د . خالد جلال

079 - 9948198

طريق التفوق في الرياضيات

للتوجيهي (العلمي)

2005

وحدة التفاضل

الوحدة الاولى

التفاضل

الدرس الاول

أمثلة و تمارين الكتاب المدرسي

مثال 1

1 أبحث قابلية الاقتران: $f(x) = |x|$ للاشتقاق عندما $x = 0$.

2 أبحث قابلية الاقتران: $f(x) = x^{1/3}$ للاشتقاق عندما $x = 0$.

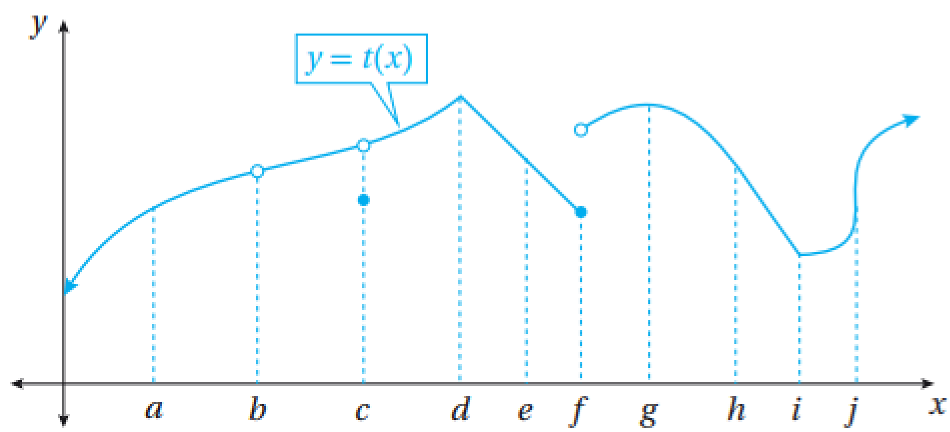
أتحقَّق من فهمي

a) أبحث قابلية الاقتران: $f(x) = |x-2|$ للاشتقاق عندما $x = 2$.

b) أبحث قابلية الاقتران: $f(x) = (x+1)^{1/5}$ للاشتقاق عندما $x = -1$.

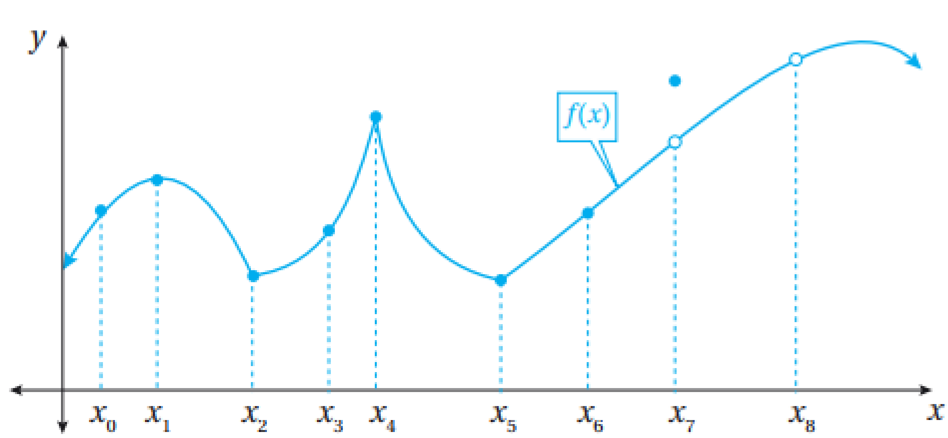
مثال 2

يُبيِّن الشكل الآتي منحنى الاقتران $t(x)$. أُحدِّد قِيَم x للنقاط التي لا يكون عندها الاقتران $t(x)$ قابلًا للاشتقاق، مُبرِّرًا إجابتي.



أتحقَّق من فهمي

يُبيِّن الشكل الآتي منحنى الاقتران $f(x)$. أُحدِّد قِيَم x للنقاط التي لا يكون عندها الاقتران $f(x)$ قابلًا للاشتقاق، مُبرِّرًا إجابتي.



مثال 3

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x)=3e^x$ 2) $f(x)=x^2+e^x$ 3) $y=\frac{\sqrt[3]{x}-2xe^x}{x}$

أتحقّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x)=5e^x+3$ b) $f(x)=\sqrt{x}-4e^x$ c) $y=8e^x+\frac{4}{\sqrt[5]{x}}$

مثال 4

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x)=\ln(x^4)$ 2) $f(x)=\ln(xe^x)+\ln 7x$

أتحقّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x)=\sqrt{x}+\ln(4x)$ b) $f(x)=\ln(2x^3)$

مثال 5

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x)=3\sin x+4$ 2) $y=\frac{1}{2}e^x-7\cos x$

أتحقّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $y=\frac{\sin x}{2}+3\cos x$ b) $f(x)=x^2+\cos x+\sin\frac{\pi}{2}$

مثال 6

إذا كان الاقتران: $f(x)=\ln\left(\frac{x}{e}\right)$، فأستعمل المشتقة لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي:

1) معادلة المماس عند النقطة $(1,-1)$.

2) معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(1,-1)$.

أتحقّق من فهمي

إذا كان الاقتران: $f(x)=\ln\sqrt{x}$، فأستعمل المشتقة لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي:

a) معادلة المماس عند النقطة $(e,\frac{1}{2})$.

b) معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(e,\frac{1}{2})$.

مثال 7

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 6t^2 - t^3, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك على خط مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني:

1 أجد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t = 2$.

2 أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

3 في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 5$؟

4 متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي؟

أتحقَّق من فهمي

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^2 - 7t + 8, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك على خط مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني:

a) أجد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t = 4$.

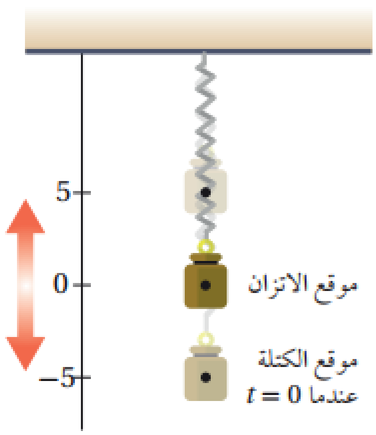
b) أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

c) في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 2$؟

d) متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي؟

مثال 8 : من الحياة

زنبرك: يُبيِّن الشكل المجاور جسمًا مُعلَّقًا بزنبرك، شُدَّ 5 وحدات أسفل الاتزان $(s = 0)$، ثم تُرِك عند الزمن $t = 0$ ليتحرَّك إلى الأعلى وإلى الأسفل. ويُمثِّل الاقتران: $s(t) = 5 \cos t$ موقع الجسم عند أيِّ زمن لاحق، حيث t الزمن بالثواني، وs الموقع بالسنتيمترات:



1 أجد اقترانًا يُمثِّل سرعة الجسم المتجهة، واقترانًا آخرَ يُمثِّل تسارعه عند أيِّ لحظة.

2 أَصِف حركة الجسم.

أتحقَّق من فهمي

يتحرَّك جسم مُعلَّق بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل، ويُمثِّل الاقتران: $s(t) = 7 \sin t$ موقع الجسم عند أيِّ زمن لاحق، حيث t الزمن بالثواني، وs الموقع بالأمتار:

a) أجد اقترانًا يُمثِّل سرعة الجسم المتجهة، واقترانًا آخرَ يُمثِّل تسارعه عند أيِّ لحظة.

b) أَصِف حركة الجسم.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أبحث قابلية اشتقاق كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

1 $f(x) = |x - 5|, x = 5$

2 $f(x) = x^{2/5}, x = 0$

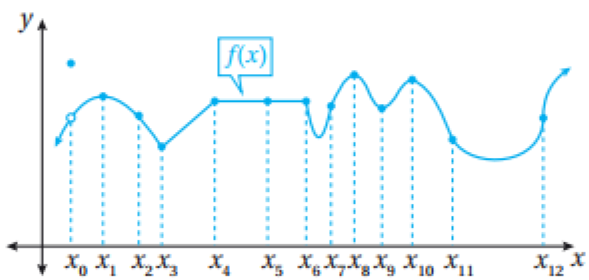
3 $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 1 \\ x^2 - 2x & , x > 1 \end{cases}, x = 1$

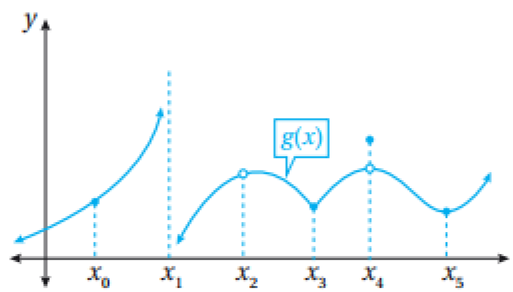
4) $f(x) = \frac{3}{x}$, $x = 4$

5) $f(x)=(x-6)^{2/3}$, $x=6$

6) $f(x) = \begin{cases} x+1 & , x \neq 4 \\ 3 & , x = 4 \end{cases}$, $x = 4$

أُحدِّد قِيَم x للنقاط التي لا يكون عندها كل اقتران ممّا يأتي قابلًا للاشتقاق، مُبرِّرًا إجابتي:

7) 

8) 

أُحدِّد قيمة (قِيَم) x التي لا يكون عندها كل اقتران ممّا يأتي قابلًا للاشتقاق:

9) $f(x) = \frac{x-8}{x^2-4x-5}$

10) $f(x) = \sqrt[3]{3x-6} + 5$

11) $f(x) = |x^2 - 9|$

12) إذا كان: $f(x) = x\,|x|$، فأُثبِت أنَّ $f'(0)$ موجودة.

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

13) $f(x) = 2\sin x - e^x$

14) $f(x) = \frac{\ln x}{4} - \pi\cos x$

15) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x^3}\right) + x^4$

16) $f(x) = e^{x+1} + 1$

17) $f(x) = e^x + x^e$

18) $f(x) = \ln\left(\frac{10}{x^n}\right)$

إذا كان: $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}e^x$ ، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

19) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $(\pi, \frac{1}{2}e^\pi)$.

20) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $(\pi, \frac{1}{2}e^\pi)$.

21) أجد قيمة x التي يكون عندها المماس أفقيًّا لمنحنى الاقتران: $f(x) = e^x - 2x$.

22) اختيار مـن مُتعـدِّد: أيُّ الآتيـة تُمثِّل معادلـة العمودي على المماس لمنحنـى الاقتـران: $f(x) = \sin x + \cos x$ عندما $x = \pi$؟

a) $y = -x + \pi - 1$ b) $y = x - \pi - 1$ c) $y = x - \pi + 1$ d) $y = x + \pi + 1$

23) إذا كان: $f(x) = \ln kx$، حيث k عدد حقيقي موجب، و $x > 0$، فأُبيِّن أنَّ $f'(x) = \frac{1}{x}$.

إذا كان الاقتران: $f(x) = \ln x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

24 أُثبِت أنَّ مماس منحنى الاقتران عند النقطة $(e, 1)$ يمرُّ بنقطة الأصل.

25 أُثبِت أنَّ المقطع x للعمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة $(e, 1)$ هو $e + \frac{1}{e}$.

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

26 أجد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t = 5$.

27 أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

28 في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 4$؟

29 متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي؟

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = e^t - 4t, t \geq 0$ موقع جُسَيْم يتحرَّك على خط مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

30 أُحدِّد الموقع الابتدائي للجُسَيْم.

31 أجد تسارع الجُسَيْم عندما تكون سرعته المتجهة صفرًا.

زنبرك: **يتحرَّك جسم مُعلَّق بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل، ويُحدِّد الاقتران: $s(t) = 4\cos t$ موقع الجسم عند أيِّ زمن لاحق، حيث t الزمن بالثواني، و s الموقع بالأمتار:**

32 أجد اقترانًا يُمثِّل سرعة الجسم المتجهة، واقترانًا آخرَ يُمثِّل تسارعه عند أيِّ لحظة.

33 أجد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t = \frac{\pi}{4}$.

34 أَصِف حركة الجسم.

مهارات التفكير العليا

35 تبرير: إذا كان الاقتران: $y = e^x - ax$، حيث a عدد حقيقي، فأجد معادلة المماس عند نقطة تقاطع الاقتران مع المحور y، مُبرِّرًا إجابتي.

36 تبرير: إذا كان: $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 2 \\ mx + b & , x > 2 \end{cases}$، فأجد قيمة كلٍّ من m و b اللتين تجعلان f قابلًا للاشتقاق عند جميع قِيَم x الحقيقية، مُبرِّرًا إجابتي.

37 تحدٍّ: أُثبِت عدم وجود مماس ميله 2 للاقتران: $y = 2e^x + 3x + 5x^3$.

تبريـر: إذا كان الاقتـران: $y = ke^x$، حيـث: $k > 0$، وكان منحنـاه يقطـع المحـور y عنـد النقطـة P، فأُجيـب عـن السـؤالين الآتيـين تباعًـا:

38 أجد نقطة تقاطع مماس منحنى الاقتران عند النقطة P مع المحور x.

39 إذا كان العمودي على المماس عند النقطة P يقطع المحور x عند النقطة $(100, 0)$، فأجد قيمة k.

تحدٍّ: إذا كان الاقتران: $y = \log x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

40 أُثبِت أنَّ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln 10}$.

41 مُعتمِدًا على النتيجة من السؤال السابق، أجد $\frac{dy}{dx}$ للاقتران: $y = \log ax^2$، حيث a عدد حقيقي موجب.

تبرير: يُمثِّل الاقتـران: $s(t) = 4 - \sin t,\ t \geq 0$ موقع جُسَـيْم يتحرَّك في مسـار مسـتقيم، حيث s الموقـع بالأمتار، و t الزمـن بالثواني:

42 أجد سرعة الجُسَيْم المتجهة وتسارعه بعد t ثانية.

43 أجد موقع الجُسَيْم عندما كان في حالة سكون أوَّل مَرَّة بعد انطلاقه.

44 أجد موقع الجُسَيْم عندما يصل إلى أقصى سرعة متجهة، مُبرِّرًا إجابتي.

الدرس الثاني

مثال 1

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = (3x - 2x^2)(5 + 4x)$

2) $f(x) = xe^x$

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 3)(7x^2 - 4x)$

b) $f(x) = \ln x \cos x$

مثال 2

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$

2) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x + 1}$

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \dfrac{x + 1}{2x + 1}$

b) $f(x) = \dfrac{\sin x}{e^x}$

مثال 3 : من الحياة

مرض: تعطى درجة حرارة مريض في أثناء مرضه بالاقتران: $T(t) = \dfrac{4t}{1 + t^2} + 98.6$، حيث t الزمن بالساعات بعد ظهور أعراض المرض، و T درجة الحرارة بالفهرنهايت:

1) أجد مُعدَّل تغيُّر درجة حرارة المريض بالنسبة إلى الزمن.

2) أجد مُعدَّل تغيُّر درجة حرارة المريض عندما $t = 2$، مُفسِّرًا معنى الناتج.

أتحقَّق من فهمي

سكّان: يعطى عدد سكّان مدينة صغيرة بالاقتران: $P(t) = \dfrac{500t^2}{2t + 9}$، حيث t الزمن بالسنوات، و P عدد السكّان بالآلاف:

a) أجد مُعدَّل تغيُّر عدد السكّان في المدينة بالنسبة إلى الزمن.

b) أجد مُعدَّل تغيُّر عدد السكّان في المدينة عندما $t = 12$، مُفسِّرًا معنى الناتج.

مثال 4

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

2) $f(t) = \frac{1}{t+\frac{1}{t}}$

أتحقّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \frac{1}{5x - x^2}$

b) $f(x) = \frac{1}{e^x + \sqrt{x}}$

مثال 5

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = x^2 \sec x$

2) $f(x) = \frac{\csc x}{1 + \tan x}$

أتحقّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = x \cot x$

b) $f(x) = \frac{\tan x}{1 + \sin x}$

مثال 6

أجد المشتقات الأربع الأولى للاقتران: $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$.

أتحقّق من فهمي

أجد المشتقات الثلاث الأولى للاقتران: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

أتدرّب وأحُلّ المسائل

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = \frac{x^3}{2x-1}$

2) $f(x) = x^3 \sec x$

3) $f(x) = \frac{x+1}{\cos x}$

4) $f(x) = e^x (\tan x - x)$

5) $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{e^x}$

6) $f(x) = x^3 \sin x + x^2 \cos x$

7) $f(x) = \sqrt[3]{x}\,(\sqrt{x} + 3)$

8) $f(x) = \frac{1 + \sec x}{1 - \sec x}$

9) $f(x) = \frac{2 - \frac{1}{x}}{x - 3}$

10) $f(x) = (x^3 - x)(x^2 + 2)(x^2 + x + 1)$

11) $f(x) = (\csc x + \cot x)^{-1}$

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عندما $x = 0$، وكان $f(0) = 5, f'(0) = -3, g(0) = -1, g'(0) = 2$،
فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

12) $(fg)'(0)$

13) $\left(\frac{f}{g}\right)'(0)$

14) $(7f - 2fg)'(0)$

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

15) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}, x = -2$

16) $f(x) = \frac{1 + x}{1 + \sqrt[3]{x}}, x = 8$

17) $f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{x}}, x = 4$

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

18) $f(x) = \frac{1 + x}{1 + e^x}, (0, \frac{1}{2})$

19) $f(x) = e^x \cos x + \sin x, (0, 1)$

أُثبِت صحة كلٍّ ممّا يأتي معتمدًا أنَّ $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$، $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$:

20) $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$

21) $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

22) $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

أُلاحِظ المشتقة المعطاة في كلٍّ ممّا يأتي، ثم أجد المشتقة العليا المطلوبة:

23) $f''(x) = 2 - \frac{2}{x}, f'''(x)$

24) $f'''(x) = 2\sqrt{x}, f^{(4)}(x)$

25) $f^{(4)}(x) = 2x+1, f^{(6)}(x)$

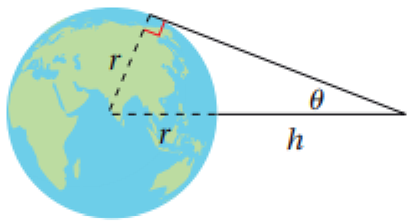
26) **نباتات هجينة:** وجد باحثون زراعيون أنّه يُمكِن التعبير عن ارتفاع نبتة مُهجَّنة من نبات تبّاع الشمس h بالأمتار، باستعمال الاقتران: $h(t) = \frac{3t^2}{4 + t^2}$، حيث t الزمن بالأشهر بعد زراعة البذور. أجد مُعدَّل تغيُّر ارتفاع النبتة بالنسبة إلى الزمن.

إذا كان الاقتران: $y = e^x \sin x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

27) أجد $\frac{dy}{dx}$، و $\frac{d^2y}{dx^2}$.

28) أُثبِت أنَّ $\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx} - 2y$.

أقمار صناعية: عندما ترصدُ الأقمارُ الصناعيةُ الأرضَ، فإنَّه يُمكِنها مسح جزء فقط من سطح الأرض. وبعض الأقمار الصناعية تحوي مُستشعِرات لقياس الزاوية θ (بالراديان) المُبيَّنة في الشكل المجاور.



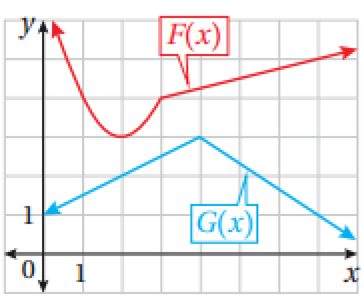
إذا كان h يُمثِّل المسافة بين القمر الصناعي وسطح الأرض بالكيلومتر، و r يُمثِّل نصف قُطْر الأرض بالكيلومتر، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

29 أُثبِت أنَّ $h = r(\csc\theta - 1)$.

30 أجد مُعدَّل تغيُّر h بالنسبة إلى θ عندما $\theta = \frac{\pi}{6}$ (أفترض أنَّ $r = 6371$ km).

31 إذا كان: $f(x) = 9\ln x + \frac{1}{2x^2}$، فأُثبِت أنَّ $f'(x) = \frac{(3x-1)(3x+1)}{x^3}$.

يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: $F(x)$، و $G(x)$.



إذا كان: $P(x) = F(x)G(x)$، وكان: $Q(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

32 $P'(2)$

33 $Q'(7)$

مهارات التفكير العليا

تبرير: إذا كان: $y = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

34 أجد ميل المماس عند نقطة الأصل.

35 أُبيِّن عدم وجود مماس أفقي للاقتران y، مُبرِّرًا إجابتي.

تحدٍّ: إذا كان: $y = \frac{x+1}{x-1}$، حيث: $x \neq 1$، فأُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

36 أجد $\frac{dy}{dx}$.

37 أُعيد كتابة المعادلة بالنسبة إلى المُتغيِّر x (x اقتران بالنسبة إلى y)، ثم أجد $\frac{dx}{dy}$.

38 أُبيِّن أنَّ $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

تبرير: إذا كان: $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

39 أُثبِت أنَّ $f''(x) = \frac{6\ln x - 5}{x^4}$، مُبرِّرًا إجابتي.

40 أجد قيمة المقدار: $x^4 f''(x) + 4x^3 f'(x) + 2x^2 f(x) + 1$.

الدرس الثالث

مثال 1

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = \cos 2x$ 2) $f(x) = e^{(x+x^2)}$ 3) $f(x) = \ln(\sin x)$

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \tan 3x^2$ b) $f(x) = e^{\ln x}$ c) $f(x) = \ln(\cot x)$

مثال 2

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$ 2) $f(x) = \tan^4 x$ 3) $f(x) = \sqrt{\ln x}$

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \sqrt[5]{(x^2-1)^2}$ b) $f(x) = \sqrt{\cos x}$ c) $f(x) = (\ln x)^5$

مثال 3

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = e^{\csc 4x}$ 2) $f(x) = \sin(\tan\sqrt{3x^2+4})$

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \cos^2(7x^3 + 6x - 1)$ b) $f(x) = (2 + (x^2+1)^4)^3$

مثال 4

1) أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = e^{-0.2x}\sin 4x$ عندما $x = \frac{\pi}{8}$.

2) أجد ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = \left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)^2$ عندما $x = 0$.

أتحقَّق من فهمي

a) أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = (2x+1)^5(x^3-x+1)^4$ عندما $x = 1$.

b) أجد ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = \frac{\cos^2 x}{e^{2x}}$ عندما $x = \frac{\pi}{2}$

مثال 5 : من الحياة

أعمال: طرحت إحدى الشـــركات مُنتَجًا جديدًا في الأسواق، ثم رصدت عدد القطع المَبيعة منذ طرحه.

إذا مثَّــل الاقتــران: $t > 0$ ، $N(t) = \frac{250000\, t^2}{(2t+1)^2}$ عــدد القطع المَبيعة منذ طرحه، حيث t الزمن بالأسابيع، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

1 أجد مُعدَّل تغيُّر عدد القطع المَبيعة بالنسبة إلى الزمن.

2 أجد $N'(52)$، مُفسِّرًا معنى الناتج.

أتحقَّق من فهمي

قيمة بدل الخدمة لأحد المُنتَجات تُحسَب بالدينار، باستعمال الاقتران: $U(x) = 80\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}$، حيث x عدد القطع المَبيعة من المُنتَج.

a) أجد مُعدَّل تغيُّر قيمة بدل الخدمة بالنسبة إلى عدد القطع المَبيعة من المُنتَج.

b) أجد $U'(20)$، مُفسِّرًا معنى الناتج.

مثال 6

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

3 $f(x) = e^{3x} + 2^{3x}$

2 $f(x) = 6^{x^2}$

1 $f(x) = 8^{5x}$

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

c) $f(x) = e^{4x} + 4^{2x}$

b) $f(x) = 6^{1-x^3}$

a) $f(x) = \pi^{\pi x}$

مثال 7

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

2 $f(x) = \log_2\left(\frac{x^2}{x-1}\right)$

1 $f(x) = \log \cos x$

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

b) $f(x) = \log_8 (x^2 + 3x)$

a) $f(x) = \log \sec x$

مثال 8

أجد معادلة مماس منحنى المعادلة الوسيطية الآتية، عندما: $t=\frac{\pi}{4}$:

$$x=2\sin t,\quad y=3\cos t,\quad 0\le t\le 2\pi$$

أتحقَّق من فهمي

أجد معادلة مماس منحنى المعادلة الوسيطية الآتية، عندما: $t=\frac{\pi}{4}$:

$$x=\sec t,\quad y=\tan t\quad -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$$

أتدرّب وأحُلّ المسائل

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1. $f(x)=e^{4x+2}$
2. $f(x)=50e^{2x-10}$
3. $f(x)=\cos(x^2-3x-4)$
4. $f(x)=10x^2e^{-x^2}$
5. $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x}}$
6. $f(x)=x^2\tan\frac{1}{x}$
7. $f(x)=3x-5\cos(\pi x)^2$
8. $f(x)=\ln\left(\frac{1+e^x}{1-e^x}\right)$
9. $f(x)=(\ln x)^4$
10. $f(x)=\sin\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{\sin x}$
11. $f(x)=\sqrt[5]{x^2+8x}$
12. $f(x)=\frac{3^{2x}}{x}$
13. $f(x)=2^{-x}\cos\pi x$
14. $f(x)=\frac{10\log_4 x}{x}$
15. $f(x)=\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$
16. $f(x)=\log_3(1+x\ln x)$
17. $f(x)=e^{\sin 2x}+\sin(e^{2x})$
18. $f(x)=\tan^4(\sec(\cos x))$

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

19. $f(x)=4e^{-0.5x^2},\ x=-2$
20. $f(x)=x+\cos 2x,\ x=0$
21. $f(x)=2^x,\ x=0$
22. $f(x)=\sqrt{x+1}\sin\frac{\pi x}{2},\ x=3$

23. إذا كان: $A(x)=f(g(x))$، وكان: $f(-2)=8, f'(-2)=4, f'(5)=3, g(5)=-2, g'(5)=6$، فأجد $A'(5)$.

24. إذا كان: $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$، فأُثبِت أنَّ $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

بكتيريا: يُمثِّل الاقتران: $A(t) = Ne^{0.1t}$ عدد الخلايا البكتيرية بعد t ساعة في مجتمع بكتيري:

25 أجد مُعدَّل نمو المجتمع بعد 3 ساعات بدلالة الثابت N.

26 إذا كان مُعدَّل نمو المجتمع بعد k ساعة هو 0.2 خلية لكل ساعة، فما قيمة k بدلالة الثابت N؟

أجد المشتقة العليا المطلوبة في كلٍّ ممّا يأتي:

29 $f(x) = \cos x^2, f''(x)$

28 $f(x) = \cos(2x+1), f^{(5)}(x)$

27 $f(x) = \sin \pi x, f'''(x)$

30 إذا كان الاقتران: $y = e^{\sin x}$، فأجد ميل مماس منحنى الاقتران عند النقطة $(0, 1)$.

31 مواد مُشِعَّة: يُمكِن نمذجة الكمية A (بالغرام) المتبقية من عيِّنةٍ كتلتها الابتدائية 20 g من عنصر البلوتونيوم بعد t يومًا باستعمال الاقتران: $A(t) = 20\left(\frac{1}{2}\right)^{t/140}$. أجد مُعدَّل تحلُّل عنصر البلوتونيوم عندما $t = 2$.

زنبرك: تتحرَّك كرة مُعلَّقة بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل، ويُحدِّد الاقتران: $s(t) = 0.1 \sin 2.4t$، موقع الكرة عند أيِّ زمن لاحق، حيث t الزمن بالثواني، و s الموقع بالسنتيمترات:

32 أجد السرعة المتجهة للكرة عندما $t = 1$.

34 أجد موقع الكرة عندما يكون تسارعها صفرًا.

33 أجد موقع الكرة عندما تكون سرعتها المتجهة صفرًا.

أجد معادلة المماس لمنحنى كل معادلة وسيطية ممّا يأتي عند النقطة المُحدَّدة بقيمة t المعطاة:

36 $x = \frac{t}{2}, y = t^2 - 4, t = -1$

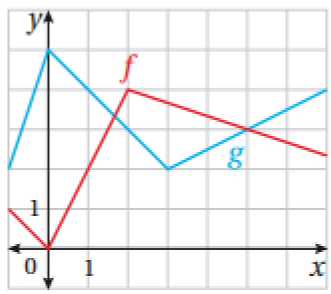
35 $x = t + 2, y = t^2 - 1, t = 1$

38 $x = \sec^2 t - 1, y = \tan t, t = -\frac{\pi}{4}$

37 $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, t = \frac{\pi}{3}$

39 يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية: $x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t)$، حيث: $0 \le t \le 2\pi$. أُثبِت أنَّ ميل المماس وميل العمودي على المماس لمنحنى هذه العلاقة عندما $t = \frac{\pi}{4}$ هما $1 + \sqrt{2}$، و $1 - \sqrt{2}$ على الترتيب.

يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين $f(x)$ و $g(x)$. إذا كان: $h(x)=f(g(x))$، وكان: $p(x)=g(f(x))$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:



40) $h'(1)$

41) $p'(1)$

مهارات التفكير العليا

تبرير: إذا كان الاقتران: $y=\ln(ax+b)$، حيث a و b ثابتان موجبان، وكان ميل المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة P هو 1، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

42) أُثبِت أنَّ الإحداثي x للنقطة P أقل من 1

43) أجد إحداثيي النقطة التي يكون عندها ميل المماس $\frac{1}{2}$، علمًا بأنَّ P هي النقطة $(0, 2)$، ثم أُبرِّر إجابتي.

تبرير: يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية: $x=t^2\,, y=2t$:

44) أجد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة t.

45) أجد معادلة العمودي على مماس المنحنى عند النقطة $(t^2\,, 2t)$.

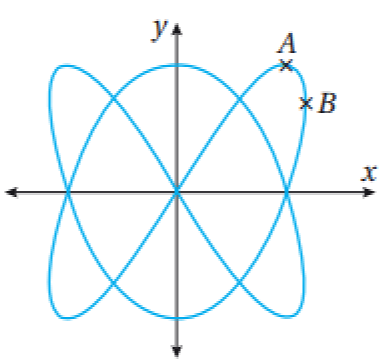
46) أُثبِت أنَّ مساحة المثلث المُكوَّن من العمودي على المماس، والمحورين الإحداثيين، هي $\frac{1}{2}|t|\,(2+t^2)^2$.

تحدٍّ: أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

47) $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$

48) $y=e^x\sin^2 x\cos x$

تحدٍّ: يُبيِّن الشكل المجاور منحنى المعادلة الوسيطية:



$$x=\sin 2t,\quad y=\sin 3t,\quad 0\le t\le 2\pi$$

49) إذا كان مماس منحنى المعادلة أفقيًّا عند النقطة A الواقعة في الربع الأوَّل، فأجد إحداثيي A.

50) إذا كان مماس المنحنى موازيًا للمحور y عند النقطة B، فأجد إحداثيي B.

51) إذا مَرَّ فرعان من المنحنى بنقطة الأصل كما هو مُوضَّح في الشكل، فأجد ميل المماس لكلٍّ منهما عند هذه النقطة.

تبريـــر: يُمثِّل الاقتران: $s(t) = \ln(t^2 - 2t + 1.9),\ t \geq 0$ موقع جُسَــيْم يتحرَّك في مســـار مســـتقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني:

52 أجد سرعة الجُسَيْم المتجهة وتسارعه بعد t ثانية.

53 أجد موقع الجُسَيْم وتسارعه عندما تكون سرعته المتجهة صفرًا.

54 متى يعود الجُسَيْم إلى موقعه الابتدائي؟

الدرس الرابع

مثال 1

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

1) $x^2 + y^2 = 4$

2) $\sin x + \cos y = 2x - 3y$

أتحقَّق من فهمي

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

a) $x^2 + y^2 = 13$

b) $2x + 5y^2 = \sin y$

مثال 2

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

1) $2xy - y^3 = 1$

2) $\sin(x+y) = y^2 \cos x$

3) $y^2 = \frac{x-1}{x+1}$

أتحقَّق من فهمي

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

a) $3xy^2 + y^3 = 8$

b) $\tan(x-y) = 2xy^3 + 1$

c) $x^2 = \frac{x-y}{x+y}$

مثال 3

1) أجد ميل مماس منحنى العلاقة: $e^{2x} \ln y = x + y - 2$ عند النقطة $(1, 1)$.

2) أجد ميل مماس منحنى العلاقة: $y^2 = x$ عندما $x = 4$.

أتحقَّق من فهمي

a) أجد ميل مماس منحنى العلاقة: $y^2 = \ln x$ عند النقطة $(e, 1)$.

b) أجد ميل مماس منحنى العلاقة: $(y-3)^2 = 4(x-5)$ عندما $x = 6$.

مثال 4

أجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة: $x^2 - xy + y^2 = 7$ عند النقطة $(-1, 2)$.

أتحقَّق من فهمي

أجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة: $x^3 + y^3 - 3xy = 17$ عند النقطة $(2, 3)$.

مثال 5

إذا كان: $2x^3 - 3y^2 = 8$، فأجد $\frac{d^2y}{dx^2}$.

أتحقّق من فهمي

إذا كان: $xy + y^2 = 2x$، فأجد $\frac{d^2y}{dx^2}$.

مثال 6

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطية الآتية عندما $t = 1$:

$$x = t^3 + 3t^2, y = t^4 - 8t^2$$

أتحقّق من فهمي

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطية الآتية عندما $t = 2$:

$$x = 3t^2 + 1, y = t^3 - 2t^2$$

مثال 7

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي:

1) $y = x^x$

2) $y = \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+9}}$

أتحقّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي:

a) $y = x^{\sqrt{x}}$

b) $y = \sqrt{\frac{x-1}{x^4+1}}$

أتدرّب وأحلّ المسائل

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

1) $x^2 - 2y^2 = 4$

2) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{10}$

3) $(x^2 + y^2)^2 = 50(x^2 - y^2)$

4) $e^x y = xe^y$

5) $3^x = y - 2xy$

6) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$

7) $x = \sec \frac{1}{y}$

8) $(\sin \pi x + \cos \pi y)^2 = 2$

9) $\frac{x}{y^2} + \frac{y^2}{x} = 5$

10) $x + y = \cos(xy)$

11) $x^2 + y^2 = \ln(x+y)^2$

12) $\sin x \cos y = x^2 - 5y$

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي عند القيمة المعطاة:

13) $2y^2 + 2xy - 1 = 0, x = \frac{1}{2}$

14) $y^3 + 2x^2 = 11y,\ y = 1$

أجد ميل المماس لمنحنى كل علاقة ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

15) $x^2 + y^2 = 25, (3, -4)$

16) $x^2 y = 4(2 - y), (2, 1)$

17) $e^{\sin x} + e^{\cos y} = e + 1, \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

18) $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 5, (8, 1)$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

19 $x^2 + xy + y^2 = 13, (-4, 3)$

20 $x + y - 1 = \ln(x^2 + y^2), (1, 0)$

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

21 $x + y = \sin y$

22 $4y^3 = 6x^2 + 1$

23 $xy + e^y = e$

24 أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة: $(x-6)(y+4) = 2$ عند النقطة $(7, -2)$.

25 أُثبِت أنَّ لمنحنى العلاقة: $3x^2 + 2xy + y^2 = 6$ مماسين أفقيين، ثم أجد إحداثيي نقطتي التماس.

26 أجد إحداثيي نقطة على المنحنى: $x + y^2 = 1$، بحيث يكون عندها مماس المنحنى موازيًا للمستقيم: $x + 2y = 0$.

27 أجد إحداثيي نقطة (نقاط) على المنحنى: $y^3 = x^2$، بحيث يكون عندها مماس المنحنى عموديًّا على المستقيم: $y + 3x - 5 = 0$.

28 إذا كان: $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = 10$، حيث: $x \neq y \neq 0$، فأُثبِت أنَّ $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$.

29 أجد إحداثيي النقطة على منحنى الاقتران: $y = x^{1/x}, x > 0$، التي يكون عندها ميل المماس صفرًا.

30 أجد إحداثيات جميع النقاط على منحنى الدائرة: $x^2 + y^2 = 100$، التي يكون عندها ميل المماس $\frac{3}{4}$.

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^{1/t}, t > 0$ موقع جُسَيْم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني:

31 أجد سرعة الجُسَيْم المتجهة وتسارعه.

32 أجد تسارع الجُسَيْم عندما تكون سرعته المتجهة صفرًا.

أجد مشتقة كلٍّ من الاقترانات الآتية باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي:

33 $y = (x^2 + 3)^x$

34 $y = \frac{(x^4 + 1)\sqrt{x+2}}{2x^2 + 2x + 1}$

35 $y = \sqrt{x^2 (x+1)(x+2)}$

36 $y = x^{\sin x}$

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل معادلة وسيطية ممّا يأتي عند قيمة t المعطاة:

37 $x = \sin t, y = \cos t, \ t = \frac{\pi}{4}$

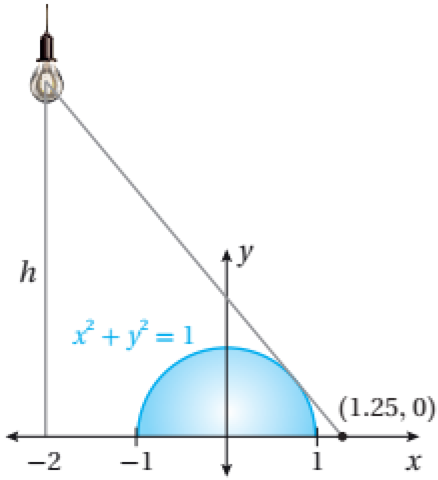
38 $x = e^{-t}, \ y = t^3 + t + 1, t = 0$

إذا كانت العلاقة: $x^3 + y^3 = 6xy$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

39 أجد معادلة المماس عند نقطة تقاطع منحنى المعادلة مع منحنى $y = x$ في الربع الأوَّل.

40 أجد إحداثيي نقطة على منحنى العلاقة في الربع الأوَّل، بحيث يكون عندها مماس المنحنى أفقيًّا.

41 **مصباح:** **يُبيِّن الشـكل المجاور مصباحًا على ارتفاع h وحدة مـن المحـور x. إذا وقعـت النقطـة $(1.25, 0)$ فـي نهاية** الشـعاع الصادر من المصباح، الذي يمـسُّ منحنى العلاقة: $x^2 + y^2 = 1$، فأجد ارتفاع المصباح h.



مهارات التفكير العليا

تبرير: إذا كان: $x^2 - y^2 = 1$، فأُجيب عن الأسئلة الأربعة الآتية تباعًا:

42 أجد $\frac{dy}{dx}$.

43 يُمكِن التعبير عن منحنى العلاقة: $x^2 - y^2 = 1$ بالمعادلة الوسيطية: $x = \sec t, y = \tan t$، حيث: $0 \leq t \leq 2\pi$. أستعمل هذه الحقيقة لإيجاد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة t.

44 أُثبِت أنَّ المقدارين الجبريين اللذين يُمثِّلان $\frac{dy}{dx}$ الناتجين في الفرعين السابقين متكافئان، مُبرِّرًا إجابتي.

45 أجد إحداثيات النقاط التي يكون عندها ميل المماس 2.

46 **تبرير:** إذا مثَّل l أيَّ مماس لمنحنى المعادلة: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{k}$، حيث k ثابت موجب، فأُثبِت أنَّ مجموع المقطع x والمقطع y للمستقيم l يساوي k، مُبرِّرًا إجابتي.

47 **تحـدٍّ:** إذا كان مماس منحنى الاقتران: $y = x^{\sqrt{x}}$ عند النقطة $(4, 16)$ يقطع المحور x في النقطة B، والمحور y في النقطة C، فأجد مساحة ΔOBC، حيث O نقطة الأصل.

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 3 + \sin t$ حركة توافقية بسيطة لجُسَيْم. إحدى الآتية تُمثِّل الزمن الذي تكون عنده سرعة الجُسَيْم المتجهة صفرًا:

a) $t = 0$ b) $t = \frac{\pi}{4}$

c) $t = \frac{\pi}{2}$ d) $t = \pi$

2 إذا كان: $y = uv$، وكان:

$u(1) = 2, u'(1) = 3, v(1) = -1, v'(1) = 1$،

فإنَّ $y'(1)$ تساوي:

a) 1 b) -1 c) 1 d) 4

3 إذا كان: $f(x) = x - \frac{1}{x}$، فإنَّ $f''(x)$ هو:

a) $1 + \frac{1}{x^2}$ b) $1 - \frac{1}{x^2}$

c) $\frac{2}{x^3}$ d) $-\frac{2}{x^3}$

4 إذا كان: $y = \tan 4t$، فإنَّ $\frac{dy}{dt}$ هو:

a) $4 \sec 4t \tan 4t$ b) $\sec 4t \tan 4t$

c) $\sec^2 (4t)$ d) $4 \sec^2 (4t)$

5 إذا كان: $y^2 - x^2 = 1$، فإنَّ ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة $(1, \sqrt{2})$ هو:

a) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $-\sqrt{2}$

c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ d) $\sqrt{2}$

6 إذا كان: $f(x) = \log (2x - 3)$، فإنَّ $f'(x)$ هو:

a) $\frac{2}{(2x-3)\ln 10}$ b) $\frac{2}{(2x-3)}$

c) $\frac{1}{(2x-3)\ln 10}$ d) $\frac{1}{(2x-3)}$

7 إذا كان: $y = 2^{1-x}$، فإنَّ ميل المماس لمنحنى العلاقة عندما $x = 2$ هو:

a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{\ln 2}{2}$ d) $-\frac{\ln 2}{2}$

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

8 $f(x) = e^x (x + x\sqrt{x})$

9 $f(x) = \frac{x}{\tan x}$

10 $f(x) = \frac{1}{x} - 12 \sec x$

11 $f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$

12 $f(x) = \frac{\ln x}{x^4}$

13 $f(x) = 5^{2-x}$

14 $f(x) = 10 \sin 0.5x$

15 $f(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^3 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$

16 $f(x) = e^{-1.5x} \cos x^2$

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عندما $x = 2$، وكان: $f(2) = 3, f'(2) = -4, g(2) = 1, g'(2) = 2$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

17 $(fg)'(2)$

18 $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$

19 $(3f - 4fg)'(2)$

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي:

20 $f(x) = x^7 \ln x$

21 $f(x) = \frac{\cos x}{x}$

22 $f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{x}}$

23 $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند القيمة المعطاة:

24 $f(x) = \frac{x^2}{1+x}, x = 1$

25 $f(x) = \frac{x^2}{\cos x}, x = \frac{\pi}{4}$

26 $f(x) = \ln (x+5), x = 0$

27 $f(x) = \sin x + \sin 3x, x = \frac{\pi}{4}$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل معادلة وسيطية ممّا يأتي عند النقطة المُحدَّدة بقيمة t المعطاة:

28 $x = t^2, y = t+2, t = 4$

29 $x = 4\cos t, y = 3\sin t, t = \frac{\pi}{4}$

إذا كان: $y = x \ln x$، حيث: $x > 0$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

30 أجد معادلة المماس عند النقطة $(1, 0)$.

31 أجد إحداثيي النقطة التي يكون ميل المماس عندها 2.

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

32 $x(x+y) = 2y^2$

33 $x = \frac{2y}{x^2 - y}$

34 $y\cos x = x^2 + y^2$

35 $2xe^y + ye^x = 3$

36 أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة: $y^2 = \frac{x^3}{2-x}$ عند النقطة $(1, -1)$.

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي:

37 $y = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$

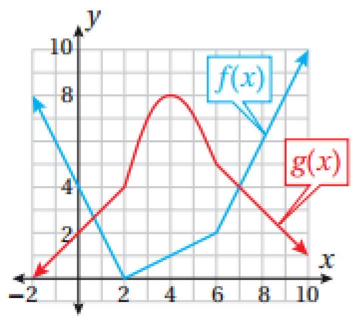
38 $y = x^{\ln x}$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

39 $x^2 + 3xy + y^2 = x + 3y, (2, -1)$

40 $x^2 e^y = 1, (1, 0)$

يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: $f(x)$، و $g(x)$. إذا كان: $p(x) = f(x)g(x)$، وكان: $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:



41 $p'(1)$

42 $p'(4)$

43 $q'(7)$

44 مواد مُشِعَّة: يُمكِن نمذجة الكمية R (بالغرام) المتبقية من عيِّنةٍ كتلتها 200 g من عنصر مُشِعٍّ بعد t يومًا باستعمال الاقتران: $R(t) = 200(0.9)^t$. أجد $\frac{dR}{dt}$ عندما $t = 2$.

45 يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 10 + \frac{1}{4}\sin(10\pi t)$ موقع جُسَيْم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالسنتيمترات، و t الزمن بالثواني. أجد سرعة الجُسَيْم المتجهة وتسارعه بعد t ثانية.

اجابات كتاب الطالب

وحدة التفاضل

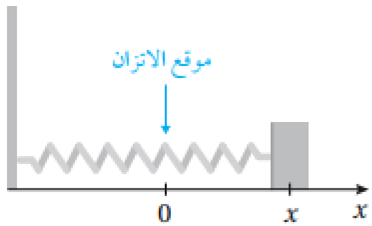
اعداد

المركز الوطني لتطوير المناهج

National Center for Curriculum Development

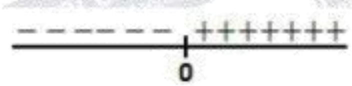
الدرس الأول: الاشتقاق

مسألة اليوم يهتزُّ جسم مُثبَّت في زنبرك أفقيًّا على سطح أملس كما في الشكل المجاور. ويُمثِّل الاقتران: $x(t) = 8 \sin t$ موقع الجسم، حيث t الزمن بالثواني، و x الموقع بالسنتيمترات:



1) أجد موقع الجسم، وسرعته المتجهه، وتسارعه عندما $t = \frac{2}{3}$.

2) في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = \frac{2}{3}$؟

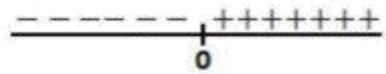
	مسألة اليوم صفحة 8
1	$x(t) = 8\sin t \quad \rightarrow x\left(\frac{2}{3}\right) = 8\sin\left(\frac{2}{3}\right) \approx 4.95\ cm$ $v(t) = \frac{dx}{dt} = 8\cos t \quad \rightarrow v\left(\frac{2}{3}\right) = 8\cos\left(\frac{2}{3}\right) \approx 6.29\ cm/s$ $a(t) = \frac{dv}{dt} = -8\sin t \quad \rightarrow a\left(\frac{2}{3}\right) = -8\sin\left(\frac{2}{3}\right) \approx -4.95\ cm/s^2$
2	بما أن إشارة السرعة المتجهة موجبة، فإن الجسم يتحرك لليمين عندما $t = \frac{2}{3}$
	أتحقق من فهمي صفحة 11
a	$f'(2) = \lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ $= \lim_{h\to0}\frac{\lvert(2+h)-2\rvert-0}{h}$ $= \lim_{h\to0}\frac{\lvert h\rvert}{h}$  $f'_{+}(2) = \lim_{h\to0^+}\frac{h}{h} = 1$ $f'_{-}(2) = \lim_{h\to0^-}\frac{-h}{h} = -1$ بما أن النهايتين من اليمين واليسار غير متساويتين، فإن $f'(2)$ غير موجودة أي إن f غير قابل للاشتقاق عند $x = 2$

b	$f'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$ $= \lim_{h\to 0} \frac{((-1+h)+1)^{\frac{1}{5}} - 0}{h}$ $= \lim_{h\to 0} \frac{h^{\frac{1}{5}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\frac{4}{5}}} = \infty$ بما أن النهاية تؤول إلى ما لانهاية، فإن $f'(-1)$ غير موجودة أي إن f غير قابل للاشتقاق عند $x = -1$
	أتحقق من فهمي صفحة 12
	الاقتران f غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_2, x = x_4, x = x_5$ لأن لمنحناه رأس حاد أو زاوية عند هذه النقاط، وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_7, x = x_8$ لأنه غير متصل عندهما
	أتحقق من فهمي صفحة 14
a	$f(x) = 5e^x + 3$ $f'(x) = 5e^x$
b	$f(x) = \sqrt{x} - 4e^x = x^{\frac{1}{2}} - 4e^x$ $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 4e^x = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 4e^x$
c	$f(x) = 8e^x + \frac{4}{\sqrt[5]{x}} = 8e^x + 4x^{-\frac{1}{5}}$ $f'(x) = 8e^x - \frac{4}{5}x^{-\frac{6}{5}} = 8e^x - \frac{4}{5\sqrt[5]{x^6}}$
	أتحقق من فهمي صفحة 16
a	$f(x) = \sqrt{x} + \ln(4x) = x^{\frac{1}{2}} + \ln 4 + \ln x$ $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$

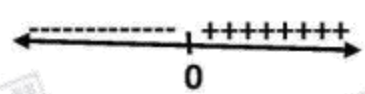
b	$f(x)=\ln(2x^3)=\ln 2+3\ln x$ $f'(x)=\frac{3}{x}$
	أتحقق من فهمي صفحة 18
a	$y=\frac{\sin x}{2}+3\cos x=\frac{1}{2}\sin x+3\cos x$ $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\cos x-3\sin x$
b	$f(x)=x^2+\cos x+\sin\frac{\pi}{2}$ $f'(x)=2x-\sin x$
	أتحقق من فهمي صفحة 19
a	$f(x)=\ln\sqrt{x}=\frac{1}{2}\ln x \quad\rightarrow\quad f'(x)=\frac{1}{2x}$ ميل المماس عند النقطة $\left(e,\frac{1}{2}\right)$ هو: $f'(e)=\frac{1}{2e}$ معادلة المماس عند النقطة $\left(e,\frac{1}{2}\right)$ هي: $y-\frac{1}{2}=\frac{1}{2e}(x-e)$ $y=\frac{1}{2e}x$
b	بما أن ميل المماس عند النقطة $\left(e,\frac{1}{2}\right)$ هو $\frac{1}{2e}$ إذن ميل العمودي على المماس عندها هو $-2e$ معادلة العمودي على المماس عند النقطة $\left(e,\frac{1}{2}\right)$ هي: $y-\frac{1}{2}=-2e(x-e)$ $y=-2ex+2e^2+\frac{1}{2}$
	أتحقق من فهمي صفحة 22
a	$s(t)=t^2-7t+8$ $v(t)=2t-7 \quad\rightarrow v(4)=1\ m/s$ $a(t)=2 \quad\rightarrow a(4)=2\ m/s^2$

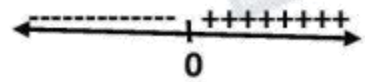
b	$v(t) = 2t - 7 = 0 \rightarrow t = \frac{7}{2}\ s$
c	$v(2) = -3\ m/s$ بما أن إشارة السرعة المتجهة سالبة، فإن الجسم يتحرك لليسار عندما $t = 2$
d	الموقع الابتدائي للجسم: $s(0) = 8\ m$ $s(t) = 8 \rightarrow t^2 - 7t + 8 = 8 \rightarrow t^2 - 7t = 0$ $t(t-7) = 0 \rightarrow t = 0\ or\ t = 7$ إذن يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي عندما $t = 7\ s$
	أتحقق من فهمي صفحة 24
a	$s(t) = 7\sin t$ $v(t) = 7\cos t$ $a(t) = -7\sin t$
b	بالنظر لاقتران الموقع $s(t)$ فإن قيم s تنحصر بين $\pm 7\ m$ وهذا يعني أن الجسم يتحرك بمرور الزمن صعودًا وهبوطًا بين الموقعين $s = -7\ m, s = 7\ m$ ، ويمر بنقطة الاتزان عند $s = 0$ قيم t التي تحقق $s(t) = 0$ وهي $t = n\pi\ s$ حيث n أي عدد صحيح غير سالب. تتغير سرعة الجسم بمرور الزمن وتتراوح بين القيمتين $\pm 7\ m/s$ ويكون مقدار سرعة الجسم أكبر ما يمكن $\lvert 7\cos t \rvert = 7$ عندما $\cos t = \pm 1$ وذلك عندما $t = n\pi$ (نفسها لحظات مرور الجسم بنقطة الاتزان)، بينما تكون سرعة الجسم صفرًا (يسكن لحظيًا) عندما يكون الجسم في أقصى بعد له عن نقطة الاتزان $\lvert s(t) \rvert = 7 \rightarrow v(t) = 0$ (اللحظات $t = \frac{n\pi}{2}$ حيث n عدد فردي موجب) نلاحظ أن قيمة تسارع الجسم عند كل لحظة هي معكوس قيمة موقعه وأن التسارع ينعدم لحظة مرور الجسم بنقطة الاتزان، وهي اللحظة التي تكون محصلة القوى المؤثرة على الجسم فيها صفرًا.

أتدرب وأحل المسائل صفحة 24

1	$f'(5)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h}$ $=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\lvert(5+h)-5\rvert-0}{h}$ $=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\lvert h\rvert}{h}$  $f'_{+}(5)=\lim\limits_{h\to 0^{+}}\frac{h}{h}=1$ $f'_{-}(5)=\lim\limits_{h\to 0^{-}}\frac{-h}{h}=-1$ بما أن النهايتين من اليمين واليسار غير متساويتين، فإن $f'(5)$ غير موجودة أي إن f غير قابل للاشتقاق عند $x=5$
2	$f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ $=\lim\limits_{h\to 0}\frac{(h)^{\frac{2}{5}}-0}{h}$ $=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h^{\frac{2}{5}}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^{\frac{3}{5}}}$ $f'_{+}(0)=\infty$ $f'_{-}(0)=-\infty$ $f'(0)$ غير موجودة إذن f غير قابل للاشتقاق عند $x=0$
3	$f'_{+}(1)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ $=\lim\limits_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-2(1+h)-1}{h}$ $=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1+2h+h^2-2-2h-1}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h^2-2}{h}=-\infty$ $f'_{+}(1)$ غير موجودة إذن f غير قابل للاشتقاق عند $x=1$

<table>
<tr><td>4</td><td>$f'(4) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}$
$= \lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{3}{4+h}-\frac{3}{4}}{h}$
$= \lim\limits_{h\to 0}\frac{12-12-3h}{4h(4+h)} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{-3}{4(4+h)} = \frac{-3}{16}$
$f'(4)$ موجودة إذن f قابل للاشتقاق عند $x = 4$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$f'(6) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(6+h)-f(6)}{h}$
$= \lim\limits_{h\to 0}\frac{(6+h-6)^{\frac{2}{3}}-0}{h}$
$= \lim\limits_{h\to 0}\frac{(h)^{\frac{2}{3}}}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^{\frac{1}{3}}}$
$f'_{+}(6) = \infty$
$f'_{-}(6) = -\infty$
$f'(6)$ غير موجودة إذن f غير قابل للاشتقاق عند $x = 6$</td></tr>
<tr><td>6</td><td>$f'(4) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}$
$= \lim\limits_{h\to 0}\frac{4+h+1-3}{h}$
$= \lim\limits_{h\to 0}\frac{h+2}{h}$
++++++++ ------------ ++++++++
-2 0
$f'_{+}(4) = \infty$
$f'_{-}(4) = -\infty$
$f'(4)$ غير موجودة إذن f غير قابل للاشتقاق عند $x = 4$</td></tr>
</table>

7	الاقتران f غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_3, x = x_4, x = x_6$ لأن لمنحناه رأس حاد أو زاوية عند هذه النقاط. وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_0$ لأنه غير متصل عندها، وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_{12}$ نظرًا لوجود مماس رأسي عند هذه النقطة
8	الاقتران g غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_3$ لأن لمنحناه زاوية عند هذه النقطة. وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_1, x = x_2, x = x_4$ لأنه غير متصل عندها
9	$f(x) = \dfrac{x-8}{x^2-4x-5}$ f اقتران نسبي منحناه متصل وأملس عند جميع نقاطه باستثناء أصفار مقامه، $x^2-4x-5=0 \ \rightarrow \ (x-5)(x+1)=0 \ \rightarrow x=5 \ or \ x=-1$ f غير متصل عند $x=-1$, $x=5$ إذن غير قابل للاشتقاق عندها.
10	$f(x) = \sqrt[3]{3x-6}$ $f'(x) = \dfrac{1}{3}(3x-6)^{-\frac{2}{3}}(3) = \dfrac{1}{(3x-6)^{\frac{2}{3}}}$ $f'(x)$ موجودة عند جميع قيم x الحقيقية عدا أصفار مقامها، إذن f غير قابل للاشتقاق عند $x=2$
11	$f(x) = \lvert x^2-9 \rvert = \begin{cases} 9-x^2, -3<x<3 \\ x^2-9, x \le -3 \ or \ x \ge 3 \end{cases}$ نبحث قابلية الاشتقاق عند $x=3$ و $x=-3$: $f'(3) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}$ $= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\lvert (3+h)^2-9 \rvert - 0}{h}$ $= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\lvert 6h+h^2 \rvert}{h}$  $f'_+(3) = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{6h+h^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} (6+h) = 6$ $f'_-(3) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{-6h-h^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} (-6-h) = -6$ بما أن النهايتين من اليمين واليسار غير متساويتين، فإن $f'(3)$ غير موجودة أي إن f غير قابل للاشتقاق عند $x=3$

	$f'(-3) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-3+h) - f(-3)}{h}$ $= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\lvert(-3+h)^2 - 9\rvert - 0}{h}$ $= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\lvert 6h - h^2\rvert}{h}$  $f'_{+}(-3) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{6h-h^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} (6-h) = 6$ $f'_{-}(-3) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{-6h+h^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} (-6+h) = -6$ بما أن النهايتين من اليمين واليسار غير متساويتين، فإن $f'(-3)$ غير موجودة أي إن f غير قابل للاشتقاق عند $x = -3$ إذن f غير قابل للاشتقاق عند $x = 3, x = -3$
12	$f(x) = x\lvert x\rvert$ $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h}$ $= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h\lvert h\rvert - 0}{h}$ $= \lim\limits_{h\to 0} \lvert h\rvert$ $\lvert h\rvert = \begin{cases} -h, h < 0 \\ h, h \geq 0 \end{cases}$ $f'_{+}(0) = \lim\limits_{h\to 0} h = 0$ $f'_{-}(0) = \lim\limits_{h\to 0} (-h) = 0$ بما أن النهايتين من اليمين واليسار متساويتان، إذن $f'(0)$ موجودة
13	$f'(x) = 2\cos x - e^x$
14	$f'(x) = \dfrac{1}{4x} + \pi \sin x$
15	$f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x^3}\right) + x^4$ $= \ln 1 - \ln x^3 + x^4$ $= -3\ln x + x^4$ $f'(x) = -\dfrac{3}{x} + 4x^3$

16	$f(x) = e^{x+1} + 1 = e \times e^x + 1$ $f'(x) = e \times e^x = e^{x+1}$
17	$f'(x) = e^x + ex^{e-1}$
18	$f(x) = \ln\left(\frac{10}{x^n}\right)$ $= \ln 10 - \ln x^n = \ln 10 - n \ln x$ $f'(x) = -n\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{n}{x}$
19	$f'(x) = \cos x + \frac{1}{2}e^x$ ميل المماس عند النقطة $\left(\pi, \frac{1}{2}e^\pi\right)$: $f'(\pi) = \cos\pi + \frac{1}{2}e^\pi = -1 + \frac{1}{2}e^\pi$ معادلة المماس عند النقطة $\left(\pi, \frac{1}{2}e^\pi\right)$: $y - \frac{1}{2}e^\pi = \left(-1 + \frac{1}{2}e^\pi\right)(x - \pi)$ $y = \left(-1 + \frac{1}{2}e^\pi\right)x + \pi - \frac{\pi}{2}e^\pi + \frac{1}{2}e^\pi$
20	بما أن ميل المماس عند النقطة $\left(\pi, \frac{1}{2}e^\pi\right)$ هو $-1 + \frac{1}{2}e^\pi$ ، فإن ميل العمودي على المماس هو $\frac{-1}{-1+\frac{1}{2}e^\pi} = \frac{-2}{-2+e^\pi} = \frac{2}{2-e^\pi}$ معادلة العمودي على المماس هي: $y - \frac{1}{2}e^\pi = \frac{2}{2-e^\pi}(x - \pi) \quad \rightarrow y = \frac{2}{2-e^\pi}x - \frac{2\pi}{2-e^\pi} + \frac{1}{2}e^\pi$
21	$f(x) = e^x - 2x \quad \rightarrow f'(x) = e^x - 2$ $f'(x) = 0 \quad \rightarrow e^x = 2 \quad \rightarrow x = \ln 2 \approx 0.69$
22	$f(x) = \sin x + \cos x \rightarrow f'(x) = \cos x - \sin x$ عندما $x = \pi$، فإن: $y = f(\pi) = \sin\pi + \cos\pi = -1$ ميل المماس عند النقطة $(\pi, -1)$ هو: $f'(\pi) = \cos\pi - \sin\pi = -1$ بما أن ميل المماس هو -1 إذن ميل العمودي على المماس هو 1 معادلة العمودي على المماس: $y + 1 = 1(x - \pi) \quad \rightarrow y = x - \pi - 1$ الإجابة الصحيحة هي b
23	$f(x) = \ln kx = \ln k + \ln x$ $f'(x) = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$

24	$f'(x)=\frac{1}{x}$ ميل المماس عند النقطة $(e,1)$ هو: $f'(e)=\frac{1}{e}$ معادلة المماس هي: $y-1=\frac{1}{e}(x-e) \quad \rightarrow y=\frac{1}{e}x$ وهو مستقيم يمر بنقطة الأصل لأن النقطة $(0,0)$ تحقق معادلته.
25	بما أن ميل المماس هو $\frac{1}{e}$ ، فإن ميل العمودي على المماس هو $-e$ معادلة العمودي على المماس: $y-1=-e(x-e) \quad \rightarrow y=-ex+e^2+1$ لإيجاد المقطع x لهذا المستقيم نضع $y=0$ في معادلته $0=-ex+e^2+1$ $ex=e^2+1 \quad \rightarrow x=\frac{e^2+1}{e}=e+\frac{1}{e}$
26	$s(t)=t^3-4t^2+5t$ $v(t)=3t^2-8t+5 \quad \rightarrow v(5)=40\ m/s$ $a(t)=6t-8 \quad \rightarrow a(5)=22\ m/s^2$
27	$v(t)=3t^2-8t+5=0$ $(3t-5)(t-1)=0$ $\rightarrow \quad t=\frac{5}{3}\ s \ \ or\ t=1\ s$
28	$v(4)=21\ m/s$ بما أن إشارة السرعة المتجهة موجبة، فإن الجسم يتحرك لليمين عندما $t=4$
29	الموقع الابتدائي للجسم: $s(0)=0\ m$ $s(t)=0 \quad \rightarrow t^3-4t^2+5t=0$ $\rightarrow t(t^2-4t+5)=0$ $\rightarrow t=0$ العبارة التربيعية t^2-4t+5 مميزها سالب وبالتالي لا تساوي صفرا إذن لا يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي أبدًا

30	الموقع الابتدائي للجسم: $s(0) = e^0 - 4(0) = 1\ m$
31	$v(t) = e^t - 4$ $v(t) = 0 \rightarrow e^t = 4 \rightarrow t = \ln 4$ $a(t) = e^t \rightarrow a(\ln 4) = e^{\ln 4} = 4\ m/s^2$
32	$s(t) = 4\cos t$ $v(t) = -4\sin t$ $a(t) = -4\cos t$
33	$v\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4\sin\frac{\pi}{4} = -4 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}\ m/s$ $a\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4\cos\frac{\pi}{4} = -4 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}\ m/s^2$
34	من خصائص اقتران $s(t) = 4\cos t$ نعرف أن الجسم يتحرك بمرور الزمن صعودا وهبوطا بين الموقعين $s = 4\ m, s = -4m$ وأنه يمر بنقطة الاتزان $s = 0$ أثناء هذه الحركة عندما $t = \frac{n\pi}{2}$ حيث n أي عدد فردي موجب تتغير سرعة الجسم بمرور الزمن ونعرف من خصائص الاقتران $v(t) = -4\sin t$ أن قيم السرعة تتراوح بين $4\ m/s$, $-4\ m/s$ ونلاحظ أن الجسم يصل إلى هذه السرعة عند اللحظات التي يمر فيها بنقطة الاتزان نلاحظ أن قيمة تسارع الجسم عند كل لحظة تساوي معكوس قيمة اقتران الموقع عند تلك اللحظة، وأن التسارع ينعدم عند مرور الجسم بنقطة الاتزان حيث تكون محصلة القوى المؤثرة في الجسم صفرا
35	$y = e^x - ax$ $x = 0 \rightarrow y = e^0 - a(0) = 1$ نقطة تقاطع منحنى الاقتران مع محور y هي: $(0,1)$ $\frac{dy}{dx} = e^x - a$ ميل المماس عند هذه النقطة هو: $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=0} = e^0 - a = 1 - a$ معادلة المماس هي: $y - 1 = (1-a)(x-0) \rightarrow y = (1-a)x + 1$

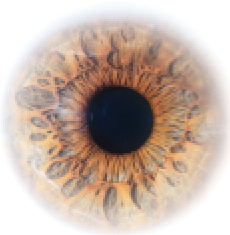
36	f قابل للاشتقاق، فمن الضروري أن يكون متصلًا عند $x = 2$ ، إذن $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ موجودة $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ $\lim\limits_{x\to 2^+}(mx+b) = \lim\limits_{x\to 2^-} x^2 \quad \to 2m+b=4$ لكن الاتصال شرط غير كاف لوجود المشتقة، يجب أن تكون $f'(2)$ موجودة $f'(2) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ $f'_+(2) = \lim\limits_{h\to 0^+}\frac{m(2+h)+b-4}{h}$ $= \lim\limits_{h\to 0^+}\frac{2m+hm+b-4}{h}$ $= \lim\limits_{h\to 0^+}\frac{hm}{h} = m$ $f'_-(2) = \lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ $= \lim\limits_{h\to 0^-}\frac{(2+h)^2-4}{h}$ $= \lim\limits_{h\to 0^-}\frac{h^2+4h}{h}$ $= \lim\limits_{h\to 0^-}(h+4) = 4$ حتى تكون $f'(2)$ موجودة يجب أن يكون: $f'_+(2) = f'_-(2)$ ومنه: $m = 4$ بالتعويض في المعادلة $2m+b=4$ نجد $b=-4$
37	ميل مماس المنحنى عند أي نقطة عليه هو $y' = 2e^x + 3 + 15x^2$ لكل x فإن $2e^x > 0$ و لكل x فإن $15x^2 \geq 0$ بالجمع نجد أنه لكل x فإن $2e^x + 15x^2 > 0$ بإضافة 3 للطرفين: لكل x فإن $2e^x + 15x^2 + 3 > 3$ أي أنّ $y' > 3$ إذن لا يمكن أن تكون قيمة y' تساوي 2 لأي قيمة حقيقية للمتغير x.

38	الإحداثي x لنقطة تقاطع المنحنى $y = ke^x$ مع المحور y هو 0 وبالتعويض في معادلة الاقتران نجد أنّ $y = ke^0 = k$ ، أي أنّ إحداثيي P هما $(0, k)$ $\frac{dy}{dx} = ke^x \rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=0} = k$ معادلة المماس هي: $y - k = k(x - 0) \rightarrow y = kx + k$ ولإيجاد نقطة تقاطعه مع المحور x نعوض $y = 0$ $0 = kx + k \rightarrow x = -1$ إذن، نقطة تقاطع المماس عند P مع المحور x هي: $(-1, 0)$
39	ميل العمودي على المماس هو $-\frac{1}{k}$ معادلة العمودي على المماس هي: $y - k = -\frac{1}{k}(x - 0) \rightarrow y = -\frac{1}{k}x + k$ وبتعويض إحداثيي نقطة التقاطع نجد أنّ: $0 = -\frac{1}{k}(100) + k \rightarrow k^2 = 100 \rightarrow k = \mp 10$ ولأن $k > 0$، فإن $k = 10$
40	$y = \log x = \log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10} = \frac{1}{\ln 10} \ln x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln 10} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln 10}$
41	$y = \log ax^2 = \log a + 2 \log x$ $\frac{dy}{dx} = 0 + 2 \times \frac{1}{x \ln 10} = \frac{2}{x \ln 10}$
42	$s(t) = 4 - \sin t$ $v(t) = -\cos t$ $a(t) = \sin t$

43	$v(t) = -\cos t = 0 \quad \rightarrow \quad t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$ يكون الجسم في حالة سكون لأول مرة بعد انطلاقه عندما $t = \frac{\pi}{2}$ ويكون موقعه عندها هو $s\left(\frac{\pi}{2}\right)$ $s\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 - \sin\frac{\pi}{2} = 4 - 1 = 3\,m$
44	بما أن المطلوب تحديد موقع الجسيم عندما يصل إلى أقصى سرعة، فهذا يتطلب إيجاد القيم القصوى لاقتران السرعة: $\lvert v(t)\rvert = \lvert -\cos t\rvert = \lvert\cos t\rvert$ ، والتي يمكن تحديدها من خصائص الاقتران وهما قيمتان: 0 (قيمة صغرى) 1 (قيمة عظمى) ومنه: $\lvert v(t)\rvert = 0 \quad \rightarrow \quad \cos t = 0 \rightarrow \sin t = \pm 1$ (متطابقة فيثاغورس) $\lvert v(t)\rvert = 1 \quad \rightarrow \quad \cos t = 1 \rightarrow \sin t = 0$ (متطابقة فيثاغورس) إذن، يمكن إيجاد موقع الجسيم عندما يصل إلى أقصى سرعة كالآتي: $\sin t = 0$: $s(t) = 4 - 0 = 4m$ $\sin t = -1$: $s(t) = 4 - (-1) = 5m$ $\sin t = 1$: $s(t) = 4 - 1 = 3m$

الدرس الثاني: مشتقتا الضرب والقسمة والمشتقات العليا

مسألة اليوم كلّما ازداد سطوع الضوء الساقط على بؤبؤ العين تقلّصت مساحة البؤبؤ. يُستعمَل الاقتران: $A(b) = \frac{40 + 24b^{0.4}}{1 + 4b^{0.4}}$ لحساب مساحة بؤبؤ العين بالملّيمترات المربعة، حيث b مقدار سطوع الضوء بوحدة اللومن (lm). وتُعرَف حساسية العين للضوء بأنّها مشتقة اقتران مساحة البؤبؤ بالنسبة إلى السطوع. أجد اقترانًا يُمثّل حساسية العين للضوء.



	مسألة اليوم صفحة 28
	$A(b) = \frac{40 + 24b^{0.4}}{1 + 4b^{0.4}}$ $A'(b) = \frac{(1 + 4b^{0.4})(9.6b^{-0.6}) - (40 + 24b^{0.4})(1.6b^{-0.6})}{(1 + 4b^{0.4})^2}$ $= \frac{9.6b^{-0.6} + 38.4b^{-0.2} - 64b^{-0.6} - 38.4b^{-0.2}}{(1 + 4b^{0.4})^2}$ $= \frac{-54.4b^{-0.6}}{(1 + 4b^{0.4})^2}$
	أتحقق من فهمي صفحة 30
a	$f(x) = (x^3 - 2x^2 + 3)(7x^2 - 4x)$ $f'(x) = (x^3 - 2x^2 + 3)(14x - 4) + (7x^2 - 4x)(3x^2 - 4x)$ $= 14x^4 - 4x^3 - 28x^3 + 8x^2 + 42x - 12 + 21x^4 - 28x^3 - 12x^3 + 16x^2$ $= 35x^4 - 72x^3 + 24x^2 + 42x - 12$
b	$f(x) = \ln x \cos x$ $f'(x) = (\ln x)(-\sin x) + (\cos x)\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x \sin x + \frac{\cos x}{x}$
	أتحقق من فهمي صفحة 32
a	$f(x) = \frac{x + 1}{2x + 1}$ $f'(x) = \frac{(2x + 1)(1) - (x + 1)(2)}{(2x + 1)^2} = \frac{-1}{(2x + 1)^2}$

b	$f(x)=\frac{\sin x}{e^x}$ $f'(x)=\frac{e^x(\cos x)-(\sin x)e^x}{e^{2x}}=\frac{\cos x-\sin x}{e^x}$
	أتحقق من فهمي صفحة 34
a	$P(t)=\frac{500t^2}{2t+9}$ $P'(t)=\frac{(2t+9)(1000t)-(500t^2)(2)}{(2t+9)^2}=\frac{9000t+1000t^2}{(2t+9)^2}$
b	$P'(12)=\frac{9000(12)+1000(12)^2}{(24+9)^2}\approx 231.405$ إذن في السنة 12 يتزايد عدد سكان هذه المدينة بمعدل 231 ألف نسمة سنويا تقريبًا
	أتحقق من فهمي صفحة 35
a	$f(x)=\frac{1}{5x-x^2}$ $f'(x)=\frac{-(5-2x)}{(5x-x^2)^2}=\frac{2x-5}{(5x-x^2)^2}$
b	$f(x)=\frac{1}{e^x+\sqrt{x}}$ $f'(x)=\frac{-\left(e^x+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(e^x+\sqrt{x}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{x}e^x+1}{2\sqrt{x}\left(e^x+\sqrt{x}\right)^2}$
	أتحقق من فهمي صفحة 37
a	$f(x)=x\cot x$ $f'(x)=(x)(-\csc^2 x)+(\cot x)(1)=-x\csc^2 x+\cot x$
b	$f(x)=\frac{\tan x}{1+\sin x}$ $f'(x)=\frac{(1+\sin x)(\sec^2 x)-(\tan x)(\cos x)}{(1+\sin x)^2}$ $=\frac{\sec^2 x+\sin x\sec^2 x-\sin x}{(1+\sin x)^2}$

	أتحقق من فهمي صفحة 38
	$f'(x)=\frac{(x)(\cos x)-(\sin x)(1)}{x^2}=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x}{x}-\frac{\sin x}{x^2}$ $f''(x)=\frac{(x)(-\sin x)-(\cos x)(1)}{x^2}-\frac{(x^2)(\cos x)-(\sin x)(2x)}{x^4}$ $=\frac{-x\sin x-\cos x}{x^2}-\frac{x^2\cos x-2x\sin x}{x^4}$ $=\frac{-x^2\sin x-2x\cos x+2\sin x}{x^3}$ $f'''(x)=\frac{-x^3\cos x+3x^2\sin x+6x\cos x-6\sin x}{x^4}$ ويمكن التوصل إلى الإجابة نفسها بتحويل الاقتران إلى $f(x)=x^{-1}\sin x$ وتطبيق قاعدة مشتقة ضرب اقترانين.
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 38
1	$f(x)=\frac{x^3}{2x-1}$ $f'(x)=\frac{(2x-1)(3x^2)-(x^3)(2)}{(2x-1)^2}=\frac{4x^3-3x^2}{(2x-1)^2}$
2	$f(x)=x^3\sec x$ $f'(x)=(x^3)(\sec x\tan x)+(\sec x)(3x^2)$ $=x^3\sec x\tan x+3x^2\sec x$
3	$f(x)=\frac{x+1}{\cos x}$ $f'(x)=\frac{(\cos x)(1)-(x+1)(-\sin x)}{(\cos x)^2}=\frac{\cos x+x\sin x+\sin x}{\cos^2 x}$
4	$f(x)=e^x(\tan x-x)$ $f'(x)=(e^x)(\sec^2 x-1)+(\tan x-x)(e^x)$ $=e^x\tan^2 x+e^x\tan x-xe^x$
5	$f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{e^x}$ $f'(x)=\frac{(e^x)(\cos x-\sin x)-(\sin x+\cos x)(e^x)}{(e^x)^2}=\frac{-2\sin x}{e^x}$

6	$f(x) = x^3 \sin x + x^2 \cos x$ $f'(x) = (x^3)(\cos x) + (\sin x)(3x^2) + (x^2)(-\sin x) + (\cos x)(2x)$ $= x^3 \cos x + 2x^2 \sin x + 2x \cos x$
7	$f(x) = \sqrt[3]{x}(\sqrt{x} + 3) = x^{\frac{5}{6}} + 3x^{\frac{1}{3}}$ $f'(x) = \frac{5}{6}x^{-\frac{1}{6}} + x^{-\frac{2}{3}} = \frac{5}{6\sqrt[6]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$
8	$f(x) = \frac{1+\sec x}{1-\sec x}$ $f'(x) = \frac{(1-\sec x)(\sec x \tan x) - (1+\sec x)(-\sec x \tan x)}{(1-\sec x)^2}$ $= \frac{2\sec x \tan x}{(1-\sec x)^2}$
9	$f(x) = \frac{2-\frac{1}{x}}{x-3} = \frac{2x-1}{x^2-3x}$ $f'(x) = \frac{(x^2-3x)(2) - (2x-1)(2x-3)}{(x^2-3x)^2} = \frac{-2x^2+2x-3}{(x^2-3x)^2}$
10	$f(x) = (x^3-x)(x^2+2)(x^2+x+1)$ $f'(x) = (x^3-x)\left((x^2+2)(2x+1) + (x^2+x+1)(2x)\right)$ $+ (x^2+2)(x^2+x+1)(3x^2-1)$ $= (x^3-x)(x^2+2)(2x+1) + (x^3-x)(x^2+x+1)(2x)$ $+ (x^2+2)(x^2+x+1)(3x^2-1)$
11	$f(x) = (\csc x + \cot x)^{-1} = \frac{1}{\csc x + \cot x}$ $f'(x) = \frac{-1(-\csc x \cot x - \csc^2 x)}{(\csc x + \cot x)^2}$ $= \frac{\csc x \cot x + \csc^2 x}{(\csc x + \cot x)^2}$ $= \frac{\csc x(\cot x + \csc x)}{(\csc x + \cot x)^2} = \frac{\csc x}{\cot x + \csc x}$

12	$(fg)'(0) = f(0)g'(0) + g(0)f'(0)$ $= 5 \times 2 - 1 \times -3 = 13$
13	$\left(\frac{f}{g}\right)'(0) = \frac{g(0)f'(0) - f(0)g'(0)}{g^2(0)} = \frac{-1 \times -3 - 5 \times 2}{(-1)^2} = -7$
14	$(7f - 2fg)'(0) = 7f'(0) - 2(fg)'(0) = 7(-3) - 2(13) = -47$
15	$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$ $f'(x) = \frac{(x^2+4)(2x) - (x^2-4)(2x)}{(x^2+4)^2} = \frac{16x}{(x^2+4)^2}$ $f''(x) = \frac{(x^2+4)^2(16) - (16x)(2)(x^2+4)^1(2x)}{(x^2+4)^4}$ $= \frac{(16)(x^2+4) - (16x)(2)(2x)}{(x^2+4)^3}$ $f''(-2) = \frac{(16)(8) - (-32)(2)(-4)}{(8)^3} = -\frac{1}{4}$
16	$f(x) = \frac{1+x}{1+\sqrt[3]{x}} = \frac{(1+\sqrt[3]{x})(1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{1+\sqrt[3]{x}} = 1 - \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}$ $f'(x) = -\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ $f''(x) = \frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} - \frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}} = \frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}} - \frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$ $f''(8) = \frac{2}{9\sqrt[3]{8^5}} - \frac{2}{9\sqrt[3]{8^4}} = \frac{2}{9}\left(\frac{1}{32} - \frac{1}{16}\right) = -\frac{1}{144}$
17	$f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$ $f'(x) = \frac{-\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(1+\sqrt{x})^2} = \frac{-1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$ $f''(x) = \frac{2\sqrt{x}(2)(1+\sqrt{x})^1\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + (1+\sqrt{x})^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{4x(1+\sqrt{x})^4} = \frac{7}{864}$

18	$f(x)=\frac{1+x}{1+e^x}$ $f'(x)=\frac{(1+e^x)(1)-(1+x)(e^x)}{(1+e^x)^2}=\frac{1-xe^x}{(1+e^x)^2}$ ميل المماس عند النقطة $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ هو: $f'(0)=\frac{1}{4}$ معادلة المماس هي: $y-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(x-0)\quad\to y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$

19	$f(x)=e^x\cos x+\sin x$ $f'(x)=(e^x)(-\sin x)+(\cos x)(e^x)+\cos x$ ميل المماس عند النقطة $(0,1)$ هو: $f'(0)=(1)(0)+(1)(1)+1=2$ معادلة المماس هي: $y-1=2(x-0)\quad\to y=2x+1$
20	$\frac{d}{dx}(\cot x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)$ $=\frac{(\sin x)(-\sin x)-(\cos x)(\cos x)}{\sin^2 x}$ $=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}$ $=-\frac{1}{\sin^2 x}$ $=-\csc^2 x$
21	$\frac{d}{dx}(\sec x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right)$ $=\frac{-(-\sin x)}{\cos^2 x}$ $=\frac{1}{\cos x}\times\frac{\sin x}{\cos x}$ $=\sec x\tan x$

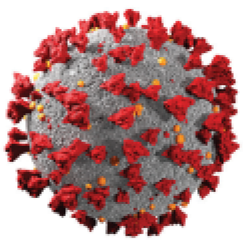
22	$\frac{d}{dx}(\csc x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin x}\right)$ $=\frac{-(\cos x)}{\sin^2 x}$ $=-\frac{1}{\sin x}\times\frac{\cos x}{\sin x}$ $=-\csc x\cot x$
23	$f''(x)=2-\frac{2}{x}$ $f'''(x)=\frac{2}{x^2}$
24	$f'''(x)=2\sqrt{x}$ $f^{(4)}(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$
25	$f^{(4)}(x)=2x+1$ $f^{(5)}(x)=2$ $f^{(6)}(x)=0$
26	$h(t)=\frac{3t^2}{4+t^2}$ $h'(t)=\frac{(4+t^2)(6t)-(3t^2)(2t)}{(4+t^2)^2}=\frac{24t}{(4+t^2)^2}$
27	$y=e^x\sin x$ $\frac{dy}{dx}=(e^x)(\cos x)+(\sin x)(e^x)=e^x(\cos x+\sin x)$ $\frac{d^2y}{dx^2}=e^x(-\sin x+\cos x)+e^x(\cos x+\sin x)=2e^x\cos x$
28	$2\frac{dy}{dx}-2y=2e^x(\cos x+\sin x)-2e^x\sin x$ $=2e^x\cos x=\frac{d^2y}{dx^2}$

29	$\csc\theta = \dfrac{r+h}{r} \quad \to r+h = r\csc\theta$ $\to h = r(\csc\theta - 1)$
30	$\dfrac{dh}{d\theta} = r(-\csc\theta\cot\theta)$ $\left.\dfrac{dh}{d\theta}\right\vert_{\theta=\frac{\pi}{6}} = 6371\left(-\csc\dfrac{\pi}{6}\cot\dfrac{\pi}{6}\right)$ $= 6371(-2\times\sqrt{3}) \approx -22070\ km/rad$
31	$f(x) = 9\ln x + \dfrac{1}{2x^2}$ $f'(x) = 9\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{-1(4x)}{4x^4}$ $= \dfrac{9}{x} - \dfrac{1}{x^3}$ $= \dfrac{9x^2-1}{x^3}$ $= \dfrac{(3x-1)(3x+1)}{x^3}$
32	$P'(2) = F(2)G'(2) + G(2)F'(2)$ $G'(2)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(2,2)$و$(4,3)$ ويساوي $\frac{1}{2}$ $F'(2)$ ميل الماس الأفقي، ويساوي صفرا $P'(2) = 3\times\dfrac{1}{2} + 2\times 0 = \dfrac{3}{2}$
33	$Q'(7) = \dfrac{G(7)F'(7) - F(7)G'(7)}{G^2(7)} = \dfrac{1\times\frac{1}{4} - 5\times -\frac{2}{3}}{1} = \dfrac{43}{12}$

34	$y = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{1-\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}$ $= \frac{e^x-1}{e^x+1}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{(e^x+1)(e^x)-(e^x-1)(e^x)}{(e^x+1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$ $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=0} = \frac{2(1)}{(1+1)^2} = \frac{1}{2}$
35	إذا وجد مماس أفقي فإن ميله يساوي صفراً، أي أنّ : $\frac{2e^x}{(e^x+1)^2} = 0$ ، وهذا لا يتحقق إلّا إذا كان $e^x = 0$، ولكن $e^x > 0$ لجميع الأعداد الحقيقية x، ولذا لا يوجد لهذا المنحنى مماسات أفقية.
36	$y = \frac{x+1}{x-1}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)(1)-(x+1)(1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$
37	$y = \frac{x+1}{x-1} \rightarrow x+1 = y(x-1) \rightarrow x(1-y) = -y-1$ $x = \frac{y+1}{y-1}$ $\frac{dx}{dy} = \frac{-2}{(y-1)^2}$
38	$\frac{dx}{dy} = \frac{-2}{(y-1)^2}$ $= \frac{-2}{\left(\frac{x+1}{x-1}-1\right)^2}$ $= \frac{-2}{\left(\frac{2}{x-1}\right)^2} = \frac{-2}{\frac{4}{(x-1)^2}} = \frac{(x-1)^2}{-2} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

39	$f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$ $f'(x)=\frac{x^2\left(\frac{1}{x}\right)-(\ln x)(2x)}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$ $f''(x)=\frac{x^3\left(-\frac{2}{x}\right)-(1-2\ln x)(3x^2)}{x^6}$ $=\frac{-5x^2+6x^2\ln x}{x^6}$ $=\frac{-5+6\ln x}{x^4}$
40	$x^4f''(x)+4x^3f'(x)+2x^2f(x)+1$ $=x^4\times\frac{-5+6\ln x}{x^4}+4x^3\times\frac{1-2\ln x}{x^3}+2x^2\times\frac{\ln x}{x^2}+1$ $=-5+6\ln x+4-8\ln x+2\ln x+1=0$

الدرس الثالث: قاعدة السلسلة



مسألة اليوم يُمكِن نمذجة انتشار الإنفلونزا في إحدى المدارس باستعمال الاقتران: $P(t) = \frac{100}{1+e^{3-t}}$، حيث $P(t)$ العدد التقريبي الكلي للطلبة المصابين بعد t يومًا من ملاحظة الإنفلونزا أوّل مرّة في المدرسة.

أجد سرعة انتشار الإنفلونزا في المدرسة بعد 3 أيام، مُبرِّرًا إجابتي.

مسألة اليوم صفحة 41	
	$P(t) = \frac{100}{1+e^{3-t}}$ $P'(t) = \frac{100e^{3-t}}{(1+e^{3-t})^2}$ $P'(3) = \frac{100}{4} = 25$ أي أن الانفلونزا تنتشر في المدرسة بعد 3 أيام بمعدل 25 طالبًا/يوم
أتحقق من فهمي صفحة 43	
a	$f(x) = \tan 3x^2$ $f'(x) = 6x\sec^2(3x^2)$
b	$f(x) = e^{\ln x} = x$ $f'(x) = 1$
c	$f(x) = \ln \cot x$ $f'(x) = \frac{-\csc^2 x}{\cot x}$
أتحقق من فهمي صفحة 44	
a	$f(x) = \sqrt[5]{(x^2-1)^2} = (x^2-1)^{\frac{2}{5}}$ $f'(x) = \frac{2}{5}(x^2-1)^{-\frac{3}{5}}(2x) = \frac{4x}{5\sqrt[5]{(x^2-1)^3}}$
b	$f(x) = \sqrt{\cos x}$ $f'(x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$

c	$f(x)=(\ln x)^5$ $f'(x)=5(\ln x)^4\left(\frac{1}{x}\right)$ $=\frac{5(\ln x)^4}{x}$
أتحقق من فهمي صفحة 46	
a	$f(x)=\cos^2(7x^3+6x-1)=(\cos(7x^3+6x-1))^2$ $f'(x)=2(\cos(7x^3+6x-1))^1(-\sin(7x^3+6x-1)(21x^2+6))$ $=-2(21x^2+6)\sin(7x^3+6x-1)\cos(7x^3+6x-1)$ $=-(21x^2+6)\sin 2(7x^3+6x-1)$
b	$f(x)=(2+(x^2+1)^4)^3$ $f'(x)=3(2+(x^2+1)^4)^2\left(4(x^2+1)^3(2x)\right)$ $=24x(x^2+1)^3(2+(x^2+1)^4)^2$
أتحقق من فهمي صفحة 47	
a	$f(x)=(2x+1)^5(x^3-x+1)^4$ $f'(x)=(2x+1)^5(4)(x^3-x+1)^3(3x^2-1)$ $+(x^3-x+1)^4(5)(2x+1)^4(2)$ $f'(1)=(3)^5(4)(1)^3(2)+(1)^4(5)(3)^4(2)=2754$
b	$f(x)=\frac{(\cos x)^2}{e^{2x}}$ $f'(x)=\frac{e^{2x}\times 2(\cos x)^1(-\sin x)-(\cos x)^2\times 2e^{2x}}{e^{4x}}$ $=\frac{-\sin 2x-2(\cos x)^2}{e^{2x}}$ $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{-\sin\pi-2\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)^2}{e^{\pi}}=0$ ميل المماس يساوي صفرا أي أن المماس أفقي، ومنه يكون العمودي على المماس رأسيا وميله غير معرف.

	أتحقق من فهمي صفحة 48
a	$U(x)=80\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}$ $U'(x)=80\times\frac{\frac{(3x+4)(2)-(2x+1)(3)}{(3x+4)^2}}{2\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}}$ $=\frac{200}{(3x+4)^2}\sqrt{\frac{3x+4}{2x+1}}$
b	$U'(20)=\frac{200}{(64)^2}\sqrt{\frac{64}{41}}\approx 0.061$ وهذا يعني أنه عند بيع 20 قطعة فإن قيمة بدل الخدمة تتزايد بمقدار 0.061 دينار/قطعة تقريبًا
	أتحقق من فهمي صفحة 50
a	$f(x)=\pi^{\pi x}$ $f'(x)=(\pi\ln\pi)\pi^{\pi x}=\pi^{\pi x+1}\ln\pi$
b	$f(x)=6^{1-x^3}$ $f'(x)=(-3x^2\ln 6)6^{1-x^3}$
c	$f(x)=e^{4x}+4^{2x}$ $f'(x)=4e^{4x}+(2\ln 4)4^{2x}$
	أتحقق من فهمي صفحة 51
a	$f(x)=\log\sec x$ $f'(x)=\frac{\sec x\tan x}{\ln 10\sec x}=\frac{\tan x}{\ln 10}$
b	$f(x)=\log_8(x^2+3x)$ $f'(x)=\frac{2x+3}{(x^2+3x)\ln 8}$

	أتحقق من فهمي صفحة54
	$\frac{dy}{dt}=\sec^2 t\ ,\qquad \frac{dx}{dt}=\sec t\tan t$ $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\sec^2 t}{\sec t\tan t}=\frac{\sec t}{\tan t}$ $m=\frac{dy}{dx}\Big\|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{\sec\frac{\pi}{4}}{\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$ $x=\sec\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}\ ,\ y=\tan\frac{\pi}{4}=1$ معادلة المماس هي: $y-1=\sqrt{2}(x-\sqrt{2})\ \to\ y=\sqrt{2}x-1$
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 55
1	$f(x)=e^{4x+2}$ $f'(x)=4e^{4x+2}$
2	$f(x)=50e^{2x-10}$ $f'(x)=100e^{2x-10}$
3	$f(x)=\cos(x^2-3x-4)$ $f'(x)=-(2x-3)\sin(x^2-3x-4)$ $=(3-2x)\sin(x^2-3x-4)$
4	$f(x)=10x^2e^{-x^2}$ $f'(x)=(10x^2)\left(-2xe^{-x^2}\right)+\left(e^{-x^2}\right)(20x)=20xe^{-x^2}(1-x^2)$
5	$f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x}}=\sqrt{1+\frac{1}{x}}$ $f'(x)=\frac{-\frac{1}{x^2}}{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=-\frac{-1}{2x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$
6	$f(x)=x^2\tan\frac{1}{x}$ $f'(x)=(x^2)\left(-\frac{1}{x^2}\sec^2\frac{1}{x}\right)+\left(\tan\frac{1}{x}\right)(2x)$ $=-\sec^2\frac{1}{x}+2x\tan\frac{1}{x}$

7	$f(x) = 3x - 5\cos(\pi x)^2$ $f'(x) = 3 + 5(2)(\pi x)(\pi)\sin(\pi x)^2 = 3 + 10\pi^2 x\sin(\pi x)^2$
8	$f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{1-e^x}\right) = \ln(1+e^x) - \ln(1-e^x)$ $f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} + \frac{e^x}{1-e^x} = \frac{2e^x}{1-e^{2x}}$
9	$f(x) = (\ln x)^4$ $f'(x) = \frac{4}{x}(\ln x)^3$
10	$f(x) = \sin\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\sin x}$ $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\cos\sqrt[3]{x} + \frac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}}$
11	$f(x) = \sqrt[5]{x^2+8x} = (x^2+8x)^{\frac{1}{5}}$ $f'(x) = \frac{2x+8}{5\sqrt[5]{(x^2+8x)^4}}$
12	$f(x) = \frac{3^{2x}}{x}$ $f'(x) = \frac{(x)(2\ln 3)3^{2x} - 3^{2x}}{x^2} = \frac{(-1+2x\ln 3)3^{2x}}{x^2}$
13	$f(x) = 2^{-x}\cos\pi x$ $f'(x) = (2^{-x})(-\pi\sin\pi x) + (\cos\pi x)(-\ln 2)2^{-x}$ $= -\pi\, 2^{-x}\sin\pi x - 2^{-x}(\cos\pi x)\ln 2$
14	$f(x) = \frac{10\log_4 x}{x}$ $f'(x) = \frac{\frac{10x}{x\ln 4} - 10\log_4 x}{x^2} = \frac{\frac{10}{\ln 4} - 10\log_4 x}{x^2}$
15	$f(x) = \left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$ $f'(x) = 2\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^1 \times \frac{(1+\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$ $= 2 \times \frac{\sin x}{1+\cos x} \times \frac{1}{1+\cos x}$ $= \frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$

16	$f(x) = \log_3(1 + x\ln x)$ $f'(x) = \dfrac{(x)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(1)}{(\ln 3)(1 + x\ln x)} = \dfrac{1 + \ln x}{(\ln 3)(1 + x\ln x)}$
17	$f(x) = e^{\sin 2x} + \sin(e^{2x})$ $f'(x) = 2e^{\sin 2x}\cos 2x + 2e^{2x}\cos(e^{2x})$
18	$f(x) = \tan^4(\sec(\cos x)) = (\tan(\sec(\cos x)))^4$ $f'(x) = 4(\tan(\sec(\cos x)))^3 \sec^2(\sec(\cos x)) \times \sec(\cos x)\tan(\cos x) \times (-\sin x)$ $= -4\tan^3(\sec(\cos x))\sec^2(\sec(\cos x))\sec(\cos x)\tan(\cos x)\sin x$
19	$f(x) = 4e^{-0.5x^2}$ $f(-2) = 4e^{-0.5(-2)^2} = \dfrac{4}{e^2}$ $f'(x) = -4xe^{-0.5x^2}$ ميل المماس هو: $m = f'(-2) = -4(-2)e^{-0.5(-2)^2} = \frac{8}{e^2}$ معادلة المماس هي: $y - \frac{4}{e^2} = \frac{8}{e^2}(x + 2) \quad \rightarrow \quad y = \frac{8}{e^2}x + \frac{20}{e^2}$
20	$f(x) = x + \cos 2x$ $f(0) = 0 + \cos(0) = 1$ $f'(x) = 1 - 2\sin 2x$ ميل المماس هو: $m = f'(0) = 1 - 2\sin 2(0) = 1$ معادلة المماس هي: $y - 1 = 1(x - 0) \quad \rightarrow \quad y = x + 1$
21	$f(x) = 2^x$ $f(0) = 2^0 = 1$ $f'(x) = (\ln 2)2^x$ ميل المماس هو: $m = f'(0) = (\ln 2)2^0 = \ln 2$ معادلة المماس هي: $y - 1 = (\ln 2)(x - 0) \quad \rightarrow \quad y = (\ln 2)x + 1$

22	$f(x)=\sqrt{x+1}\sin\frac{\pi x}{2}$ $f(3)=2\sin\frac{3\pi}{2}=-2$ $f'(x)=\left(\sqrt{x+1}\right)\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}\right)+\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)$ ميل المماس هو: $m=f'(3)=(2)(0)+(-1)\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$ معادلة المماس هي: $y+2=-\frac{1}{4}(x-3)\ \rightarrow\ y=-\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$
23	$A'(x)=f'\big(g(x)\big)\times g'(x)$ $A'(5)=f'\big(g(5)\big)\times g'(5)$ $=f'(-2)\times 6$ $=4\times 6=24$
24	$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ $f'(x)=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)(1)-(x)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x^2+1}$ $=\frac{\left(\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x^2+1}$ $=\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$
25	$A(t)=Ne^{0.1t}$ $A'(t)=0.1Ne^{0.1t}$ $A'(3)=0.1Ne^{0.3}$
26	$A'(k)=0.1Ne^{0.1k}$ $0.2=0.1Ne^{0.1k}$ $e^{0.1k}=\frac{0.2}{0.1N}=\frac{2}{N}$ $0.1k=\ln\frac{2}{N}\ \rightarrow\ k=10\ln\frac{2}{N}$

27	$f(x) = \sin \pi x$ $f'(x) = \pi \cos \pi x$ $f''(x) = -\pi^2 \sin \pi x$ $f'''(x) = -\pi^3 \cos \pi x$
28	$f(x) = \cos(2x+1)$ $f'(x) = -2\sin(2x+1)$ $f''(x) = -4\cos(2x+1)$ $f'''(x) = 8\sin(2x+1)$ $f^{(4)}(x) = 16\cos(2x+1)$ $f^{(5)}(x) = -32\sin(2x+1)$
29	$f(x) = \cos x^2$ $f'(x) = -2x \sin x^2$ $f''(x) = (-2x)(2x\cos x^2) + (\sin x^2)(-2)$ $= -4x^2 \cos x^2 - 2\sin x^2$
30	$y = e^{\sin x}$ $\frac{dy}{dx} = e^{\sin x} \cos x$ ميل المماس هو: $m = \frac{dy}{dx}\Big\rvert_{x=0} = e^{\sin 0} \cos 0 = 1$
31	$A(t) = 20\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{140}}$ $A'(t) = \frac{20}{140}\left(\ln\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{140}}$ $A'(2) = \frac{20}{140}\left(\ln\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{140}} \approx -0.098$ إذن يتحلل البلوتونيوم بمعدل $0.098g$ كل يوم عندما $t = 2$
32	$s(t) = 0.1 \sin 2.4t$ $v(t) = 2.4 \times 0.1 \cos 2.4t = 0.24 \cos 2.4t$ $v(1) = 0.24 \cos 2.4 \approx -0.177\ cm/s$

33	$v(t) = 0 \rightarrow 0.24\cos 2.4t = 0$ $\rightarrow \cos 2.4t = 0$ وهذا يعني أن: $\lvert\sin 2.4t\rvert = 1$ أي أن : $\sin 2.4t = 1, or -1$ لكن موقع الكرة هو: $s(t) = 0.1\sin 2.4t$ وبتعويض قيمة $\sin 2.4t$ نجد أن الموقع هو: $s = 0.1(1) = 0.1$ or, $s = 0.1(-1) = -0.1$ إذن، عندما تكون سرعة الكرة صفرًا يكون موقعها عند 0.1cm أو −0.1 cm
34	$a(t) = -0.24 \times 2.4\sin 2.4t = -0.576\sin 2.4t$ $a(t) = 0 \rightarrow \sin 2.4t = 0$ لكن موقع الكرة هو: $s(t) = 0.1\sin 2.4t$ وبتعويض قيمة $\sin 2.4t$ نجد أن الموقع هو: $s = 0.1(0) = 0$ إذن، عندما يكون تسارع الكرة صفرًا يكون موقعها عند $s = 0$، أي عند مرورها بموقع الاتزان.
35	$\frac{dy}{dt} = 2t$, $\frac{dx}{dt} = 1$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{1} = 2t$ ميل المماس: $m = \frac{dy}{dx}\Big\rvert_{t=1} = 2 \times 1 = 2$ نقطة التماس: $x = 1 + 2 = 3$, $y = (1)^2 - 1 = 0$ معادلة المماس: $y - 0 = 2(x - 3) \rightarrow y = 2x - 6$

36	$\frac{dy}{dt} = 2t \ , \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{\frac{1}{2}} = 4t$ ميل المماس: $m = \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{t=-1} = 4 \times -1 = -4$ نقطة التماس: $x = -\frac{1}{2} \ , \ y = (-1)^2 - 4 = -3$ معادلة المماس: $y + 3 = -4\left(x + \frac{1}{2}\right) \ \rightarrow \ y = -4x - 5$
37	$\frac{dy}{dt} = \sin t \ , \quad \frac{dx}{dt} = 1 - \cos t$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$ ميل المماس: $m = \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{t=\frac{\pi}{3}} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{1 - \cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ نقطة التماس: $x = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \ , \ y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ معادلة المماس: $y - \frac{1}{2} = \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \ \rightarrow \ y = \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}\pi}{3} + 2$

38	$\frac{dy}{dt}=\sec^2 t$, $\frac{dx}{dt}=2\times\sec t\times\sec t\tan t=2\sec^2 t\tan t$ $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\sec^2 t}{2\sec^2 t\tan t}=\frac{1}{2}\cot t$ ميل المماس: $m=\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{t=-\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$ نقطة التماس: $x=\sec^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)-1=1$, $y=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1$ معادلة المماس: $y+1=-\frac{1}{2}(x-1)\ \rightarrow\ y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$
39	$\frac{dy}{dt}=2\sin t$, $\frac{dx}{dt}=2(1-\cos t)$ $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2\sin t}{2(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$ ميل المماس: $m=\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{1-\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}\times\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}$ $=\sqrt{2}+1$ ميل العمودي على المماس: $m=\frac{-1}{\sqrt{2}+1}\times\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}=1-\sqrt{2}$
40	$h'(1)=f'\big(g(1)\big)\times g'(1)=f'(4)\times g'(1)$ $g'(1)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(3,2)$و$(0,5)$ ويساوي -1 $f'(4)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(5,3)$و$(2,4)$ ويساوي $-\frac{1}{3}$ $h'(1)=-\frac{1}{3}\times -1=\frac{1}{3}$

41	$p'(1) = g'(f(1)) \times f'(1) = g'(2) \times f'(1)$ $g'(2)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(3,2)$و$(0,5)$ ويساوي -1 $f'(1)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(0,0)$و$(2,4)$ ويساوي 2 $p'(1) = -1 \times 2 = -2$
42	$y = \ln(ax+b)$ $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{ax+b}$ ليكن إحداثيا P هما (x_1, y_1)، فيكون ميل المماس عند P هو: $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=x_1} = \frac{a}{ax_1+b} \rightarrow \frac{a}{ax_1+b} = 1$ $\rightarrow a = ax_1 + b$ $\rightarrow x_1 = \frac{a-b}{a} = 1 - \frac{b}{a}$ المقدار $1 - \frac{b}{a}$ أقل من 1 لأن $\frac{b}{a}$ مقدار موجب كون a, b موجبين
43	$P(x_1, y_1) = (0,2)$ $x_1 = 1 - \frac{b}{a} = 0 \rightarrow b = a$ $y_1 = \ln(ax_1 + b) \rightarrow 2 = \ln(b) \rightarrow b = e^2 \rightarrow a = e^2$ بتعويض قيمتي a، وb في قاعدة الاقتران ينتج أن: $y = \ln(e^2x + e^2)$ $= \ln e^2(x+1)$ $= \ln e^2 + \ln(x+1)$ $= 2 + \ln(x+1)$ ميل المماس هو: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+1}$ وهذا يساوي $\frac{1}{2}$ إذن، $\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$ أي أنّ: $x + 1 = 2$ إذن، $x = 1$، و $y = 2 + \ln 2$ النقطة التي يكون ميل المماس عندها $\frac{1}{2}$ هي $(1, 2+\ln 2)$

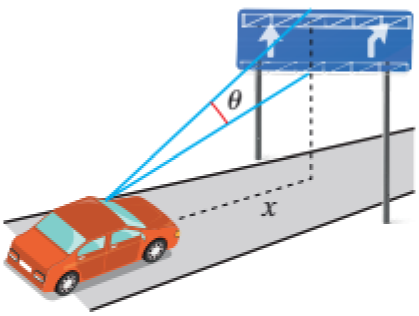
44	$\frac{dy}{dt}=2\ ,\qquad \frac{dx}{dt}=2t$ $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2}{2t}=\frac{1}{t}$
45	ميل المماس: $m=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{t}$ ميل العمودي على المماس: $m=\frac{-1}{\frac{1}{t}}=-t$ معادلة العمودي على المماس : $y-2t=-t(x-t^2)\ \ \rightarrow\ \ y=-tx+t^3+2t$
46	لإيجاد المقطع x للعمودي على المماس نضع y =0 $0=-tx+t^3+2t\ \ \rightarrow\ \ x=\frac{t^3+2t}{t}=t^2+2$ لإيجاد المقطع y للعمودي على المماس نضع x =0: $y=-t(0)+t^3+2t=t^3+2t$ مساحة المثلث: $A=\frac{1}{2}\|t^2+2\|\|t^3+2t\|$ $=\frac{1}{2}\|t^2+2\|\|t(t^2+2)\|$ $=\frac{1}{2}\|t(t^2+2)^2\|$ $=\frac{1}{2}\|t\|(t^2+2)^2$
47	$y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$ $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{\sin\sqrt{x}}}=\frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{\sin\sqrt{x}}}=\frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x\sin\sqrt{x}}}$

48	$y = e^x \sin^2 x \cos x = (e^x \sin^2 x)(\cos x)$ $\frac{dy}{dx} = (e^x \sin^2 x)(-\sin x) + (\cos x)\left((e^x)(2\sin x \cos x) + (\sin^2 x)(e^x)\right)$ $= -e^x \sin^3 x + 2e^x \cos^2 x \sin x + e^x \cos x \sin^2 x$
49	$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3\cos 3t}{2\cos 2t}$ $\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{3\cos 3t}{2\cos 2t} = 0$ $\rightarrow \cos 3t = 0 \rightarrow 3t = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = \frac{\pi}{6}$ $x_A = \sin 2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $y_A = \sin 3\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ إذن، إحداثيا A هما $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$.
50	عند النقطة B يكون المماس موازيًا لمحور y، أي إن ميله غير معرف، ومنه يكون: $\cos 2t = 0 \rightarrow 2t = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = \frac{\pi}{4}$ $x_B = \sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ $y_B = \sin 3\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ إذن، إحداثيا B هما $\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
51	عند نقطة الأصل $x = y = 0$ أي أنّ: $\sin 2t = \sin 3t = 0$ تتحقق هاتان المعادلتان معًا عندما $t = 0$، وعندها يكون ميل المماس: $m = \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{t=0} = \frac{3\cos 3(0)}{2\cos 2(0)} = \frac{3\cos 0}{2\cos 0} = \frac{3}{2}$ كما تتحققان أيضًا عندما $t = \pi$، وعندها يكون ميل المماس: $m = \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{t=\pi} = \frac{3\cos 3\pi}{2\cos 2\pi} = \frac{3\cos \pi}{2\cos 0} = \frac{-3}{2}$

52	$s(t) = \ln(t^2 - 2t + 1.9)$ $v(t) = \dfrac{2t - 2}{t^2 - 2t + 1.9}$ $a(t) = \dfrac{(t^2 - 2t + 1.9)(2) - (2t - 2)(2t - 2)}{(t^2 - 2t + 1.9)^2}$ $= \dfrac{-2t^2 + 4t - 0.2}{(t^2 - 2t + 1.9)^2}$
53	$v(t) = 0 \quad \rightarrow 2t - 2 = 0 \quad \rightarrow t = 1$ $s(1) = \ln(1 - 2 + 1.9) = \ln 0.9 \text{ m}$ $a(1) = \dfrac{-2 + 4 - 0.2}{(1 - 21 + 1.9)^2} = \dfrac{1.8}{(0.9)^2} \approx 2.2 \text{ m/s}^2$
54	الموقع الابتدائي هو: $s(0) = \ln(1.9)$ $s(t) = \ln(1.9) \quad \rightarrow \ln(t^2 - 2t + 1.9) = \ln(1.9)$ $\rightarrow t^2 - 2t + 1.9 = 1.9$ $\rightarrow t^2 - 2t = 0$ $\rightarrow t(t - 2) = 0$ $\rightarrow t = 0 \ or\ t = 2$ يعود الجسيم إلى موقعه الابتدائي بعد ثانيتين من بدء حركته.

الدرس الرابع: الاشتقاق الضمني

مسألة اليوم يقود سائق سيّارته في اتجاه لافتة على طريق سريع كما في الشـــكل المجاور. إذا كانت θ زاوية رؤية السائق للافتة، و x المسافة بينه وبين اللافتة بالأمتار، وكانت العلاقة التي تربط θ بـــ x هي: $\tan\theta = \frac{4x}{x^2+252}$، فما مُعدَّل تغيُّر θ بالنسبة إلى x؟



مسألة اليوم صفحة 58	
	$\tan\theta = \frac{4x}{x^2+252}$ باشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة إلى x ينتج أنّ: $\sec^2\theta \times \frac{d\theta}{dx} = \frac{(x^2+252)(4)-(4x)(2x)}{(x^2+252)^2}$ $\frac{d\theta}{dx} = \frac{1008-4x^2}{\sec^2\theta\,(x^2+252)^2}$ $= \frac{1008-4x^2}{(1+\tan^2\theta)(x^2+252)^2}$ $= \frac{1008-4x^2}{\left(1+\frac{16x^2}{(x^2+252)^2}\right)(x^2+252)^2}$ $= \frac{1008-4x^2}{(x^2+252)^2+16x^2}$
أتحقق من فهمي صفحة 60	
a	$x^2+y^2=13$ $2x+2y\frac{dy}{dx}=0$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$

b	$2x + 5y^2 = \sin y$ $2 + 10y\frac{dy}{dx} = \cos y\frac{dy}{dx}$ $\frac{dy}{dx}(10y - \cos y) = -2$ $\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{10y - \cos y}$

أتحقق من فهمي صفحة 62

a	$3xy^2 + y^3 = 8$ $6xy\frac{dy}{dx} + 3y^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{3y^2}{6xy + 3y^2}$
b	$\tan(x - y) = 2xy^3 + 1$ $\left(1 - \frac{dy}{dx}\right)\sec^2(x - y) = 6xy^2\frac{dy}{dx} + 2y^3$ $\sec^2(x - y) - \sec^2(x - y)\frac{dy}{dx} = 6xy^2\frac{dy}{dx} + 2y^3$ $\frac{dy}{dx}(6xy^2 + \sec^2(x - y)) = \sec^2(x - y) - 2y^3$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2(x - y) - 2y^3}{6xy^2 + \sec^2(x - y)}$
c	يمكن تبسيط العلاقة قبل الاشتقاق كالآتي: $x^2 = \frac{x - y}{x + y} \rightarrow x^3 + x^2y = x - y$ $\rightarrow 3x^2 + x^2\frac{dy}{dx} + 2xy = 1 - \frac{dy}{dx}$ $\rightarrow \frac{dy}{dx} + x^2\frac{dy}{dx} = 1 - 3x^2 - 2xy$ $\rightarrow \frac{dy}{dx}(1 + x^2) = 1 - 3x^2 - 2xy$ $\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 - 3x^2 - 2xy}{1 + x^2}$

	أتحقق من فهمي صفحة 63
a	$y^2 = \ln x \rightarrow 2y\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}$ $\rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2xy}$ $\left.\dfrac{dy}{dx}\right\|_{(e,1)} = \dfrac{1}{2e}$
b	نجد قيمة y عندما $x = 6$ $(y-3)^2 = 4(6-5) \rightarrow (y-3)^2 = 4$ $\rightarrow y - 3 = \pm 2$ $\rightarrow y = 5 \; or \; y = 1$ باشتقاق طرفي العلاقة $(y-3)^2 = 4(x-5)$ بالنسبة إلى x ينتج أنّ: $2(y-3)\dfrac{dy}{dx} = 4$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{y-3}$ ميل المماس عند النقطة الأولى هو: $\left.\dfrac{dy}{dx}\right\|_{(6,1)} = \dfrac{2}{1-3} = -1$ وميل المماس عند النقطة الثانية هو: $\left.\dfrac{dy}{dx}\right\|_{(6,5)} = \dfrac{2}{5-3} = 1$
	أتحقق من فهمي صفحة 65
	$x^3 + y^3 - 3xy = 17 \rightarrow 3x^2 + 3y^2\dfrac{dy}{dx} - 3x\dfrac{dy}{dx} - 3y = 0$ بتعويض x= 2، وy =3 ينتج أنّ: $\left.\dfrac{dy}{dx}\right\|_{(2,3)} = -\dfrac{1}{7}$ $\rightarrow$ إذن، ميل المماس هو: $-\dfrac{1}{7}$ إذن، معادلة المماس هي: $y - 3 = -\dfrac{1}{7}(x-2)$ $\leftarrow$ $y = -\dfrac{1}{7}x + \dfrac{23}{7}$

أتحقق من فهمي صفحة 66	
	$xy + y^2 = 2x \rightarrow x\frac{dy}{dx} + y + 2y\frac{dy}{dx} = 2$ $\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2-y}{x+2y}$ $\rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x+2y)\left(-\frac{dy}{dx}\right) - (2-y)\left(1+2\frac{dy}{dx}\right)}{(x+2y)^2}$ $= \frac{(x+2y)\left(\frac{y-2}{x+2y}\right) - (2-y)\left(1+2\frac{2-y}{x+2y}\right)}{(x+2y)^2}$ $= \frac{(x+2y)(y-2) - (2-y)(x+4)}{(x+2y)^3}$ $= \frac{2xy - 4x + 2y^2 - 8}{(x+2y)^3}$
أتحقق من فهمي صفحة 67	
	$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2-4t}{6t} = \frac{1}{2}t - \frac{2}{3}$ $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{2}}{6t} = \frac{1}{12t}$ $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right\|_{t=2} = \frac{1}{24}$
أتحقق من فهمي صفحة 69	
a	$y = x^{\sqrt{x}} \rightarrow \ln y = \ln x^{\sqrt{x}} \rightarrow \ln y = \sqrt{x}\ln x$ $\rightarrow \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \sqrt{x}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x$ $\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{x}} + \frac{y}{2\sqrt{x}}\ln x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} + \frac{x^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\ln x$

b	$y=\sqrt{\frac{x-1}{x^4+1}} \rightarrow \ln y=\ln\sqrt{\frac{x-1}{x^4+1}}$ $\rightarrow \ln y=\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x^4+1}$ $\rightarrow \ln y=\frac{1}{2}(\ln(x-1)-\ln(x^4+1))$ $\rightarrow \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{1}{2(x-1)}+\frac{2x^3}{x^4+1}$ $\rightarrow \frac{dy}{dx}=\left(\frac{1}{2(x-1)}+\frac{2x^3}{x^4+1}\right)\sqrt{\frac{x-1}{x^4+1}}$
أتدرب وأحل المسائل صفحة 69	
1	$x^2-2y^2=4$ $2x-4y\frac{dy}{dx}=0$ $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{2y}$
2	$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{10}$ $\frac{-2x}{x^4}+\frac{-2y\frac{dy}{dx}}{y^4}=0$ $\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{x^4}\times\frac{y^4}{-2y}=-\frac{y^3}{x^3}$
3	$(x^2+y^2)^2=50(x^2-y^2)$ $2(x^2+y^2)\left(2x+2y\frac{dy}{dx}\right)=50\left(2x-2y\frac{dy}{dx}\right)$ $\frac{dy}{dx}(yx^2+y^3+25y)=25x-x^3-xy^2$ $\frac{dy}{dx}=\frac{25x-x^3-xy^2}{yx^2+y^3+25y}$

4	$e^x y = xe^y$ $(e^x)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y)(e^x) = (x)\left(e^y\frac{dy}{dx}\right) + (e^y)(1)$ $\frac{dy}{dx}(e^x - xe^y) = e^y - ye^x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{e^y - ye^x}{e^x - xe^y}$
5	$3^x = y - 2xy$ $3^x \ln 3 = \frac{dy}{dx} - 2x\frac{dy}{dx} - 2y$ $\frac{dy}{dx}(1 - 2x) = 2y + 3^x \ln 3$ $\frac{dy}{dx} = \frac{2y + 3^x \ln 3}{1 - 2x}$
6	$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$ $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{\frac{dy}{dx}}{2\sqrt{y}} = 0$ $\frac{dy}{dx} = \frac{-2\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} = \frac{-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$
7	$x = \sec\frac{1}{y}$ $1 = -\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}\sec\frac{1}{y}\tan\frac{1}{y}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{-y^2}{\sec\frac{1}{y}\tan\frac{1}{y}} = -y^2\cos\frac{1}{y}\cot\frac{1}{y}$

8	$(\sin \pi x+\cos \pi y)^2=2$ $2(\sin \pi x+\cos \pi y)^1\left(\pi \cos \pi x-\pi \sin \pi y \frac{dy}{dx}\right)=0$ $\frac{dy}{dx}(\pi \sin \pi y)(\sin \pi x+\cos \pi y)=(\pi \cos \pi x)(\sin \pi x+\cos \pi y)$ $\frac{dy}{dx}=\frac{(\pi \cos \pi x)(\sin \pi x+\cos \pi y)}{(\pi \sin \pi y)(\sin \pi x+\cos \pi y)}=\frac{\cos \pi x}{\sin \pi y}$
9	$\frac{x}{y^2}+\frac{y^2}{x}=5 \rightarrow x^2+y^4=5xy^2$ $\rightarrow 2x+4y^3\frac{dy}{dx}=10xy\frac{dy}{dx}+5y^2$ $\rightarrow \frac{dy}{dx}(4y^3-10xy)=5y^2-2x$ $\rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{5y^2-2x}{4y^3-10xy}$
10	$x+y=\cos xy$ $1+\frac{dy}{dx}=-\left(x\frac{dy}{dx}+y\right)\sin xy$ $\frac{dy}{dx}(-x\sin xy-1)=1+y\sin xy$ $\frac{dy}{dx}=-\frac{1+y\sin xy}{x\sin xy+1}$
11	$x^2+y^2=\ln(x+y)^2$ $2x+2y\frac{dy}{dx}=\frac{2(x+y)\left(1+\frac{dy}{dx}\right)}{(x+y)^2}$ $x+y\frac{dy}{dx}=\frac{1+\frac{dy}{dx}}{x+y}$ $\frac{dy}{dx}(xy+y^2-1)=1-x^2-xy \rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1-x^2-xy}{xy+y^2-1}$

12	$\sin x\cos y = x^2 - 5y$ $(\sin x)\left(-\sin y\dfrac{dy}{dx}\right) + (\cos y)(\cos x) = 2x - 5\dfrac{dy}{dx}$ $\dfrac{dy}{dx}(\sin x\sin y - 5) = \cos x\cos y - 2x$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos x\cos y - 2x}{\sin x\sin y - 5}$
13	$2y^2 + 2xy - 1 = 0$ أجد قيمة y عندما $x = \frac{1}{2}$: $2y^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)y - 1 = 0 \;\rightarrow\; 2y^2 + y - 1 = 0$ $\rightarrow (2y-1)(y+1) = 0 \rightarrow y = \dfrac{1}{2}, y = -1$ باشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة إلى x ينتج أنّ: $4y\dfrac{dy}{dx} + 2x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-y}{2y+x} \;\rightarrow\; \left.\dfrac{dy}{dx}\right\rvert_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{-\frac{1}{2}}{2\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = -\dfrac{1}{3}$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right\rvert_{\left(\frac{1}{2},-1\right)} = -\dfrac{2}{3}$
14	$y^3 + 2x^2 = 11y$ أجد قيمة x عندما $y = 1$: $1 + 2x^2 = 11 \;\rightarrow\; x^2 = 5 \;\rightarrow x = \pm\sqrt{5}$ باشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة إلى x ينتج أنّ: $3y^2\dfrac{dy}{dx} + 4x = 11\dfrac{dy}{dx}$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x}{11-3y^2} \;\rightarrow\; \left.\dfrac{dy}{dx}\right\rvert_{(-\sqrt{5},1)} = \dfrac{-\sqrt{5}}{2}$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right\rvert_{(\sqrt{5},1)} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

15	$x^2+y^2=25$ $2x+2y\frac{dy}{dx}=0$ $2(3)+2(-4)\frac{dy}{dx}=0 \rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{(3,-4)}=\frac{3}{4}$
16	$x^2y=4(2-y)$ $x^2\frac{dy}{dx}+2xy=-4\frac{dy}{dx}$ $4\frac{dy}{dx}+2(2)(1)=-4\frac{dy}{dx} \rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{(2,1)}=-\frac{1}{2}$
17	$e^{\sin x}+e^{\cos y}=e+1$ $e^{\sin x}\cos x-e^{\cos y}\sin y\frac{dy}{dx}=0$ $e^{\sin\frac{\pi}{2}}\cos\frac{\pi}{2}-e^{\cos\frac{\pi}{2}}\sin\frac{\pi}{2}\frac{dy}{dx}=0 \rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}=0$
18	$\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=5$ $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=5$ $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\frac{dy}{dx}=0$ $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{3}(1)\frac{dy}{dx}=0 \rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{(8,1)}=-\frac{1}{2}$
19	$x^2+xy+y^2=13$ $2x+x\frac{dy}{dx}+y+2y\frac{dy}{dx}=0$ $-8-4\frac{dy}{dx}+3+6\frac{dy}{dx}=0$ ميل المماس هو: $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{(-4,3)}=\frac{5}{2}$ معادلة المماس هي: $y-3=\frac{5}{2}(x+4) \rightarrow y=\frac{5}{2}x+13$

20	$x+y-1=\ln(x^2+y^2)$ $1+\frac{dy}{dx}=\frac{2x+2y\frac{dy}{dx}}{x^2+y^2}$ $1+\frac{dy}{dx}=2 \to \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{(1,0)}=1$ معادلة المماس هي: $y-0=1(x-1) \to y=x-1$
21	$x+y=\sin y$ $1+\frac{dy}{dx}=\cos y\frac{dy}{dx}$ $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{-1+\cos y}$ $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\sin y\frac{dy}{dx}}{(-1+\cos y)^2}=\frac{\sin y\left(\frac{1}{-1+\cos y}\right)}{(-1+\cos y)^2}=\frac{\sin y}{(-1+\cos y)^3}$
22	$4y^3=6x^2+1$ $12y^2\frac{dy}{dx}=12x$ $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y^2} \to \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y^2-2xy\frac{dy}{dx}}{y^4}=\frac{y-2x\left(\frac{x}{y^2}\right)}{y^3}=\frac{y^3-2x^2}{y^5}$
23	$xy+e^y=e$ $x\frac{dy}{dx}+y+e^y\frac{dy}{dx}=0$ $\frac{dy}{dx}=\frac{-y}{x+e^y}$ $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(x+e^y)\left(-\frac{dy}{dx}\right)+y\left(1+e^y\frac{dy}{dx}\right)}{(x+e^y)^2}$ $=\frac{(x+e^y)\left(\frac{y}{x+e^y}\right)+y\left(1+e^y\frac{-y}{x+e^y}\right)}{(x+e^y)^2}$ $=\frac{(x+e^y)(y)+y(x+e^y-ye^y)}{(x+e^y)^3}=\frac{2yx+2ye^y-y^2e^y}{(x+e^y)^3}$

24	$(x-6)(y+4)=2$ $(x-6)\frac{dy}{dx}+(y+4)=0$ $(7-6)\frac{dy}{dx}+(-2+4)=0 \rightarrow \frac{dy}{dx}\Big\|_{(7,-2)}=-2$ إذن ميل العمودي على المماس هو $\frac{1}{2}$ معادلة العمودي على المماس هي: $y+2=\frac{1}{2}(x-7) \rightarrow y=\frac{1}{2}x-\frac{11}{2}$
25	$3x^2+2xy+y^2=6$ $6x+2x\frac{dy}{dx}+2y+2y\frac{dy}{dx}=0$ $\frac{dy}{dx}=\frac{-3x-y}{x+y}$ $\frac{dy}{dx}=0 \rightarrow \frac{-3x-y}{x+y}=0 \rightarrow -3x-y=0 \rightarrow y=-3x$ $3x^2+2x(-3x)+(-3x)^2=6 \rightarrow 6x^2=6 \rightarrow x=\pm 1$ إذن للمنحنى مماسان أفقيان عند النقطتين $(1,-3),(-1,3)$
26	$x+y^2=1$ $1+2y\frac{dy}{dx}=0 \rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-1}{2y}$ ميل المستقيم $x+2y=0$ هو $-\frac{1}{2}$ $\frac{-1}{2y}=-\frac{1}{2} \rightarrow y=1 \rightarrow x+(1)^2=1 \rightarrow x=0$ النقطة المطلوبة هي $(0,1)$
27	$y^3=x^2$ $3y^2\frac{dy}{dx}=2x \rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2x}{3y^2}\ ,y\neq 0$ ميل المستقيم $y+3x-5=0$ هو -3 إذن ميل العمودي عليه يساوي $\frac{1}{3}$ $\frac{2x}{3y^2}=\frac{1}{3} \rightarrow 2x=y^2 \rightarrow x=\frac{1}{2}y^2$ $y^3=x^2 \rightarrow y^3=\frac{1}{4}y^4 \rightarrow 1=\frac{1}{4}y \rightarrow y=4 \rightarrow x=\frac{1}{2}(4)^2 \rightarrow x=8$ النقطة المطلوبة هي $(8,4)$

28	$\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=10\ , x\neq 0\,, y\neq 0$ $\frac{\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{y^2}}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}+\frac{\frac{x\frac{dy}{dx}-y}{x^2}}{2\sqrt{\frac{y}{x}}}=0 \rightarrow \frac{y-x\frac{dy}{dx}}{2y^2\sqrt{\frac{x}{y}}}=\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{2x^2\sqrt{\frac{y}{x}}}$ $\rightarrow \left(y-x\frac{dy}{dx}\right)\left(x^2\sqrt{\frac{y}{x}}\right)=\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)\left(y^2\sqrt{\frac{x}{y}}\right)$ $x^2y\sqrt{\frac{y}{x}}-x^3\sqrt{\frac{y}{x}}\frac{dy}{dx}=y^3\sqrt{\frac{x}{y}}-xy^2\sqrt{\frac{x}{y}}\frac{dy}{dx}$ $(xy^2\sqrt{\frac{x}{y}}-x^3\sqrt{\frac{y}{x}})\frac{dy}{dx}=y^3\sqrt{\frac{x}{y}}-x^2y\sqrt{\frac{y}{x}}$ $\rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y^3\sqrt{\frac{x}{y}}-x^2y\sqrt{\frac{y}{x}}}{xy^2\sqrt{\frac{x}{y}}-x^3\sqrt{\frac{y}{x}}}=\frac{y(y^2\sqrt{\frac{x}{y}}-x^2\sqrt{\frac{y}{x}})}{x(y^2\sqrt{\frac{x}{y}}-x^2\sqrt{\frac{y}{x}})}=\frac{y}{x}$ يمكن اختصار العامل المشترك من البسط والمقام لأنه لا يساوي صفرًا إلاّ إذا كان $y = x$ وهذا لا يتسق مع العلاقة الأصلية.
29	$y=x^{\frac{1}{x}}\quad ,x>0$ $\ln y=\ln x^{\frac{1}{x}}$ $\ln y=\frac{1}{x}\ln x$ $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\times\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\ln x$ $\frac{dy}{dx}=\frac{y(1-\ln x)}{x^2}$ $\frac{y(1-\ln x)}{x^2}=0 \rightarrow \ln x=1 \rightarrow x=e \rightarrow y=e^{\frac{1}{e}}$ النقطة المطلوبة هي $\left(e, e^{\frac{1}{e}}\right)$

30	$x^2+y^2=100$ $2x+2y\frac{dy}{dx}=0$ $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ $-\frac{x}{y}=\frac{3}{4}\ \rightarrow y=-\frac{4}{3}x$ $x^2+y^2=100\ \rightarrow\ x^2+\left(-\frac{4}{3}x\right)^2=100$ $\rightarrow \frac{25}{9}x^2=100\ \ \rightarrow \frac{25}{9}x^2=100$ إذا كانت $x=6$، فإن $y=-\frac{4}{3}(6)=-8$ وإذا كانت $x=-6$، فإن $y=-\frac{4}{3}(-6)=8$ إذن، هناك نقطتان تحققان المطلوب هما $(6,-8),(-6,8)$
31	$s(t)=t^{1/t}$ $\ln s(t)=\ln t^{1/t}$ $\ln s(t)=\frac{1}{t}\ln t$ $\frac{v(t)}{s(t)}=\left(\frac{1}{t}\right)\left(\frac{1}{t}\right)+(\ln t)\left(-\frac{1}{t^2}\right)=\frac{1-\ln t}{t^2}\ \rightarrow v(t)=s(t)\times\frac{1-\ln t}{t^2}$ $\rightarrow v(t)=t^{1/t}\times\frac{1-\ln t}{t^2}$ $\ln v(t)=\ln\left(t^{1/t}\times\frac{1-\ln t}{t^2}\right)$ $\rightarrow \ln v(t)=\ln t^{1/t}+\ln(1-\ln t)-\ln t^2$ $\rightarrow \ln v(t)=\frac{1}{t}\ln t+\ln(1-\ln t)-2\ln t$ $\rightarrow \frac{a(t)}{v(t)}=\frac{1-\ln t}{t^2}+\frac{-\frac{1}{t}}{1-\ln t}-\frac{2}{t}$ $\rightarrow a(t)=v(t)\left(\frac{1-\ln t}{t^2}+\frac{-\frac{1}{t}}{1-\ln t}-\frac{2}{t}\right)$ $=\left(t^{1/t}\times\frac{1-\ln t}{t^2}\right)\left(\frac{1-\ln t}{t^2}-\frac{1}{t(1-\ln t)}-\frac{2}{t}\right)$ $=t^{1/t}\left(\frac{(1-\ln t)^2}{t^4}-\frac{1}{t^3}-\frac{2(1-\ln t)}{t^3}\right)$

32	$t^{1/t} \times \frac{1-\ln t}{t^2} = 0 \rightarrow 1-\ln t = 0 \rightarrow \ln t = 1 \rightarrow t = e$ $a(t) = e^{1/e}\left(\frac{(1-\ln e)^2}{e^4} - \frac{1}{e^3} - \frac{2(1-\ln e)}{e^3}\right) = -e^{\frac{1}{e}-3}\ \mathrm{m/s^2}$
33	$y = \ln x\,, x > 0$ بالتحويل إلى الصيغة الأسية ينتج أن: $e^y = x$ باشتقاق الطرفين ضمنيًا بالنسبة إلى x ينتج أنّ: $e^y \frac{dy}{dx} = 1$ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y}$ بتعويض $e^y = x$ ينتج أنّ: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$
34	$y = (x^2+3)^x \rightarrow \ln y = \ln(x^2+3)^x$ $\rightarrow \ln y = x\ln(x^2+3)$ $\rightarrow \frac{\frac{dy}{dx}}{y} = (x)\left(\frac{6x}{x^2+3}\right) + \ln(x^2+3)$ $\rightarrow \frac{dy}{dx} = \left(\frac{6x^2}{x^2+3} + \ln(x^2+3)\right)(x^2+3)^x$
35	$y = \frac{(x^4+1)(\sqrt{x+2})}{2x^2+2x+1} \rightarrow \ln y = \ln\frac{(x^4+1)(\sqrt{x+2})}{2x^2+2x+1}$ $\rightarrow \ln y = \ln(x^4+1) + \ln(\sqrt{x+2}) - \ln(2x^2+2x+1)$ $\rightarrow \ln y = \ln(x^4+1) + \frac{1}{2}\ln(x+2) - \ln(2x^2+2x+1)$ $\rightarrow \frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{4x^3}{x^4+1} + \frac{1}{2x+4} - \frac{4x+2}{2x^2+2x+1}$ $\rightarrow \frac{dy}{dx} = \left(\frac{4x^3}{x^4+1} + \frac{1}{2x+4} - \frac{4x+2}{2x^2+2x+1}\right)\frac{(x^4+1)(\sqrt{x+2})}{2x^2+2x+1}$

36	$y=\sqrt{x^2(x+1)(x+2)} \rightarrow \ln y=\ln\sqrt{x^2(x+1)(x+2)}$ $\rightarrow \ln y=\frac{1}{2}\ln x^2(x+1)(x+2)$ $\rightarrow \ln y=\frac{1}{2}\ln x^2+\frac{1}{2}\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x+2)$ $\rightarrow \ln y=\ln x+\frac{1}{2}\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x+2)$ $\rightarrow \frac{\frac{dy}{dx}}{y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x+2)}$ $\rightarrow \frac{dy}{dx}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x+2)}\right)\sqrt{x^2(x+1)(x+2)}$
37	$y=x^{\sin x} \rightarrow \ln y=\ln x^{\sin x}$ $\rightarrow \ln y=(\sin x)\ln x$ $\rightarrow \frac{\frac{dy}{dx}}{y}=(\sin x)\left(\frac{1}{x}\right)+(\ln x)(\cos x)$ $\rightarrow \frac{dy}{dx}=\left(\frac{\sin x}{x}+(\ln x)(\cos x)\right)x^{\sin x}$
38	$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\sin t}{\cos t}=-\tan t$ $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\sec^2 t}{\cos t}=-\sec^3 t \rightarrow \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right\|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\sec^3\frac{\pi}{4}=-2\sqrt{2}$
39	$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2+1}{-e^{-t}}=e^t(-3t^2-1)$ $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{(e^t)(-6t)+(-3t^2-1)(e^t)}{-e^{-t}}=e^{2t}(1+6t+3t^2)$ $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right\|_{t=0}=e^0(1)=1$

40

$x^3 + y^3 = 6xy$

$y = x \rightarrow x^3 + x^3 = 6x^2$

$\rightarrow x^3 = 3x^2$

$\rightarrow x^2(x-3) = 0$

$\rightarrow x = 0 \text{ or } x = 3$

نقطة التقاطع في الربع الأول هي $(3,3)$

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 6x\frac{dy}{dx} + 6y \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$$

ميل المماس هو: $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,3)} = \frac{6-9}{9-6} = -1$

معادلة المماس هي: $y - 3 = -(x-3) \rightarrow y = -x + 6$

41

بما أنّ المماس أفقي، فإن $\frac{dy}{dx} = 0$

$$\frac{2y - x^2}{y^2 - 2x} = 0 \rightarrow 2y - x^2 = 0 \rightarrow y = \frac{1}{2}x^2$$

$$x^3 + y^3 = 6xy \rightarrow x^3 + \frac{1}{8}x^6 = 3x^3$$

$$\rightarrow \frac{1}{8}x^6 - 2x^3 = 0 \rightarrow x^3(x^3 - 16) = 0 \rightarrow x = 0, x = \sqrt[3]{16}$$

$\rightarrow y = 0, y = \frac{1}{2}\sqrt[3]{(16)^2}$ النقطة المطلوبة في الربع الأول هي: $\left(\sqrt[3]{16}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{(16)^2}\right)$

42

$$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

لتكن $P(x,y)$ نقطة تماس الشعاع مع منحنى الدائرة:

$$m = \frac{0 - y}{1.25 - x} = -\frac{x}{y} \rightarrow y^2 = 1.25x - x^2$$

$$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow x^2 + 1.25x - x^2 = 1$$

$$\rightarrow x = \frac{4}{5} \qquad \rightarrow y = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$$

فتكون النقطة $P\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ ، ميل المماس عند النقطة P: $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)} = -\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$

$$m = \frac{h - 0}{-2 - \frac{5}{4}} = -\frac{4}{3} \rightarrow h = \frac{13}{3}$$

ارتفاع المصباح يساوي $\frac{13}{3}$ وحدة

43	$x^2-y^2=1 \rightarrow 2x-2y\frac{dy}{dx}=0$ $\rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$
44	$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\sec^2 t}{\sec t\tan t}=\frac{\sec t}{\tan t}$
45	$\frac{dy}{dx}=\frac{\sec t}{\tan t}=\frac{x}{y}$ المقداران الجبريان اللذان يمثلان $\frac{dy}{dx}$ متكافئان، لأنه من نص السؤال: $x=\sec t$ و $y=\tan t$ ومنه فإن $\frac{\sec t}{\tan t}=\frac{x}{y}$
46	$\frac{dy}{dx}=2 \rightarrow \frac{x}{y}=2 \rightarrow x=2y$ $x^2-y^2=1 \rightarrow (2y)^2-y^2=1$ $\rightarrow y^2=\frac{1}{3}$ $\rightarrow y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\rightarrow y=\frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow x=\frac{2}{\sqrt{3}}\ ,\quad y=-\frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow x=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ النقاط التي يكون عندها ميل المماس 2 هي: $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

<table>
<tr>
<td>47</td>
<td>

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{k}$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{\frac{dy}{dx}}{2\sqrt{y}}=0 \rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

نفرض نقطة التماس هي (x_1,y_1) فيكون ميل المماس:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_1,y_1)}=-\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}$$

معادلة المماس:

$$y-y_1=-\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(x-x_1)$$

المقطع x والمقطع y للمماس:

$$x=0 \rightarrow y-y_1=-\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(-x_1) \rightarrow y=y_1+\sqrt{y_1}\sqrt{x_1}$$

$$y=0 \rightarrow y_1=\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(x-x_1) \rightarrow x=x_1+\sqrt{y_1}\sqrt{x_1}$$

مجموع المقطعين:

$$\begin{aligned} y_1+\sqrt{y_1}\sqrt{x_1}+x_1+\sqrt{y_1}\sqrt{x_1} &= y_1+2\sqrt{y_1}\sqrt{x_1}+x_1 \\ &= \left(\sqrt{y_1}+\sqrt{x_1}\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{k}\right)^2=k \end{aligned}$$

</td>
</tr>
</table>

48

$$y = x^{\sqrt{x}}$$

$$\ln y = \ln x^{\sqrt{x}}$$

$$\ln y = \sqrt{x}\ln x$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = (\sqrt{x})\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \rightarrow \frac{dy}{dx} = y\left(\frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = x^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}\left(x^{\sqrt{x}}\right)$$

ميل المماس:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(4,16)} = \frac{2+\ln 4}{2\sqrt{4}}(16) = 8 + 4\ln 4$$

معادلة المماس:

$$y - 16 = (8 + 4\ln 4)(x - 4)$$

المقطع x والمقطع y للمماس:

$$x = 0 \rightarrow y - 16 = (8 + 4\ln 4)(-4) \rightarrow y = -16 - 16\ln 4$$

$$y = 0 \rightarrow -16 = (8 + 4\ln 4)(x - 4) \rightarrow x = \frac{4 + 4\ln 4}{2 + \ln 4}$$

مساحة المثلث OBC بوحدة المساحة هي:

$$A = \frac{1}{2} \times \frac{4 + 4\ln 4}{2 + \ln 4} \times |-16 - 16\ln 4| = \frac{32(1+\ln 4)^2}{2 + \ln 4}$$

اختبار نهاية الوحدة صفحة 72	
1	c
2	b
3	d
4	d
5	c
6	a
7	d
8	$f(x)=e^x(x+x\sqrt{x})$ $f'(x)=(e^x)\left(1+(x)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)+(\sqrt{x})(1)\right)+(x+x\sqrt{x})(e^x)$ $=e^x\left(1+\frac{3}{2}\sqrt{x}+x+x\sqrt{x}\right)$
9	$f(x)=\frac{x}{\tan x}$ $f'(x)=\frac{(\tan x)(1)-(x)(\sec^2 x)}{\tan^2 x}=\frac{\tan x-x\sec^2 x}{\tan^2 x}$
10	$f(x)=\frac{1}{x}-12\sec x$ $f'(x)=\frac{-1}{x^2}-12\sec x\tan x$
11	$f(x)=\frac{e^x}{\ln x}$ $f'(x)=\frac{(\ln x)(e^x)-(e^x)\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln^2 x}=\frac{e^x(x\ln x-1)}{x\ln^2 x}$
12	$f(x)=\frac{\ln x}{x^4}$ $f'(x)=\frac{(x^4)\left(\frac{1}{x}\right)-(\ln x)(4x^3)}{x^8}=\frac{1-4\ln x}{x^5}$

13	$f(x) = 5^{2-x}$ $\ln f(x) = \ln 5^{2-x}$ $\ln f(x) = (2-x)\ln 5$ $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = -\ln 5$ $f'(x) = -(\ln 5)f(x) = -(\ln 5)(5^{2-x})$
14	$f(x) = 10\sin 0.5x$ $f'(x) = 5\cos 0.5x$
15	$f(x) = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^3\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$ $f'(x) = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^3\left(2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\left(3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)\right)$ $= \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)\right)$ $= \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{x^3}+\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^4}-\frac{3}{x}-\frac{6}{x^2}-\frac{3}{x^3}-\frac{6}{x^4}\right)$ $= -\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{8+5x+4x^2+x^3}{x^4}\right)$
16	$f(x) = e^{-1.5x}\cos x^2$ $f'(x) = (e^{-1.5x})(-2x\sin x^2)+(\cos x^2)(-1.5e^{-1.5x})$ $= -e^{-1.5x}(2x\sin x^2+\cos x^2)$
17	$(fg)'(2) = f(2)g'(2)+g(2)f'(2)$ $= 3\times 2+1\times -4 = 2$
18	$\left(\dfrac{f}{g}\right)'(2) = \dfrac{g(2)f'(2)-f(2)g'(2)}{g^2(2)} = \dfrac{1\times -4-3\times 2}{(1)^2} = -10$
19	$(3f-4fg)'(2) = 3f'(2)-4(fg)'(2) = 3(-4)-4(2) = -20$
20	$f(x) = x^7\ln x$ $f'(x) = (x^7)\left(\frac{1}{x}\right)+(\ln x)(7x^6) = x^6+7x^6\ln x$ $f''(x) = 6x^5+(7x^6)\left(\frac{1}{x}\right)+(\ln x)(42x^5) = 13x^5+42x^5\ln x$

طريق التفوق في الرياضيات : د. خالد جلال 0799948198 & ا.اياد الحمد 0795604563

21	$f(x)=\frac{\cos x}{x}$ $f'(x)=\frac{(x)(-\sin x)-(\cos x)(1)}{x^2}=\frac{-\sin x}{x}-\frac{\cos x}{x^2}$ $f''(x)=-\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}-\frac{-x^2\sin x-2x\cos x}{x^4}$ $=\frac{-x^3\cos x+2x^2\sin x+2x\cos x}{x^4}$ $=\frac{-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x}{x^3}$
22	$f(x)=\frac{x}{1+\sqrt{x}}$ $f'(x)=\frac{(1+\sqrt{x})(1)-(x)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(1+\sqrt{x})^2}=\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2}$ $f''(x)=\frac{(1+\sqrt{x})^2\left(\frac{1}{4\sqrt{x}}\right)-\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})\right)}{(1+\sqrt{x})^4}$ $=\frac{-3-\sqrt{x}}{4\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3}$
23	$f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$ $f'(x)=\frac{(1+x^2)(-2x)-(1-x^2)(2x)}{(1+x^2)^2}=\frac{-4x}{(1+x^2)^2}$ $f''(x)=\frac{(1+x^2)^2(-4)-(-4x)\left(2\times 2x(1+x^2)\right)}{(1+x^2)^4}$ $=\frac{12x^2-4}{(1+x^2)^3}$

24	$f(x)=\frac{x^2}{1+x}$ نقطة التماس: $f(1)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2} \rightarrow \left(1,\frac{1}{2}\right)$ ميل المماس: $f'(x)=\frac{(1+x)(2x)-(x^2)(1)}{(1+x)^2}=\frac{x^2+2x}{(1+x)^2}$ $f'(1)=\frac{3}{4}$ معادلة المماس: $y-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}(x-1) \rightarrow y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$
25	$f(x)=\frac{x^2}{\cos x}$ نقطة التماس: $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\frac{\pi^2}{16}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\pi^2\sqrt{2}}{16} \rightarrow \left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi^2\sqrt{2}}{16}\right)$ ميل المماس: $f'(x)=\frac{(\cos x)(2x)-(x^2)(-\sin x)}{(\cos x)^2}$ $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)-\left(\frac{\pi^2}{16}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\frac{1}{2}}=\frac{8\pi+\pi^2}{8\sqrt{2}}$ معادلة المماس: $y-\frac{\pi^2\sqrt{2}}{16}=\frac{8\pi+\pi^2}{8\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

26	$f(x) = \ln(x+5)$ نقطة التماس: $f(0) = \ln(0+5) = \ln(5) \quad \rightarrow \quad (0, \ln 5)$ ميل المماس: $f'(x) = \frac{1}{x+5}$ $f'(0) = \frac{1}{5}$ معادلة المماس: $y - \ln 5 = \frac{1}{5}(x-0) \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{5}x + \ln 5$
27	$f(x) = \sin x + \sin 3x$ نقطة التماس: $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ ميل المماس: $f'(x) = \cos x + 3\cos 3x$ $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} + 3\cos\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$ معادلة المماس: $y - \sqrt{2} = -\sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad \rightarrow \quad y = -\sqrt{2}x + \sqrt{2}\left(\frac{\pi+4}{4}\right)$
28	$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{2t}$ ميل المماس: $m = \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{t=4} = \frac{1}{8}$ نقطة التماس: $x = (4)^2 = 16 \;,\; y = 4 + 2 = 6 \quad \rightarrow \quad (16, 6)$ معادلة المماس: $y - 6 = \frac{1}{8}(x - 16) \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{8}x + 4$

29	$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3\cos t}{-4\sin t}=-\frac{3}{4}\cot t$ ميل المماس: $m=\frac{dy}{dx}\Big\vert_{t=\frac{\pi}{4}}=-\frac{3}{4}\cot\frac{\pi}{4}=-\frac{3}{4}$ نقطة التماس: $x=4\cos\frac{\pi}{4}=2\sqrt{2}\ ,\ \ y=3\sin\frac{\pi}{4}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\ \ \rightarrow\left(2\sqrt{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ معادلة المماس: $y-\frac{3\sqrt{2}}{2}=-\frac{3}{4}(x-2\sqrt{2})\ \ \rightarrow\ \ y=-\frac{3}{4}x+3\sqrt{2}$
30	$y=x\ln x$ ميل المماس: $f'(x)=(x)\left(\frac{1}{x}\right)+(\ln x)(1)=1+\ln x$ $f'(1)=1+\ln 1=1$ معادلة المماس: $y-0=1(x-1)\ \rightarrow\ y=x-1$
31	$f'(x)=2\ \rightarrow 1+\ln x=2$ $\rightarrow \ln x=1$ $\rightarrow x=e\ \ \rightarrow y=e\ln e=e$ النقطة المطلوبة هي (e,e)
32	$x(x+y)=2y^2\ \ \rightarrow\ x^2+xy=2y^2$ $\rightarrow\ 2x+x\frac{dy}{dx}+y=4y\frac{dy}{dx}$ $\rightarrow\ \frac{dy}{dx}=\frac{2x+y}{4y-x}$
33	$x=\frac{2y}{x^2-y}\ \ \rightarrow\ x^3-xy=2y$ $\rightarrow 3x^2-x\frac{dy}{dx}-y=2\frac{dy}{dx}$ $\rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-y}{x+2}$

34	$y\cos x = x^2 + y^2 \rightarrow -y\sin x + \frac{dy}{dx}\cos x = 2x + 2y\frac{dy}{dx}$ $\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x + y\sin x}{-2y + \cos x}$
35	$2xe^y + ye^x = 3 \rightarrow 2xe^y\frac{dy}{dx} + 2e^y + ye^x + e^x\frac{dy}{dx} = 0$ $\rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2e^y + ye^x}{2xe^y + e^x}$
36	$y^2 = \frac{x^3}{2-x}$ $2y\frac{dy}{dx} = \frac{(2-x)(3x^2) - (x^3)(-1)}{(2-x)^2}$ $2(-1)\frac{dy}{dx} = \frac{(2-1)(3) - (1)(-1)}{(2-1)^2} \rightarrow \frac{dy}{dx} = -2$ ميل المماس: $m = -2$ ميل العمودي على المماس: $m = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$ معادلة العمودي على المماس : $y + 1 = \frac{1}{2}(x-1) \rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

37	$y=\frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$ $\ln y=\ln\frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$ $=\ln(x+1)+\ln(x-2)-\ln(x-1)-\ln(x+2)$ $\frac{\frac{dy}{dx}}{y}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}$ $\frac{dy}{dx}=\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)y$ $=\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)\frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$ $=\left(\frac{-2}{x^2-1}+\frac{4}{x^2-4}\right)\frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$ $=\left(\frac{2x^2+4}{(x^2-1)(x^2-4)}\right)\frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$ $=\frac{2x^2+4}{(x-1)^2(x+2)^2}$
38	$y=x^{\ln x}$ $\ln y=\ln x^{\ln x}$ $=(\ln x)(\ln x)=(\ln x)^2$ $\frac{\frac{dy}{dx}}{y}=2(\ln x)\times\frac{1}{x}$ $\frac{dy}{dx}=\left(\frac{2\ln x}{x}\right)y$ $=\left(\frac{2\ln x}{x}\right)x^{\ln x}$

39	$x^2+3xy+y^2=x+3y$ $2x+3x\frac{dy}{dx}+3y+2y\frac{dy}{dx}=1+3\frac{dy}{dx}$ ميل المماس عند (2, -1): $4+6\frac{dy}{dx}-3-2\frac{dy}{dx}=1+3\frac{dy}{dx}$ $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{(2,-1)}=0$ معادلة المماس: $y+1=0(x-2)\ \rightarrow\ y=-1$
40	$x^2e^y=1$ ميل المماس: $x^2e^y\frac{dy}{dx}+2xe^y=0$ $\frac{dy}{dx}+2=0\ \rightarrow\ \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{(1,0)}=-2$ معادلة المماس: $y-0=-2(x-1)\ \rightarrow\ y=-2x+2$
41	$p'(1)=f(1)g'(1)+g(1)f'(1)=2\times1+3\times-2=-4$
42	$p'(4)=f(4)g'(4)+g(4)f'(4)=1\times0+8\times0.5=4$
43	$q'(7)=\frac{g(7)f'(7)-f(7)g'(7)}{\left(g(7)\right)^2}=\frac{4\times2-4\times-1}{(4)^2}=\frac{3}{4}$
44	$R(t)=200(0.9)^t$ $\frac{dR}{dt}=200(0.9)^t\ln 0.9$ $\left.\frac{dR}{dt}\right\|_{t=2}=200(0.9)^2\ln 0.9\approx-17.1\text{ g/day}$
45	$s(t)=10+\frac{1}{4}\sin(10\pi t)$ $v(t)=\frac{5\pi}{2}\cos(10\pi t)$ $a(t)=-25\pi^2\sin(10\pi t)$

جيل

2005

الرياضيات كما ينبغي أن تكون

تتضمن الوحدة:

١ - الأمثلة

٢ - أتحقق من فهمي

٣ - التمارين

٤ - اختبار نهاية الوحدة

مع الاجابات الكاملة لكل منها