} = \frac{1}{8}$	
21	$\log_2 \frac{1}{\sqrt{27}} = \log_2 \frac{1}{(2)^{\frac{7}{2}}}$ $= \log_2 (2)^{-\frac{7}{2}}$ $= -\frac{7}{2}$	
22	$\log_a \sqrt[5]{a} = \log_a a^{\frac{1}{5}}$ $= \frac{1}{5}$	
23	$\log_{10}(1 \times 10^{-9}) = \log_{10} 10^{-9}$ $= -9$	
24	$8^{\log_8 5} = 5$	
25	$f(x) = \log_5 x$ 	<p>مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$</p> <p>مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R</p> <p>المقطع x هو 1، ولا يوجد مقطع y</p> <p>لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y</p> <p>الاقتران متزايد</p>

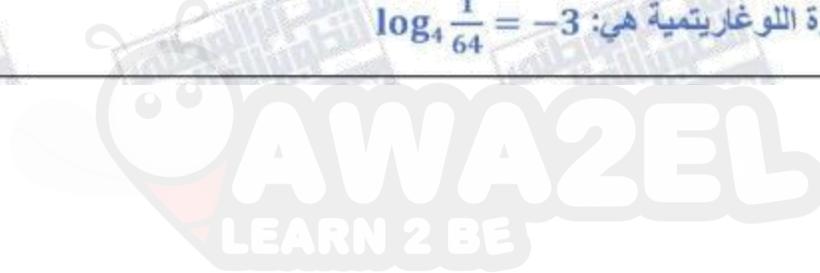
26	$f(x) = \log_4 x$ 	<p>مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$</p> <p>مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R</p> <p>المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y</p> <p>لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y</p> <p>الاقتران متزايد</p>
27	$f(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$ 	<p>مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$</p> <p>مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R</p> <p>المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y</p> <p>لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y</p> <p>الاقتران متناقص</p>
28	$f(x) = \log_{\frac{1}{8}} x$ 	<p>مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$</p> <p>مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R</p> <p>المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y</p> <p>لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y</p> <p>الاقتران متناقص</p>

29	<p>$f(x) = \log_{10} x$</p>  <p>مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$ مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y الاقتران متزايد</p>
30	<p>$f(x) = \log_6 x$</p>  <p>مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$ مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y الاقتران متزايد</p>
31	<p>$f(x) = \log_3(x - 2)$ $x - 2 > 0$ $x > 2$</p> <p>مجال هذا الاقتران هو $(2, \infty)$</p>
32	<p>$f(x) = 5 - 2 \log_7(x + 1)$ $x + 1 > 0$ $x > -1$</p> <p>مجال هذا الاقتران هو $(-1, \infty)$</p>

33	$f(x) = -3 \log_4(-x)$ $-x > 0$ $x < 0$ <p>مجال هذا الاقتران هو $(-\infty, 0)$</p>
34	$f(x) = \log_a x$ $f(32) = \log_a 32$ $5 = \log_a 32$ $a^5 = 32$ $a^5 = (2)^5$ $a = 2$
35	$f(x) = \log_c x$ $f\left(\frac{1}{4}\right) = \log_c \frac{1}{4}$ $-4 = \log_c \frac{1}{4}$ $c^{-4} = \frac{1}{4}$ $\frac{1}{c^4} = \frac{1}{4}$ $c^4 = 4 \rightarrow c^2 = 2 \rightarrow c = \pm\sqrt{2}$ <p>ولأن أساس اللوغاريتم لا يكون سالبا فإن: $c = \sqrt{2}$</p>
36	$P(a) = 10 + 20 \log_5(a + 1)$ $P(4) = 10 + 20 \log_5(4 + 1)$ $= 10 + 20 \log_5 5$ $= 10 + 20(1)$ $= 30$ $P(24) = 10 + 20 \log_5(24 + 1)$ $= 10 + 20 \log_5 25$ $= 10 + 20 \log_5 5^2$ $= 10 + 20(2)$ $= 50$ $P(124) = 10 + 20 \log_5(124 + 1)$ $= 10 + 20 \log_5 125$ $= 10 + 20 \log_5 5^3$ $= 10 + 20(3)$ $= 70$
37	<p>القيمة $P(4) = 30$ تعني أن إنفاق JD400 على الإعلانات يحقق إيرادا قيمته 30000 JD من بيع المنتج</p> <p>القيمة $P(24) = 50$ تعني أن إنفاق JD 2400 على الإعلانات يحقق إيرادا قيمته 50000 JD من بيع المنتج</p> <p>القيمة $P(124) = 70$ تعني أن إنفاق JD 12400 على الإعلانات يحقق إيرادا قيمته 70000 JD من بيع المنتج</p>

38	$f(x) = \log_3 x$ c لأن مجال الاقتران هو $(0, \infty)$ وهو متزايد ويمر منحناه بالنقطة $(3, 1)$ حيث $f(3) = \log_3 3 = 1$
39	$f(x) = \log_3(-x)$ b لأن مجال الاقتران هو $(-\infty, 0)$ ، ويمر منحناه بالنقطة $(-3, 1)$ حيث $f(-3) = \log_3(-(-3)) = \log_3(3) = 1$
40	$g(x) = -\log_3 x$ a لأن مجال الاقتران هو $(0, \infty)$ وهو متناقص ويمر منحناه بالنقطة $(3, -1)$ حيث $f(3) = -\log_3 3 = -1$
41	$f(x) = \log_3(x^2)$ بما أن $x^2 > 0$ لجميع الأعداد الحقيقية عدا العدد 0 فإن مجال هذا الاقتران هو $R - \{0\}$ خط التقارب الرأسي هو $x = 0$ (المحور y)
42	$f(x) = \log_3(x^2 - x - 2)$ $x^2 - x - 2 > 0$ $(x - 2)(x + 1) > 0$  نلاحظ أن $(x - 2)(x + 1) > 0$ في الفترتين $(-\infty, -1)$ ، و $(2, \infty)$ إذن، مجال الاقتران هو $(-\infty, -1)$ ، $(2, \infty)$ خطا التقارب الرأسيان هما $x = -1$ ، $x = 2$ وهما جنرا المعادلة $x^2 - x - 2 = 0$

43	<p>$f(x) = \log_3 \left(\frac{x+1}{x-5} \right)$</p> <p>يكون $\frac{x+1}{x-5} > 0$ عندما يكون البسط والمقام موجبان معًا، أو سالبان معًا</p> <p>إشارة $(x+1)$ </p> <p>إشارة $(x-5)$ </p> <p>نلاحظ أن $x + 1$ و $x - 5$ لهما الإشارة نفسها في الفترتين $(-\infty, -1)$ و $(5, \infty)$ إذن، مجال هذا الاقتران هو $(-\infty, -1), (5, \infty)$</p> <p>خطا التقارب الرأسيان هما $x = -1, x = 5$ وهما جذرا المعادلتين $x - 5 = 0, x + 1 = 0$</p>
44	<p>الكتابة الصحيحة للصورة اللوغاريتمية هي: $\log_4 \frac{1}{64} = -3$</p>



تعلم الرياضيات كما يجب ان تكون
و تكلم الرياضيات بطلاقة
معي انا د. خالد جلال
0799948198

طلاب وطالبات التوجيهي

يعلم الدكتور

خالد جلال

مدرس الرياضيات
للتوجيهي العلمي والادبي
(المنهاج الجديد)

عن بدء حجز المجموعات
للعام الدراسي الجديد

٠٧٩٩٩٤٨١٩٨

المجموعة من ٣ - ٥ طلاب

الدرس الرابع: قوانين اللوغاريتمات



مسألة اليوم يُمثّل الاقتران: $L = 10 \log_{10} R$ شِدَّة الصوت

بالديسيبل، حيث R شِدَّة الصوت النسبية بالواط لكل متر مربع. أجد شِدَّة صوت بالديسيبل إذا

كانت شِدَّته النسبية $100 \times 10^6 \text{ W/m}^2$

مسألة اليوم صفحة 35

$$\begin{aligned} L &= 10 \log_{10} R \\ L &= 10 \log_{10}(100 \times 10^6) \\ &= 10 \log_{10} 10^8 = 10 \times 8 = 80 \end{aligned}$$

شدة الصوت تساوي 80 ديسيبل

أتحقق من فهمي صفحة 36

a

$$\begin{aligned} \log_b 14 &= \log_b(2 \times 7) \\ &= \log_b 2 + \log_b 7 \\ &\approx 0.43 + 1.21 \\ &\approx 1.64 \end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned} \log_b \frac{2}{7} &= \log_b 2 - \log_b 7 \\ &\approx 0.43 - 1.21 \\ &\approx -0.78 \end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned} \log_b 32 &= \log_b 2^5 \\ &= 5 \log_b 2 \\ &\approx 5 \times 0.43 \\ &\approx 2.15 \end{aligned}$$

d

$$\begin{aligned} \log_b \frac{1}{49} &= \log_b 1 - \log_b 49 \\ &= 0 - \log_b 7^2 \\ &= 0 - 2 \log_b 7 \\ &\approx 0 - 2 \times 1.21 \\ &\approx -2.42 \end{aligned}$$

أتحقق من فهمي صفحة 38	
a	$\log_2 a^2 b^9 = \log_2 a^2 + \log_2 b^9$ $= 2 \log_2 a + 9 \log_2 b$
b	$\log_5 \frac{(x+1)^3}{8} = \log_5 (x+1)^3 - \log_5 8$ $= 3 \log_5 (x+1) - \log_5 8$
c	$\log_3 \frac{x^7 y^3}{z^5} = \log_3 x^7 y^3 - \log_3 z^5$ $= \log_3 x^7 + \log_3 y^3 - \log_3 z^5$ $= 7 \log_3 x + 3 \log_3 y - 5 \log_3 z$
d	$\log_b \sqrt[3]{\frac{x^7 b^2}{y^5}} = \log_b \left(\frac{x^7 b^2}{y^5} \right)^{\frac{1}{3}}$ $= \frac{1}{3} \log_b \frac{x^7 b^2}{y^5}$ $= \frac{1}{3} (\log_b x^7 b^2 - \log_b y^5)$ $= \frac{1}{3} (\log_b x^7 + \log_b b^2 - \log_b y^5)$ $= \frac{1}{3} (7 \log_b x + 2 \log_b b - 5 \log_b y)$ $= \frac{7}{3} \log_b x + \frac{2}{3} \log_b b - \frac{5}{3} \log_b y$ $= \frac{7}{3} \log_b x + \frac{2}{3} - \frac{5}{3} \log_b y$
أتحقق من فهمي صفحة 39	
a	$\log_5 a + 3 \log_5 b = \log_5 a + \log_5 b^3$ $= \log_5 ab^3$
b	$5 \log_b x + \frac{1}{2} \log_b y - 9 \log_b z = \log_b x^5 + \log_b y^{\frac{1}{2}} - \log_b z^9$ $= \log_b x^5 y^{\frac{1}{2}} - \log_b z^9$ $= \log_b \frac{x^5 y^{\frac{1}{2}}}{z^9}$ $= \log_b \frac{x^5 \sqrt{y}}{z^9}$

أتحقق من فهمي صفحة 40

$$\begin{aligned}
 M(t) &= 92 - 28 \log_{10}(t + 1) \\
 M(29) &= 92 - 28 \log_{10}(29 + 1) \\
 &= 92 - 28 \log_{10} 30 \\
 &= 92 - 28 \log_{10}(10 \times 3) \\
 &= 92 - 28(\log_{10} 10 + \log_{10} 3) \\
 &\approx 92 - 28(1 + 0.4771) \\
 &\approx 92 - 28(1.4771) \\
 &\approx 92 - 41.3588 \\
 &\approx 51
 \end{aligned}$$

النسبة المئوية للموضوعات التي يتذكرها هذا الطالب بعد 29 شهرًا هي 51% تقريبًا

أدرب وأحل المسائل صفحة 40

1

$$\begin{aligned}
 \log_a \frac{5}{6} &= \log_a 5 - \log_a 6 \\
 &\approx 0.699 - 0.778 \\
 &\approx -0.079
 \end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned}
 \log_a 30 &= \log_a(5 \times 6) \\
 &= \log_a 5 + \log_a 6 \\
 &\approx 0.699 + 0.778 \\
 &\approx 1.477
 \end{aligned}$$

3

$$\frac{\log_a 5}{\log_a 6} = \frac{0.699}{0.778} = \frac{699}{778} \approx 0.90$$

4

$$\begin{aligned}
 \log_a \frac{1}{6} &= \log_a 1 - \log_a 6 \\
 &\approx 0 - 0.778 \\
 &\approx -0.778
 \end{aligned}$$

5	$\begin{aligned}\log_a 900 &= \log_a 30^2 \\ &= 2 \log_a 30 \\ &= 2 \log_a (5 \times 6) \\ &= 2(\log_a 5 + \log_a 6) \\ &\approx 2(0.699 + 0.778) \\ &\approx 2 \times 1.477 \\ &\approx 2.954\end{aligned}$
6	$\begin{aligned}\log_a \frac{18}{15} &= \log_a \frac{6}{5} \\ &= \log_a 6 - \log_a 5 \\ &\approx 0.778 - 0.699 \\ &\approx 0.079\end{aligned}$
7	$\begin{aligned}\log_a (6a^2) &= \log_a 6 + \log_a a^2 \\ &= \log_a 6 + 2 \log_a a \\ &\approx 0.778 + 2 \\ &\approx 2.778\end{aligned}$
8	$\begin{aligned}\log_a \sqrt[4]{25} &= \log_a \sqrt[4]{5^2} \\ &= \log_a 5^{\frac{2}{4}} \\ &= \log_a 5^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \log_a 5 \\ &\approx \frac{1}{2} \times 0.699 \\ &\approx 0.350\end{aligned}$
9	$\begin{aligned}(\log_a 5)(\log_a 6) &\approx 0.699 \times 0.778 \\ &\approx 0.544\end{aligned}$
10	$\log_a x^2 = 2 \log_a x$

11	$\begin{aligned}\log_a \left(\frac{a}{bc} \right) &= \log_a a - \log_a bc \\ &= \log_a a - (\log_a b + \log_a c) \\ &= \log_a a - \log_a b - \log_a c \\ &= 1 - \log_a b - \log_a c\end{aligned}$
12	$\begin{aligned}\log_a (\sqrt{x}\sqrt{y}) &= \log_a \sqrt{x} + \log_a \sqrt{y} \\ &= \log_a x^{\frac{1}{2}} + \log_a y^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \log_a x + \frac{1}{2} \log_a y\end{aligned}$
13	$\begin{aligned}\log_a \left(\frac{\sqrt{z}}{y} \right) &= \log_a \sqrt{z} - \log_a y \\ &= \log_a z^{\frac{1}{2}} - \log_a y \\ &= \frac{1}{2} \log_a z - \log_a y\end{aligned}$
14	$\begin{aligned}\log_a \frac{1}{x^2 y^2} &= \log_a 1 - \log_a x^2 y^2 \\ &= \log_a 1 - (\log_a x^2 + \log_a y^2) \\ &= 0 - (2 \log_a x + 2 \log_a y) \\ &= -2 \log_a x - 2 \log_a y\end{aligned}$
15	$\begin{aligned}\log_a \sqrt[5]{32x^5} &= \log_a (\sqrt[5]{32} \times \sqrt[5]{x^5}) \\ &= \log_a 2x \\ &= \log_a 2 + \log_a x\end{aligned}$
16	$\begin{aligned}\log_a \frac{(x^2 y^3)^2}{(x^2 y^3)^3} &= \log_a \frac{1}{x^2 y^3} \\ &= \log_a 1 - \log_a x^2 y^3 \\ &= \log_a 1 - (\log_a x^2 + \log_a y^3) \\ &= 0 - (2 \log_a x + 3 \log_a y) \\ &= -2 \log_a x - 3 \log_a y\end{aligned}$

17	$\log_a(x + y - z)^7 = 7 \log_a(x + y - z)$
18	$\log_a \sqrt{\frac{x^{12}y}{y^3z^4}} = \log_a \sqrt{\frac{x^{12}}{y^2z^4}}$ $= \log_a \frac{\sqrt{x^{12}}}{\sqrt{y^2}\sqrt{z^4}}$ $= \log_a \frac{x^{\frac{12}{2}}}{y^{\frac{2}{2}}z^{\frac{4}{2}}}$ $= \log_a \frac{x^6}{yz^2}$ $= \log_a x^6 - \log_a yz^2$ $= 6 \log_a x - (\log_a y + \log_a z^2)$ $= 6 \log_a x - (\log_a y + 2 \log_a z)$ $= 6 \log_a x - \log_a y - 2 \log_a z$
19	$\log_a x + \log_a y = \log_a xy$
20	$\log_b(x + y) - \log_b(x - y) = \log_b \frac{x + y}{x - y}$
21	$\log_a \frac{1}{\sqrt{x}} - \log_a \sqrt{x} = \log_a \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ $= \log_a \frac{1}{x}$
22	$\log_a(x^2 - 4) - \log_a(x + 2) = \log_a \frac{(x^2 - 4)}{(x + 2)}$ $= \log_a \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)}$ $= \log_a(x - 2)$
23	$2 \log_b x - 3 \log_b y + \frac{1}{3} \log_b z = \log_b x^2 - \log_b y^3 + \log_b z^{\frac{1}{3}}$ $= \log_b \frac{x^2}{y^3} + \log_b z^{\frac{1}{3}}$ $= \log_b \frac{x^2 z^{\frac{1}{3}}}{y^3}$ $= \log_b \frac{x^2 \sqrt[3]{z}}{y^3}$
24	$\log_b 1 + 2 \log_b b = \log_b b^2 = 2$

25	$f(x) = 29 + 48.8 \log_6(x + 2)$ $f(10) = 29 + 48.8 \log_6(10 + 2)$ $= 29 + 48.8 \log_6 12$ $= 29 + 48.8 \log_6(6 \times 2)$ $= 29 + 48.8(\log_6 6 + \log_6 2)$ $\approx 29 + 48.8(1 + 0.3869)$ $\approx 29 + 48.8(1.3869)$ $\approx 29 + 67.68072$ ≈ 97 <p>النسبة المئوية لطول طفل عمره 10 سنوات من طوله عند البلوغ هي 97% تقريباً</p>
26	$\frac{\log_a 216}{\log_a 36} = \frac{\log_a 6^3}{\log_a 6^2}$ $= \frac{3 \log_a 6}{2 \log_a 6}$ $= \frac{3}{2}$
27	$\log_2 5x = \log_2 5 + \log_2 x$
28	$\log_b(b - 3) + \log_b(b^2 + 3b) - \log_b(b^2 - 9)$ $= \log_b(b - 3)(b^2 + 3b) - \log_b(b^2 - 9)$ $= \log_b \frac{(b - 3)(b^2 + 3b)}{(b^2 - 9)}$ $= \log_b \frac{(b - 3) \times b(b + 3)}{(b - 3)(b + 3)}$ $= \log_b b$ $= 1$

الدرس الخامس: المعادلات الأسية



مسألة اليوم
يُمثل الاقتران: $A(t) = 10e^{-0.0862t}$ كتلة اليود (بالغرام) المُتبقية من عينة كتلتها 10 g بعد t يوماً من بدء التفاعل. بعد كم يوماً سيظل من العينة 0.5 g؟

مسألة اليوم صفحة 42

$$A(t) = 10e^{-0.0862t}$$

$$0.5 = 10e^{-0.0862t}$$

$$0.05 = e^{-0.0862t}$$

$$-0.0862t = \ln 0.05$$

$$t = -\frac{\ln 0.05}{0.0862} \approx 35$$

بعد حوالي 35 يوماً سيظل من هذه العينة 0.5 g

أتحقق من فهمي صفحة 43

a $\log 13 \approx 1.1$

b $\log(3.1 \times 10^4) = \log 3.1 + \log 10^4$
 $= \log 3.1 + 4\log 10 \approx 0.491 + 4 \approx 4.5$

c $\ln 0.25 \approx -1.4$

أتحقق من فهمي صفحة 44

a $\log_3 51 = \frac{\log 51}{\log 3} \approx 3.58$

b $\log_{\frac{1}{2}} 13 = \frac{\log 13}{\log \frac{1}{2}} \approx -3.70$

أتحقق من فهمي صفحة 48

a	$7^x = 9$ $x = \log_7 9 = \frac{\log 9}{\log 7} \approx 1.1292$
b	$2e^{5x} = 64$ $e^{5x} = 32$ $5x = \ln 32$ $x = \frac{1}{5} \ln 32 \approx 0.6931$
c	$7^{2x+1} = 2^{x-4}$ $\log 7^{2x+1} = \log 2^{x-4}$ $(2x+1) \log 7 = (x-4) \log 2$ $2x \log 7 + \log 7 = x \log 2 - 4 \log 2$ $2x \log 7 - x \log 2 = -\log 7 - 4 \log 2$ $x(2 \log 7 - \log 2) = -\log 7 - 4 \log 2$ $x = \frac{-\log 7 - 4 \log 2}{2 \log 7 - \log 2} \approx -1.4751$
d	$4^x + 2^x - 12 = 0$ $(2^x)^2 + 2^x - 12 = 0$ $u^2 + u - 12 = 0$ $(u+4)(u-3) = 0$ $u = -4 \text{ or } u = 3$ $2^x = -4 \text{ or } 2^x = 3$ <p>المعادلة $2^x = -4$ ليس لها حل لأن $2^x > 0$ لكل قيم المتغير x</p> $2^x = 3 \rightarrow x = \log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.5850$

أتحقق من فهمي مثال 4 صفحة 48

$$9 = 6.5(1.014)^t$$

$$\frac{9}{6.5} = (1.014)^t$$

$$\ln \frac{9}{6.5} = \ln(1.014)^t \rightarrow \ln 9 - \ln 6.5 = t \ln 1.014$$

$$t = \frac{\ln 9 - \ln 6.5}{\ln 1.014} \approx 23$$

إذن، سيبلغ عدد سكان العالم 9 مليارات نسمة بعد 23 سنة تقريبا من عام 2006

أتدرب وأحل المسائل صفحة 49

1 $\log 19 \approx 1.3$

2 $\log(2.5 \times 10^{-3}) \approx -2.6$

3 $\ln 3.1 \approx 1.1$

4 $\log_2 10 = \frac{\log 10}{\log 2} \approx 3.3$

5 $\log_3 e^2 = \frac{\ln e^2}{\ln 3} = \frac{2}{\ln 3} \approx 1.8$

6 $\ln 5 \approx 1.6$

7 $\log_3 33 = \frac{\log 33}{\log 3} \approx 3.18$

8 $\log_{\frac{1}{3}} 17 = \frac{\log 17}{\log \frac{1}{3}} = \frac{\log 17}{\log 1 - \log 3} \approx -2.58$

9 $\log_6 5 = \frac{\log 5}{\log 6} \approx 0.90$

10 $\log_7 \frac{1}{7} = \log_7 1 - \log_7 7 = 0 - 1 = -1$

11 $\log 1000 = 3$

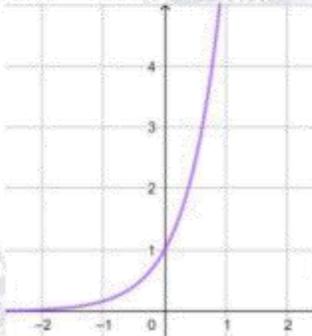
12 $\log_3 15 = \frac{\log 15}{\log 3} \approx 2.46$

13	$6^x = 121$ $\log 6^x = \log 121 \rightarrow x \log 6 = \log 121$ $\rightarrow x = \frac{\log 121}{\log 6} \approx 2.6766$
14	$-3e^{4x} = -27$ $e^{4x} = 9$ $4x = \ln 9$ $x = \frac{1}{4} \ln 9 \approx 0.5493$
15	$5^{7x-2} = 3^{2x}$ $\log 5^{7x-2} = \log 3^{2x}$ $(7x - 2) \log 5 = (2x) \log 3$ $7x \log 5 - 2 \log 5 = 2x \log 3$ $7x \log 5 - 2x \log 3 = 2 \log 5$ $x(7 \log 5 - 2 \log 3) = 2 \log 5$ $x = \frac{2 \log 5}{7 \log 5 - 2 \log 3} \approx 0.3549$
16	$25^x + 5^x - 42 = 0$ $(5^x)^2 + 5^x - 42 = 0$ $u^2 + u - 42 = 0$ $(u + 7)(u - 6) = 0$ $u = -7 \text{ or } u = 6$ $5^x = -7 \text{ or } 5^x = 6$ <p>المعادلة $5^x = -7$ ليس لها حل لأن $5^x > 0$ لكل قيم المتغير x</p> $5^x = 6 \rightarrow x \log 5 = \log 6 \rightarrow x = \frac{\log 6}{\log 5} \approx 1.1133$

17	$2(9)^x = 32 \rightarrow 9^x = 16 \rightarrow x \log 9 = \log 16$ $\rightarrow x = \frac{\log 16}{\log 9} \approx 1.2619$
18	$27^{2x+3} = 2^{x-5}$ $\log 27^{2x+3} = \log 2^{x-5}$ $(2x + 3) \log 27 = (x - 5) \log 2$ $2x \log 27 + 3 \log 27 = x \log 2 - 5 \log 2$ $2x \log 27 - x \log 2 = -3 \log 27 - 5 \log 2$ $x(2 \log 27 - \log 2) = -3 \log 27 - 5 \log 2$ $x = \frac{-3 \log 27 - 5 \log 2}{2 \log 27 - \log 2} \approx -2.2638$
19	$2P = Pe^{0.05t}$ $2 = e^{0.05t}$ $0.05t = \ln 2$ $t = \frac{1}{0.05} \ln 2$ $= 20 \ln 2 \approx 14$ <p>بعد 14 سنة تقريبا تصبح جملة المبلغ مثلي المبلغ الأصلي</p>
20	$3P = Pe^{0.05t}$ $3 = e^{0.05t}$ $0.05t = \ln 3$ $t = 20 \ln 3 \approx 22$ <p>بعد 22 سنة تقريبا تصبح جملة المبلغ 3 أمثال المبلغ الأصلي</p>

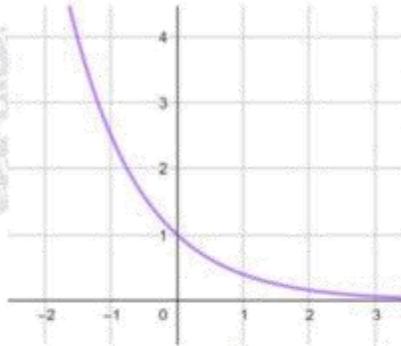
21	$97 = 873e^{-0.078t}$ $\frac{97}{873} = e^{-0.078t}$ $\frac{1}{9} = e^{-0.078t}$ $-0.078t = \ln \frac{1}{9}$ $-0.078t = \ln 1 - \ln 9$ $-0.078t = 0 - \ln 9$ $-0.078t = -\ln 9$ $t = \frac{\ln 9}{0.078} \approx 28$ <p>بعد 28 سنة تقريباً يصبح في الغابة 97 حيواناً من الكوالا</p>
22	$f(x) = e^{0.5x+3}$ <p>بما أن النقطة $(-2, k)$ تقع على منحنى الاقتران، فإن إحداثياتها يحققان معادلة المنحنى</p> $f(-2) = e^{0.5(-2)+3}$ $k = e^2 \approx 7.39$ <p>بما أن النقطة $(h, 100)$ تقع على منحنى الاقتران، فإن إحداثياتها يحققان معادلة المنحنى</p> $f(h) = e^{0.5h+3}$ $100 = e^{0.5h+3}$ $0.5h + 3 = \ln 100$ $0.5h = \ln 100 - 3$ $h = \frac{1}{0.5} \ln 100 - \frac{3}{0.5}$ $h = 2 \ln 100 - 6 \approx 3.2$
23	$3^x + \frac{4}{3^x} = 5$ $3^x \left(3^x + \frac{4}{3^x} \right) = 3^x \times 5$ $3^{2x} + 4 = 5(3^x)$ $3^{2x} - 5(3^x) + 4 = 0$ $(3^x)^2 - 5(3^x) + 4 = 0$ <div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px; margin-left: 20px;"> $u^2 - 5u + 4 = 0$ $(u - 4)(u - 1) = 0$ $u = 4 \text{ or } u = 1$ $3^x = 4 \text{ or } 3^x = 1$ $3^x = 4 \rightarrow x = \log_3 4 \approx 1.26$ $3^x = 1 \rightarrow x = \log_3 1 = 0$ </div>

اختبار نهاية الوحدة صفحة 50

1	d
2	c
3	a
4	c
5	a
6	b
7	b
8	a
9	b
10	$\log_5 16 = \log_5 4^2$ $= 2 \log_5 4$ $= 2k$
11	$\log_5 0.25 = \log_5 \frac{25}{100}$ $= \log_5 \frac{1}{4}$ $= \log_5 1 - \log_5 4$ $= 0 - \log_5 4$ $= -k$
12	$f(x) = 6^x$  <p>مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$</p>

13

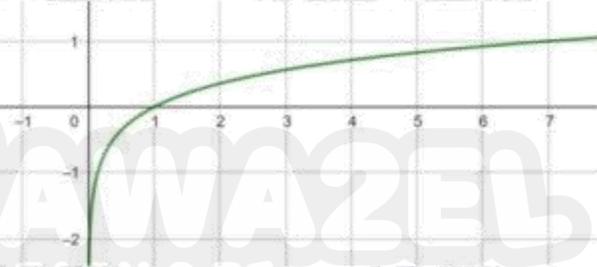
$$g(x) = (0.4)^x$$



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R
مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$

14

$$h(x) = \log_7 x$$

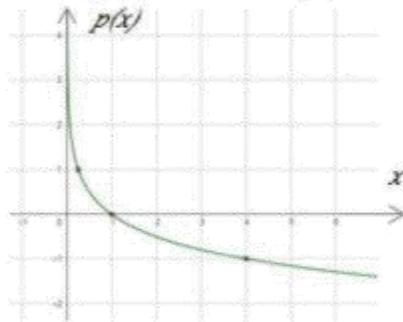


مجال هذا الاقتران هو $(0, \infty)$
مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

15

$$p(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$$

$x = (\frac{1}{4})^y$	4	1	$\frac{1}{4}$
y	-1	0	1
(x, y)	(4, -1)	(1, 0)	(0.25, 1)



مجال هذا الاقتران هو $(0, \infty)$

مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

16

$$8^x = 2$$

$$2^{3x} = 2^1$$

$$3x = 1$$

$$\rightarrow x = \frac{1}{3} \approx 0.3333$$

17	$-3e^{4x+1} = -96$ $e^{4x+1} = 32$ $4x + 1 = \ln 32$ $4x = \ln 32 - 1$ $x = \frac{\ln 32 - 1}{4} \approx 0.6164$
18	$11^{2x+3} = 5^x$ $\log 11^{2x+3} = \log 5^x$ $(2x + 3) \log 11 = (x) \log 5$ $2x \log 11 + 3 \log 11 = x \log 5$ $2x \log 11 - x \log 5 = -3 \log 11$ $x(2 \log 11 - \log 5) = -3 \log 11$ $x = \frac{-3 \log 11}{2 \log 11 - \log 5} \approx -2.2577$
19	$49^x + 7^x - 72 = 0$ $(7^x)^2 + 7^x - 72 = 0$ $u^2 + u - 72 = 0$ $(u + 9)(u - 8) = 0$ $u = -9 \text{ or } u = 8$ $7^x = -9 \text{ or } 7^x = 8$ <p>المعادلة $7^x = -9$ ليس لها حل لأن $7^x > 0$ لكل قيم المتغير x</p> $7^x = 8 \rightarrow x = \log_7 8 = \frac{\log 8}{\log 7} \approx 1.0686$
20	$A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ $A = 2500 \left(1 + \frac{0.042}{12}\right)^{12 \times 15} \approx 4688.87$ <p>جملة المبلغ بعد 15 سنة هي JD 4688.87 تقريبا</p>
21	$A = Pe^{rt}$ $A = 800e^{0.045 \times 5} \approx 1001.86$ <p>جملة المبلغ بعد 5 سنوات هي JD1001.86 تقريبا</p>

22	$v(t) = 30e^{0.1t}$ $10000 = 30e^{0.1t}$ $\frac{1000}{3} = e^{0.1t}$ $0.1t = \ln \frac{1000}{3}$ $t = \frac{1}{0.1} \ln \frac{1000}{3} \approx 58.1$ <p>الزمن اللازم لإصابة 10000 جهاز حاسوب بالفيروس هو 58.1 دقيقة تقريباً</p>
23	$N(t) = 100e^{0.045t}$ $N(0) = 100e^{0.045 \times 0} = 100$ <p>العدد الأصلي للخلايا البكتيرية في العينة هو 100 خلية</p>
24	$N(5) = 100e^{0.045 \times 5} \approx 125$ <p>عدد الخلايا البكتيرية في العينة بعد 5 أيام هو 125 خلية تقريباً</p>
25	$1400 = 100e^{0.045t}$ $14 = e^{0.045t}$ $0.045t = \ln 14$ $t = \frac{\ln 14}{0.045} \approx 59$ <p>بعد 59 يوماً تقريباً يصبح عدد الخلايا البكتيرية 1400 خلية</p>
26	$200 = 100e^{0.045t}$ $2 = e^{0.045t}$ $0.045t = \ln 2$ $t = \frac{\ln 2}{0.045} \approx 15$ <p>بعد 15 يوماً تقريباً يصبح عدد الخلايا البكتيرية ضعف العدد الأصلي</p>
27	$A(h) = a(1 - r)^h$ $A(h) = 1000(1 - 0.12)^h$ $= 1000(0.88)^h$

28	$500 = 1000(0.88)^h$ $0.5 = (0.88)^h \rightarrow \log 0.5 = h \log 0.88$ $\rightarrow h = \frac{\log 0.5}{\log 0.88} \approx 5.42$ <p>عند ارتفاع 5.42 كيلومتر تقريبا فوق سطح البحر تصبح قيمة الضغط الجوي مساوية نصف قيمتها عند سطح البحر</p>
29	$S(x) = 400 + 250 \log x$ $S(10) = 400 + 250 \log 10 = 650$ <p>أي أن إنفاق JD 10000 على الإعلانات يحقق إيرادات قيمتها JD 650000</p>



تعلم الرياضيات كما يجب ان تكون
و تكلم الرياضيات بطلاقة
معي انا د. خالد جلال
0799948198

طلاب وطالبات التوجيهي

يعلم الدكتور

خالد جلال

مدرس الرياضيات
للتوجيهي العلمي والادبي
(المنهاج الجديد)

عن بدء حجز المجموعات
للعام الدراسي الجديد

٠٧٩٩٩٤٨١٩٨

المجموعة من ٣ - ٥ طلاب

جيل

2005

الرياضيات كما ينبغي أن تكون

AWAZEL
LEARN 2 BE

تتضمن الوحدة:

١ - الأمثلة

٢ - أتحقق من فهمي

٣ - التمارين

٤ - اختبار نهاية الوحدة

مع الاجابات الكاملة لكل منها