المادة التعليمية للبرنامج العلاجي
المرحلة التحضيرية

للعام 2022-2023

مبحث الرياضيات

الصف: العاشر الأساسي

المصدر: مادة التعلم المبني على المفاهيم والنتاجات الأساسية لمبحث الرياضيات

ثالثًا: تحليلُ العبارةِ التربيعيَّةِ

ماذا سأتعلَّمُ؟
- العبارةُ التربيعيَّةُ.
- تحليلُ العبارةِ التربيعيَّةِ.

لوحـةٌ مستطيلةُ الشكلِ مِساحتُها بالوحداتِ المربَّعةِ (س^{٢} + ٤ س + ٣). إذا كانَ طولُها (س + ٣) وحدةَ طولٍ؛ فما عرضُها؟ ٩

يُسمّى المقدارُ **أ س^{٢} + ب س + جـ**، **أ $\neq$ ٠**، أ، ب، ج أعدادٌ حقيقيَّةٌ؛ **العبارةَ التربيعيَّةَ**.

تحليلُ العبارةِ التربيعيَّةِ

- أوَّلًا: إذا كانَ معاملُ س^{٢}، أ = ١
- ثانيًا: إذا كانَ معاملُ س^{٢}، أ $\neq$ ١

مثالٌ (١)

أُحلِّلُ كلًّا ممّا يأتي:

١) س^{٢}+ ٥س + ٦ ٢) س^{٢} - ١١س + ٢٤ ٣) س^{٢} + ٣ س − ٤

الحلُّ:

١) س^{٢}+ ٥ س + ٦

= (س + ٢) (س + ٣) البحثُ عنْ عددَينِ حاصلُ ضربِهما ٦، وناتجُ جمعِهما ٥ (هما: ٢ و٣).

٢) س^{٢} - ١١س + ٢٤

= (س − ٣) (س − ٨) البحثُ عنْ عددَينِ حاصلُ ضربِهما ٢٤، وناتجُ جمعِهما -١١ (هما: -٣، -٨).

٣) س^{٢} + ٣ س − ٤ البحثُ عنْ عددَينِ حاصلُ ضربِهما -٤ وناتجُ جمعِهما ٣ (هما: -١، ٤).

- س

= (س − ١) (س + ٤)

+ ٤س

+ ٣س

للتأكُّدِ من الحدِّ الأوسطِ؛ نضربُ الحدَّينِ على الطرفَينِ والحدَّينِ الأوسطَينِ ونجمعُهُما (- س + ٤ س = ٣ س).

أحاولُ أُحلّلُ كلًّا ممّا يأتي:

١) س^{٢} + ٧ س + ١٢   ٢) س^{٢} - ٨ س + ١٦   ٣) س^{٢} – ٤ س - ٦٠

مثالٌ (٢)

أُحلّلُ كلًّا ممّا يأتي:

١) ٣ س^{٢} + ٤ س + ١   ٢) ٢ س^{٢} – ٧ س -٤

الحلُّ:

١) ٣س^{٢}+ ٤ س + ١

+ س

= (٣ س + ١) (س+ ١)

+٣س

تحليلُ ٣ س^{٢} إلى عواملِها وتحليلُ الحدّ المطلقِ إلى عواملِهِ؛ معَ مراعاةِ إشاراتِ الحدودِ.
أتأكّدُ منَ التحليلِ؛ بضربِ الحدَّينِ في الطرفينِ والحدَّينِ الأوسطينِ ثمَّ أجمعُهُما.

٢) ٢ س^{٢} – ٧س -٤

٢س× -٤

= (٢ س +١)(س – ٤)

١×س

للتأكُّدِ منَ الحدّ الأوسطِ: (حاصلُ ضربِ الطرفينِ + حاصلِ ضربِ الوسطينِ = الحدَّ الأوسطِ).

أحاولُ أُحلّلُ ما يأتي إلى عواملِهِ:

١) ٢ س^{٢} + ١٠ س + ٨   ٢) ٥ س^{٢} + ٤٥ س + ٧٠

أختبرُ تعلُّمي

١) أُحلِّلُ كلًّا ممّا يأتي، وأجدُ البطاقةَ الصحيحةَ:

أ) س^{٢} + ١٤س – ٣٢

(س + ٨) (س – ٤)	(س + ٢) (س – ١٦)	(س + ١٦) (س – ٢)	(س + ٨) (س + ٤)

ب) س^{٢} + ١١س + ٢٨

(س + ٧) (س + ٤)	(س + ٢) (س + ١٤)	(س + ١٤) (س + ١٤)	(س + ٤) (س - ٧)

جـ) ٦ س^{٢} – س – ٢

(٢س + ١) (٣س – ٢)	(٢س - ٣) (٢س + ١)	(٢س - ١) (٣س + ٢)	(٦س - ١) (س - ٢)

٢) أجدُ ٣ قِيَمٍ للرمزِ (ك) لتُصبحَ العبارةُ التربيعيَّةُ الآتيةُ قابلةً للتحليلِ إلى العواملِ، ثمَّ أُحلِّلُ كلَّ حالةٍ:

س^{٢} – ٣ س + ك

٣) أكتبُ تعبيرًا جبريًّا يُمثِّلُ محيطَ لوحِ خلايا شمسيَّةٍ مستطيلةِ الشكلِ، مِساحتُها (س^{٢}+٢٤س – ٨١) وحدةً مربَّعةً.

٤) ما قِيَمُ (ك) التي تجعلُ تحليلَ كلٍّ ممّا يأتي صحيحًا:

أ) س^{٢} + ك س – ١٩ = (س - ١٩) (س + ١).

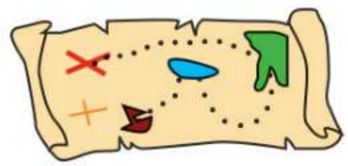
ب) ٢ س^{٢} + ك س - ٢١ = (٢ س – ٣) (س + ٧).

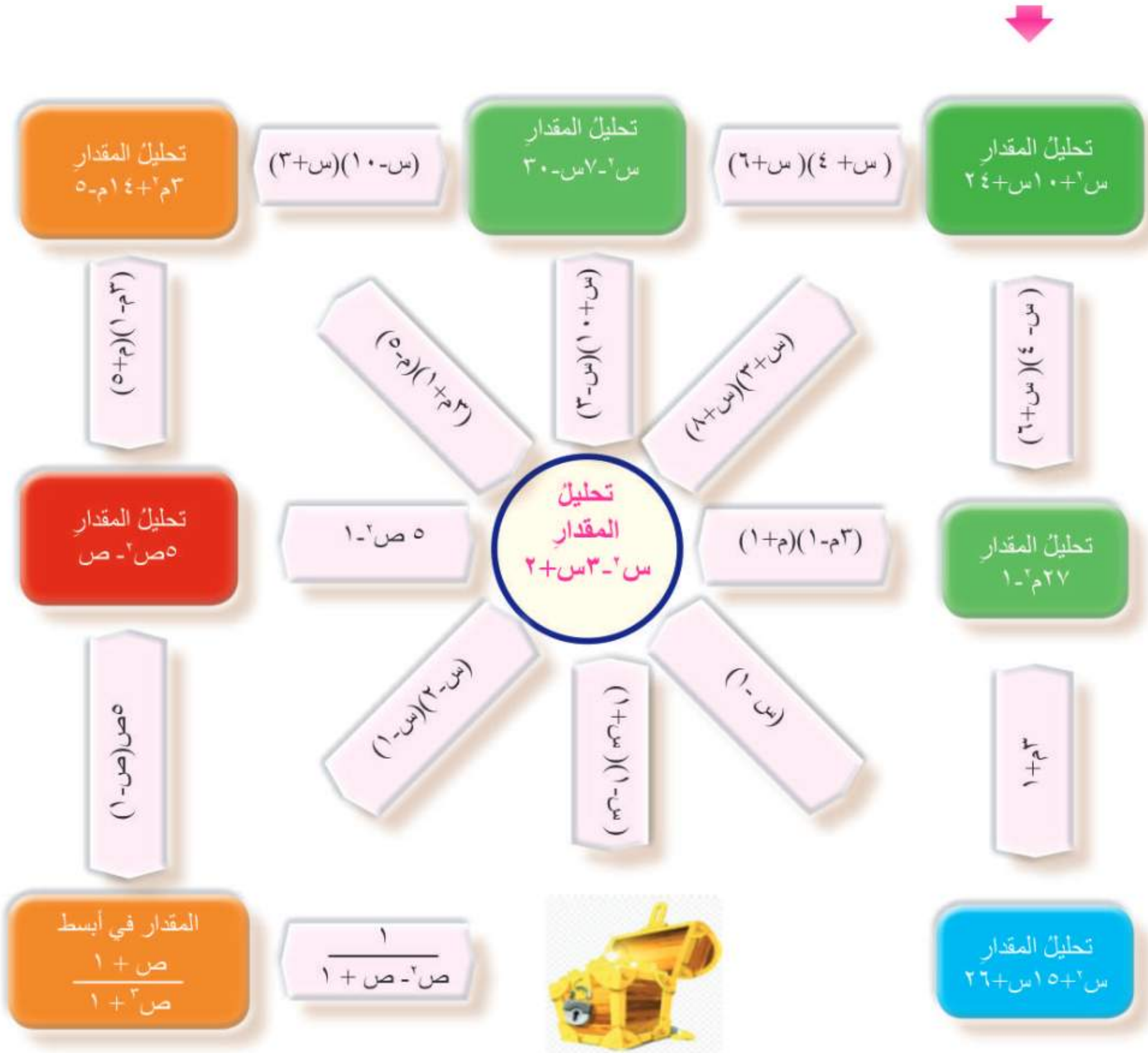
٥) أنا أحدُ عواملِ العبارةِ التربيعيَّةِ ٥ س^{٢}-٢١ س+ ٤، إذا كان أحد العوامل (س–٤)؛ فما العاملُ الآخرُ؟

لعبةٌ

لعبةُ المتاهةِ

لا تنظرْ إلى الخلفِ، ولا تُعدِ الطريقَ مرَّتَينِ.

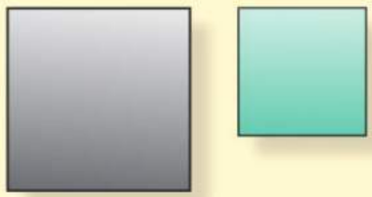




ثانيًا: حلُّ المعادلةِ التربيعيَّةِ

ماذا سأتعلَّمُ؟
- المعادلةُ التربيعيَّةُ.
- حلُّ المعادلةِ التربيعيَّةِ.
- القانونُ العامُّ لحلِّ المعادلةِ التربيعيَّةِ.
- مميِّزُ العبارةِ التربيعيَّةِ.

مربَّعانِ يزيدُ طولُ أحدِهِما على الثاني بالسنتيمتراتِ بمقدارِ ٣، وكانَ مجموعُ مساحتِهِما بالسنتيمتراتِ المربَّعةِ ٢٦٩ ما طولُ ضلعِ كلٍّ منْهُما؟



الصورةُ العامَّةُ **للمعادلةِ التربيعيَّةِ** بمتغيِّرٍ واحدٍ هيَ: أس^{٢} + ب س + جـ =٠: أ، ب، جـ أعدادٌ حقيقيَّةٌ أ $\neq$ ٠

أمّا **حلُّ المعادلةِ** فهوَ إيجادُ قِيَمِ (س) التي تُحقِّقُ المعادلةَ، وتُسمّى جذورَ المعادلةِ. ويوجدُ عدَّةُ طرائقَ لحلِّ المعادلةِ التربيعيَّةِ.

حلُّ المعادلةِ التربيعيَّةِ بالتحليلِ إلى العواملِ:

خطواتُ حلِّ المعادلةِ التربيعيَّةِ بالتحليلِ:

١) أكتبُ المعادلةَ التربيعيَّةَ بالصورةِ العامَّةِ أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠

٢) أُحلِّلُ المعادلةَ التربيعيَّةَ إلى عواملِها الأوَّليَّةِ؛ بكتابتِها على شكلِ حاصلِ ضربِ عبارتَينِ خطِّيَّتَينِ.

٣) أستعملُ الخاصِّيَّةَ الصفريَّةَ.

٤) أحلُّ المعادلتَينِ الخطِّيَّتَينِ التي حصلتُ عليهما في الخطوةِ السابقةِ.

أتعلَّمُ

إذا كانَ أ، ب عددَينِ حقيقيَّينِ، وكانَ أ×ب = صفرًا؛ فإنَّ أ = صفرًا أوْ ب = صفرًا أوْ كلَيْهِما يساوي صفرًا.

تُسمّى هذهِ الخاصِّيَّةُ **الخاصِّيَّةَ الصفريَّةَ**.

مثالٌ (١)

أحلُّ المعادلتَينِ الآتيتَينِ:

١) س٢ - ٤ = ٥ ٢) س٢ + ٧ س – ٨ = ٠

الحلُّ:

١) س٢ – ٤ -٥ = ٠ كتابةُ المعادلةِ بالصورةِ العامَّةِ.

س٢ – ٩ = ٠

(س – ٣) (س + ٣) =٠ تحليلُ المعادلةِ باستعمالِ الفرقِ بينَ مربَّعَينِ.

إمّا س – ٣ = ٠ ، ومنهُ س = ٣ استعمالُ الخاصّيَّةِ الصفريَّةِ.

أوْ س + ٣ = ٠ ، ومنهُ س = -٣

إذنْ: مجموعةُ الحلِّ هيَ: {٣ ، -٣}.

٢) س٢ + ٧ س – ٨ =٠

(س – ١) (س + ٨) = ٠ البحثُ عنْ عددَينِ حاصلُ ضربِهما (-٨) ومجموعُهُما (+٧).

إمّا س -١ = صفر ، ومنهُ س = ١ باستعمالِ الخاصّيَّةِ الصفريَّةِ.

أوْ س + ٨ = ٠ ، ومنهُ س = -٨

مجموعةُ حلِّ المعادلةِ هيَ: {١ ، - ٨}.

أحاولُ أجدُ حلَّ المعادلتَينِ الآتيتَينِ:

١) س٢ + ٣ س + ٢ = ٠ ٢) س٢ -٤ س - ٥ = ٠

حلُّ المعادلةِ التربيعيَّةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ:

أتأمَّلُ المعادلاتِ الآتيةَ: ٢س٢ – ٤ س – ١ = ٠، س٢ – ٢ س - ١٠ = ٠، س٢ +٣ س + ٧ = ٠

سأجدُ صعوبةً في حلِّ هذِهِ المعادلاتِ بالتحليلِ إلى العواملِ الأوَّليَّةِ؛ لذا، **أستعملُ القانونَ العامَّ لحلِّ المعادلةِ التربيعيَّةِ.**

أيُّ معادلـةٍ تربيعيَّـةٍ أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠، حيثُ أ، ب، جـ أعدادٌ حقيقيـةٌ، أ ≠ ٠، يُمكنُنـي حلُّهـا باستـعمالِ القانـونِ العـامِّ للمعادلـةِ التربيعيَّـةِ، وهـو:

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$$

ويُسـمّى المقـدارُ ب^{٢} - ٤ أ حــ **مميِّـزَ المعادلـةِ التربيعيَّـةِ** ويُرمـزُ لـهُ بالرمـز Δ: ب^{٢} - ٤ أ جـ ≤ ٠ (لمـاذا؟)

أُلاحـظُ أنَّ المميِّـزَ يُمكـنُ استـعمالُهُ للكشـفِ عـنْ إمكانيَّـةِ تحليـلِ المعـادلاتِ التربيعيَّـةِ وتحديـدِ عـددِ الحلـولِ الحقيقيَّـةِ (إنْ وجـدتْ).

إذا كانَ:

١) Δ > ٠ فإنَّ للمعادلةِ التربيعيَّةِ جذرَينِ حقيقيَّينِ مختلفَينِ.

٢) Δ < ٠ فإنَّهُ لا يوجدُ للمعادلةِ التربيعيَّةِ جذورٌ حقيقيَّةٌ.

٣) Δ = ٠ فإنَّ للمعادلةِ التربيعيَّةِ جذرًا حقيقيًّا مكرَّرًا هوَ س = $\frac{-ب}{٢أ}$

مثالٌ (٢)

أجدُ قيمةَ المميِّزِ للمعادلةِ التربيعيَّةِ ٣ س^{٢} – ٤ س = - ١٠، ثمَّ أتبيَّنُ إذا كانَ للمعادلةِ حلولٌ حقيقيَّةٌ.

الحلُّ:

٣ س^{٢} – ٤ س + ١٠ = ٠	كتابةُ المعادلـةِ بالصورةِ العامَّةِ.
أ = ٣ ، ب = -٤ ، جـ = ١٠	تحديدُ معاملاتِ الحدودِ
Δ = ب^{٢} - ٤ أ جـ	كتابةُ مميِّزِ المعادلةِ التربيعيَّةِ.
= (-٤)^{٢} – ٤ × (٣) × (١٠)	تعويضُ قِيَمِ أ ، ب ، جـ.
= ١٦ – ١٢٠	
= - ١٠٤ المميِّزُ < ٠	

∴ لا يوجدُ حلولٌ حقيقيَّةٌ للمعادلةِ التربيعيَّة

أحاولُ أجدُ قيمةَ المميّزِ للمعادلةِ التربيعيَّةِ ٢ س^{٢} + ١ + ٣ س = ٠؛ ثمَّ أتبيَّنُ إذا كانَ للمعادلةِ حلولٌ حقيقيَّةٌ.

مثالٌ (٣)

أجدُ حلَّ المعادلةِ ٢ س^{٢} + ٣ س – ٣ = ٠ باستعمالِ القانونِ العامِّ للمعادلةِ التربيعيَّةِ:

الحلُّ:

أ = ٢ ، ب = ٣ ، جـ = -٣   تحديدُ معاملاتِ الحدودِ.

Δ = ب^{٢} – ٤ × أ × جـ   كتابةُ مميّزِ المعادلةِ التربيعيَّةِ.

= (٣)^{٢} – ٤ (٢) (-٣)   تعويضٌ.

= ٩ + ٢٤ = ٣٣ > ٠

إذنْ: يوجدُ للمعادلةِ حلّانِ حقيقيّانِ.

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$$ كتابةُ القانونِ العامِّ لحلِّ المعادلةِ التربيعيَّةِ.

$$س = \frac{-٣ \pm \sqrt{٣٣}}{٤}$$ التعويضُ في القانونِ، ثمَّ التبسيطُ.

أحاولُ أجدُ حلَّ المعادلةِ س^{٢} - ٣ س = ٤ باستعمالِ القانونِ العامِّ للمعادلةِ التربيعيَّةِ.

حلُّ المعادلةِ التربيعيَّةِ على الصورةِ: (أ س + ب)^{٢} = جـ^{٢}

مثالٌ (٤)

أجدُ حلَّ المعادلة (س + ٤)^{٢} = ٣^{٢}

الحلُّ:

(س + ٤)^{٢} = ٣^{٢}

$\sqrt{(س + ٤)^{٢}} = \sqrt{٣^{٢}}$ آخذُ الجذرَ التربيعيَّ لطرفَي المعادلةِ.

س + ٤ = ± ٣   تطبيقُ القاعدةِ.

س + ٤ = ٣ ، ومنهُ س= -١   حلُّ المعادلةِ الخطّيَّةِ.

أوْ س + ٤ = - ٣ ، ومنهُ س = -٧

فائدةٌ

$\sqrt{س^{٢}}$ = | س |

إذا كانَ | س | = أ؛ حيثُ أ ≥ ٠ ، فإنَّ:

س = أ أو س = - أ

أحاولُ أحلُّ المعادلةَ (س – ٣)^{٢} – ٤٩ = ٠

أفكِّرُ

هلْ للمعادلةِ س^{٢} = -٤ حلٌّ؟ لماذا؟

أختبرُ تعلُّمي

١) أحلُّ المعادلاتِ الآتيةَ:

أ) ٤ س^{٢} – ٢٥ = ٠ ب) ص^{٢} + ٦ = ٥ ص

٢) إذا كانتْ أ س^{٢} + ٤ س + ٣ = ٠، فأجدُ قيمةَ (أ) التي تجعلُ للمعادلةِ حلًّا وحيدًا.

٣) يُنتِجُ مصنعٌ للحديدِ والصلبِ قطعةً على شكلِ متوازي مستطيلاتٍ أبعادُها بالسنتيمتراتِ: ٤، (س+٢)، (س+٢)، وحجمُها يُساوي ١٠٠ سم^{٣}. أجدُ قيمةَ (س).

٤) أحلُّ المعادلةَ ٣ س^{٢} + ٤ س – ١ = ٠

٥) ما العددُ الحقيقيُّ الذي ينقصُ مربَّعُهُ عنْ خمسةِ أمثالِهِ بمقدارِ ٤؟

٦) حلَّتْ بيانُ المعادلةَ (س + ١)^{٢} = ١٠٠ كالآتي:

(س + ١)^{٢} = ١٠٠
بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفَينِ
س + ١ = ١٠
س = ٩

أُبيِّنُ الخطأَ الذي وقعتْ فيهِ.

أوّلًا: الأُسسُ النسبيَّةُ وقوانينُها

ماذا سأتعلَّمُ؟
- الأُسسُ النسبيَّةُ.
- قوانينُ الأُسسِ.
- تبسيطُ التعابيرِ.

هلْ أنا بارعٌ بلعبِ المكعَّبِ السحريِّ (روبيك)؟
إذا علمتُ أنَّ حجمَ المكعَّبِ السحريِّ المسموحَ بهِ في المباراةِ هوَ ٢٧٠٠٠ مم^{٣}، فما طولُ ضلعِ هذا المكعَّبِ؟

نشاطٌ أتأمَّلُ البطاقاتِ الآتيةَ، وأملأُ الفراغَ في كلٍّ مِنْها:

$٨^{٣}$	$٨^{-٣}$	$٨^{\frac{١}{٣}}$
$٨ \times ٨ \times ٨ = \square$	$\frac{١}{٨} \times \frac{١}{\square} \times \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$	؟

أُلاحظُ أنَّ:

البطاقتَينِ الأولى والثانيةَ، تحتوي على أُسسٍ لأعدادٍ صحيحةٍ وقدْ درستُها سابقًا. ولكنْ، كيفَ سأجدُ الحلَّ في البطاقةِ الثالثةِ؟ ما نوعُ الأُسِّ فيها؟

تُكتَب $(٨)^{\frac{١}{٣}}$ على الصورةِ $\sqrt[٣]{٨}$ ويُسمّى $(\frac{١}{٣})$ **أُسًّا نسبيًّا.**

أتعلَّمُ

$\sqrt[ن]{س} = س^{\frac{١}{ن}}$ (إذا كانَ (ن) عددًا زوجيًّا موجبًا، و(س) عددًا حقيقيًّا ليسَ سالبًا).

$\sqrt[ن]{س} = س^{\frac{١}{ن}}$ (إذا كانَ (ن) عددًا فرديًّا موجبًا، و(س) عددًا حقيقيًّا).

مثلُ: $\sqrt[٤]{١٣^{٣}} = (١٣)^{\frac{٣}{٤}}$

دليلُ الجذرِ ، الأُسُّ ، الأسُّ النسبيُّ

مثالٌ (١)

أكتبُ $\sqrt[٣]{\left(\frac{-١}{٦٤}\right)}$ على صورةِ أُسسٍ نسبيَّةٍ، ثم أجدُ قيمتَها:

الحلُّ: $\sqrt[٣]{\left(\frac{-١}{٦٤}\right)} = \left(\frac{-١}{٦٤}\right)^{\frac{١}{٣}} = \frac{-١}{٤}$

أحاولُ أجدُ قيمةَ كلٍّ منْ: $(٦٢٥)^{\frac{١}{٤}}$ ، $\sqrt[٦]{\frac{٧٢٩}{٦٤}}$

إذا كانَ (س) عددًا حقيقيًّا، وكانَ (م)، (ن) عددَين نسبيَّين؛ فإنَّ:

- $س^{م} \times س^{ن} = س^{م+ن}$
  - $(٧)^{\frac{٣}{٢}} \times (٧)^{\frac{١}{٢}} = ٧^{\frac{٣}{٢}+\frac{١}{٢}}$
  - $٧^{\frac{٤}{٢}} = ٧^{٢} = ٤٩$
- $\frac{س^{م}}{س^{ن}} = س^{م-ن}$ ، $س \neq$ صفرًا
  - $\frac{(\sqrt{١١} - \sqrt{١٠})^{٨}}{(\sqrt{١١} - \sqrt{١٠})^{-٤}}$
  - $= (\sqrt{١١} - \sqrt{١٠})^{١٢}$
- $(س^{م})^{ن} = (س^{ن})^{م} = س^{ن \times م}$
  - $\sqrt{(١١^{٤})^{٣}} = ١١^{٦}$
  - $(١١^{١٢})^{\frac{١}{٢}} = ١١^{٦}$

أحاولُ أجدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

$(٦٤)^{\frac{١}{٣}} \times (٦٤)^{\frac{١}{٦}}$ $\qquad$ $\frac{(\sqrt{٧} - \sqrt{٣})^{١٨}}{(\sqrt{٧} - \sqrt{٣})^{١٦}}$ $\qquad$ $\sqrt[٣]{(٢^{٦})^{-٤}}$

إذا كانَ (س) و(ص) عددَين حقيقيَّين، حيثُ س $\neq$ ٠، ص $\neq$ ٠، وكانَ (م) عددًا نسبيًّا؛ فإنَّ:

- $س^{م} \times ص^{م} = (س \times ص)^{م}$
  - $٢^{\frac{١}{٩}} \times ٧^{\frac{١}{٩}}$
  - $= (٢ \times ٧)^{\frac{١}{٩}} = ١٤^{\frac{١}{٩}}$
- $\frac{س^{م}}{ص^{م}} = \left(\frac{س}{ص}\right)^{م}$
  - $\left(\frac{-٣٢}{٢٤٣}\right)^{\frac{١}{٥}}$
  - $= \frac{-٢}{٣}$
- $س^{٠} = ١$
  - $س^{٨} \div س^{٨}$
  - $س^{٨-٨} = س^{٠} = ١$
- $س^{-م} = \frac{١}{س^{م}}$
  - $٦^{-٢} = \frac{١}{٦^{٢}}$
  - $= \frac{١}{٣٦}$
- إذا كانَ (م) عددًا طبيعيًّا، و(ن) عددًا نسبيًّا، و(س) عددًا حقيقيًّا موجبًا؛ فإنَّ:
  - $\sqrt[م]{س^{ن}} = (\sqrt[م]{س})^{ن}$
  - $= (س^{ن})^{\frac{١}{م}} = س^{\frac{ن}{م}}$

يمكنُني تبسيطُ العباراتِ التي تتضمّنُ أُسسًا نسبيَّةً؛ عنْ طريقِ: تحويلِ الأُسسِ السالبةِ إلى موجبةٍ، ثمَّ التبسيطِ باستعمالِ قوانينِ الأُسسِ.

مثالٌ (٢) أجدُ قيمةَ المقدارِ الآتي في أبسطِ صورةٍ: $\left(\sqrt[٩]{\frac{٣^{٢٠} \times ٥^{-٩}}{٣^{١١}}} \right)$

الحلُّ: $\sqrt[٩]{٣^{٢٠-١١} \times ٥^{-٩}} = \sqrt[٩]{٣^{٩} \times ٥^{-٩}}$ تبسيطُ ما داخلَ الجذرِ باستعمالِ قوانينِ الأُسسِ.

$= (٣^{٩} \times ٥^{-٩})^{\frac{١}{٩}}$ تحويلُ الجذرِ إلى أُسٍّ نسبيٍّ.

$= (٣^{\frac{٩}{٩}} \times ٥^{\frac{-٩}{٩}}) = ٣^{١} \times ٥^{-١} = \frac{٣}{٥}$ تغييرُ الأُسِّ السالبِ إلى موجبٍ ($٥^{-١} = \frac{١}{٥}$).

أحاولُ أجدُ قيمةَ المقاديرِ الآتيةِ في أبسطِ صورةٍ:

أ) $\left(\frac{٤^{٥} \times ٧^{٦}}{٧^{-٤} \times ٤^{-٣}} \right)^{\frac{١}{٢}}$ ب) $\sqrt[٥]{\frac{٨^{٥} \times ٩^{١٥}}{(٢ \times ٤)^{١٠}}}$

أختبرُ تعلُّمي

١) أجدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

أ) $(٢٥)^{\frac{٣}{٢}}$ ب) $(٦٤)^{\frac{-٤}{٣}}$ جـ) $\frac{(٣٢)^{\frac{١}{٣}}}{\sqrt[٣]{٤}}$ د) $(\sqrt[٧]{١٣})^{-٧}$

٢) أجدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

أ) $\frac{(\sqrt{١١} - \sqrt{٦})^{-٥}}{(\sqrt{١١} - \sqrt{٦})^{-١٠}}$ ب) $\left(\frac{١}{(\sqrt{٣})^{-٥}} \right)^{٢}$

جـ) $\sqrt{٨^{-٦} \times (٨^{-٤})^{٢}}$ د) $\sqrt[٣]{\frac{(٢ \times ٥)^{٧} \times ٢^{٦}}{١٠^{٣} \times ٨٠}}$

٣) أجابَ رشيدٌ عنْ ورقةِ عملٍ خاصَّةٍ بقوانينِ الأسسِ كالآتي، أُساعدُهُ على الحكمِ على صحَّةِ إجابةِ كلِّ سؤالٍ؛ موضحًا ذلكَ في العمودِ الثاني منَ الجدولِ:

السؤالُ	الإجابةُ (معَ التوضيحِ)
$٤^{٠,٢٥} \times ٤^{٠,٧٥} = ٤$	
$ع^{-٧} \div ع^{١٠} = ع^{٣}$	
$\sqrt[٦]{س^{-٦}} = -س$	
$(-٣\,ل^{٣})^{٢} = -٣\,ل^{٦}$	
$\sqrt{ص^{-٨} \times (ص^{-٢})^{٣}} = ص^{٧}$	
$\sqrt[٥]{٥} + \sqrt[٥]{٥} = \sqrt[١٠]{٥}$	
$\left(\sqrt[٤]{\frac{٤٥}{١٢٥}}\right)^{٢} = \frac{٣}{٥}$	

مسألةٌ مفتوحةٌ: أكتبُ مسألةً رياضيَّةً تعتمدُ على الأُسسِ، تُوضِّحُ انتشارَ فيروسِ كورونا.

أمسحُ رمزَ الاستجابةِ السريعةِ المجاورَ؛ لمشاهدةِ الفيديو الذي يشرحُ النموَّ المتسارعَ لفيروسِ كورونا.

أبحثُ عنْ اسمِ العالِمِ المسلمِ الذي يُعدُّ أوَّلَ منْ استعملَ الأُسسَ السالبةَ، وعنْ اسمِ أوَّلِ عالِمٍ استعملَ الأُسسَ النسبيَّةَ في الرياضيّاتِ.

نشاطٌ أُجيبُ عنْ كلِّ سؤالٍ في ما يأتي:

أوَّلًا: المسافةُ بينَ نقطتَينِ

ماذا سأتعلَّمُ؟

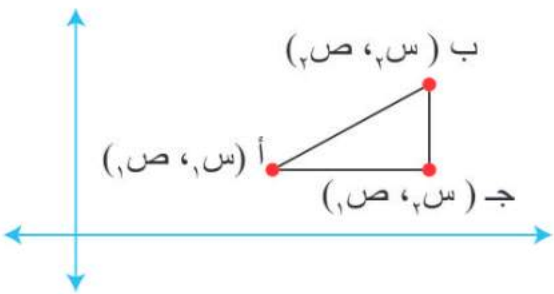
- المسافةُ بينَ نقطتَينِ.

كيفَ يعملُ نظامُ GPS؟

تستطيعُ طائرةُ الإنقاذِ المروحيَّةُ التحليقَ ٩٠٠ كم قبلَ إعادةِ تزويدِها بالوقودِ. إذا كانتْ مهمَّةُ الطائرةِ نقلَ شخصٍ منْ مكَّةَ المكرَّمةِ إلى الرياضِ، وافترضْنا أنَّ المدينةَ المنوَّرةَ هيَ نقطةُ الأصلِ، ومكةَ المكرَّمةَ عندَ النقطةِ (٠، -٤٠٠) والرياضَ عندَ النقطةِ (٨٠٠، ٠)؛ فهلْ يُمكنُ للطائرةِ إكمالُ المهمَّةِ منْ دونِ التزوُّدِ بالوقودِ في أثناءِ الطريقِ؟

نشاطٌ

في الشكلِ المجاورِ، إذا كانَ إحداثيّا النقطةِ أ (س$_١$، ص$_١$)، وإحداثيّا النقطةِ ب (س$_٢$، ص$_٢$) ، فإنَّ:



طولَ $\overline{\text{ب جـ}}$ = ص$_٢$ − ص$_١$

وطولَ $\overline{\text{أ جـ}}$ = ...

باستعمالِ نظريَّةِ فيثاغورس،

طولُ $\overline{\text{أ ب}}$ = ...

أتعلَّمُ

إذا كانتِ النقطتانِ أ (س$_١$، ص$_١$)، ب(س$_٢$، ص$_٢$) نقطتَينِ في المستوى الإحداثيِّ؛ فإنَّ المسافةَ بينَهما هيَ: أ ب = $\sqrt{(\text{س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢}$

مثالٌ (١)

أجدُ المسافةَ بينَ النقطتَينِ ل (٣ ، -٣) ، ن (-٢ ، ٩)

س$_١$ = ٣ ، ص$_١$ = -٣ ، س$_٢$ = -٢ ، ص$_٢$ = ٩ تحديدُ الإحداثيِّ السينيِّ والصاديِّ في كلِّ نقطةٍ؛ (المعطياتِ).

المسافةُ بينَ النقطتَينِ ل، ن هيَ طولُ $\overline{\text{ل ن}}$ = $\sqrt{(\text{س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢}$ القانونُ

= $\sqrt{(-٢ - ٣)^٢ + (٩ - -٣)^٢}$ التعويضُ.

= $\sqrt{(-٥)^٢ + (١٢)^٢}$ التبسيطُ.

= $\sqrt{٢٥ + ١٤٤}$

= $\sqrt{١٦٩}$ = ١٣ وحدةَ طولٍ

أحاولُ أجدُ المسافةَ بينَ النقطتَينِ س (-٧ ، ١١) ، ص (٥ ، ٦)

مثالٌ (٢)

أجدُ القِيَمَ الممكنةَ جميعَها للمتغيِّر (أ)، إذا علمتُ أنَّ المسافةَ بينَ النقطتين ك(-٥، أ)، ل(٣، ١) تُساوي $\sqrt{٨٩}$ وحدةَ طولٍ.

الحل: س$_١$ = -٥ ، ص$_١$ = أ ، س$_٢$ = ٣ ، ص$_٢$ = ١ — تحديدُ الإحداثيين السينيِّ والصاديِّ في كلِّ نقطةٍ.

المسافة بين النقطتين = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$ — القانونُ.

$\sqrt{٨٩} = \sqrt{(٣ - - ٥)^٢ + (١ - أ)^٢}$ — التعويضُ.

$٨٩ = (٨)^٢ + (١ - أ)^٢$ — تربيعُ الطرفَينِ للتخلُّصِ منَ الجذورِ.

$٨٩ = ٦٤ + (١ - أ)^٢$ — تبسيطُ المعادلةِ.

$٢٥ = (١ - أ)^٢$ — طرحُ ٦٤ منَ الطرفَينِ.

بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفَينِ: إمّا ١ - أ = ٥ ومنها أ = -٤

وإمّا ١ - أ = -٥ ومنها أ = ٦

أتعلَّمُ

إذا كانَ | س | = ب،
فإنَّ س = ب ،
أو س = - ب

أحاولُ إذا كانتْ أ ب قطعةً مستقيمةً طولُها ($\sqrt{٤١}$) وحدةَ طولٍ، وكانتْ أ(-١، س)، ب (٤، -٤) ، فما قِيَمُ (س) الممكنةُ؟

أختبرُ تعلُّمي

١) أُحدِّدُ اسمَ البطاقةِ التي تحملُ الإجابةَ الصحيحةَ، للمسافةِ بينَ النقطتَينِ لكلٍّ مَنَ النقاطِ الآتيةِ:

البطاقةُ الصفراءُ	البطاقةُ الزرقاءُ	البطاقةُ الورديَّةُ	البطاقةُ الخضراءُ
٧	٨,٤٩	٩	١٠

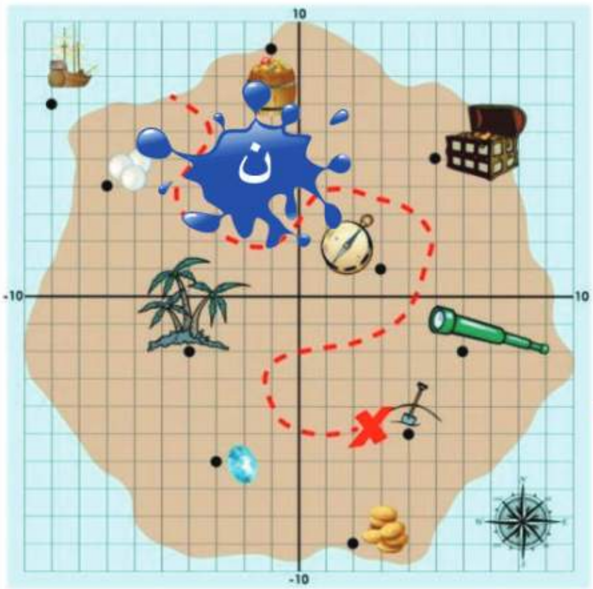
أ) م (٥ ، -٢) ، ن (-١ ، ٦) : ....

ب) س (٣ ، -٢) ، ص (-٣ ، ٤) : ....

جـ) ل (٣ ، ٣) ، ع (-٤ ، ٣) : ....

٢) باستعمالِ قانونِ المسافةِ بينَ نقطتَينِ؛ أجدُ طريقةً لتحديدِ إذا كانَ المثلَّثُ أ ب ج قائمَ الزاويةِ أمْ لا:
حيثُ: أ(-٧ ، ٣)، ب(٤ ، ٠)، ج(-٤ ، ٤).

٣) دائرةٌ مركزُها النقطةُ م (٠ ، ٨)، وتمرُّ بالنقطةِ هـ (٨ ، ١٤). ما طولُ قطرِها؟



٤) بينَما كانَ أيهمُ يحسُبُ المسافةَ الأقصرَ ليصلَ إلى الكنزِ، وقعتْ بقعةٌ منَ الحبرِ على إحدى النقاطِ المهمَّةِ، ولمْ يتمكَّنْ منْ تذكُّرِ أحدِ إحداثيّاتِها. أُساعدُ أيهمَ على إيجادِ القيمةِ (القيَمِ المحتملةِ) لهذهِ النقطةِ؛ علمًا بأنَّ المسافةَ بينَ النقطتَينِ:
م (أ، ٧)، ن (-٢، ٣) هي ٥ وحداتِ طولٍ.

أُفسِّرُ لماذا توجدُ قيمتانِ ممكنتانِ عندَ البحثِ عنِ الإحداثيِّ المجهولِ لنقطةٍ؛ عندَ إعطاءِ إحداثيَّاتِ نقطتَينِ والمسافةِ بينهُما؟

٥) أرادَ سعدٌ وجمالٌ أنْ يلتقيا في مطعمِ السفينةِ، فاستعملَ سعدٌ القاربَ ليصلَ إلى المطعمِ، بينَما استعملَ جمالٌ سيّارتَهُ (أتأمَّلُ الشكلَ المجاورَ).
أ) ما المسافةُ التي قطعَها كلٌّ منهُما ليصلَ إلى المطعمِ؟
ب) مَنْ منهُما كانتْ طريقُهُ أقصرَ منْ حيثُ المسافةُ؟
جـ) كمْ يبعدُ بيتُ سعدٍ عنْ بيتِ جمالٍ؟

٦) أجدُ مِساحةَ الشكلِ الذي يقعُ في المستوى الإحداثيِّ عندَ النقاطِ: ن (٩ ، ٣)، ل (٥ ، ٣)، هـ (٩ ، ٥).
(مساعدة :أحدد النقاط بالمستوى الإحداثي ثم أصل بينها لأعرف الشكل الناتج)

أبحثُ نظرًا لأنَّ الأرضَ ليستْ مسطَّحةً ولأنَّها سطحٌ منحنٍ؛ فهلْ حسابُ المسافةِ باستعمالِ نظامِ تحديدِ المواقعِ العالميِّ (GPS) تُقاسُ كما تعلَّمتُ اليومَ باستعمالِ المسافةِ بينَ نقطتَينِ على المستوى الإحداثيِّ، أم تُستعملُ طريقةٌ أُخرى؟ أبحثُ عنِ الإجابةِ الصحيحةِ موضِّحًا إجابتي.

ثانيًا: معادلةُ الخطِّ المستقيمِ

ماذا سأتعلَّمُ؟

- ميلُ الخطِّ المستقيمِ.
- معادلةُ الخطِّ المستقيمِ.

هلْ مدرستي مُعدّةٌ لدمجِ الطلبةِ ذوي الإعاقةِ؟

منَ الإرشاداتِ الخاصَّةِ التي يُمكنُ اتِّباعُها لدمجِ الطلبةِ ذوي الإعاقةِ في مدارسِنا، توفيرُ السطوحِ المائلةِ لهُم؛ لتسهيلِ حركةِ الكراسي المدولبةِ الخاصَّةِ بِهِم. ويُمكنُ استعمالُ القياساتِ الموصى بِها عالميًّا بارتفاعٍ عموديٍّ مقدارُهُ مترٌ واحدٌ لكلِّ ١٢ مترًا أُفقيًّا للسطوحِ المائلةِ*.

النسبةُ $\left(\frac{١}{١٢}\right)$ تُسمّى ميلَ السطحِ المائلِ وتصفُ شدَّةَ انحدارِهِ.
إذا كانَ الارتفاعُ العموديُّ $\left(\frac{١}{٢}\right)$ م، فما أقلُّ بعدٍ أفقيٍّ مناسبٍ؟ وما ميلُ سطحِهِ؟

أتعلَّمُ

ميلُ الخطِّ المستقيمِ الذي يمرُّ بالنقطتَينِ $(س_١ ، ص_١)$، $(س_٢ ، ص_٢)$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

$س_١ \neq س_٢$ ، ويُرمزُ للميلِ بالرمزِ (م).

مثالٌ (١)

أجدُ ميلَ الخطِّ المستقيمِ المارِّ بالنقطتَينِ (٣ ، ٥)، (٠ ، -٢).

الحلُّ: $س_١ = ٣$، $ص_١ = ٥$، $س_٢ = ٠$، $ص_٢ = -٢$ المعطياتُ.

$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ قانونُ ميلِ الخطِّ المستقيمِ.

$= \frac{-٢-٥}{٠-٣} = \frac{-٧}{-٣} = \frac{٧}{٣}$ تعويضٌ.

أحاولُ أجدُ ميلَ الخطِّ المستقيمِ المارِّ بالنقطتَينِ (-٤ ، ٣)، (٨ ، ١٥).

أتعلَّمُ

معادلةُ الخطِّ المستقيمِ الذي ميلُهُ (م) ويمرُّ بالنقطةِ أ $(س_١ ، ص_١)$ هيَ:

$ص - ص_١ = م\,(س - س_١)$.

* https://www.discountramps.com/how-to/mobility/wheelchair-ramp-length/a/B٢٠/

معادلةُ الخطِّ المستقيمِ

الذي ميلُهُ (م) ويمرُّ بالنقطةِ أ $(س_١، ص_١)$ هيَ:	الذي يمرُّ بالنقطتَينِ أ $(س_١، ص_١)$، ب $(س_٢، ص_٢)$.
$ص - ص_١ = م(س - س_١)$	أوّلًا: أجدُ الميلَ كما تعلّمتُ سابقًا. ثانيًا: أُعوِّضُ في المعادلةِ: $ص - ص_١ = م(س - س_١)$
مثالٌ: أجدُ معادلةَ الخطِّ المستقيمِ الذي ميلُهُ (٥) ويمرُّ بالنقطةِ أ (-٢، ٢).	مثالٌ: أجدُ معادلةَ الخطِّ المستقيمِ الذي يمرُّ بكلٍّ منَ النقطتينِ أ (٢ ، ٤)، ب (-٢ ، ٨).
الحلُّ: ص = ٥س + ١٢	الحلُّ: ص = ٦ - س

مثالٌ (٢)

أكتبُ معادلةَ الخطِّ المستقيمِ، في كلِّ حالةٍ منَ الحالاتِ الآتيةِ:

أ) ميلُهُ ٤ ويمرُّ بالنقطة (٣ ، -٥).	ب) يمرُّ بالنقطتَينِ أ (١، ٧)، ب (٤ ، -٢).

الحلُّ: أ) $م = ٤، س_١ = ٣، ص_١ = -٥$ المعطياتُ.

$ص - ص_١ = م(س - س_١)$ معادلةُ الخطِّ المستقيمِ.

$ص - (-٥) = ٤ (س - ٣)$ تعويضٌ.

$ص + ٥ = ٤ س - ١٢$ تبسيطٌ

$ص = ٤ س - ١٧$

ب) $س_١ = ١$ ، $ص_١ = ٧$ ، $س_٢ = ٤$ ، $ص_٢ = -٢$ المعطياتُ.

$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{-٢-٧}{٤-١} = \frac{-٩}{٣} = -٣$ قانونٌ، تعويضٌ، تبسيطٌ.

$ص - ص_١ = م(س - س_١)$ معادلةُ الخطِّ المستقيمِ.

$ص - (٧) = -٣ (س - ١)$ تعويضٌ (يجوزُ استعمالُ النقطةِ (ب) بالتعويضِ).

$ص - ٧ = -٣ س + ٣$ تبسيطٌ.

$ص = ١٠ - ٣س$

أحاولُ

أجدُ معادلةَ الخطِّ المستقيمِ لكلٍّ ممّا يأتي:

أ) ميلُهُ يُساوي ٥، ويمرُّ بالنقطةِ ن (-٢ ، -٣).

ب) يمرُّ بالنقطتَينِ: أ (٢ ، -١)، ب (١ ، ١).

المقطعُ الصاديُّ للمستقيمِ عندَما تكونُ قيمةُ الإحداثيِّ السينيِّ صفرًا، وتكونُ إحداثيّاتُ النقطةِ (٠ ، ص).

المقطعُ السينيُّ للمستقيمِ عندَما تكونُ قيمةُ الإحداثيِّ الصاديِّ صفرًا، وتكونُ إحداثيّاتُ النقطةِ (س ، ٠).

أختبرُ تعلُّمي

١) أكتبُ معادلةَ الخطِّ المستقيمِ في كلٍّ ممّا يأتي:

أ) ميلُهُ -٦، ويمرُّ بنقطةِ الأصلِ.

ب) يمرُّ بالنقطتَينِ (-٤ ، -٣)، (١ ، ٠).

٢) أُساعدُ سلمى في البحثِ عنِ الحالةِ الصحيحةِ التي تكونُ فيها معادلةُ الخطِّ المستقيمِ، هيَ:

ص = ٥س + ١٣

الميلُ = ٥
المقطعُ الصاديُّ = ٣

يمرُّ بالنقطتَينِ:
(٢، -٥)
(-٢، ٣)

الميلُ = ٥
يمرُّ بالنقطةِ (-٢، ٣)

٣) إذا كانتِ النقطةُ (١ ، -٢) تقعُ على الخطِّ المستقيمِ الذي معادلتُهُ أس + ٢ص – ٧ = صفرًا؛ فأحسُبُ قيمةَ (أ).

نشاطٌ في مسابقةِ منْ سيربحُ المليونَ، بقيَ لدَي ٤ أسئلةٍ فقطْ وأحصلُ على المليونِ! ولكنْ مع الأسفِ لم يبقَ لدَي أيُّ وسيلةِ مساعدةٍ.

١) دائرةٌ مركزُها نقطةُ الأصلِ وطولُ نصفِ قطرِها وحدتانِ، أيُّ النقاطِ الآتيةِ تقعُ على الدائرةِ:

أ) (١ ، ٢)	ب) (-٢ ، ١)
جـ) ($\sqrt{٣}$ ، ١)	د) ($\sqrt{٢}$ ، ١)

٢) إذا كانَ البعدُ بينَ النقطتَينِ (أ ، ٧)، (-٢ ، ٣) يُساوي ٥؛ فإنَّ قِيَمَ (أ) تُساوي:

أ) -١ ، ٥	ب) -٧ ، ٣
جـ) -٥ ، ١	د) -٣ ، ٧

٣) معادلةُ الخطِّ المستقيمِ الذي ميلُهُ (-٠,٥)، ويمرُّ بالنقطةِ (-٢ ، ٥)، هيَ:

أ) ص = ٤ – ٠,٥ س	ب) ص = ٠,٥س – ٤
جـ) ص = ٠,٥س + ٦	د) ص = ٠,٥س - ٦

٤) ميلُ الخطِّ المستقيمِ الذي معادلتُهُ ص – ٤ = ٧ (٤ – س)، يُساوي:

أ) ٤	ب) -٤
جـ) ٧	د) -٧

أوَّلًا: النسبُ المثلثيةُ الأساسيةُ للزاويةِ الحادَّةِ

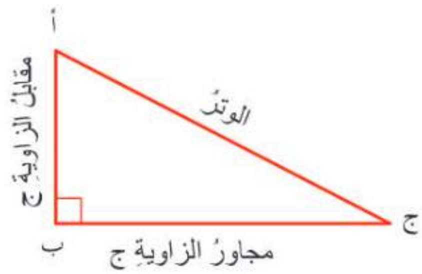
ماذا سأتعلَّمُ؟

- جيبُ الزاويةِ (جا).
- جيبُ التمامِ (جتا)
- الظلُّ (ظا)
- مقابلُ الزاويةِ.
- مجاورُ الزاويةِ.

هلْ سمعتُ بطائرِ الكويتزال؟

وقعَ طائرُ الكويتزال بشِباكِ أحدِ الصيّادينَ؛ فأرادتْ لجنةُ حمايةِ البيئةِ إنقاذَهُ لأنَّهُ مهدَّدٌ بالانقراضِ. ثُبِّت سلَّمٌ طولُهُ ١٠م على غصنِ شجرةٍ بزاويةِ ٥٧° بينَ حافَّةِ السلَّمِ وسطحِ الأرضِ. ما ارتفاعُ الشجرةِ؟

ألاحظُ أنَّ إيجادَ المطلوبِ في مسألةِ طائرِ الكويتزال؛ يتطلَّبُ قانونًا يربطُ الزاويةَ معَ الوترِ، فهُما المعطيانِ الوحيدانِ في المسألةِ.
يُمكنُني إيجادُ ارتفاعِ الشجرةِ باستعمالِ نسبةِ جيبِ الزاويةِ، إذْ إنَّ:



جيبَ الزاويةِ ج = جا ج = $\frac{\text{طولَ الضلعِ المقابلِ للزاويةِ ج}}{\text{طولِ الوترِ}} = \frac{\text{أب}}{\text{أج}}$

جيبُ تمامِ الزاويةِ ج = جتا ج = $\frac{\text{طولَ الضلعِ المجاورِ للزاويةِ ج}}{\text{طولِ الوترِ}} = \frac{\square}{\square}$

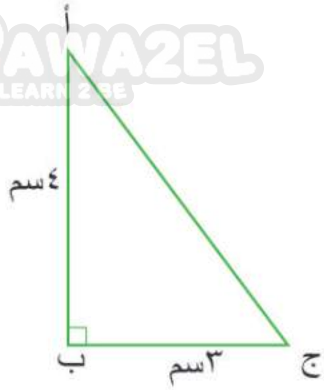
- الزاويتانِ ج ، أ زاويتانِ ______ ؛ لأنَّ قياسَ كلٍّ منْهُما أكبرُ منْ صفرٍ وأقلُ من ٩٠°
- أُسمّي المثلَّثَ أ ب ج مثلَّثًا ________ ؛ لأنَّ قياسَ الزاويةِ ب = ٩٠°
- الضلعُ المقابلُ للزاويةِ أ هوَ ________ ، وجيبُ الزاويةِ أ = جا أ = $\frac{\square}{\square}$
- الضلعُ المجاورُ للزاويةِ أ هوَ ________ ، وجيبُ تمامِ الزاويةِ أ = جتا أ = $\frac{\square}{\square}$
- ظلُّ الزاويةِ أ = ظا أ = $\frac{\text{طولَ الضلعِ المقابلِ للزاويةِ أ}}{\text{طولُ الضلعِ المجاورِ للزاويةِ أ}} = \frac{\square}{\square}$

أتعلَّمُ

- جيبُ الزاويةِ الحادَّةِ هوَ نسبةٌ ثابتةٌ في المثلَّثِ القائمِ الزاويةِ، وتُمثِّلُ ($\frac{\text{المقابلَ}}{\text{الوترِ}}$) وهيَ نسبةُ طولِ الضلعِ المقابلِ للزاويةِ الحادَّةِ إلى طولِ الوترِ، ويُرمزُ لَها بالرمزِ (جا) وبالإنجليزيَّةِ (Sine) واختصارًا (sin).
- جيبُ تمامِ الزاويةِ الحادَّةِ هوَ نسبةٌ ثابتةٌ في المثلَّثِ القائمِ الزاويةِ، وتُمثِّلُ ($\frac{\text{المجاورَ}}{\text{الوترِ}}$) وهيَ نسبةُ طولِ الضلعِ المجاورِ للزاويةِ الحادَّةِ إلى طولِ الوترِ، ويُرمزُ لَها بالرمزِ (جتا) وبالإنجليزيَّةِ (Cosine) واختصارًا (cos).
- ظلُّ الزاويةِ الحادَّةِ هوَ نسبةٌ ثابتةٌ في المثلَّثِ القائمِ الزاويةِ، وتُمثِّلُ ($\frac{\text{المقابلَ}}{\text{المجاورِ}}$) وهيَ نسبةُ طولِ الضلعِ المقابلِ للزاويةِ الحادَّةِ إلى طولِ الضلعِ المجاورِ، ويُرمزُ لَها بالرمزِ (ظا) وبالإنجليزيَّةِ (Tangent) واختصارًا (tan).

مثالٌ (١)

الشكلُ المجاورُ يُبيِّنُ المثلَّثَ أ ب ج القائمَ الزاويةِ في ب، فيهِ أ ب = ٤ سم، ب ج = ٣ سم. أجدُ: جا أ ، جا ج، جتا ج، ظا ج.



الحلّ: أجدُ طولَ الوترِ (أ ج) باستعمالِ نظريَّةِ فيثاغورس.

(الوتر)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب ج)^{٢} — نظريَّةُ فيثاغورس.

(أ ج)^{٢} = ٤^{٢} + ٣^{٢} — تعويضٌ.

(أج)^{٢} = ١٦ + ٩ = ٢٥

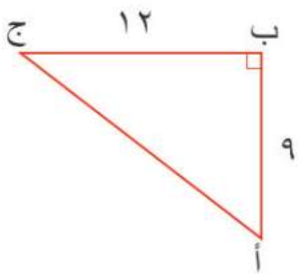
∴ أج = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ سم — أخذُ الجذرِ التربيعيِّ للطرفينِ.

$$\text{جا أ} = \frac{\text{طولَ الضلعِ المقابلِ للزاويةِ أ}}{\text{طولِ الوترِ}} = \frac{٣}{٥}$$
نسبةُ جيبِ الزاويةِ، تعويضٌ.

$$\text{جا ج} = \frac{\text{طولَ الضلعِ المقابلِ للزاويةِ ج}}{\text{طولِ الوترِ}} = \frac{٤}{٥}$$
نسبةُ جيبِ الزاويةِ، تعويضٌ.

$$\text{جتا ج} = \frac{\text{طولَ الضلعِ المجاورِ للزاويةِ ج}}{\text{طولِ الوترِ}} = \frac{٣}{٥}$$
نسبةُ جيبِ تمامِ الزاويةِ، تعويضٌ.

$$\text{ظا ج} = \frac{\text{طولَ الضلعِ المقابلِ للزاويةِ ج}}{\text{طولِ الضلعِ المجاورِ للزاويةِ ج}} = \frac{٤}{٣}$$
نسبةُ ظلِّ الزاويةِ، تعويضٌ.



أحاولُ بناءً على الشكلِ المجاورِ، أجدُ جا أ ، جا ج، جتا أ، ظا أ

أتعلَّمُ

أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ؛ لإيجادِ جيبِ زاويةٍ معلومةٍ حسبَ الخطواتِ الآتيةِ:

أتأكَّدُ أنَّ النظامَ في الآلةِ الحاسبةِ بالدرجاتِ (Degrees). ← أُدخلُ قياسَ الزاويةِ المطلوبةِ. ← أضغطُ على المفتاحِ (sin).

تنويهٌ: - في بعضِ الآلاتِ الحاسبةِ؛ أحتاجُ إلى الضغطِ على مفتاحِ (sin) أوَّلًا، ثمَّ إدخالِ قياسِ الزاويةِ المطلوبةِ.

- لإيجادِ جيبِ تمامِ زاويةٍ معلومةٍ، أستعملُ المفتاحَ (cos).
- لإيجادِ ظلِّ زاويةٍ معلومةٍ، أستعملُ المفتاحَ (tan).

مثالٌ (٢)

أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ؛ لإيجادِ جا ٤٨°

الحلُّ:

١) أتأكَّدُ منْ ضبطِ نظامِ الدرجاتِ (Deg).

٢) أُدخلُ قياسَ الزاويةِ (٤٨).

٣) أضغطُ على المفتاحِ (sin).

٤) الناتجُ: جا ٤٨° ≈ ٠,٧٤

أحاولُ أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ؛ لإيجاد ما يأتي:

١) جا ٧٩° ٢) - جا ١٥° ٣) جتا ٦٥° ٤) ظا ٨٠°

أتعلَّمُ

أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ؛ لإيجادِ قياسِ الزاويةِ؛ إذا علمتُ قيمةَ الجيبِ لَها حسبَ الخطواتِ الآتيةِ:

أُدخلُ قيمةَ جيبِ الزاويةِ. ← أضغطُ على مفتاحِ (Inv) أوْ (shift). ← أضغطُ على المفتاحِ (sin).

تنويهٌ

١) توجدُ آلاتٌ حاسبةٌ فيها مفتاحُ ($\sin^{-1}$)، وبهذِهِ الحالةِ أضغطُ على المفتاحِ ($\sin^{-1}$)، ثمَّ أُدخلُ قيمةَ الجيبِ لأحصلَ على الزاويةِ المطلوبةِ.

٢) توجدُ آلاتٌ حاسبةٌ أُخرى أضغطُ بِها على مفتاحِ (Inv) ثمَّ (sin) أوْ ($\sin^{-1}$)، وبعدَها أُدخلُ قيمةَ النسبةِ المثلَّثيَّةِ للزاويةِ المطلوبةِ ثمَّ (=) أوْ (enter).

مثالٌ (٣)

أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ لإيجادِ قياسِ الزاويةِ س؛ حيثُ جا س = ٠,٧

الحلُّ:

١) أتأكَّدُ منْ ضبطِ الآلةِ على نظامِ الدرجاتِ.

٢) أُدخلُ قيمةَ جيبِ الزاويةِ ٠,٧

٣) أضغطُ على المفتاحِ (Inv) ثمَّ (sin).

٤) الناتجُ: قيمةُ الزاويةِ س ≈ ٤٤,٤°

أحاولُ أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ؛ لإيجادِ قياسِ الزاويةِ س في كلٍّ ممّا يأتي:

١) جا س = ٠,٦٥ ٢) جتا س = ٠,٣٧ ٣) ظا س = ٠,٥٨

المادة التعليمية للبرنامج العلاجي

المرحلة التحضيرية

للعام 2022-2023

مبحث الرياضيات

الصف: العاشر الأساسي

المصدر: المادة التعليمية المساندة لمبحث الرياضيات

حَلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ بيانيًا

1

النتاجُ: • أحلُّ المعادلةَ التربيعيةَ بيانيًّا.

نشاط 1 أحلُّ المعادلاتِ التربيعيةَ بيانيًّا

أولًا: حَلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ بيانيًّا

أتذكرُ

المعادلةُ: هي جملةٌ تتضمنُ إشارةَ مساواةٍ تدلُ على تساوي المقدارينِ في طرفيها، وقد تتضمن أعدادًا مجهولة تسمى متغيراتٍ مثل: x, y **حلُّ المعادلةِ:** هو قيمةٌ عدديةٌ للمتغيرِ تجعلُ المساواة صحيحةً. **مثال:** (المعادلةُ) $2x+1=5$ فإن (حل المعادلةِ) $x=2$.

أتعلمُ

المعادلةُ التربيعيةُ: هي معادلةٌ غيرُ خطيةٍ يمكنُ كتابتُها على الصورةِ: $ax^2+bx+c=0$، حيث $a\neq0$.

حلُّ المعادلةِ التربيعيةِ: هو تحديدُ القيمِ التي يقطعُ عندها منحنى الاقترانِ المرتبط المحورَ x، وتسمى تلك القيمُ جذورَ المعادلةِ أو أصفارَ الاقتران. **مثالٌ:** (المعادلةُ التربيعيةُ) $x^2-2x-8=0$ فإن (حلَّ المعادلةِ التربيعيةِ) $x=-2, 4$

حلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ بيانيًّا:

1- أكتب المعادلة بالصورة القياسية $ax^2+bx+c=0$

2- أمثلُ بيانيًّا الاقتران المرتبط $f(x)=ax^2+bx+c$

3- أجدُ القيمَ التي يقطعُ عندَها المنحنى المحورَ x

لحلِّ معادلةٍ تربيعيةٍ يمكنُ استعمالُ إحدى الطريقتين:

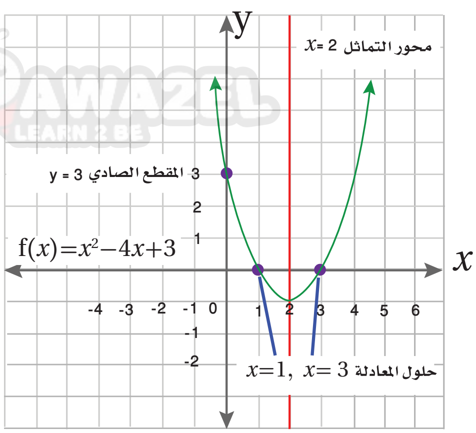
حلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ جبريًّا:

1- حلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ بالتحليلِ.

2- حلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ بإكمالِ المربعِ.

3- حلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ.

1) أحَلُّ المعادلةَ التربيعيةَ $x^2 - 4x = -3$ بيانيًّا:



الصورةُ القياسيةُ للمعادلةِ: $x^2 - 4x + 3 = 0$

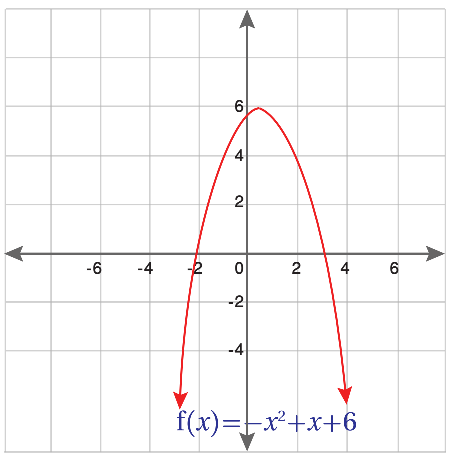
أمثِّلُ الاقترانَ المرتبطَ بيانيًّا: $f(x) = x^2 - 4x + 3$

ألاحظُ أن القيمَ التي يقطعُ عندَها المنحنى المحورَ x:

$x = 1,\ x = 3$

إذن: حَلُّ المعادلةِ التربيعيةِ هو $x = 1,\ x = 3$

2) أحَلُّ المعادلةَ التربيعيةَ $x - x^2 = -6$ بيانيًّا:



الصورةُ القياسيةُ للمعادلةِ: ....

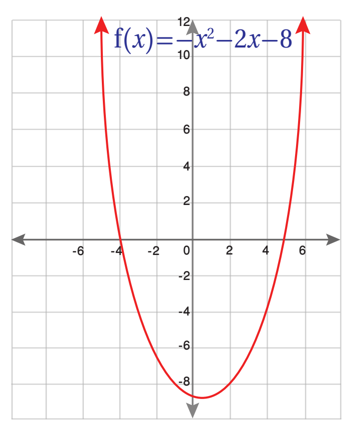
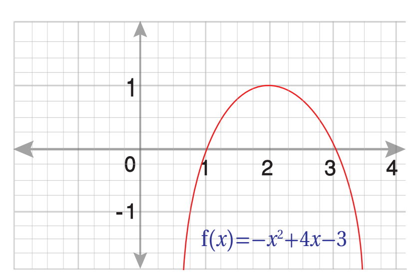
أمثِّلُ الاقترانَ المرتبطَ بيانيًّا: $f(x) =$..................

ألاحظُ أن القيمَ التي يقطعُ عندَها المنحنى المحورَ x:

$x=$............, $x=$...........

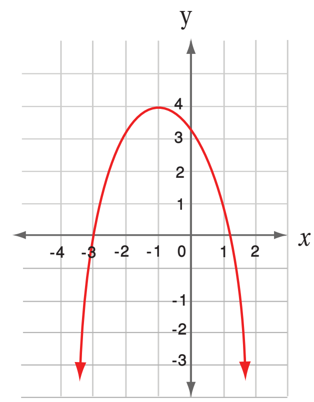
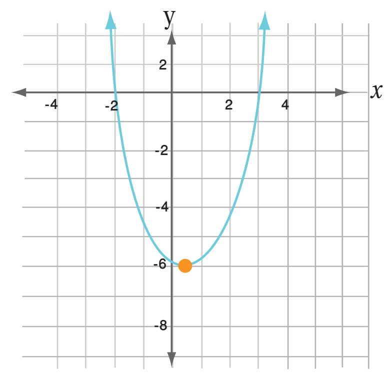
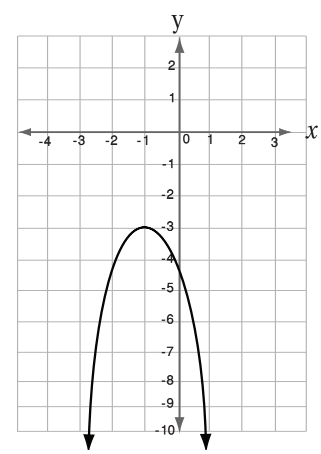
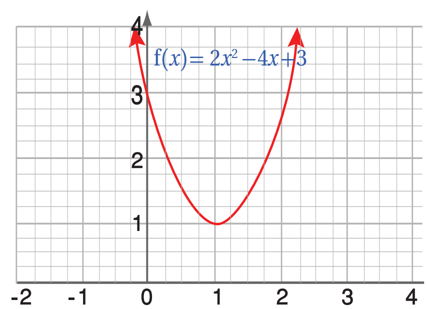
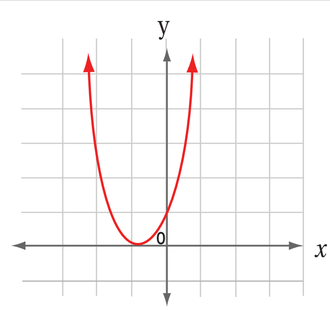
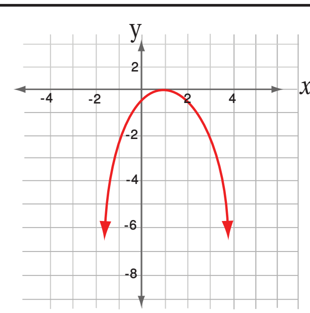
إذن: حَلُّ المعادلةِ التربيعيةِ هو $x=$............, $x=$............

3) أكتبُ حلولَ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيةِ بيانيًّا:

تمثيلُ الاقترانِ المرتبطِ بالمعادلةِ بيانيًّا	حَلُّ المعادلةِ
	$x_1=$................ $x_2=$................
	$x_1=$................ $x_2=$................

ثانيًا: عددُ حلولِ المعادلةِ التربيعيةِ

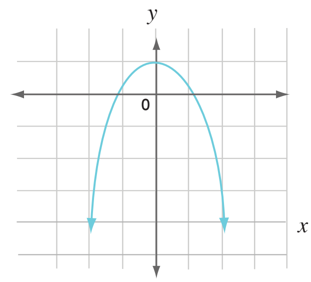
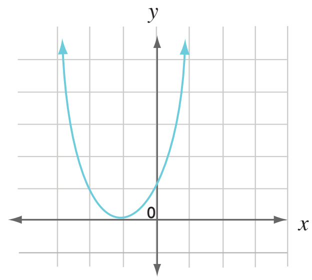
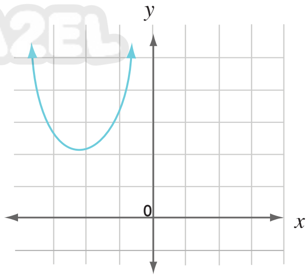
1) أحددُ عددَ قيمِ x التي تمثلُ حلولًا للمعادلاتِ التربيعيةِ الآتيةِ (أصفار الاقترانِ، جذورُ المعادلةِ)، ثم أبررُ إجابتي:

منحنى الاقترانِ المرتبطِ بالمعادلةِ التربيعيةِ	حلولُ المعادلةِ
 	عددُ الحلولِ (عددُ قيمِ x): .... التبريرُ: ....
 	عددُ الحلولِ (عددُ قيمِ x): .... التبريرُ: ....
 	عددُ الحلولِ (عددُ قيمِ x): .... التبريرُ: ....

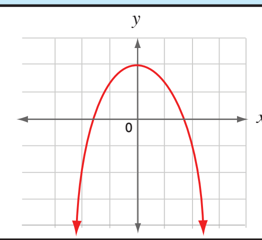
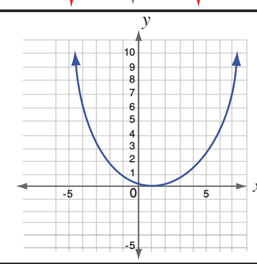
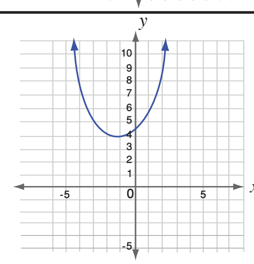
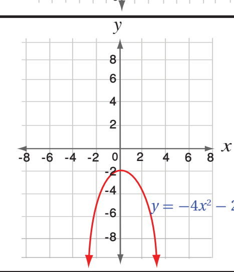
أتعلمُ

يمكنُ أن يكونَ للمعادلةِ التربيعية **حلان حقيقيانِ مختلفانِ**، أو **حلٌّ حقيقيٌّ واحدٌ**، أو ألا **يكونَ لها حلولٌ حقيقيةٌ**.

2) التمثيلُ البيانيُّ للاقترانِ المرتبطِ بالمعادلةِ التربيعيةِ التي لا يوجدُ لها حَلٌّ حقيقيٌّ هو:

3) أصلُ العمودَ الأولَ بما يناسبُه في العمودِ الثاني:

التمثيلُ البيانيُّ للاقترانِ المرتبطِ بالمعادلةِ التربيعيةِ	عددُ الحلولِ الحقيقيةِ للمعادلةِ التربيعيةِ
	0
	1
	2
	

أقيمُ ذاتي: أرسمُ الوجهَ الذي يُعبِّر عن درجةِ رضايَ عنْ أدائي وتفاعلي في أثناءِ الأنشطةِ داخلَ (   ).

أستطيعُ حلَّ الأنشطةِ من دونِ مساعدةٍ. أتوجهُ إلى كتابي وأكملُ حلَّ "أتدرب" وأحلُّ المسائلَ.	أستطيعُ حلَّ الأنشطةِ معَ بعضِ المساعدةِ. أسألُ زميلاً أتقنَ المهارةَ.	لم أتمكنْ من حلِّ الأنشطةِ. أستعينُ بزميلٍ أتقنَ المهارةَ أو معلمي، ويمكنُ أن أبحثَ عن مصدرٍ آخرَ للمعرفةِ.
• أجدُ حلَّ معادلةٍ تربيعيةٍ بيانيًّا ( )		

2

حَلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ بالتحليلِ (1)

النتاجُ: • أحَلُّ المعادلةَ التربيعيةَ بالتحليلِ.

نشاط 1 حَلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ بالتحليلِ

أولًا: تحليلُ المقاديرِ الجبريةِ

أتذكرُ

بعضَ طرائقِ تحليلِ المقاديرِ الجبريةِ

عددُ الحدودِ الجبريةِ	طريقةُ التحليلِ	
2 أوْ أكثرُ	إخراجُ العاملِ المشتركِ الأكبرِ	
2	الفرقُ بيْنَ مربعَينِ	$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
3	مربعٌ كاملٌ ثلاثيُّ الحدودِ	$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$
	$x^2 + bx + c$	$x^2 + bx + c = (x+m)(x+n)$ $m + n = b$ and $mn = c$
4 أوْ أكثرُ	التحليلُ بتجميعِ الحدودِ	$ax + bx + ay + by = x(a+b) + y(a+b)$ $= (a+b)(x+y)$

1) أحللُ المقدارَ الجبريَّ $6x^2+8x$:

1 أجدَ العاملَ المشتركَ الأكبرَ لحدودِ المقدارِ الجبريِّ: $2x$؛ لأنَّ

$$6x^2 = 2\times3\times x\times x,\ 8x = 2\times2\times2\times x$$

2 أخرجُ المقدارَ $(2x)$ عاملًا مشتركًا: $2x\ (3x+4)$

3 هل المقدارُ الجبريُّ $6x^2+8x=2x(3x+4)$ تمَّ تحليلُه تحليلًا كاملًا؟ أبررُ إجابتي.

نعمْ؛ لأنَّه تمَّ كتابةُ كلِّ حدٍّ من الحدودِ الجبريةِ للمقدارِ بالصورةِ التحليليةِ.

إذنْ، تمَّ تحليلُ المقدارِ الجبريَّ تحليلًا كاملًا.

أتذكرُ

حينَ لا تساوي قيمةُ العاملِ المشتركِ الأكبرُ لحدودِ المقدارِ الجبريِّ 1، فإنَّ منَ الأسهلِ البدءَ بإخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ، ثمَّ اختيارُ طريقةِ التحليلِ المناسبةِ.

2) أحللُ المقدارَ الجبريَّ $x^2 - 6x + 8$:

1 أجدُ العاملَ المشتركَ الأكبرَ لحدودِ المقدارِ الجبريِّ: 1

2 أختارُ طريقةَ التحليلِ المناسبةَ: تحليلُ ثلاثيةِ الحدودِ

$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$

$m + n = b$ and $mn = c$

بما أنَّ c=......... ، و b=........... ، فيجبُ إيجادُ عددينِ سالبينِ مجموعُهما .... وحاصلُ ضربِهما ....

3 أنشيءُ جدولًا، وأنظمُ فيه عواملَ العددِ 8 السالبةِ، وأحددُ العاملينِ اللذينِ مجموعُهما -6:

العاملانِ الصحيحانِ

أزوجُ عواملِ العددِ 8 السالبةُ	$-1, -8$	$-2, -4$
مجموعُ العاملَينِ	-9	-6

4 أكتبُ القاعدةَ: $x^2 - 6x + 8 = (x + \mathbf{m})(x + \mathbf{n})$

5 أعوضُ m= -2, n= -4 $= (\ldots\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots)$

3) أحللُ المقاديرَ الجبريةَ الآتيةَ:

1 x^2+3x+2

2 $2x^2-2x-24$

ثانيًا: حَلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ بالتحليلِ

أتذكرُ

إذا كانتْ c موجبةً، و b سالبةً في ثلاثيِّ الحدودِ x^2+bx+c، فإنَّ لكلٍّ من n, m إشارةً سالبةً.

أتعلمُ

خاصيةُ الضربِ الصفريِّ: إذا كان حاصلُ ضربِ عددينِ حقيقيينِ صفرًا، فإن أحدَهما على الأقلِّ يجبُ أنْ يكونَ صفرًا، **مثالٌ:** $x(x+1)=0$، فإن إما $x=0$، أو $x+1=0$.

1) أحَلُّ المعادلةَ $4x^2 + 20x + 25 = 0$ بالتحليلِ

أحللُ المقدارَ الجبريَّ في الطرفِ الأيسرِ من المعادلةِ على صورةِ حاصلِ ضربِ عاملينِ:

$4x^2+20x+25=0$

ألاحظُ:

المقدارُ الجبريُّ $4x^2+20x+25$ يتكونُ من 3 حدودٍ؛ أختارُ تحليلَه بإحدى الطرائقِ الثلاثةِ: (إخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ، أو مربعِ كاملٍ ثلاثيٍّ، أو تحليلِ ثلاثيِّ الحدودِ x^2+bx+c)؛ وبمَا أنَّ العاملَ المشتركَ الأكبرَ للحدودِ الجبريةِ الثلاثةِ هو 1؛ فلا يمكنُ استعمالُ الطريقةِ الأولى، وبما أنَّ معاملَ x^2 ($a \neq 1$)، فلا يمكنُ تحليلهُ باستعمالِ الطريقةِ الثانيةِ؛ لذلك عليَّ أنْ أتحققَ من شروطِ طريقةِ تحليلِ مربعِ كاملٍ ثلاثيِّ الحدودِ.

$$4x^2 \quad + \quad 20x \quad + \quad 25$$

1
الحدُّ الأول مربعٌ كاملٌ
$4x^2 = (2x)^2$

2
الحدُّ الأوسط يساوي ضعفَ ناتجِ ضربِ الجذرِ التربيعيِّ لكلِّ مِنَ الحدّينِ: الأولِ، والأخيرِ.
$20x = 2(2x)(5)$

3
الحدُّ الأخيرُ مربعٌ كاملٌ
$25 = 5^2$

إذنْ، أحللُ المقدارَ الجبريَّ باستعمالِ مربعٍ كاملٍ ثلاثيِّ الحدودِ:

مربعٌ كاملٌ ثلاثيُّ الحدودِ

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

تحليلُ المقدارِ الجبريِّ هو: $4x^2+20x+25=(2x+5)^2=(2x+5)(2x+5)$

أساوي كلَّ عاملٍ بالصفرِ (خاصيةُ الضربِ الصفريِّ)، وبما أنَّ العاملينِ متساويان فأحَلُّ المعادلةَ الخطيةَ (بينَ القوسينِ):

$$4x^2+20x+25 = 0$$
$$(2x+5)^2 = 0$$
$$2x+5 = 0$$
$$x=-\frac{5}{2} = -2\frac{1}{2}$$

إذنْ، للمعادلةِ جذرانِ حقيقيانِ متساويان (حَلٌّ واحدٌ) هو، $\{-2\frac{1}{2}\}$

أتعلمُ

لحلِّ المعادلاتِ التربيعيةِ بالتحليلِ، أتبعُ الخطواتِ الآتيةَ:

الخطوةُ (1): أنقلُ جميعَ الحدودِ إلى الطرفِ الأيسرِ، وأتركُ الصفرَ في الطرفِ الأيمنِ.

الخطوةُ (2): أحللُ المقدارَ الجبريَّ في الطرفِ الأيسرِ من المعادلةِ على صورةِ حاصلِ ضربِ عاملينِ.

الخطوةُ (3): أساوي كلَّ عاملٍ بالصفرِ (خاصيةِ الضربِ الصفريِّ)، وأحلُّ كلَّ معادلةٍ خطيةٍ.

الخطوةُ (4): حلولُ المعادلةِ التربيعيةِ هي حلولُ المعادلتينِ الخطيتينِ.

2) أحلُّ المعادلةَ التربيعيةَ $x^2 = 12x - 36$

1 أنقلُ جميعَ الحدودِ إلى الطرفِ الأيسرِ من المعادلةِ، وأتركُ الصفرَ في الطرفِ الأيمنِ:

....

2 أحللُ المقدارَ الجبريَّ في الطرفِ الأيسرِ من المعادلةِ على صورةِ حاصلِ ضربِ عاملين:

- أجدُ العاملَ المشتركَ الأكبرَ لحدودِ المقدارِ الجبريِّ: ....
- هل الحدُّ الأولُ مربعٌ كاملٌ؟ ....
- هل الحدُّ الأوسطُ يساوي $2(x)(6)$؟ ....
- هل الحدُّ الأخيرُ مربعٌ كاملٌ؟ ....
- هل يمكنُ تحليلُ المقدارِ الجبريِّ باستعمالِ طريقةِ المربعِ الكاملِ ثلاثيِّ الحدودِ؟ ......
- أحللُ المقدارَ الجبريَّ: $x^2-12x+36=(x-6)^2=(x-6)(x-6)$

(وبما أن العاملينِ متساويانِ أساوي كلَّ عاملٍ بالصفرِ (خاصيةُ الضربِ الصفريِّ)، فأحَلُّ المعادلةَ الخطيةَ (بين القوسين):

....

....

إذن، للمعادلةِ جذرانِ حقيقيانِ متساويانِ (حَلٌّ واحدٌ) هو، ....

3) أحُلُّ المعادلتينِ التربيعيتينِ الآتيتينِ:

1 $9x^2-42x+49=0$

1 $x^2+6x+9=0$

أقيِّمُ ذاتي: أرسمُ الوجهَ الذي يُعبِّر عن درجةِ رضايَ عنْ أدائي وتفاعلي في أثناءِ الأنشطةِ داخل (   ).

أستطيعُ حلَّ الأنشطةِ من دونِ مساعدةٍ. أتوجهُ إلى كتابي وأكملُ حلَّ "أتدرب" وأحلُّ المسائلَ.	أستطيعُ حلَّ الأنشطةِ معَ بعضِ المساعدةِ. أسألُ زميلاً أتقنَ المهارةَ.	لم أتمكنْ من حلِّ الأنشطةِ. أستعينُ بزميلٍ أتقنَ المهارةَ أو معلمي، ويمكنُ أن أبحثَ عن مصدرٍ آخرَ للمعرفةِ.
• أحللُ المقاديرَ الجبريةَ ( )	• أحَلُّ المعادلةَ التربيعيةَ جبريًّا ( )	

حَلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ بالتحليلِ (2)

النتاجُ: • أحَلُّ المعادلةَ التربيعيةَ على صورةِ $ax^2+bx+c=0$

نشاط 1 حَلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ على صورةِ $ax^2+bx+c=0$

أولًا: تحليلُ المقاديرِ الجبريةِ بتجميعِ الحدودِ

أتذكرُ

بعضَ طرائقِ تحليلِ المقاديرِ الجبريةِ

عددُ الحدودِ الجبريةِ	طريقةُ التحليلِ	
4 أوْ أكثرُ	التحليلُ بتجميعِ الحدودِ	$ax+bx+ay+by = x(a+b)+y(a+b)$ $= (a+b)(x+y)$

1) أحللُ المقدارَ الجبريَّ $x - 2x^2 - 18x + 9$ تحليلًا كاملًا

أجمِّع الحدودَ ذواتِ العواملِ المشتركةِ: $x - 2x^2 - 18x + 9 = (x - 2x^2)+(-18x + 9)$

أحللُ كلَّ تجميعٍ بإخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ: $= x(1-2x) + 9(-2x+1)$

أخرجُ $(1-2x)$ عاملًا مشتركًا: $= (1-2x)(x+9)$

2) أحللُ المقدارَ الجبريَّ $2x^2 - 12x + 42 - 7x$ تحليلًا كاملًا:

أجمعُ الحدودَ ذواتِ العواملِ المشتركةِ: $2x^2-12x+42-7x = (\ldots\ldots\ldots\ldots) + (\ldots\ldots\ldots\ldots)$

أحللُ كلَّ تجميعٍ بإخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ: $= 2x(\ldots\ldots\ldots) -7(\ldots\ldots\ldots)$

أخرجُ $(2x-7)$ عاملًا مشتركًا: $= (\ldots\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots)$

3) أحللُ المقاديرَ الجبريةَ الآتيةَ:

1. $x^2+5x-x-5$
2. $3x^2+15x-4x-20$

ثانيًا: تحليلُ ثلاثيةِ الحدودِ ax^2+bx+c

أتذكرُ:

طرائقَ تحليلِ المقاديرِ الجبريةِ

طريقةُ التحليلِ		عددُ الحدودِ الجبريةِ
$x^2+bx+c=(x+m)(x+m)$ $m+n=b$ and $mn=c$	x^2+bx+c	3

أتذكرُ:

طرائقُ تحليلِ المقاديرِ الجبريةِ

لتحليلِ ثلاثيِّ الحدودِ ax^2+bx+c، أَجِدُ عددَيْنِ صحيحَيْنِ m و n حاصلُ ضربِهِما يُساوي (ac)، ومجموعُهُما يُساوي b، ثمَّ أكتبُ ax^2+bx+c على الصورةِ $ax^2+mx+nx+c$، ثمَّ أُحَلِّلُ بتجميعِ الحدودِ.

1) أحللُ المقدارَ الجبريَّ $2x^2+5x+3$ تحليلًا كاملًا:

بما أنَّ $c=3$، و$b=5$، و$a=2$، فيجبُ إيجادُ عددينِ موجبينِ مجموعهُما 5، وحاصلُ ضربهِما 6،

أنشئُ جدولًا، وأنظمُ فيه عواملَ العددِ 6 الموجبة، وأحددُ العاملينِ اللذينِ مجموعُهما 5:

أزوجُ عواملِ العددِ 6 الموجبةُ	1, 6	2 , 3
مجموعُ العاملَينِ	7	5

العاملانِ الصحيحانِ: 2 , 3

$2x^2+5x+3 = 2x^2+mx+nx+3$ أكتبُ القاعدةَ

$= 2x^2+2x+3x+3$ أعوضُ $m=2, n=3$

$= (2x^2+2x)+(3x+3)$ أجمعُ الحدودَ ذواتِ العواملِ المشتركةِ

$= 2x(x+1)+3(x+1)$ أحللُ كلَّ تجميعٍ بإخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ

$= (x+1)(2x+3)$ أخرجُ $(x+1)$ عاملًا مشتركًا

ألاحظ

إذا كانت إشارةُ $a.c$ موجبةً في ثلاثيِّ الحــدود $ax^2 + bx + c$، فإن لكلٍّ من m و n الإشارةَ نفسَها، ويعتمدُ تحديدُ إشارتيْ m و n' (موجبةً/سالبةً) على إشارة b، فإذا كانت b موجبةً فإنَّ إشارةَ كلٍّ منهما موجبةٌ، وإذا كانت إشارةُ b سالبةً فإنَّ إشارةَ كلٍّ منهما سالبةٌ.

2) أحللُ المقدارَ الجبريَّ $6x^2 - x - 12$ تحليلًا كاملًا:

بما أن c=............، و b=...........، و a=.................. فيجبُ إيجادُ عددينِ سالبين مجموعُهما .... وحاصلُ ضربِهما ....

ألاحظُ

إذا كانت $a.c$ سالبةً في ثلاث الحدود $ax^2 + bx + c$، فإنَّ لـ m و n إشارتين مختلفتين.

أنشئُ جدولًا، وأنظمُ فيه عواملَ العددِ 72 مختلفةَ الإشارةِ (إشارةُ الأكبرِ سالبةٌ)، وأحددُ العاملينِ اللذينِ مجموعُهما 1-

أزواجُ عواملِ العددِ 72 مختلفةُ الإشارةِ	مجموعُ العاملين
-72 ,1	-71
-36,2	-34
-24 ,3	-21
-18 ,4	-14
-12 ,6	-6
العاملانِ الصحيحانِ 8, -9	-1

أكتبُ القاعدةَ $6x^2-x-12 =$ ....

أعوضُ $m = 8, n = -9$ =................................

أجمعُ الحدودَ ذواتِ العواملِ المشتركةِ = (............)+(............)

أحللُ كلَّ تجميعٍ بإخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ =........(.........)-3(..........)

أخرجُ $(3x+4)$ عاملًا مشتركًا = (.............)(..........)

3) أحللُ المقاديرَ الجبريةَ الآتيةَ:

(1) $6x^2+22x-8$

(2) $12x^2-x-20$

ثالثًا: حَلُّ المعادلةِ التربيعيةِ على صورةِ $ax^2 + bx + c$

1) أحَلُّ المعادلةَ التربيعيةَ $2x^2 = 13x + 7$

أنقلُ جميعَ الحدودِ إلى الطرفِ الأيسرِ من المعادلةِ، وأتركُ الصفرَ في الطرفِ الأيمنِ: $2x^2-13x-7=0$

أحللُ المقدارَ الجبريَّ في الطرفِ الأيسرِ من المعادلةِ على صورةِ حاصلِ ضربِ عاملينِ:

ألاحظُ أنَّ الطرفَ الأيسرَ من المعادلةِ على صورةِ ax^2+bx+c

بما أن $c = -7$، و $b = -13$، و $a = 2$، فإنَّ $ac = -14$ (إشارةُ ac سالبةٌ، وإشارةُ b سالبةٌ)؛ فيجبُ إيجادُ عددينِ مختلفَي الإشارةِ مجموعُهما 13- وحاصلُ ضربِهما 14-

أنشئُ جدولًا، وأنظمُ فيه عواملَ العددِ 14- مختلفةَ الإشارةِ (إشارةُ الأكبرِ سالبةٌ)، وأحددُ العاملينِ اللذينِ مجموعُهما 1-

أزواجُ عواملِ العددِ 14 مختلفةُ الإشارةِ	مجموعُ العاملينِ
العاملانِ الصحيحانِ: 1, -14	-13
2,-7	-5

أكتبُ القاعدةَ: $2x^2-13x-7 = 2x^2+mx+nx-7$

أعوضُ $m=-14, n=1$: $= 2x^2-14x+1x-7$

أجمعُ الحدودَ ذواتِ العواملِ المشتركةِ: $= (2x^2-14x)+(x-7)$

أحللُ كلَّ تجميعٍ بإخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ: $= 2x(x-7)+ (x-7)$

أخرجُ $(x-7)$ عاملًا مشتركًا: $= (x-7)(2x+1)$

أساوي كلَّ عاملٍ بالصفرِ (خاصيةُ الضربِ الصفريِّ)، وأحَلُّ كلَّ معادلةٍ خطيةٍ: $x - 7 = 0,\ 2x+1= 0$

$$x = 7,\ x = \frac{-1}{2}$$

إذن، للمعادلةِ جذرانِ هما: $x =7,\ x = \frac{-1}{2}$

2) أحَلُّ المعادلةَ التربيعيةَ $3x^2 + 13x + 12 = 0$

- أنقلُ جميعَ الحدودِ إلى الطرفِ الأيسرِ من المعادلةِ، وأتركُ الصفرَ في الطرفِ الأيمنِ: $3x^2+13x+12=0$
- أحللُ المقدارَ الجبريَّ في الطرفِ الأيسرِ من المعادلةِ على صورةِ حاصلِ ضربِ عاملينِ:
- ألاحظُ أنَّ الطرفَ الأيسرَ من المعادلةِ على صورةِ ax^2+bx+c

بما أنَّ c=....... ، و b=....... ، و a=....... ، فإن ac=........ (إشارةُ ac ....، وإشارةُ b ....)؛
فيجبُ إيجادُ عددينِ موجبينِ مجموعُهما .... وحاصلُ ضربِهما ....

أنشئُ جدولًا، وأنظمُ فيه عواملَ العددِ 36 موجبةَ الإشارةِ، وأحددُ العاملينِ اللذينِ مجموعُهما 13

أزواجُ عواملِ العددِ 36 موجبةُ الإشارةِ	مجموعُ العاملينِ
1, 36	37
2, 18	20
3, 12	15
العاملانِ الصحيحانِ 4, 9	13
6, 6	12

أكتبُ القاعدةَ $3x^2 + 13x\ 12+ =$ ....

أعوضُ $m = 9,\ n = 4$ $=$.....................

أجمعُ الحدودَ ذواتِ العواملِ المشتركةِ $= (\ldots\ldots\ldots)+(\ldots\ldots\ldots)$

أحللُ كُلَّ تجميعٍ بإخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ $=3x(\ldots\ldots)+4(\ldots\ldots)$

أخرجُ $(x+3)$ عاملًا مشتركًا $=(\ldots\ldots)(\ldots\ldots)$

- أساوي كلَّ عاملٍ بالصفرِ (خاصيةُ الضربِ الصفريِّ)، وأحَلُّ كلَّ معادلةٍ خطيةٍ:

$\ldots\ldots\ldots=0,\ \ldots\ldots\ldots=0$

$x = \ldots\ldots\ldots,\ x = \ldots\ldots\ldots$

إذنْ للمعادلةِ جذرانِ هما: $x =$ ...., $x =$................

3) أحَلُّ المعادلاتِ التربيعيةَ الآتيةَ:

1 $2x^2=x+6$

2 $14x^2+5=17x$

أقيمُ ذاتي: أرسمُ الوجهَ الذي يُعبِّر عن درجةِ رضايَ عنْ أدائي وتفاعلي في أثناءِ الأنشطةِ داخلَ (   ).

أستطيعُ حلَّ الأنشطةِ من دونِ مساعدةٍ. أتوجهُ إلى كتابي وأكملُ حلَّ "أتدرب" وأحلُّ المسائلَ.	أستطيعُ حلَّ الأنشطةِ معَ بعضِ المساعدةِ. أسألُ زميلاً أتقنَ المهارةَ.	لم أتمكنْ من حلِّ الأنشطةِ. أستعينُ بزميلٍ أتقنَ المهارةَ أو معلمي، ويمكنُ أن أبحثَ عن مصدرٍ آخرَ للمعرفةِ.
• أحللُ المقاديرَ الجبريةَ بتجميعِ الحدودِ ( )	• أحللُ ثلاثيةَ الحدودِ ax^2+bx+c ( )	• أحَلُّ المعادلةَ التربيعيةَ على صورةِ $ax^2+bx+c=0$ ( )

5

النتاجُ: • أحَلُّ المعادلةَ التربيعيةَ باستعمالِ القانونِ العامِّ.

نشاط 1 حَلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ

أولًا: حَلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ

أتعلمُ

يمكنُ حلُّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ $ax^2 + bx + c = 0$ بالقانونِ العامِّ على النَّحوِ الآتي:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

حيثُ $a \neq 0$ و $b^2 - 4ac \geq 0$.

1) أحَلُّ المعادلةَ التربيعيةَ $5x^2 - 2x - 4 = 0$ باستعمالِ القانونِ العامِّ

- أنقلُ جميعَ الحدودِ إلى الطرفِ الأيسرِ من المعادلةِ، وأتركَ الصفرَ في الطرفِ الأيمنِ

$5x^2-2x-4=0$

أكتبُ القانونَ العامَّ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

- أعوضُ $a = 5, b = -2, c = -4$ في القانونِ العامِّ

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4(5)(4)}}{10}$$

- بالتبسيطِ

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{84}}{10} = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{5}$$

إذنْ، جذرا المعادلةِ (حلانِ) هما: $\frac{1 + \sqrt{21}}{5}$ ، $\frac{1 - \sqrt{21}}{5}$

2) أحَلُّ المعادلةَ التربيعيةَ $3x^2 + 3 = 7x$ باستعمالِ القانونِ العامِّ:

- أنقلُ جميعَ الحدودِ إلى الطرفِ الأيسرِ من المعادلةِ، وأتركَ الصفرَ في الطرفِ الأيمنِ:

..................=0

أكتبُ القانونَ العامَّ

$x =$

- أعوضُ a=.......... , b=........., c=...... في القانونِ العامِّ:

$x =$

- بالتبسيطِ

$x =$

إذنْ، جذرا المعادلةِ (حلانِ) هما: ....، ....

3) أحَلُّ المعادلاتِ التربيعيةَ الآتيةَ:

1. $2x^2=3x-2$
2. $x^2+6x+2=0$

ثانيًا: عددُ حلولِ المعادلةِ التربيعيةِ باستعمالِ المميزِ

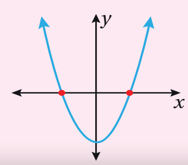
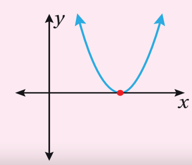
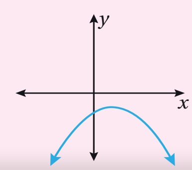
1) أحددُ عددَ الحلولِ الحقيقيةِ للمعادلةِ التربيعيةِ $5x^2 - 2x - 3 = 0$ باستعمالِ المميزِ

أكتبُ صيغةَ المميزِ $\Delta = b^2 - 4ac$

أعوضُ a=5, b=-2, c=-3 في صيغةِ المميزِ $\Delta = (-2)^2 - 4(5)(-3)$

أتعلمُ

مُمَيِّزُ المُعادلةِ التربيعيَّةِ $ax^2 + bx + c = 0$ هُوَ $\Delta = b^2 - 4ac$، ويمكنُ استعمالُهُ لتحديدِ عددِ حلولِ المُعادلةِ التربيعيَّةِ كما يأتي:

إشارةُ المُمَيِّزِ Δ	$\Delta > 0$ موجبٌ	$\Delta = 0$ صفرٌ	$\Delta < 0$ سالبٌ
عددُ الحُلولِ	حلّانِ حقيقيّانِ مختلفانِ	حلٌّ حقيقيٌّ واحدٌ	لا توجدُ حُلولٌ حقيقيَّةٌ
مثالٌ بيانيٌّ			

بالتبسيطِ $\Delta = 4 + 60 = 64$

بما أن Δ موجبٌ، إذن للمعادلةِ حلانِ حقيقيانِ مختلفانِ

2) أحددُ عددَ الحلولِ الحقيقيةِ للمعادلةِ التربيعيةِ $x^2-2x+3=0$ باستعمالِ المميزِ:

أكتبُ صيغةَ المميزِ $\Delta=$........................

أعوضُ a=........, b=........, c=........ في صيغةِ المميزِ: $\Delta=$...........................

بالتبسيطِ $\Delta=$...........................

بما أنَّ Δ ....، إذن ....

3) أحددُ عددَ الحلولِ الحقيقيةِ للمعادلاتِ التربيعيةِ الآتيةِ:

1. $x^2=7x-1$
2. $9x^2+6x+1=0$

أقيمُ ذاتي: أرسمُ الوجهَ الذي يُعبِّر عن درجةِ رضايَ عنْ أدائي وتفاعلي في أثناءِ الأنشطةِ داخلَ (   ).

أستطيعُ حلَّ الأنشطةِ من دونِ مساعدةٍ. أتوجهُ إلى كتابي وأكملُ حلَّ "أتدرب" وأحلُّ المسائلَ.	أستطيعُ حلَّ الأنشطةِ معَ بعضِ المساعدةِ. أسألُ زميلاً أتقنَ المهارةَ.	لم أتمكن من حلِّ الأنشطةِ. أستعينُ بزميلٍ أتقنَ المهارةَ أو معلمي، ويمكنُ أن أبحثَ عن مصدرٍ آخرَ للمعرفةِ.
• أحَلُّ المعادلاتِ التربيعيةَ باستعمالِ القانونِ العامِّ ( )	• أحددُ عددَ حلولِ المعادلةِ التربيعيةِ باستعمالِ المميزِ ( )	

الأسسُ النسبيةُ والجذورُ

5

النتاجاتُ: • أربطُ بينَ الأسسِ النسبيةِ والجذورِ، وأحوِّلُ بينَها.

نشاطُ 1 الربطُ بينَ الأسسِ النسبيةِ، والجذورِ، والتحويلُ بينَها

أتذكرُ
دليلُ الجذرِ 2 وهوَ يدلُّ على الجذرِ التربيعيِّ ولا يُكتَبُ

أتذكرُ
دليلُ الجذرِ
الأسُّ
$x^{\frac{a}{b}} = \sqrt[a]{x^{b}}$
الأساسُ

1) أكتبُ العباراتِ الآتيةَ على الصورةِ الجذريةِ:

1 $5^{\frac{1}{2}}$ $= \sqrt{5}$	2 $64^{\frac{1}{2}}$
3 $(-3)^{\frac{2}{3}}$ $= \sqrt[3]{(-3)^2}$	4 $b^{\frac{-1}{3}}$ $= \sqrt[\square]{\square^{\square}}$

2) أكتبُ العباراتِ الآتيةَ على الصورةِ الأسيةِ:

1 $\sqrt[3]{a^4}$ $a^{\frac{\boxed{4}}{\boxed{3}}}$	2 $\sqrt{x}$ $= x^{\frac{1}{\square}}$
3 $\sqrt[3]{(y)^2}$ $= y^{\frac{\square}{\square}}$	4 $\sqrt[3]{x^6}$ $= x^{\frac{\square}{\square}} = x^{\square}$

6 ضربُ الأسسِ النسبيةِ وقسمتُها

النتاجاتُ: • أستعملُ ضربَ الأسسِ النسبيةِ، وقسمتها في إيجادِ قيمِ مقاديرَ تحتوي على أسسٍ نسبيةٍ وتبسيطِها.

نشاطٌ 1 قوانينُ الأسسِ

قاعدةُ (1) ضربُ القوى $a^m \times a^n = a^{m+n}$

استخدمُ القاعدة 3×3^4 $= 3^{(1+4)}$ $= 3^5$ $\quad a^m \times a^n = a^{m+n}$	3×3^4 $= \underbrace{3\times\overbrace{3\times3\times3\times3}^{\text{4 مراتٍ}}}_{\text{5 مراتٍ}}$ $= 3^5$

3 $f^5 \times f^2 \times f^3$ $= (\ \ )^{(\ )+(\ )+(\ )}$	2 $(-2)^3\times(-2)^4$ $= (\ \ )^{(\ )+(\ )}$	1 $a^3\times a^5$ $= a^{(\ )+(\ )}$ $= a^{(\ )}$

قاعدةُ (2) قسمةُ القوى $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \neq 0$

استخدمُ القاعدة $\frac{3^4}{3}$ $= 3^{(4-1)}$ $= 3^3$	$\frac{3^4}{3}$ $= \frac{3\times3\times3\times\cancel{3}}{\cancel{3}} = 3\times3\times3$ $= 3^3$

3 $\frac{a^{\frac{1}{5}}}{a^{\frac{4}{5}}}$	2 $\frac{a^7}{a^6}$	1 $3^8 \div 3^4$ $= \frac{y^3}{y^3}$ $=$........

قاعدةُ (3) قوةُ القوة $(a^m)^n = a^{m\times n}$

أستخدمُ القاعدة $(3^2)^3$ $= 3^{2\times 3}$ $= 3^6$	$\boxed{(3^2)}^3 \longrightarrow$ الأساسُ $= \boxed{3^2}\times\boxed{3^2}\times\boxed{3^2}$ حسبَ تعريفِ الأسِّ $= 3^{(2+2+2)} \longrightarrow 3^6$ قانونُ ضربِ القوى

1 $(2^3)^5$	2 $(3^{-1})^{-2}$	3 $(x^2)^5$

قاعدةُ (4) قوةُ ناتجِ الضربِ $(ab)^n = a^n b^n$

أستخدمُ القاعدة $(2\times3)^5$ $= (2\times 3)^5$ $= 2^5\times 3^5$	$\boxed{(2\times3)}^5 \longrightarrow$ الأساسُ $= \boxed{(2\times3)}\times\boxed{(2\times3)}\times\boxed{(2\times3)}\times\boxed{(2\times3)}\times\boxed{(2\times3)}$ تعريفِ الأسِّ $= (2\times2\times2\times2\times2)\times(3\times3\times3\times3\times3)$ $= 2^5\times 3^5$

1 $(3\times4)^3$	2 $(xy^2)^3$	3 $(a^4 b^2)^3$

قاعدةُ (5) قوةُ ناتجِ القسمةِ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$

1 $\left(\frac{5}{4}\right)^3$	2 $\left(\frac{27}{8}\right)^3$	3 $\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{4}}$

قاعدةُ (6) الأسُّ الصفريُّ $a^0 = 1 , a \neq 0$

1 $\frac{y^3}{y^3}$	أيُّ عددٍ مرفوعٍ للقوة صفرٍ يكونُ ناتجُهُ 1 2 $7^0 = 1$ $x^0 =$ ....

قاعدةُ (7) الأسسُ السالبةُ $a^{-n} = \frac{1}{a^n} , a\neq0$

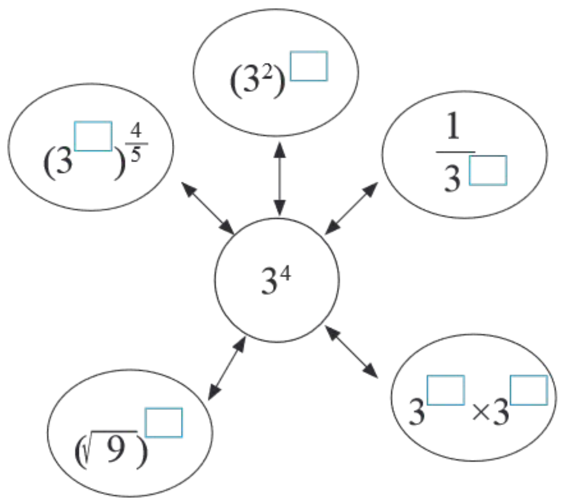
1 $(64)^{-0.5}$	2 $(32)^{-0.4}$	3 $(-27)^{\frac{-4}{3}}$

نشاطُ 2 تبسيطُ المقاديرِ باستخدامِ قوانينِ الأسسِ

1) أحددُ ✓ للمقدارِ المكافئِ للعددِ 2^{-5}

☐ $2^2 \times 2^3$	☐ -10	☐ $\frac{2^6}{2^5}$	☐ $\frac{1}{32}$
☐ 32	☐ $\frac{1}{2^5}$	☐ $\frac{2^3}{2^8}$	☐ $2^{-2} \times 2^{-3}$

2) أكملُ الشكلَ بالعددِ المناسبِ في المربعاتِ الفارغةِ:



3) أُبسّطُ المقاديرَ الآتيةَ:

1 $(36)^{\frac{1}{2}}$	2 $(3)^{\frac{1}{4}} \times (27)^{\frac{1}{4}}$	3 $(x^{-1})^{\frac{2}{3}}$
4 $(-32y^{15})^{\frac{1}{5}}$	5 $(-27x^{-9})^{\frac{1}{3}}$	6 $(x)^{\frac{2}{7}} \times (x)^{\frac{3}{14}}$

أضعُ ✓ أسفلَ الصورةِ التي تمثّلُ تعلُّمي		
		

المسافةُ في المستوى الإحداثيِّ

النتاجُ: • أجدُ المسافةَ بين نقطتينِ في المستوى الإحداثيِّ .

• أجدُ نقطةَ منتصفِ قطعةٍ مستقيمةٍ في المستوى الإحداثيِّ.

نشاط 1 المسافةُ بين نقطتينِ في المستوى الإحداثيِّ

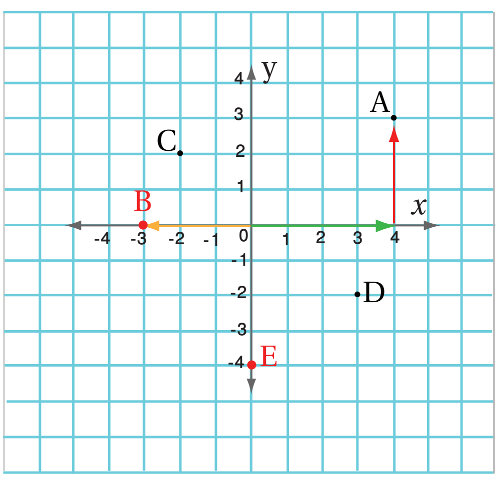
أولًا: تمثيلُ النقاطِ على المستوى الإحداثيِّ

أتذكرُ

كلُّ نقطةٍ في المستوى الإحداثيِّ يتمُّ تحديدُها بزوجٍ مرتبٍ.

(x , y)

الإحداثيُّ x الإحداثيُّ y



1) أمثلُ الأزواجَ المرتبةَ على المستوى الإحداثيِّ المجاورِ

- **A (4,3)**

أبدأ من نقطةِ الأصلِ، وأتجه إلى العددِ 4 على محورِ x الموجبِ، ثمَّ أتجهُ ثلاثَ وحداتٍ 3 إلى الأعلى لأصلَ إلى النقطةِ A

- **B (−3, 0)**

أبدأ من نقطةِ الأصلِ، وأتجه إلى العددِ 3 على محورِ x السالبِ، ولا أصعدُ إلى الأعلى أو أنزلُ إلى الأسفلِ، لأنَّ الإحداثيَّ y يساوي 0

- **F (−1, −2):** ....

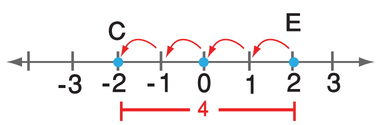
2) أجدُ احداثياتِ كلٍّ من النقاطِ الآتيةِ الممثلةِ على المستوى الإحداثيِّ المجاورِ :

1. النقطةُ C : تقابلُ العددَ −2 على المحورِ x وتقابلُ العددَ 2 على المحورِ y، إذنْ الزوجُ المرتُب الذي يحدُد موقعَ النقطةِ هو $(-2 , 2)$
2. النقطةُ D: هي (.......,3)
3. النقطةُ E: هي (......,....)

ثانياً: المسافةُ بينَ نقطتينِ على خَطِّ الأَعدادِ

- يستعملُ الرمزُ $\overline{AB}$ ليدلَّ على القطعةِ المستقيمةِ التي نقطةُ بدايتِها A ونهايتِها B، ويرمز إلى طولِها بالرمز AB
- القيمةُ المطلقةُ للعددِ هي المسافةُ بين العددِ والصفرِ على خطِّ الاعدادِ، ويرمزُ إليها بالرمزِ $|\ \ |$

1. تمثلُ المسافةُ بينَ 2 و 0 القيمةَ المطلقةَ للعددِ 2 — $DE = |2| = 2$
2. تمثلُ المسافةُ بينَ -5 و 0 القيمةَ المطلقةَ للعددِ -5 — $BD = |-5| = 5$
3. تمثلُ المسافةُ بينَ -8 و 0 القيمةَ المطلقةَ للعددِ -8 — $AD = |......| =$
4. تمثلُ المسافةُ بينَ -2 و 2 عددَ القفزاتِ منْ C الى E — CE



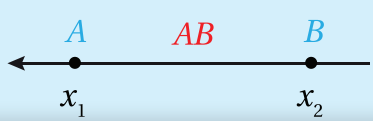
وأيضاً تمثلُ القيمةُ المطلقة للفرقِ بينَ 2 و -2 — $CE = |2-(-2)| = 4$

5. تمثلُ المسافةُ بينَ -2 و -5 على خط الأعداد — $CB = |-2-(-5)| = 3$
6. تمثلُ المسافةُ بينَ 2 و -8 على خط الأعداد — EA: ....

ألاحظُ

لإيجاد المسافةَ بين نقطتينِ على خَطِّ الأعدادِ أَجدُ القيمةَ المطلقةَ للفرقِ بينَ إحداثياتهما

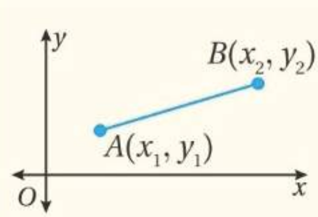
$AB = |x_2 - x_1|$ or $AB = |x_1 - x_2|$



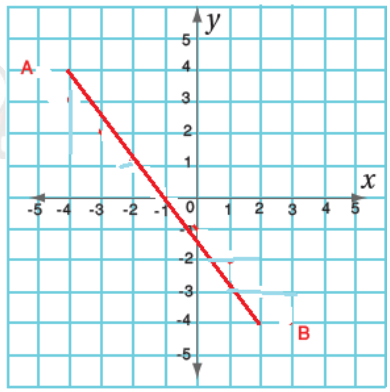
ثالثا: المسافةُ بين نقطتينِ في المستوى الإحداثيِّ .

المسافةُ بينَ النقطتَيْنِ $A(x_1, y_1)$ وَ $B(x_2, y_2)$، هِيَ:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



1) أجدُ AB في الشكلِ المجاورِ



أجدُ إحداثياتِ كلٍّ منْ A و B

$A=(-4, 4)$, $B=(2, -4)$

أكتبُ صيغةُ المسافةِ بين نقطتين

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

عرضُ إحداثياتِ النقاطِ

$A:(x_1, y_1)$ $(-4, 4)$

$B:(x_2, y_2)$ $(2, -4)$

$$AB = \sqrt{(2-(-4))^2 + (-4-4)^2}$$

أجدُ مربعَ كلِّ عددٍ، ثمَّ أجمعُ

$$AB = \sqrt{(6)^2 + (-8)^2}$$

أبسطُ

$$AB = \sqrt{100} = 10$$

2) أجدُ CD ، حيثُ $(0, -2)$ و $D(-1, -1)$.

أكتبُ صيغةَ المسافةِ بينَ نقطتينِ

$$CD = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

أعوضُ إحداثياتِ

النقاطِ حيث $(\dots, \dots)$ $A:(x_1, y_1)$ $(\dots, \dots)$ $B:(x_2, y_2)$

$$CD = \sqrt{(\dots - \dots)^2 + (\dots - \dots)^2}$$

أجدُ مربعَ كلِّ عددٍ، ثمَّ أجمعُ

أبسطُ

3) أجدُ CD ، حيثُ $(0, -2)$ و $D(-1, -1)$.

3 معادلةُ المستقيمِ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ

النتاجات: • أكتبُ معادلةَ المستقيمِ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ.
• أمثّلُ معادلةَ المستقيمِ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ بيانيًّا.

نشاطُ 1 معادلةُ المستقيمِ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ

$y = mx + b$
الميلُ ← m ، المقطعُ y ← b

تعلّمْتُ سابقًا كتابةَ معادلةِ المستقيمِ بالصيغةِ القياسيةِ،

الآن سوف أتعرَّفُ معادلةَ المستقيمِ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ.

والآنَ أحددُ الميلَ (m) والمقطعَ y (b)

3 $y = 6x + 2$ m =........ b=........	2 $y = -2x + 7$ m =........ b=7	1 $y = 4x - 3$ m = 4 b= -3

نشاطُ 2 كتابةُ معادلةِ المستقيمِ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ

المعطياتُ المتوافرةُ لكتابةِ معادلةِ المستقيمِ

- إذا عُلِمَ m و b
  - أُعوِّضُ مباشرةً m و b في المعادلةِ $y = mx + b$
- إذا عُلِمَ m ونقطةٌ يمرُّ بها المستقيمُ
  - 1) أُعوِّضُ m، وإحداثياتِ نقطةٍ في صيغةِ المعادلةِ.
  - 2) أحلُّ المعادلةَ لأجدَ قيمةَ b
- إذا عُلمَت نقطتان يمرُّ بهما المستقيمُ
  - أجدُ المستقيمَ المارَّ بالنقطتَينِ

1) أكتبُ معادلة المستقيمِ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ إذا عُلِمَ m و b

2 $m = 5 , b = 4$ صيغةُ الميلِ والمقطعِ .... أعوِّضُ $y = 5x + ...$	1 $m = 2 , b = 3$ صيغةُ الميلِ والمقطعِ $y = mx + b$ أعوِّضُ $y = 2x + 3$
4 $m = \frac{1}{2}$ ، $b = -8$	3 $m = \frac{2}{3}$ ، $b = -3$ صيغةُ الميلِ والمقطعِ. $y = mx + b$ أعوِّضُ $\frac{1}{4}$ $y = \frac{2}{3}x + (-3)$ أُبسِّطُ $y = \frac{2}{3}x - 3$

2) أكتبُ معادلة المستقيمِ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ إذا عُلِمَ m ونقطةٌ يمرُّ بِها المستقيمُ

2 المارُّ بالنقطةِ (-1,0) وميلهُ $\frac{1}{2}$ أجدُ قيمةَ b في صيغةِ الميلِ والمقطعِ $y = mx + b$ أعوِّضُ (-1,0) و $m = \frac{1}{2}$ أُبسِّطُ .... في صيغةِ الميلِ والمقطعِ $y = mx + b$ أعوِّضُ b و m $y = ...$ أُبسِّطُ	1 المارُّ بالنقطةِ (2,6) وميلهُ 4 أجدُ قيمةَ b في صيغةِ الميلِ و المقطعِ $y = mx + b$ أعوِّضُ (2,6) وm=4 $6 = 4(2) + b$ أُبسِّطُ $6 = 8 + b$ أطرحُ منْ كلا الطرفينِ 8 $-8 \quad -8$ أُبسِّطُ $-2 = b$ في صيغةِ الميلِ والمقطعِ $y = mx + b$ أعوِّضُ b و m $y = 4x + (-2)$ أُبسِّطُ $y = 4x - 2$

3) أكتبُ معادلة المستقيمِ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ إذا عُلمَتْ نقطتان يمرُّ بِهما المستقيمُ

1 (4,7) ,(2,3)

أجدُ m منْ صيغةِ الميلِ

(2 , 3)
(4 , 7)
- , -2

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

أعوِّضُ وأُبسِّطُ $m= \frac{-4}{-2} =2$

أجدُ b أعوِّضُ m وإحدى النقطتيْنِ، ولتكنْ (3,2)

صيغةُ الميلِ والمقطعِ $y = m x + b$

أعوِّضُ $3 = 2(2) + b$

أُبسِّطُ $3 = 4 + b$

أطرحُ 4 منْ كلا الطرفيْنِ $3 -4 = 4 – 4 + b$

أُبسِّطُ $-1 = b$

أعوِّضُ m=2 و b=-1

صيغةُ الميلِ والمقطعِ $y = m x + b$

أعوِّضُ $y = 2 x + (-1)$

أُبسِّطُ $y= 2x – 1$

2 (3,1) ,(5,-2)

أجدُ m منْ صيغةِ الميلِ

(5 , -2)
(3 , 1)
(…, …)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

أعوِّضُ وأُبسِّطُ $m = \frac{\square}{\square} = ...$

أجد b أعوِّضُ m وإحدى النقطتيْنِ، ولتكنْ (.. , ..)

صيغةُ الميلِ والمقطعِ $y = m x + b$

أعوِّضُ ....

أُبسِّطُ ....

أحلُّ المعادلةَ أجدُ b

أعوِّضُ m=.... و b=…

صيغةُ الميلِ والمقطعِ $y= m x + b$

أعوِّضُ $y=$ …. x + …..

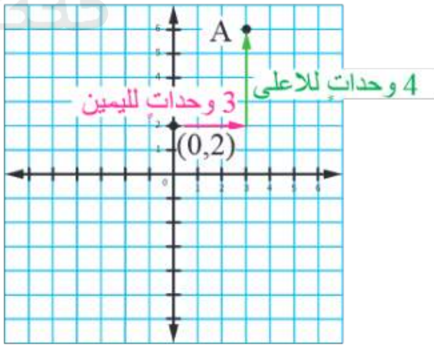
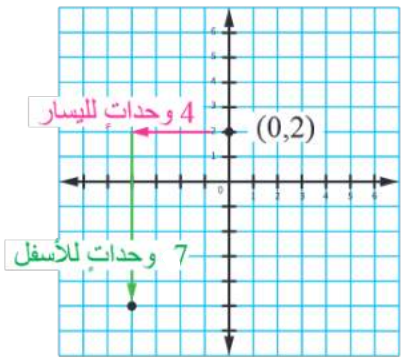
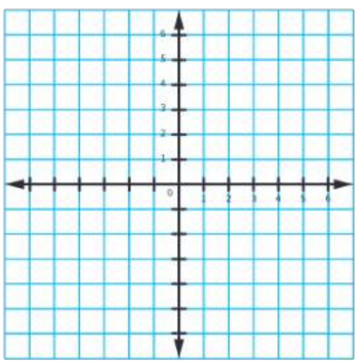
أُبسِّطُ y=………………

نشاطُ 3 الانسحابُ في المستوى الإحداثيِّ

الانسحابُ في المستوى الإحداثيِّ للزوجِ المرتبِ (x,y)

- أفقيٌّ
  - إلى اليمينِ (أجمعُ)
  - إلى اليسارِ(أطرحُ)
- رأسيٌّ
  - إلى الأعلى (أجمعُ)
  - إلى الأسفلِ (أطرحُ)

1) أجدُ إحداثياتِ النقطةِ (0,2) التي أُجري عليْها انسحابٌ:

	1 3 وحداتٍ إلى اليمينِ، و4 وحداتٍ إلى الأعلى A (3 , 6)
	2 4 وحداتٍ إلى اليسارِ، و7 وحداتٍ إلى الأسفلِ B(-4 , -5)
	3 3 وحداتٍ إلى اليمينِ، وحدتانِ إلى الأسفلِ. C (……., …….)

نشاطُ 3 تمثيلُ معادلةِ المستقيمِ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ بيانيًّا

أتذكرُ

- عندَ المقطعِ y تكونُ $x=0$ وتقعُ النقطةُ (0,y) على محورِ y
- أقلُّ عددٍ ممكنٍ منَ النقاطِ لرسمِ مستقيمٍ هوَ نقطتانِ يمرُّ بهما.

أمثِّلُ المعادلاتِ الآتيةَ بيانيًا باستعمالِ الميلِ والمقطعِ y

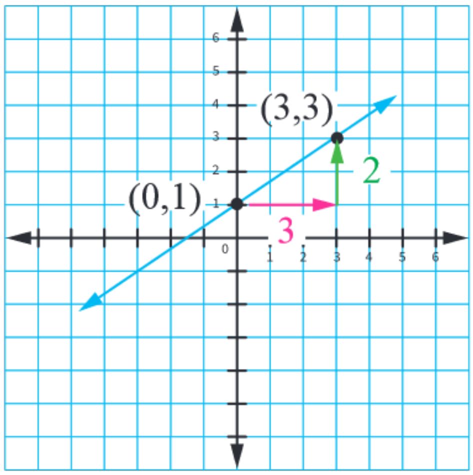
1) أحددُ المقطعَ y وأعيِّنُ النقطةَ (0,b).

2) أجدُ m لأحددَ نقطةً بالإزاحةِ الأفقيةِ والرأسيةِ وأبدأُ منَ (0 , b).

3) أصلُ بينَ النقطتينِ بخطٍّ مستقيمٍ.

1 $y = \frac{2}{3}x + 1$

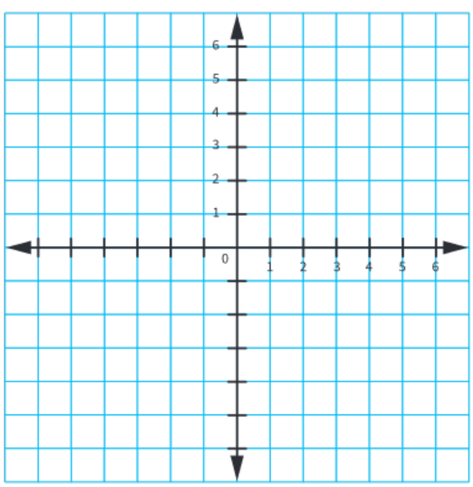
الإزاحةُ الرأسيةُ	الإزاحةُ الأفقيةُ	الميلُ m	المقطعُy	معادلةُ المستقيمِ
وحدتانِ إلى الأعلى	3 وحداتٍ إلى اليمينِ	$m = \frac{2}{3}$	$b = 1$ $(0, 1)$	$y = \frac{2}{3}x + 1$



أبدأُ أولًا بالإزاحةِ الأفقيةِ، ومنْ ثمَّ بالإزاحةِ الرأسيةِ

2 $y = 2x - 3$

الإزاحةُ الرأسيةُ	الإزاحةُ الأفقيةُ	الميلُ m	المقطعُy	معادلةُ المستقيمِ
....	....	m	b (..... ,.....)	$y = 2x - 3$



أتذكرُ

يمكنُ كتابةُ العددِ 2 على صورةِ $\frac{2}{1}$

نشاطُ 4 كتابةُ معادلةِ المستقيمِ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ الممثلةِ بيانيًّا

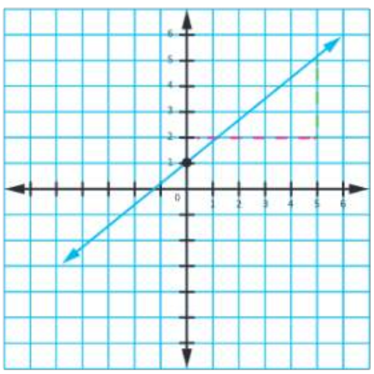
1) أجدُ المقطعَ y (b) منْ نقطةِ تقاطعِ المستقيمِ معَ محورِ y

2) أجدُ الميلَ (m) أختارُ أيَّ نقطتيْنِ على المستقيمِ، وأجدُ التغيرَ الرأسيَّ والأفقيَّ بينَهُما

3) أعوِّضُ الميلَ m والمقطعَ y في معادلةِ المستقيمِ y = mx + b

1) أكتبُ معادلةَ المستقيمِ الممثَّلةَ بيانيًا بصيغةِ الميلِ والمقطعِ

1



خطوةُ (1) أجدُ المقطعَ y وهو $b = 1$

خطوةُ (2) أختارُ أيَّ نقطتيْنِ تقعانِ على المستقيمِ مثلَ: (1,2),(5,5)

التغيرُ الرأسيُّ (عددُ الخطواتِ الرأسيةِ) = 3

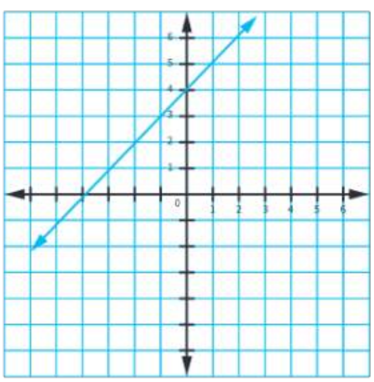
التغيرُ الأفقيُّ (عددُ الخطواتِ الأفقيةِ) = 4

$$\text{الميلُ } m = \frac{\text{التغيرَ الرأسيَّ}}{\text{التغيرِ الأفقيِّ}} = \frac{3}{4}$$

خطوةُ (3) أعوِّضُ $y = mx + b$

$$y = \frac{3}{4}x + 1$$

2



خطوةُ (1) أجدُ المقطعَ y وهوَ.......... = b

خطوةُ (2) أختارُ أيَّ نقطتيْنِ على الخطِّ المستقيمِ ....

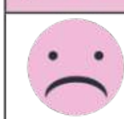
التغيرُ الرأسيُّ (عددُ الخطواتِ الرأسيةِ) = ...

التغيرُ الأفقيُّ (عددُ الخطواتِ الأفقيةِ) = ...

الميلُ m = ...

خطوةُ (3) أعوِّضُ $y = mx + b$

....

أضعُ ✓ أسفلَ الصورةِ التي تمثِّلُ تعلُّمي		
		

4 معادلةُ المستقيمِ بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ

النتاجاتُ: • أكتبُ معادلةَ المستقيمِ بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ، وأمثِّلُها بيانيًّا.

نشاطُ 1 كتابةُ معادلةِ المستقيمِ بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ

تعلَّمتُ في الدرسِ السابقِ كتابةَ معادلةِ المستقيمِ بصيغةِ الميلِ والمقطَعِ؛ حيثُ إنَّ المقطعَ y يقعُ على محورِ.........، والآنَ ماذا لوْ كانَتِ النقطةُ (x , y) لا تقعُ على أحدِ المحوريْنِ؟

معادلةُ المستقيمِ بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ $y - y_1 = m (x - x_1)$
حيثُ m: الميلُ
(x_1, y_1) : نقطةٌ يمرُّ بِها المستقيمُ

أولاً: كتابةُ معادلةِ المستقيمِ بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ؛ إذا عُلمِتَ (ميلُهُ ونقطةٌ معطاةٌ)

أجدُ معادلةَ المستقيمِ في ما يأتي:

1 ميلُهُ يساوي (3) وهوَ مارٌّ بنقطةِ (3,4)

$m = 3 \quad , \quad (x_1, y_1) = (3 , 4)$

صيغةُ الميلِ ونقطةٌ $y - y_1 = m (x - x_1)$

أعوِّضُ $y - 4 = 3 (x - 3)$

2 ميلُهُ يساوي -2 ويمرُّ بالنقطةِ (0 , 2).

$m = -2 , \quad (x_1, y_1) = (0 ,2)$

صيغةُ الميلِ ونقطةٌ $y - y_1 = m (x - x_1)$

أعوِّضُ $x = 0 \quad m = -2 \quad y = 2$

أجعلُ y موضوعًا للقانونِ $y - 2 = -2 (x - 0)$

$y =$ ....

ألاحظُ منَ النقطةِ التي يمرُّ بِها المستقيمُ أنَّ المقطعَ $y = 2$

هلْ يمكنُ القولُ إنَّ معادلةَ المستقيمِ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ هيَ حالةٌ خاصةٌ مِنْ معادلةِ المستقيمِ بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ؟ ....

3 ميلُهُ يساوي $\frac{3}{4}$ ومارٌّ بنقطةِ (3,4)

$m =$ ..... , $(x_1, y_1) =$ ....

صيغةُ الميلِ ونقطةٌ ....

أعوِّضُ ....

ثانيا :كتابةُ معادلةِ المستقيمِ بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ (المارِّ بنقطتيْنِ)

1) أجدُ الميلَ m المارَّ بالنقطتيْنِ ← 2) أختارُ إحدى النقطتيْنِ لتكونَ (x_1,y_1) ← 3) أعوِّضُ في صيغةِ الميلِ ونقطةٍ

1 مارٌّ بالنقطتيْنِ $(2, 5)$, $(-1 , 4)$

صيغةُ الميلِ

$$m= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{(-1 , 4) \quad (2 , 5)}{-3 , -1}$$

$$m= \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

أختارُ إحدى النقطتيْنِ $(x_1, y_1) = (2 , 5)$

صيغةُ الميلِ ونقطةٍ $y - y_1 = m \ (x - x_1)$

أعوِّضُ $y - 5 = \frac{1}{3}(x - 2)$

2 مارٌّ بالنقطتيْنِ $(3, 5)$, $(-4 , 6)$

صيغةُ الميلِ

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

m = ...

أختارُ إحدى النقطتيْنِ (x_1, y_1) = (....., ...)

صيغةُ الميلِ ونقطةٍ ....

أعوِّضُ ....

نشاطٌ 2 تمثل معادلةِ المستقيم بصيغةِ الميلِ والمقطعِ الممثلةِ بيانيًّا

خطوةُ (1)	خطوةُ (2)	خطوةُ (3)
أستخرجُ منَ المعادلةِ (x_1,y_1) , m	أعيِّنُ النقطةَ (x_1,y_1) على المستوى الإحداثي وباستعمالِ الميلِ أجري انسحابًا لتعيينِ نقطةٍ أخرى	أرسمُ مستقيمًا يمرُّ بالنقطتيْنِ.

أمثلُ معادلةَ المستقيمِ في ما يأتي

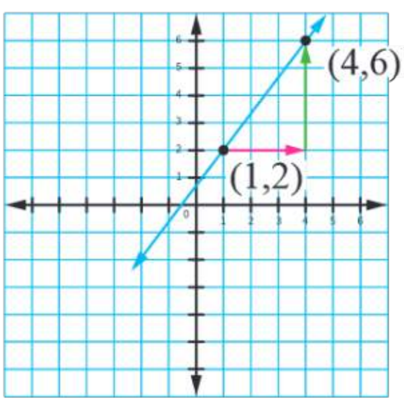
1 $y - 2 = \frac{4}{3}(x - 1)$

$(x_1, y_1) = (1 , 2)$

$m = \frac{4}{3}$

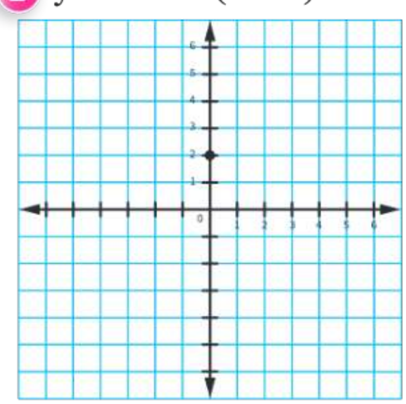
إزاحةُ 3 وحداتِ لليمينِ, 4 وحداتٍ للأعلى

لتكوِّنَ النقطةَ $(4 , 6)$



ألاحظُ أنَّ مقامَ الميلِ هوَ الإزاحةُ إلى اليمينِ أوْ إلى اليسارِ، وبسطُ الميلِ هوَ الإزاحةُ إلى الأعلى وإلى الأسفلِ

2 $y - 5 = -3 (x + 2)$



أتذكرُ

$x + 2 = x - -2$

(x_1, y_1) = (…. , ….)

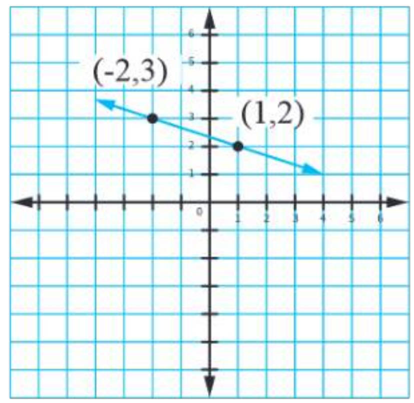
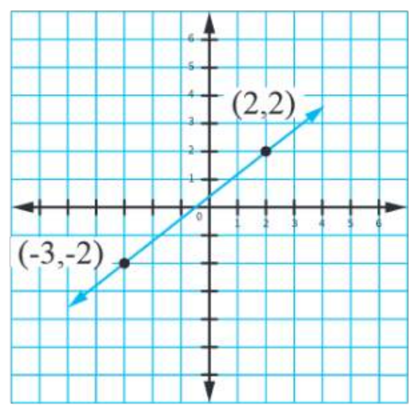
m = ….

إزاحةُ .... بمقدارِ ...... و........ بمقدارِ ....

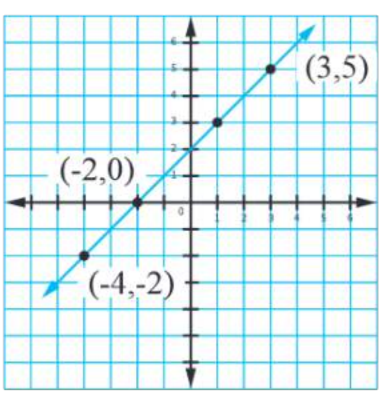
نشاطُ 4 كتابةُ معادلةِ المستقيمِ الممثلةِ بيانيًا بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ

خطوةُ (1) أجدُ الميلَ منْ نقطتيْنِ على المستقيمِ .

خطوةُ (2) أعوّضُ الميلَ وإحدى النقطتيْنِ في $y - y_1 = m(x - x_1)$

التمثيلُ البيانيُّ	معادلةُ المستقيمِ بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ
1 	أجدُ الميلَ (1,2) (-2,3) 3 , -1 صيغةُ الميلِ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ أعوّضُ $m = \frac{-1}{3}$ لتكنْ $(x_1,y_1) = (1,2)$ صيغةُ الميلِ ونقطةٍ $y - y_1 = m(x - x_1)$ أعوّضُ $y - 2 = \frac{-1}{3}(x-1)$
2 	أجدُ الميلَ صيغةُ الميلِ .... أعوّضُ .... لتكنْ $(x_1,y_1) = (..... ,.....)$ صيغةُ الميلِ ونقطةٍ .... أعوّضُ ....

نشاطُ 5 تطبيقاتٌ منَ الحياةِ



أولًا: العلاقةُ بينَ ميلِ الخطِّ المستقيمِ وأي نقطتين عليه.

يبيِّنُ الشكلُ المجاورُ خطًّا مستقيمًا يمرُّ بالنقاطِ الممثلةِ

أجدُ ميلَ المستقيمِ مستخدمًا النقاطَ الآتيةَ:

ماذا تلاحظُ؟ ....

(3,5) (1,3)	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 3}{3 - 1} = \frac{2}{2} = 1$
(1,3) (-2,0)	$m = \frac{3 - 0}{1 - -2} = \frac{3}{3} = 1$
(-2,0) (-4,-2)	m =......................

أتذكرُ

$\frac{3}{4} = \frac{9 \div 3}{12 \div 3}$ تُسمّى كسورًا متكافئةً

هذا يعني أنَّ العلاقةَ بينَ هذهِ النقاطِ خطيةٌ (أيْ أنَّها تقعُ على خطٍّ مستقيمٍ واحدٍ)، حيثُ إنَّ ميلَ المستقيمِ بينَ الأزواجِ المرتبةِ ثابتٌ.

ثانيًا: تحديدُ نوعِ العلاقةِ الخطيةِ؛ بناءً على معدلِ التغيرِ، وكتابتُها

يبيِّنُ الجدولُ المجاورُ العلاقةَ بينَ ارتفاعِ الطائرةِ عن سطحِ المدرجِ لحظةَ انطلاقِها والزمنِ.

الارتفاعُ (m)	الزمنُ (s)
200	10
400	20
800	30
1000	50

أبيِّنُ أنَّ العلاقةَ بينَ الارتفاعِ معَ الزمنِ خطيةٌ

أجدُ معدلَ التغيرِ بينَ كلِّ زوجيْنِ متتاليَيْنِ

التبسيطُ	معدلُ التغيرِ
20	$\frac{200}{10}$
20	$\frac{400}{20}$
20	$\frac{200}{10}$

	الارتفاعُ (m)	الزمنُ (s)	
	200	10	
200	400	20	10
400	800	40	20
200	1000	50	10

معدلُ التغيرِ ثابتٌ، إذنْ العلاقةُ ....

أكتبُ معادلةً خطيةً بصيغةِ الميلِ ونقطةٍ؛ يمكنُ استعمالُها لإيجادِ ارتفاعِ الطائرةِ عندَ لحظةٍ معينةٍ منْ إقلاعِها عنْ سطحِ الأرضِ.

الميلُ = معدلَ التغيرِ = 20

النقطةُ: أيةُ نقطةٍ مَن الجدولِ، ولتكنْ $(x_1,y_1) = ($ ....,.... $)$

صيغةُ الميلِ ونقطةٍ $y - y_1 = m(x - x_1)$

أعوِّضُ ....

أقيِّمُ أدائي بوضعِ ✓		