المادة التعليمية للبرنامج العلاجي

المرحلة التحضيرية

للعام 2022-2023

مبحث الرياضيات

الصف: الحادي عشر الأدبي

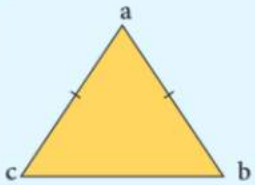
المصدر: مادة التعلم المبني على المفاهيم والنتاجات الأساسية لمبحث الرياضيات

رابعًا: حلُّ المعادلةِ الخطِّيَّةِ

ماذا سأتعلّمُ؟

- حلُّ المعادلةِ الخطِّيَّةِ.

لوحةٌ منَ الكرتونِ على شكلِ مثلّثٍ متساوي الساقينِ abc، حيثُ ab = ac وكانَ طولُ ab = 3x + 2 وطولُ ac = 5x - 4. أجدُ قيمة x ومجموع طوليْهما.



مثالٌ: أجدُ حلَّ المعادلةِ الخطِّيَّةِ الآتيةِ:

$3(2x-4)=4x+6$

أُوزِّعُ الضربَ على الجمعِ	$6x - 12 = 4x + 6$
	$6x - 12 = 4x + 6$
أطرحُ منْ طرفي المعادلةِ $4x$	$-4x \quad -4x$
ناتجُ الطرحِ	$2x - 12 = 6$
	$2x - 12 = 6$
أجمعُ إلى طرفي المعادلةِ الناتجةِ 12	$+12 \quad +12$
ناتجُ الجمعِ	$2x = 18$
أقسِمُ طرفي المعادلةِ الناتجةِ على 2	$\frac{2x}{2} = \frac{18}{2}$
ناتجُ القسمةِ	$x = 9$
	قيمةُ x تُمثِّلُ حلَّ المعادلةِ
أتحقَّقُ منْ صحَّةِ الحلِّ	$3(2 \times 9 - 4) = 4 \times 9 + 6$
أُعوِّضُ قيمة $x = 9$ في المعادلةِ	$3(18 - 4) = 36 + 6$
	$3 \times 14 = 42$
	$42 = 42$
	بما أنَّ الطرفينِ متساويانِ؛ فالحلُّ صحيحٌ.

أحاولُ

أجدُ حلَّ المعادلاتِ الآتيةِ:

a) $4(3y - 1) = 7y + 6$

b) $2(4x + 3) = 4(x - 1)$

أوّلًا: الاقترانُ

ماذا سأتعلّمُ؟

- أتعرَّفُ إلى الاقترانِ الخطّيِّ.
- أُعبِّرُ عنِ الاقترانِ الخطّيِّ بطرائقَ مختلفةٍ، مثلِ جدولِ القِيَمِ، والمعادلةِ الجبريَّةِ.

تجارةٌ: يبيعُ تاجرٌ قطعًا منَ الملابسِ عنْ طريقِ العرضِ عبرَ موقعٍ إلكترونيٍّ، معَ إمكانيَّةِ التوصيلِ إلى المشتري في محلِّ إقامتِهِ. إذا كانَ ثمنُ إحدى قطعِ الملابسِ 10 دنانيرَ، وتكلفةُ التوصيلِ 3 دنانيرَ، فَما تكلفةُ شراءِ 6 قطعٍ منْ هذا النوعِ؟

عددُ القطعِ x	1	2	3	4
التكلفةُ y	13	23	33	43

الاقترانُ: علاقةٌ تربطُ كلَّ قيمةٍ منَ المُدخلاتِ بقيمةٍ واحدةٍ فقطْ منَ المُخرجاتِ.

عندَ شراءِ قطعةٍ منَ الملابسِ؛ فإنَّ تكلفتَها ستكونُ ثمنَ القطعةِ الواحدةِ بالإضافةِ إلى تكلفةِ التوصيلِ $10 + 3 = 13$، أمّا إذا كانتا قطعتَينِ؛ فأضربُ ثمنَ القطعةِ في 2، ثمَّ أجمعُ ثمنَ التوصيلِ $2 \times 10 + 3 = 23$

إذا افترضتُ أنَّ عددَ القطعِ x فإنَّ المبلغَ المدفوعَ سيكونُ عددَ القطعِ مضروبًا في ثمنِ الواحدةِ مِنْها، بالإضافةِ إلى تكلفةِ التوصيلِ $10x + 3$. تُسمّى العلاقةُ بينَ عددِ القطعِ منَ الملابسِ x والتكلفةِ y الاقترانَ، وتُسمّى $y=10x+3$ قاعدةَ الاقترانِ، وتتغيَّرُ المُخرجةُ y بتغيُّرِ المُدخلةِ x.

ويُمكنُني التعبيرُ عنِ الاقترانِ بطرائقَ مختلفةٍ، مثلِ جدولِ القِيَمِ، والمعادلةِ الجبريَّةِ، على صورةِ مخطَّطٍ سهميٍّ.

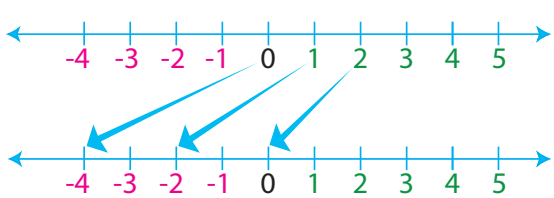
مثالٌ: أُكوِّنُ جدولَ قِيَمٍ للاقترانِ $y= 2x-4$ ، ثمَّ أُمثِّلُها بمخطَّطٍ سهميٍّ.

أُلاحظُ أنَّ قاعدةَ الاقترانِ هيَ الضربُ في العددِ 2، ثم طرحُ العددِ 4

لتكوينِ جدولِ القِيَمِ، أختارُ قِيَمَ x (المُدخلاتِ)، ثمَّ أُطبِّقُ علَيْها قاعدةَ الاقترانِ؛ لأجدَ قِيَمَ y (المُخرجاتِ).

المُدخلةُ x	المُخرجةُ y
0	$2 \times 0 - 4 = -4$
1	$2 \times 1 - 4 = -2$
2	$2 \times 2 - 4 = 0$

مخطَّطٌ سهميٌّ



مثالٌ: يُبيِّنُ الجدولُ المجاورُ قِيَمَ المُدخلاتِ والمُخرجاتِ لاقترانٍ ما.

المُدخلةُ x	المُخرجةُ y
-1	5
0	8
1	11
2	14

1) أصفُ بالكلماتِ قاعدةَ الاقترانِ.

بِما أنَّ المُدخلاتِ متباعدةٌ بمقدارِ 1، والمُخرجاتِ متباعدةٌ بمقدارِ 3؛ فإنَّ

الجزءَ الأوَّلَ منَ القاعدةِ هوَ الضربُ بـ 3 $3x$

وكيْ تكونَ صورةُ العددِ 0 هيَ 8، يجبُ أنْ تحتويَ القاعدةُ على جمعِ العددِ 8

إذْ إنَّ $3 \times 0 + 8 = 8$، (الضربُ بـ 3، ثمَّ جمعُ 8). نتأكَّدُ منَ القاعدةِ بتطبيقِها على مُدخلاتٍ أُخرى.

2) أكتبُ قاعدةَ الاقترانِ بصورةِ معادلةٍ $y=3x+8$.

أُحاولُ

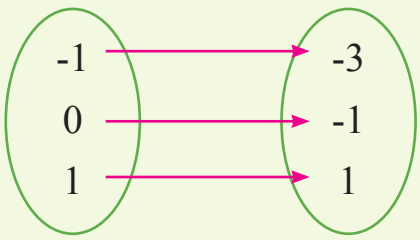
1) أُكملُ جدولَ القِيَمِ الآتي للاقترانِ $y=5x+11$

المُدخلةُ x	المُخرجةُ y
0	
1	
2	
3	

2) بالنظرِ إلى المخطَّطِ السهميِّ الآتي:

أ) أصفُ قاعدةَ الاقترانِ.

ب) أكتبُ قاعدةَ الاقترانِ.



ثانيًا: تمثيلُ الاقترانِ الخطّيِّ بيانيًّا

ماذا سأتعلّمُ؟

- أرسمُ الاقترانَ الخطّيَّ على المستوى الإحداثيِّ.

إذا كانتْ لديَّ المعادلةُ $5x+y=3$ فكيفَ يُمكنُني أنْ أُحدِّدَ إذا كانتِ النقطةُ $(2,3)$ هيَ إحدى حلولِ المعادلةِ أمْ لا؛ منْ دونِ حسابِها؟

معلومةٌ

النقاطُ جميعُها التي تقعُ على منحنى الاقترانِ، هيَ حلولٌ لمعادلتِهِ.

كيفَ أعرفُ إذا كانتِ النقطةُ $(2, 3)$ تقعُ على منحنى الاقترانِ $5x+y = 3$؟

كيْ أستطيعَ أنْ أُحدِّدَ ذلكَ، لا بدَّ لي منْ معرفةِ موقعِ الاقترانِ على المستوى الإحداثيِّ، وذلكَ بالخطواتِ الآتيةِ:

1) أُكوِّنُ جدولًا منْ 3 أعمدةٍ، بحيثُ يكونُ عمودٌ للمتغيِّرِ x، وعمودٌ للمتغيِّرِ y، وعمودٌ للزوجِ المرتَّبِ الناتجِ.

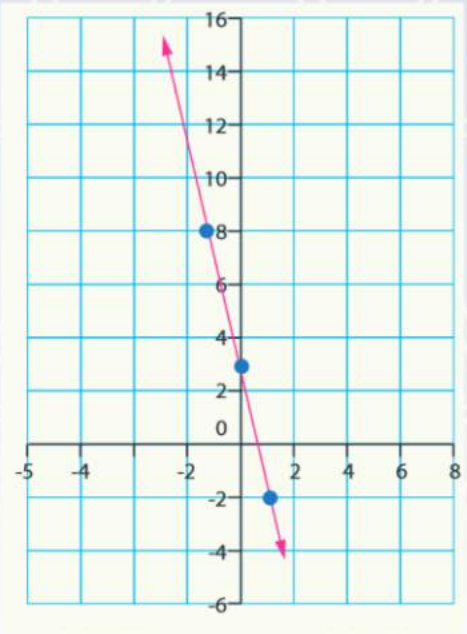
2) افترضُ 3 قِيَمٍ للمتغيِّرِ x بوصفِها مُدخلاتٍ، وأجدُ قيمةَ y بوصفِها مُخرجاتٍ لها، ثمَّ أكتبُ الزوجَ المرتَّبَ الناتجَ.

x	$y=3-5x$	(x, y)
1	**-2**	**(1,-2)**
0	**3**	**(0,3)**
-1	**8**	**(-1,8)**

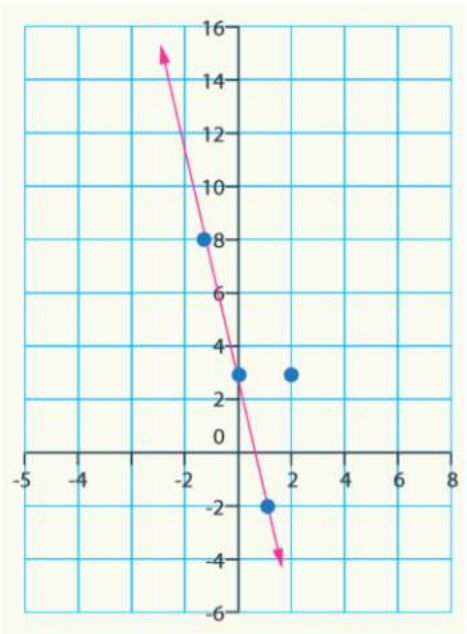
3) أُمثِّلُ الأزواجَ المرتَّبةَ على المستوى الإحداثيِّ، وأصِلُ بينَها بخطٍّ مستقيمٍ.

معلومةٌ

يُسمّى الاقترانُ الخطّيُّ هذا الاسمَ لأنَّهُ خطٌّ مستقيمٌ.



بعدَ أنْ حدَّدتُ موقعَ الاقترانِ، يُمكنُني الآنَ أنْ أُحدِّدَ النقطة المطلوبة على المستوى الإحداثيِّ؛ لأعرِفَ إذا كانتْ حلًّا للمعادلةِ أمْ لا.



أُلاحِظُ منَ الرسمِ أنَّ النقطة (3 , 2) لا تقعُ على منحنى الاقترانِ؛ إذنْ: هيَ ليستْ حلًّا لمعادلتِهِ.

أُحاولُ

1) أرسمُ الاقترانَ $y=2x+1$ على المستوى الإحداثيِّ.
2) هلِ النقطةُ (4 , 5) تقعُ على منحنى الاقترانِ؟

ثالثًا: تحليلُ العبارةِ التربيعيَّةِ

ماذا سأتعلَّمُ؟

- العبارةُ التربيعيَّةُ.
- تحليلُ العبارةِ التربيعيَّةِ.

لوحـةٌ مستطيلةُ الشكلِ مِساحتُها بالوحداتِ المربَّعـةِ (س^{٢} + ٤ س + ٣). إذا كانَ طولُها (س + ٣) وحدةَ طولٍ؛ فما عرضُها؟

يُسمَّى المقدارُ **أ س^{٢} + ب س + جـ**، أ ≠ ٠ ، أ ، ب ، ج أعدادٌ حقيقيَّةٌ؛ **العبارةَ التربيعيَّةَ**.

تحليلُ العبارةِ التربيعيَّةِ

- أوَّلًا: إذا كانَ معاملُ س^{٢} ، أ = ١
- ثانيًا: إذا كانَ معاملُ س^{٢} ، أ ≠ ١

مثالٌ (١)

أُحلِّلُ كلًّا ممّا يأتي:

١) س^{٢} + ٥س + ٦ ٢) س^{٢} - ١١س + ٢٤ ٣) س^{٢} + ٣ س – ٤

الحلُّ:

١) س^{٢} + ٥ س + ٦

= (س + ٢) (س + ٣) البحثُ عنْ عددَينِ حاصلُ ضربِهما ٦، وناتجُ جمعِهما ٥ (هما: ٢ و٣).

٢) س^{٢} - ١١س + ٢٤

= (س – ٣) (س – ٨) البحثُ عنْ عددَينِ حاصلُ ضربِهما ٢٤، وناتجُ جمعِهما -١١ (هما: -٣، -٨).

٣) س^{٢} + ٣ س – ٤ البحثُ عنْ عددَينِ حاصلُ ضربِهما -٤ وناتجُ جمعِهما ٣ (هما: -١، ٤).

= (س – ١) (س + ٤)
- س
+ ٤س
+ ٣س

للتأكُّدِ من الحدِّ الأوسطِ؛ نضربُ الحدَّينِ على الطرفينِ والحدَّينِ الأوسطينِ ونجمعُهُما (- س + ٤ س = ٣ س).

أحاولُ أُحلِّلُ كلًّا ممّا يأتي:

١) $س^{٢} + ٧ س + ١٢$ ٢) $س^{٢} - ٨ س + ١٦$ ٣) $س^{٢} - ٤ س - ٦٠$

مثالٌ (٢)

أُحلِّلُ كلًّا ممّا يأتي:

١) $٣ س^{٢} + ٤ س + ١$ ٢) $٢ س^{٢} - ٧ س - ٤$

الحلُّ:

١) $٣س^{٢} + ٤ س + ١$

$= (٣ س + ١)(س + ١)$

$+٣س + س$

تحليلُ $٣ س^{٢}$ إلى عواملِها وتحليلُ الحدِّ المطلقِ إلى عواملِهِ؛ معَ مراعاةِ إشاراتِ الحدودِ.

أتأكَّدُ من التحليلِ؛ بضربِ الحدَّينِ في الطرفينِ والحدَّينِ الأوسطينِ ثمَّ أجمعُهُما.

٢) $٢ س^{٢} - ٧س - ٤$

$= (٢ س + ١)(س - ٤)$

$١ \times س$ ، $٢س \times - ٤$

للتأكُّدِ من الحدِّ الأوسطِ: (حاصلُ ضربِ الطرفينِ + حاصلِ ضربِ الوسطينِ = الحدُّ الأوسط).

أحاولُ أُحلِّلُ ما يأتي إلى عواملِهِ:

١) $٢ س^{٢} + ١٠ س + ٨$ ٢) $٥ س^{٢} + ٤٥ س + ٧٠$

أختبرُ تعلُّمي

١) أُحلِّلُ كلًّا ممّا يأتي، وأجدُ البطاقةَ الصحيحةَ:

أ) $س^{٢} + ١٤س - ٣٢$

$(س + ٨)(س - ٤)$	$(س + ٢)(س - ١٦)$	$(س + ١٦)(س - ٢)$	$(س + ٨)(س + ٤)$

ب) $س^{٢} + ١١س + ٢٨$

$(س + ٧)(س + ٤)$	$(س + ٢)(س + ١٤)$	$(س + ١٤)(س + ٢)$	$(س + ٤)(س - ٧)$

جـ) $٦ س^{٢} - س - ٢$

$(٢س + ١)(٣س - ٢)$	$(٢س - ٣)(٢س + ١)$	$(٢س - ١)(٣س + ٢)$	$(٦س - ١)(س - ٢)$

٢) أجدُ ٣ قِيَمٍ للرمزِ (ك) لتُصبحَ العبارةُ التربيعيَّةُ الآتيةُ قابلةً للتحليلِ إلى العواملِ، ثمَّ أُحلِّلُ كلَّ حالةٍ:

$س^{٢} - ٣ س + ك$

٣) أكتبُ تعبيرًا جبريًّا يُمثِّلُ محيطَ لوحِ خلايا شمسيَّةٍ مستطيلةِ الشكلِ، مِساحتُها $(س^{٢} + ٢٤س - ٨١)$ وحدةً مربَّعةً.

٤) ما قِيَمُ (ك) التي تجعلُ تحليلَ كلٍّ ممّا يأتي صحيحًا:

أ) $س^{٢} + ك س - ١٩ = (س - ١٩)(س + ١)$.

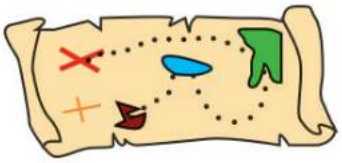
ب) $٢ س^{٢} + ك س - ٢١ = (٢ س - ٣)(س + ٧)$.

٥) أنا أحدُ عواملِ العبارةِ التربيعيَّةِ $٥ س^{٢} - ٢١ س + ٤$، إذا كان أحد العوامل $(س - ٤)$؛ فما العاملُ الآخرُ؟

لعبة

لعبةُ المتاهةِ

لا تنظرْ إلى الخلفِ، ولا تُعدِ الطريقَ مرَّتَينِ.



تحليلُ المقدارِ
س^{٢}+١٠س+٢٤

(س+ ٤)(س+٦)

تحليلُ المقدارِ
س^{٢}-٧س-٣٠

(س-١٠)(س+٣)

تحليلُ المقدارِ
٣م^{٢}+١٤م-٥

(٣م-١)(م+٥)

(س- ٤)(س+٦)

(س+٣)(س+٨)

(س+١٠)(س-٣)

(٢م+١)(م-٥)

تحليلُ
المقدارِ
س^{٢}-٣س+٢

(٣م-١)(م+١)

٥ ص^{٢}-١

تحليلُ المقدارِ
٢٧م^{٢}-١

تحليلُ المقدارِ
٥ص^{٢}- ص

٥ص(ص-١)

(س-١)

(س+١)(س-١)

(س-٢)(س-١)

١+٣م

تحليلُ المقدارِ
س^{٢}+١٥س+٢٦

المقدار في أبسط
ص + ١
ص^{٣} + ١

١
ص^{٢}- ص + ١

ثانيًا: حلُّ المعادلةِ التربيعيَّةِ

ماذا سأتعلَّمُ؟
- المعادلةُ التربيعيَّةُ.
- حلُّ المعادلةِ التربيعيَّةِ.
- القانونُ العامُّ لحلِّ المعادلةِ التربيعيَّةِ.
- مميِّزُ العبارةِ التربيعيَّةِ.

مربَّعانِ يزيدُ طولُ أحدِهما على الثاني بالسنتيمتراتِ بمقدارِ ٣، وكانَ مجموعُ مِساحتِهما بالسنتيمتراتِ المربَّعةِ ٢٦٩
ما طولُ ضلعِ كلٍّ منْهُما؟

الصورةُ العامَّةُ **للمعادلةِ التربيعيَّةِ** بمتغيِّرٍ واحدٍ هيَ: أس^{٢} + ب س + جـ = ٠: أ، ب، جـ أعدادٌ حقيقيَّةٌ أ ≠ ٠

أمّا **حلُّ المعادلةِ** فهوَ إيجادُ قِيَمِ (س) التي تُحقِّقُ المعادلةَ، وتُسمّى جذورَ المعادلةِ. ويوجدُ عدَّةُ طرائقَ لحلِّ المعادلةِ التربيعيَّةِ.

حلُّ المعادلةِ التربيعيَّةِ بالتحليلِ إلى العواملِ:

خطواتُ حلِّ المعادلةِ التربيعيَّةِ بالتحليلِ:

١) أكتبُ المعادلةَ التربيعيَّةَ بالصورةِ العامَّةِ أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠

٢) أُحلِّلُ المعادلةَ التربيعيَّةَ إلى عواملِها الأوَّليَّةِ؛ بكتابتِها على شكلِ حاصلِ ضربِ عبارتَينِ خطِّيَّتَينِ.

٣) أستعملُ الخاصِّيَّةَ الصفريَّةَ.

٤) أحلُّ المعادلتَينِ الخطِّيَّتَينِ التي حصلتُ عليهما في الخطوةِ السابقةِ.

أتعلَّمُ

إذا كانَ أ، ب عددَينِ حقيقيَّينِ، وكانَ أ×ب = صفرًا؛ فإنَّ أ = صفرًا أوْ ب = صفرًا أوْ كلَيْهما يساوي صفرًا.

تُسمّى هذهِ الخاصِّيَّةُ **الخاصِّيَّةَ الصفريَّةَ**.

مثالٌ (١)

أحلُّ المعادلتَينِ الآتيتَينِ:

١) $س^{٢} - ٤ = ٥$ ٢) $س^{٢} + ٧ س - ٨ = ٠$

الحلُّ:

١) $س^{٢} - ٤ - ٥ = ٠$ كتابةُ المعادلةِ بالصورةِ العامَّةِ.

$س^{٢} - ٩ = ٠$

$(س - ٣)(س + ٣) = ٠$ تحليلُ المعادلةِ باستعمالِ الفرقِ بينَ مربَّعَينِ.

إمّا $س - ٣ = ٠$ ، ومنهُ $س = ٣$ استعمالُ الخاصّيَّةِ الصفريَّةِ.

أوْ $س + ٣ = ٠$ ، ومنهُ $س = -٣$

إذنْ: مجموعةُ الحلِّ هيَ: $\{٣ ، -٣\}$.

٢) $س^{٢} + ٧ س - ٨ = ٠$

$(س - ١)(س + ٨) = ٠$ البحثُ عنْ عددَينِ حاصلُ ضربِهما (-٨) ومجموعُهُما (+٧).

إمّا $س - ١ =$ صفر ، ومنهُ $س = ١$ باستعمالِ الخاصّيَّةِ الصفريَّةِ.

أوْ $س + ٨ = ٠$ ، ومنهُ $س = -٨$

مجموعةُ حلِّ المعادلةِ هيَ: $\{١ ، -٨\}$.

أحاولُ أجدُ حلَّ المعادلتَينِ الآتيتَينِ:

١) $س^{٢} + ٣ س + ٢ = ٠$ ٢) $س^{٢} - ٤ س - ٥ = ٠$

حلُّ المعادلةِ التربيعيَّةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ:

أتأمَّلُ المعادلاتِ الآتيةَ: $٢س^{٢} - ٤ س - ١ = ٠$، $س^{٢} - ٢ س - ١٠ = ٠$، $س^{٢} + ٣ س + ٧ = ٠$

سأجدُ صعوبةً في حلِّ هذهِ المعادلاتِ بالتحليلِ إلى العواملِ الأوَّليَّةِ؛ لذا، **أستعملُ القانونَ العامَّ لحلِّ المعادلةِ التربيعيَّةِ.**

أيُّ معادلةٍ تربيعيَّةٍ أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠، حيثُ أ، ب، جـ أعدادٌ حقيقيةٌ، أ ≠ ٠، يُمكنُني حلُّها باستعمالِ القانونِ العامِّ للمعادلةِ التربيعيَّةِ، وهو:

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$$

ويُسمّى المقدارُ ب^{٢} - ٤ أ حـ **مميِّزَ المعادلةِ التربيعيَّةِ** ويُرمزُ لهُ بالرمز Δ: ب^{٢} - ٤ أ جـ ≤ ٠ (لماذا؟)

أُلاحظُ أنَّ المميِّزَ يُمكنُ استعمالُهُ للكشفِ عنْ إمكانيَّةِ تحليلِ المعادلاتِ التربيعيَّةِ وتحديدِ عددِ الحلولِ الحقيقيَّةِ (إنْ وجدتْ).

إذا كانَ:

١) Δ > ٠ فإنَّ للمعادلةِ التربيعيَّةِ جذرَينِ حقيقيَّينِ مختلفَينِ.

٢) Δ < ٠ فإنَّهُ لا يوجدُ للمعادلةِ التربيعيَّةِ جذورٌ حقيقيَّةٌ.

٣) Δ = ٠ فإنَّ للمعادلةِ التربيعيَّةِ جذرًا حقيقيًّا مكرَّرًا هوَ س = $\frac{-ب}{٢أ}$

مثالٌ (٢)

أجدُ قيمةَ المميِّزِ للمعادلةِ التربيعيَّةِ ٣ س^{٢} – ٤ س = - ١٠، ثمَّ أتبيَّنُ إذا كانَ للمعادلةِ حلولٌ حقيقيَّةٌ.

الحلُّ:

٣ س^{٢} – ٤ س + ١٠ = ٠	كتابةُ المعادلةِ بالصورةِ العامَّةِ.
أ = ٣ ، ب = -٤ ، جـ = ١٠	تحديدُ معاملاتِ الحدودِ
Δ = ب^{٢} - ٤ أ جـ	كتابةُ مميِّزِ المعادلةِ التربيعيَّةِ.
= (-٤)^{٢} – ٤ × (٣) × (١٠)	تعويضُ قِيَمِ أ ، ب ، جـ.
= ١٦ – ١٢٠	
= - ١٠٤ المميِّزُ < ٠	

∴ لا يوجدُ حلولٌ حقيقيَّةٌ للمعادلةِ التربيعيَّة

أحاولُ أحلُّ المعادلةَ (س – ٣) ^{٢} – ٤٩ = ٠

أفكّرُ

هلْ للمعادلةِ س^{٢} = -٤ حلٌّ؟ لماذا؟

أختبرُ تعلُّمي

١) أحلُّ المعادلاتِ الآتيةَ:

أ) ٤ س^{٢} – ٢٥ = ٠ ب) ص^{٢} + ٦ = ٥ ص

٢) إذا كانتْ أ س^{٢} + ٤ س + ٣ = ٠، فأجدُ قيمةَ (أ) التي تجعلُ للمعادلةِ حلًّا وحيدًا.

٣) يُنتجُ مصنعٌ للحديدِ والصلبِ قطعةً على شكلِ متوازي مستطيلاتٍ أبعادُها بالسنتيمتراتِ: ٤، (س+٢)، (س+٢)، وحجمُها يُساوي ١٠٠ سم^{٣}. أجدُ قيمةَ (س).

٤) أحلُّ المعادلةَ ٣ س^{٢} + ٤ س – ١ = ٠

٥) ما العددُ الحقيقيُّ الذي ينقصُ مربَّعُهُ عنْ خمسةِ أمثالِهِ بمقدارِ ٤؟

٦) حلَّتْ بيانُ المعادلةَ (س + ١)^{٢} = ١٠٠ كالآتي:

(س + ١)^{٢} = ١٠٠

بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفَينِ

س + ١ = ١٠

س = ٩

أُبيِّنُ الخطأَ الذي وقعتْ فيهِ.

أوَّلًا: الاقترانُ التربيعيُّ

ماذا سأتعلَّمُ؟
- الاقترانُ التربيعيُّ.
- تمثيلُ الاقترانِ التربيعيِّ بيانيًّا.
- خصائصُ الاقترانِ التربيعيِّ.

رمتْ لاعبةٌ كرةً فاتَّخذتْ مسارًا وفقَ العلاقةِ ل = ٢٠ن – ٥ن^{٢} حيثُ (ن) الزمنُ بالثواني، (ل) ارتفاعُ الكرةِ بالأقدامِ.
ما أقصى ارتفاعٍ ستصلُ إليهِ الكرةُ؟

تعلمتُ سابقًا الاقترانَ الخطِّيَّ، وسأتعلَّمُ الاقترانَ التربيعيَّ.

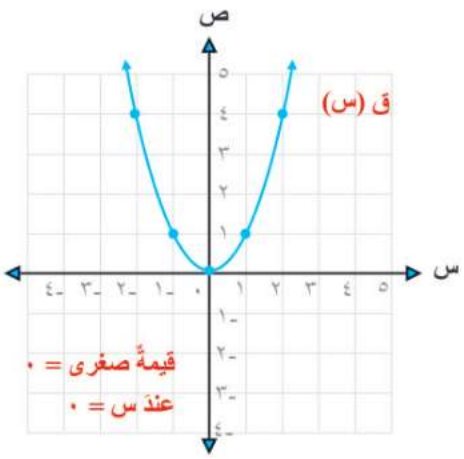
الاقترانُ التربيعيُّ اقترانٌ على الصورةِ:

ق (س) = أس^{٢} + ب س + جـ ، حيثُ أ، ب ، جـ أعدادٌ حقيقيَّةٌ، أ ≠ صفرًا، وتُسمّى **الصورةَ العامَّةَ للاقترانِ التربيعيِّ.**

أُلاحظُ في ما يأتي التمثيلاتِ البيانيَّةَ لاقتراناتٍ تربيعيَّةٍ، وأملأُ الفراغَ أمامَ كلِّ تمثيلٍ:

الاقترانُ
علاقةٌ تربطُ كلَّ عنصرٍ في المجالِ، بعنصرٍ واحدٍ فقطْ في المدى.

١) الاقترانُ ق (س) = س^{٢} ، حيثُ أ = ١ ، ب = ٠ ، جـ = ٠،



إشارةُ أ .....

مجالُ الاقترانِ ق .....، ومداهُ .....

اتِّجاهُ فتحةِ المنحنى .....

معادلةُ محورِ التماثلِ .....

للاقترانِ قيمةٌ (عظمى أمْ صغرى)؟ وتُساوي .....

٢) الاقترانُ هـ (س) = س^{٢} - ٢ س - ٣

أ = ... ، ب = ... ، جـ = ...

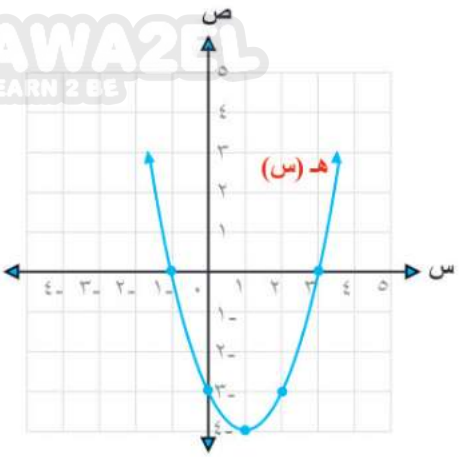
إشارةُ أ .....

مجالُ الاقترانِ هـ .....، ومداهُ .....

اتِّجاهُ فتحةِ المنحنى .....

معادلةُ محورِ التماثلِ .....

للاقترانِ قيمةٌ (عظمى أمْ صغرى)؟ وتُساوي .....



٣) ع (س) = - س^{٢} + ٤

أ = ... ، ب = ... ، جـ = ...

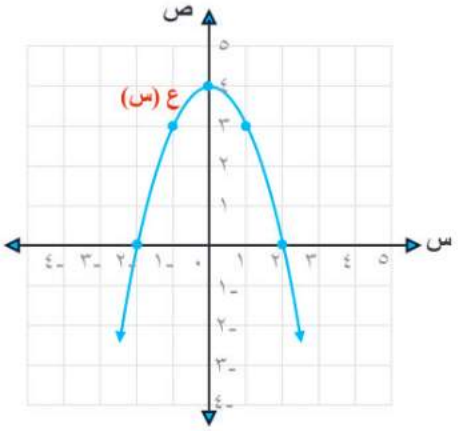
إشارةُ أ .....

مجالُ الاقترانِ ع .....، ومداهُ .....

اتِّجاهُ فتحةِ المنحنى .....

معادلةُ محورِ التماثلِ .....

للاقترانِ قيمةٌ (عظمى أمْ صغرى)؟ وتُساوي .....



٤) ل (س) = س^{٢} + ١

أ = ... ، ب = ... ، جـ = ...

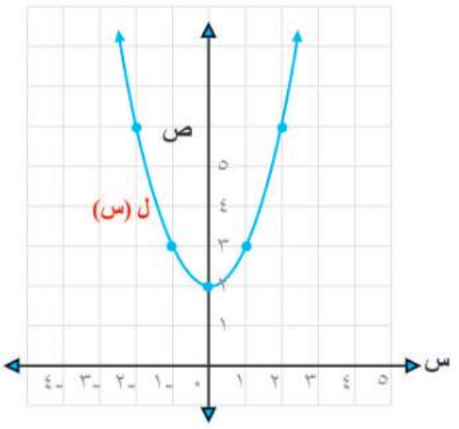
إشارةُ أ .....

مجالُ الاقترانِ ل .....، ومداهُ .....

اتِّجاهُ فتحةِ المنحنى .....

معادلةُ محورِ التماثلِ .....

للاقترانِ قيمةٌ (عظمى أمْ صغرى)؟ وتُساوي .....



أُلاحظُ ممّا سبقَ أنَّ منحنى الاقترانِ تربيعيٍّ **مفتوحٌ للأعلى أوْ للأسفلِ**، ورأسُ المنحنى النقطةُ التي يكونُ للاقترانِ عندَها **قيمةٌ عظمى أوْ صغرى**، وإحداثيّاتُ رأسِ المنحنى هيَ ($\frac{-ب}{2أ}$ ، ق ($\frac{-ب}{2أ}$))، **ومحورُ التماثلِ** هوَ مستقيمٌ رأسيٌّ يمرُّ برأسِ المنحنى.

الصورةُ العامّةُ للاقترانِ التربيعيِّ ق (س) = أ س٢ + ب س + جـ ، أ ≠ ٠ ، أ، ب، جـ أعدادٌ حقيقيةٌ.

أ موجبةٌ	مفتوحٌ للأعلى
المجالُ	ح
المدى	ص ≥ ق($\frac{-ب}{2أ}$)
معادلةُ محورِ التماثلِ	س = $\frac{-ب}{2أ}$

أ سالبةٌ	مفتوحٌ للأسفلِ
المجالُ	
المدى	
معادلةُ محورِ التماثلِ	

مثالٌ (١)

أُمثِّلُ الاقترانَ ق (س)= س^{٢} + ٢ س – ٤ بيانيًّا.

الحلُّ:

لتمثيلِ الاقترانِ بيانيًّا؛ أتَّبعُ الخطواتِ الآتيةَ:

١) أُحدِّدُ معاملاتِ الحدودِ أ = ١ ، ب = ٢ ، جـ = -٤

٢) أجدُ إحداثيّا رأسِ القطعِ ($\frac{-٢}{(١)٢}$ ، ق ($\frac{-٢}{(١)٢}$)) = (- ١ ، ق (- ١))

ق (- ١) = (- ١)^{٢} + ٢ (- ١) – ٤

= ١ + - ٢ – ٤ = -٥

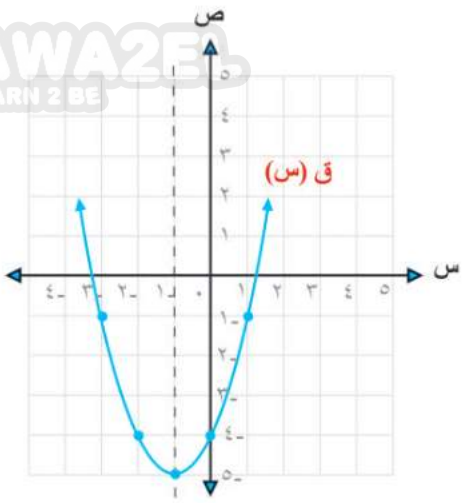
٣) أُنشئُ جدولًا للنقاطِ، ثمَّ أُعيِّنُها على المستوى الإحداثيِّ.

المستقيمُ الرأسيُّ

مستقيمٌ يوازي محورَ الصاداتِ، معادلتُهُ

س = أ

حيثُ أ عددٌ حقيقيٌّ.



س	١	٠	١-	٢-	٣-
ق(س)	١-	٤-	٥-	٤-	١-

مجالُ الاقترانِ يساوي ح، مدى الاقترانِ هو ص ≤ -٥،
معادلةُ محورِ التماثلِ س = -١

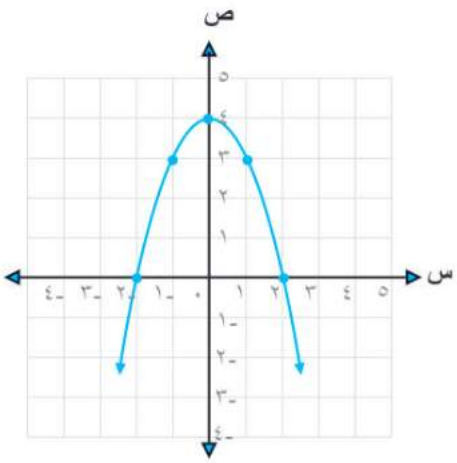
أحاولُ أُمثِّلُ الاقترانَ ك (س) = ٩ – س٢، وأذكرُ المجالَ والمدى ومعادلةَ محورِ التماثلِ.

أختبرُ تعلُّمي

١) أُمثِّلُ بيانيًّا الاقتراناتِ الآتيةَ:

أ) ق (س) = س٢ - ١

ب) هـ (س) = س٢-٤س+١



٢) أدرسُ الرسمَ المجاورَ، ثمَّ أُجيبُ عنِ الأسئلةِ الآتيةِ:

أ) ما إحداثيّا رأسِ القطعِ؟

ب) للاقترانِ قيمةٌ عظمى أمْ صغرى؟ أُحدِّدُها.

جـ) ما مجالُ الاقترانِ؟

د) ما إشارةُ معاملِ س٢ ؟

هـ) ما نقاطُ التقاطعِ معَ محورِ س؟

٣) أُطلقَ صاروخٌ إلى أعلى، وكانَ ارتفاعُهُ بالأمتارِ فوقَ سطحِ البحرِ بعدَ (ن) ثانيةً منْ إطلاقِهِ وفقَ العلاقةِ:
ل (ن) = - ٤ ن٢ + ١٦ ن + ٥٠٠٠؛ أجدُ أقصى ارتفاعٍ يبلغُهُ الصاروخُ.

المادة التعليمية للبرنامج العلاجي

المرحلة التحضيرية

للعام 2022-2023

مبحث الرياضيات

الصف : الحادي عشر الأدبي

المصدر: المادة التعليمية المساندة لمبحث الرياضيات

حلُّ المعادلاتِ

1

النتاجاتُ: • أحُلُّ معادلةً بمتغيرٍ واحدٍ.

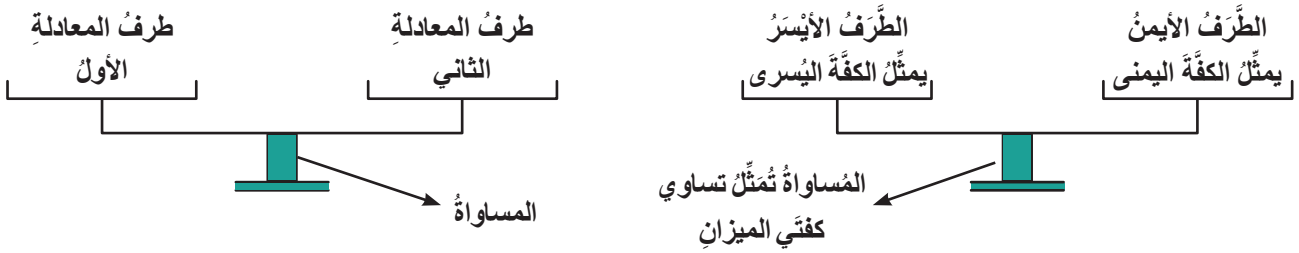
النشاطُ 1 خصائصُ المساواةِ.

أتذكَّرُ

المعادلةُ: جملةٌ تتضمنُ مساواةً (=) تدلُّ على تساوي المقداريْنِ في طرفيْها، وقدْ تتضمنُ المعادلةُ أعدادًا مجهولةً تُسمّى المتغيراتِ، ويُعبَّرُ عنْها بأحرفٍ مثلَ x , y .

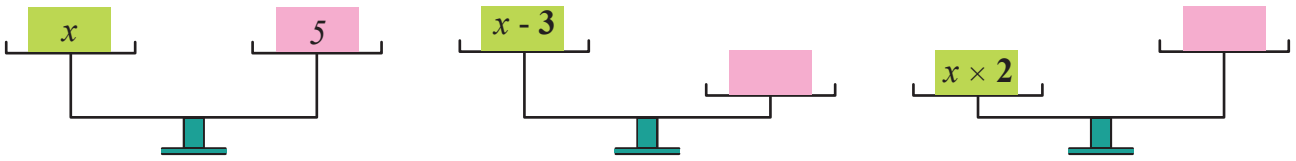
أتذكَّرُ

المقدارُ الجبريُّ: عبارةٌ تحتوي على متغيراتٍ وأعدادٍ تفصلُ بينَها عملياتٌ. مثلًا $2x + 6$



1) ألاحظُ كفَّتَي الميزانِ

إذا بدأْتَ المساواةَ بينَ x والعددِ 5 ؛ فما الذي تضعُهُ في الكفةِ اليمنى لتبقى المعادلةُ صحيحةً؟



$x \times 2 =$ ..... $x - 3 =$ ..... $x = 5$

2) أسجِّلُ ملاحظاتي حولَ خصائصِ المساواةِ، وأناقشُها معَ معلِّمي وزملائي.

أستنتجُ

لتبقى المساواةُ في المعادلةِ صحيحةً؛ يجبُ مراعاةُ ما يأتي:

- عندَ (إضافةِ/ جمعِ) عددٍ ما إلى أحدِ طرفَيِ المعادلةِ فيجبُ إضافةُ العددِ نفسِهِ إلى الطرفِ الآخرِ.
- عندَ طرحِ عددٍ ما منْ أحدِ طرفَيِ المعادلةِ فيجبُ طرحُ العددِ نفسِهِ منَ الطرفِ الآخرِ.
- عندَ ضربِ أحدِ طرفَيِ المعادلةِ في عددٍ ما فيجبُ ضربُ الطرفِ الآخرِ في العددِ نفسِهِ.
- عندَ قسمةِ أحدِ طرفَيِ المعادلةِ على عددٍ ما (والعددِ ≠ صفرًا) فيجبُ قسمةُ الطرفِ الآخرِ على العددِ نفسِهِ.

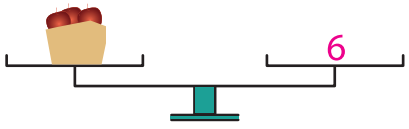
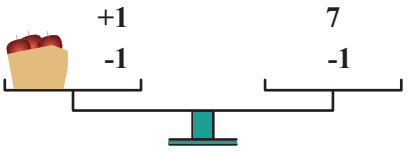
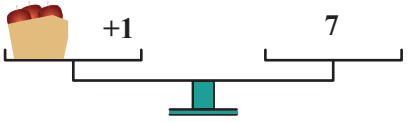
النشاطُ 2 حلُّ المعادلاتِ.

أتذكَّرُ

حلُّ المعادلةِ يعني إيجادَ قيمةِ المتغيرِ التي تجعلُ المساواةَ صحيحةً.

مثلًا: حلُّ المعادلةِ $x + 1 = 5$ هوَ $x = 4$ لأنَّهُ بتعويضِ العددِ 4 مكانَ x أحصلُ على عبارةٍ رياضيةٍ صحيحةٍ وهيَ: $(4 + 1 = 5)$.

1) أجدُ كتلةَ كيسِ الفاكهةِ في الشكلِ المجاورِ

		
كتلةُ كيسِ الفاكهةِ 6 KG	أطرحُ 1 منْ كفتَيِ الميزانِ لجعلِ كيسِ الفاكهةِ على طرفٍ والأعدادِ على طرفٍ آخرَ.	

2) أحُلُّ المعادلاتِ الآتيةَ وأتحقَّقُ منْ حلّي:

① $m + 6 = 13$

المعادلةُ الاصليةُ	التحقُّقُ منْ صحةِ الحلِّ
$m + 6 = 13$	أعوضُ قيمةَ $m = 7$ في المعادلةِ
أجعلُ المتغيرَ على طرفٍ والأعدادَ على الطرفِ الآخرِ، أطرحُ 6 منَ الطرفينِ	$7 + 6 = 13$
$-6 \quad -6$	$13 = 13$
وبما أنَّ المتغيرَ على طرفٍ وحدَهُ أكونُ قدْ أنهيتُ الحلَّ	بما أنَّ الطرفيْنِ متساويانِ إذن الحلُّ صحيحٌ ✓
$m = 7$	

② $f - 4 = 5$

المعادلةُ الأصليةُ	التحقُّقُ منْ صحةِ الحلِّ
$f - 4 = 5$	.....
أجعلُ المتغيرَ على طرفٍ والأعدادَ على الطرفِ الآخرِ، ثمَّ أجمعُ 4 إلى الطرفيْنِ.	.....
.....	.....
.....	
بما أنَّ المتغيرَ على طرفٍ وحدهُ أكونُ قدْ أنهيْتُ الحلَّ	
$f = 9$	

③ $5x + 7 = 22$

المعادلةُ الأصليةُ	التحقُّقُ منْ صحةِ الحلِّ
$5x + 7 = 22$	.....
لماذا؟	.....
$5x = 15$	
لماذا؟	.....
$x = 3$	

أتذكَّرُ

خاصيةُ توزيعِ الضربِ على الجمعِ كالآتي:

$a(b + c) = a \times b + a \times c$

④ $4(3y - 5) = 28$

المعادلةُ الأصليةُ	$4(3y - 5) = 28$
خاصيةُ التوزيعِ	$4 \times 3y - 4 \times 5 = 28$
أضربُ وأُكملُ حلَّ المعادلةِ	$12y - 20 = 28$
	.....
	.....
	$y =$ .....

أفكِّرُ
هلْ توجدُ طريقةٌ أخرى لحل المثال؟

لماذا؟ .....

⑤ $5a + 12 = 2a + 27$

$3a + 12 = 27$

.....

⑥ $3(2t + 3) = 4t + 11$

النشاطُ 3 حلُّ المسألةِ باستخدامِ المعادلاتِ.

1) أكملُ الجدولَ الآتيَ:

الجملةُ	المقدارُ الجبريُّ
خمسةُ أمثالِ x	5x
مِثلا x	
إضافةُ 7 لـ x	x + 7
إضافةُ 4 لـ x	
طرحُ 5 مِنْ x	

2) لدى طارقٍ 5 مجموعاتٍ متساويةٍ منَ الطوابعِ البريديةِ أضافَ إليْها 4 طوابعَ فأصبحَ مجموعُ ما لدى طارقٍ هوَ 39 طابعًا، أجدُ الطوابعَ في المجموعةِ الواحدةِ:

① أرمزُ إلى الطوابعِ في المجموعةِ الواحدةِ برمزٍ، وليكُنْ a

② عددُ الطوابعِ في المجموعاتِ الخمسِ .....

③ أضيفُ الطوابعَ الأربعةَ المتبقيةَ فيصبحُ الناتجُ .....

أحُلُّ المعادلةَ $5a + 4 = 39$ ← الحلُّ: .....

3) لدى ميسَ مبلغٌ منَ المالِ بالدينارِ، إذا ضُربَ بالعددِ 3 وطرحْنا منهُ 2 كانَ المبلغُ الناتجَ مساويًا لجمعِ 8 إلى المبلغِ، أجدُ ما لدى ميسَ منَ الدنانيرِ وأتحقَّقُ منْ صحةِ الحلِّ .

أرمزُ إلى المبلغِ الذي معَ ميسَ برمزٍ وليكُنْ d

d

3d

3d - 2

3d - 2 =

3d - 2 = d + 8

لدى ميسَ **مبلغٌ منَ المالِ** بالدينارِ، إذا ضُربَ بالعددِ 3 وطرحْنا منْهُ 2 كانَ الناتجُ مساويًا لجمعِ 8 إلى المبلغِ، أَجدُ ما لدى ميسَ منَ الدنانيرِ وأتحقَّقُ منْ صحةِ الحلِ.

أفهمُ

أخطِّطُ

أحلُّ

أتحقق

4) أجدُ العددَ الذي أربعةُ أمثالِهِ مطروحًا منهُ 5 يكونُ مساويًا للعددِ 11.

أَضَعُ ✓ أَسْفَلَ الصورةِ التي تمثِّلُ تَعَلُّمي

حَلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ بالتحليلِ (1)

2

النتاجُ: • أحَلُّ المعادلةَ التربيعيةَ بالتحليلِ.

نشاط 1 حَلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ بالتحليلِ

أولًا: تحليلُ المقاديرِ الجبريةِ

أتذكرُ

بعضَ طرائقِ تحليلِ المقاديرِ الجبريةِ

عددُ الحدودِ الجبريةِ	طريقةُ التحليلِ	
2 أَوْ أكثرُ	إخراجُ العاملِ المشتركِ الأكبرِ	
2	الفرقُ بَيْنَ مربعَينِ	$a^2 - b^2 = (a+b)\,(a-b)$
3	مربعٌ كاملٌ ثلاثيُّ الحدودِ	$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$
	$x^2 + bx + c$	$x^2 + bx + c = (x+m)(x+n)$ $m+n=b$ and $mn=c$
4 أَوْ أكثرُ	التحليلُ بتجميعِ الحدودِ	$ax + bx + ay + by = x(a+b) + y(a+b)$ $= (a+b)(x+y)$

1) أحللُ المقدارَ الجبريَّ $6x^2+8x$:

1. أجدُ العاملَ المشتركَ الأكبرَ لحدودِ المقدارِ الجبريِّ: $2x$؛ لأنَّ $6x^2 = 2\times3\times x\times x,\ 8x = 2\times2\times2\times x$
2. أخرجُ المقدارَ $(2x)$ عاملًا مشتركًا: $2x\,(3x+4)$
3. هل المقدارُ الجبريُّ $6x^2+8x=2x(3x+4)$ تمَّ تحليلُه تحليلًا كاملًا؟ أبررُ إجابتي.

نعمْ؛ لأنَّه تمَّ كتابةُ كلِّ حدٍّ من الحدودِ الجبريةِ للمقدارِ بالصورةِ التحليليةِ.

إذنْ، تمَّ تحليلُ المقدارِ الجبريَّ تحليلًا كاملًا.

أتذكرُ

حينَ لا تساوي قيمةُ العاملِ المشتركِ الأكبرُ لحدودِ المقدارِ الجبريِّ 1، فإنَّ من الأسهلِ البدءَ بإخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ، ثمَّ اختيارُ طريقةِ التحليلِ المناسبةِ.

2) أحلُ المقدارَ الجبريَّ $x^2 - 6x + 8$:

> **أتذكرُ**
> إذا كانتْ c موجبةً، و b سالبةً في ثلاثيِّ الحدودِ x^2+bx+c، فإنَّ لكلٍّ من n, m إشارةً سالبةً.

1 أجدُ العاملَ المشتركَ الأكبرَ لحدودِ المقدارِ الجبريِّ: 1

2 أختارُ طريقةَ التحليلِ المناسبةَ: تحليلُ ثلاثيةِ الحدودِ

$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$

$m + n = b$ and $mn = c$

بما أنَّ .....=c، و.....=b، فيجبُ إيجادُ عددينِ سالبينِ مجموعُهما ..... وحاصلُ ضربِهما .....

3 أنشىءُ جدولًا، وأنظمُ فيه عواملَ العددِ 8 السالبةَ، وأحددُ العاملينِ اللذينِ مجموعُهما 6-:

العاملانِ الصحيحانِ

أزوجُ عواملِ العددِ 8 السالبةُ	$-1, -8$	$-2, -4$
مجموعُ العاملَينِ	-9	-6

4 أكتبُ القاعدةَ: $x^2 - 6x + 8 = (x + \mathbf{m})(x + \mathbf{n})$

5 أعوضُ m= -2, n= -4 $= (\ldots\ldots)(\ldots\ldots)$

3) أحلُ المقاديرَ الجبريةَ الآتيةَ:

1 x^2+3x+2 2 $2x^2-2x-24$

ثانيًا: حَلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ بالتحليلِ

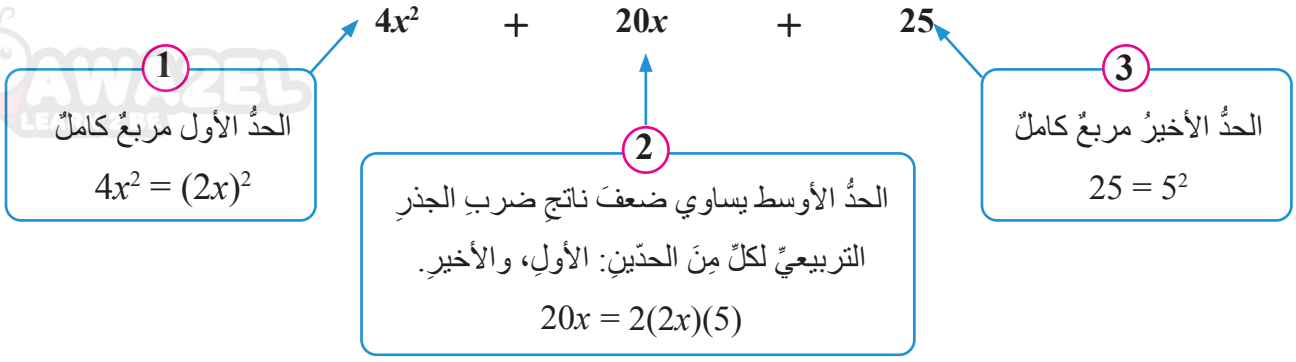
> **أتعلمُ**
> **خاصيةُ الضربِ الصفريِّ:** إذا كان حاصلُ ضربِ عددينِ حقيقيينِ صفرًا، فإن أحدَهما على الأقلِّ يجبُ أنْ يكونَ صفرًا، **مثالٌ:** $x(x+1)=0$، فإن إما $x=0$، أو $x+1=0$.

1) أحَلُّ المعادلةَ $4x^2 + 20x + 25 = 0$ بالتحليلِ

أحلُ المقدارَ الجبريَّ في الطرفِ الأيسرِ من المعادلةِ على صورةِ حاصلِ ضربِ عاملينِ:

$4x^2+20x+25=0$

> **ألاحظُ:**
> المقدارُ الجبريُّ $4x^2+20x+25$ يتكونُ من 3 حدودٍ؛ أختارُ تحليلَهُ بإحدى الطرائقِ الثلاثةِ: (إخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ، أو مربعِ كاملٍ ثلاثيٍّ، أو تحليلِ ثلاثيِّ الحدودِ x^2+bx+c)؛ وبما أنَّ العاملَ المشتركَ الأكبرَ للحدودِ الجبريةِ الثلاثةِ هو 1؛ فلا يمكنُ استعمالُ الطريقةِ الأولى، وبما أنَّ معاملَ x^2 ($a \neq 1$)، فلا يمكنُ تحليلُهُ باستعمالِ الطريقةِ الثانيةِ؛ لذلك عليَّ أنْ أتحققَ من شروطِ طريقةِ تحليلِ مربعٍ كاملٍ ثلاثيِّ الحدودِ.



إذنْ، أحللُ المقدار الجبريَّ باستعمالِ مربعٍ كاملٍ ثلاثيِّ الحدودِ:

مربعٌ كاملٌ ثلاثيُّ الحدودِ

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

تحليلُ المقدارِ الجبريَّ هو: $4x^2+20x+25=(2x+5)^2=(2x+5)(2x+5)$

أساوي كلَّ عاملٍ بالصفرِ (خاصيةُ الضربِ الصفريِّ)، وبما أنَّ العاملينِ متساويان فأحَلُّ المعادلةَ الخطيةَ (بينَ القوسينِ):

$$4x^2+20x+25 = 0$$
$$(2x+5)^2 = 0$$
$$2x+5 = 0$$
$$x=-\frac{5}{2} = -2\frac{1}{2}$$

إذن، للمعادلةِ جذرانِ حقيقيانِ متساويان (حَلٌّ واحدٌ) هو، $\{-2\frac{1}{2}\}$

أتعلمُ

لحلِّ المعادلاتِ التربيعيةِ بالتحليلِ، أتبعُ الخطواتِ الآتيةَ:

الخطوةُ (1): أنقلُ جميعَ الحدودِ إلى الطرفِ الأيسرِ، وأتركُ الصفرَ في الطرفِ الأيمنِ.

الخطوةُ (2): أحللُ المقدارَ الجبريَّ في الطرفِ الأيسرِ من المعادلةِ على صورةِ حاصلِ ضربِ عاملينِ.

الخطوةُ (3): أساوي كلَّ عاملٍ بالصفرِ (خاصيةِ الضربِ الصفريِّ)، وأحلُّ كلَّ معادلةٍ خطيةٍ.

الخطوةُ (4): حلولُ المعادلةِ التربيعيةِ هي حلولُ المعادلتينِ الخطيتينِ.

2) أحَلُّ المعادلةَ التربيعيةَ $x^2 = 12x - 36$

1 أنقلُ جميعَ الحدودِ إلى الطرفِ الأيسرِ من المعادلةِ، وأتركُ الصفرَ في الطرفِ الأيمنِ.

.....

2 أحللُ المقدارَ الجبريَّ في الطرفِ الأيسرِ من المعادلةِ على صورةِ حاصلِ ضربِ عاملين:

- أجدُ العاملَ المشتركَ الأكبرَ لحدودِ المقدارِ الجبريِّ: .....
- هل الحدُّ الأولُ مربعٌ كاملٌ؟ .....
- هل الحدُّ الأوسطُ يساوي $2(x)(6)$؟ .....
- هل الحدُّ الأخيرُ مربعٌ كاملٌ؟ .....
- هل يمكنُ تحليلُ المقدارِ الجبريِّ باستعمالِ طريقةِ المربعِ الكاملِ ثلاثيِّ الحدودِ؟ .....
- أحللُ المقدارَ الجبريَّ: $x^2-12x+36=(x-6)^2=(x-6)(x-6)$

(وبما أن العاملينِ متساويان أساوي كلَّ عاملٍ بالصفرِ (خاصيةُ الضربِ الصفريِّ)، فأحَلُّ المعادلةَ الخطيةَ (بين القوسين):

.....

.....

إذن، للمعادلةِ جذرانِ حقيقيانِ متساويانِ (حَلٌّ واحدٌ) هو، .....

3) أحُلُّ المعادلتينِ التربيعيتينِ الآتيتينِ:

1 $x^2+6x+9=0$ 2 $9x^2-42x+49=0$

أقيمُ ذاتي: أرسمُ الوجهَ الذي يُعبِّر عن درجةِ رضايَ عنْ أدائي وتفاعلي في أثناءِ الأنشطةِ داخلَ ( ).

أستطيعُ حلَّ الأنشطةِ من دونِ مساعدةٍ. أتوجهُ إلى كتابي وأكملُ حلَّ "أتدرب" وأحلُّ المسائلَ.	أستطيعُ حلَّ الأنشطةِ معَ بعضِ المساعدةِ. أسألُ زميلاً أتقنَ المهارةَ.	لم أتمكنْ من حلِّ الأنشطةِ. أستعينُ بزميلٍ أتقنَ المهارةَ أو معلمي، ويمكنُ أن أبحثَ عن مصدرٍ آخرَ للمعرفةِ.
• أحللُ المقاديرَ الجبريةَ ( )		• أحَلُّ المعادلةَ التربيعيةَ جبريًّا ( )

4

النتاجات: • أتعرَّفُ الاقترانَ.
• أجدُ قاعدةَ اقترانٍ.

النشاطُ 1 القيمةُ العدديةُ لمقدارٍ جبريٍّ.

1) إذا كانَتْ قيمةُ $x = 3$ وكانَتْ قيمةُ $y = 5$ وأجدُ ناتجَ ما يأتي :

- أُعوِّض قيمةَ كلٍّ منْ x, y
- أُجري العملياتِ الحسابيةَ

① $2x + 3y$ $= 2(3) + 3(5)$ $= 6+15 = 21$	② $4x + 2y$ $= 4(3) + 2(\ldots\ldots)$ $= \ldots\ldots +10 = 22$	③ $3y + 7x$ $= \ldots\ldots\ldots\ldots$

2) في أحدِ الأنديةِ الرياضيةِ يكافئُ النادي اللاعبَ مقابلَ كلِّ هدفٍ يُحرِزُهُ بِـ 4 دنانيرَ وعليهِ أُكملُ الجدولَ الآتيَ:

اسمُ اللاعبِ	عددُ الأهدافِ	العمليةُ الحسابيةُ	المبلغُ بالدينارِ
سيفٌ	3	③ × 4	12
زيدٌ	4	.....	16
أنسٌ	2	② × 4	.....
محمودٌ	n	$n \times 4$	$4n$
يوسفُ	x	.....	.....

أتذكَّرُ
$n \times 4 = 4n$

3) أكملُ جدولَ المدخلاتِ والمخرجاتِ في ما يلي:

المدخلةُ (x)	المخرجةُ $y = 4x - 2$
1	$y = 4(1) - 2 = 2$
2	$y = 4(.....) - 2 = 6$
3	$y = 4(.....) - 2 = ...$

أتعلَّمُ

تُسمَّى العلاقةُ بينَ المدخلةِ x والمخرجةِ y اقترانًا؛ حيثُ إنَّ الاقترانَ هوَ: علاقةٌ تربطُ كلَّ قيمةٍ منَ المدخلاتِ **بقيمةٍ واحدةٍ فقطْ** منَ المخرجاتِ. ويمكنُ التعبيرُ عنِ الاقترانِ بطرائقَ مختلفةٍ.

النشاطُ 2 وصفُ قاعدةِ اقترانٍ بالكلماتِ وجبريًّا.

1) أكملُ الجدولَ الآتي:

المقدارُ الجبريُّ	الجملةُ
$3x + 2$	المتغيرُ x مضروبًا بـ 3 ومضافًا إليْهِ 2
$4(x - 2)$	المتغيرُ x مضروبًا بـ 4 ومطروحًا منْهُ 1
	المتغيرُ x مطروحًا منْهُ 2 ومضروبًا بالعددِ 4
	المتغيرُ x مضافًا إليْهِ 7 ومضروبًا بـ 2

2) أكتبُ **آلةَ الاقترانِ** في ما يلي، ثمَّ أعبِّرُ عنْها جبريًّا:

آلةُ الاقترانِ المعطاةُ نضربُ المدخلةَ x في 2، ثمَّ نضيف 3:

إذنْ، يُمكنُني كتابةُ قاعدةِ الاقترانِ بالصورةِ **الجبريةِ** $x \longmapsto 2x + 3$

أوْ بصورةِ **معادلةٍ** $y = 2x + 3$

آلةُ الاقترانِ المعطاةُ: نضربُ المدخلةَ x في ..... ، ثمَّ نطرحُ 3:

إذنْ يُمكِنُني كتابةُ قاعدةِ الاقترانِ بالصورةِ **الجبريةِ** .....

أوْ بصورةِ **معادلةٍ** .....

③ آلةُ الاقترانِ المعطاةُ: نُضيفُ 5 إلى المدخلةِ x ، ثمَّ نضربُ الناتجَ بـ 3:

$x \longrightarrow \boxed{+5} \longrightarrow \boxed{+3} \longrightarrow$

إذنْ يُمكِنُني كتابةُ قاعدةُ الاقترانِ بالصورةِ **الجبرية** .....

أو **معادلة** ..... $x \longmapsto$

④ آلةُ الاقترانِ المعطاةُ: نطرحُ 2 منَ المدخلةِ x ، ثمَّ نضربُ الناتجَ بـ ..... .

$x \longrightarrow \boxed{-2} \longrightarrow \boxed{\times 5} \longrightarrow$

إذنْ، يُمكنُني كتابةُ قاعدةِ الاقترانِ بالصورةِ **الجبريةِ**

$x \longmapsto (x - 2) \times 5$

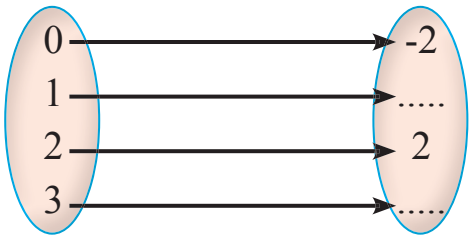
أو بصورةِ **معادلةٍ** على الشكلِ ..... = y

⑤ $x \longrightarrow \boxed{\times 6} \longrightarrow \boxed{-2} \longrightarrow$

⑥ $x \longrightarrow \boxed{+6} \longrightarrow \boxed{\times 2} \longrightarrow$

3) أُمثِّلُ جدولَ المدخلاتِ والمخرجاتِ الآتيَ باستخدامِ **المخططِّ السهميِّ**:

المدخلةُ (x)	المخرجةُ (y)
0	-2
1	0
2	2
3	4

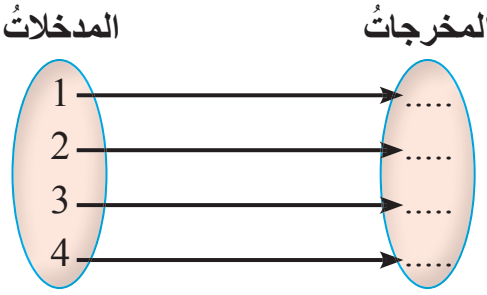


4) معتمدًا على الاقترانَ: $x \longmapsto x + 4$

① أجدُ المخرجاتِ المناظرةَ للمدخلاتِ 1,2,3,4

② أُمثِّلُ المدخلاتِ والمخرجاتِ **بمخططٍّ سهميٍّ**

المدخلةُ (x)	المخرجةُ (y)
1	.....
2	.....
3	.....
4	.....



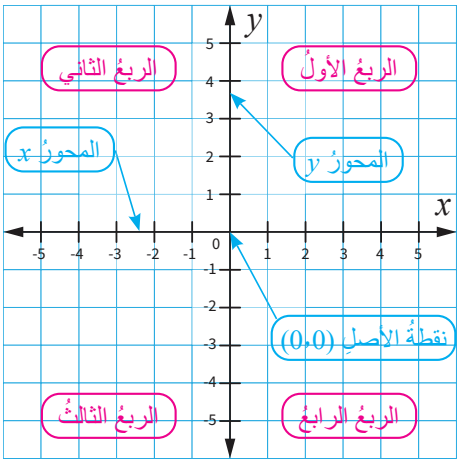
أَضَعُ ✓ أَسْفَلَ الصورةِ التي تمثِّلُ تَعَلُّمي

تمثيلُ الاقترانِ الخطيَّ بيانيًّا

5

النتاجاتُ: • أُمثِّلُ الاقترانَ الخطيَّ بيانيًّا.

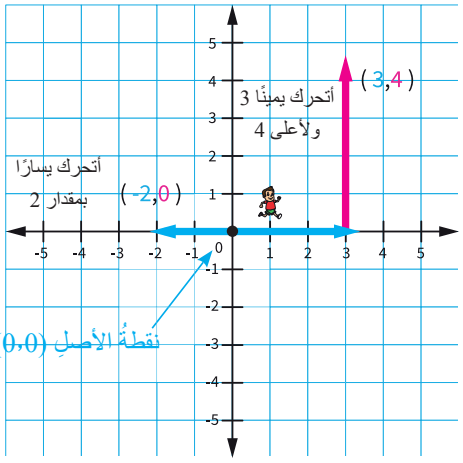
النشاطُ 1 تمثيلُ الأزواجِ المرتبةِ (x,y) (على المستوى الإحداثيِّ)



1) أُمثِّلُ كلًّا منَ الأزواجِ المرتبةِ التالية على المستوى الإحداثيِّ

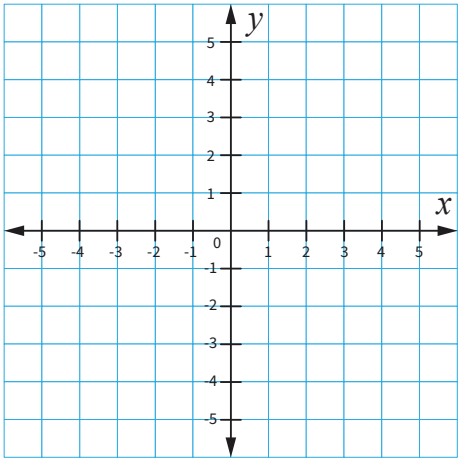
① (3 , 4)

الخطوةُ ①	أبدأُ منْ نقطةِ الأصلِ (0 , 0) وأتحرَّكُ على محورِ x باتجاهِ **اليمينِ** (لأنَّ قيمةَ الإحداثيِّ x موجبةٌ) بمقدارِ 3 وحداتٍ فأقفُ عندَ النقطةِ (3,0)
الخطوةُ ②	منَ النقطةِ (3,0) أتحرَّكُ 4 خطواتٍ إلى **الأعلى** (لأنَّ قيمةَ الإحداثيِّ y موجبةٌ)



② (-2 , 0)

الخطوةُ ①	أبدأُ منْ نقطةِ الأصلِ (0 , 0) وأتحرَّكُ على محورِ x باتجاهِ **اليسارِ** (لأنَّ قيمةَ الإحداثيِّ x **سالبةٌ**) بمقدارِ 2 وحداتٍ فأقفُ عندَ النقطةِ (0 , -2)
الخطوةُ ②	لا أتحرَّكُ منَ النقطةِ (0 , -2)؛ لأنَّ قيمةَ الإحداثيِّ $y = 0$



2) أستعملُ مستوى الإحداثياتِ التاليَ لأُعيّنَ النقطَ المعطاةَ

① (1,4) ② (-2,3) ③ (-1,-2) ④ (0,-5)

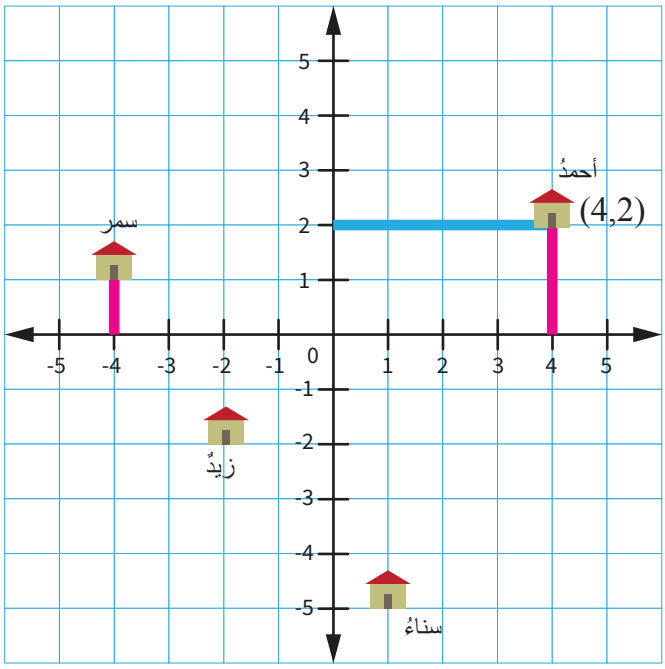
⑤ (5,-2) ⑥ (5,0)

النشاطُ 2 إيجادُ إحداثياتِ نقطٍ منَ المستوى الإحداثيِّ.

1) أجدُ إحداثياتِ النقطةِ التي تحددُ موقعَ منزلِ أحمدَ.

أُنزِلُ عمودًا منْ منزلِ أحمدَ على المحورِ x، فأجدُ أنَّهُ يقابلُ العددَ 4 ثم أُنزِلُ عمودًا منْ منزلِ أحمدَ على المحورِ y، فأجدُ أنَّهُ يقابلُ العددَ 2.

إذنْ إحداثياتُ النقطةِ التي تحددُ موقعَ منزلِ أحمدَ هي (4,2)



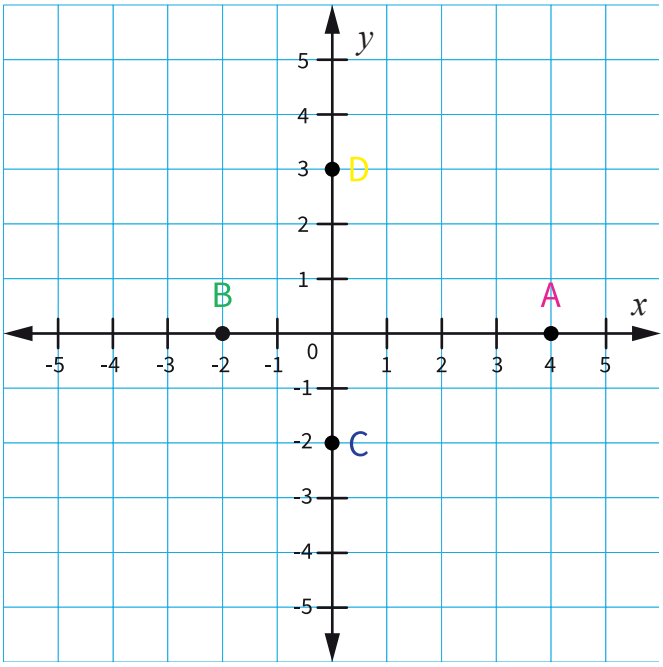
أُحددُ إحداثياتِ النقطةِ التي تُحددُ موقعَ منزلِ كلٍّ منْ: **سمرَ، وزيدٍ وسناءَ**

سمرُ (,)

زيدٌ (,)

سناءُ (,)

2) أجدُ إحداثياتِ النقطِ A,B,C,D



1 إحداثياتُ A

ألاحظُ أنَّ A تقعُ على محورِ x عندَ 4

إذنْ A (4,0)

2 إحداثياتُ B .....

3 إحداثياتُ C .....

ألاحظُ أنَّ C تقعُ على محورِ x عندَ -2 إذنْ C (0,-2)

4 إحداثياتُ D .....

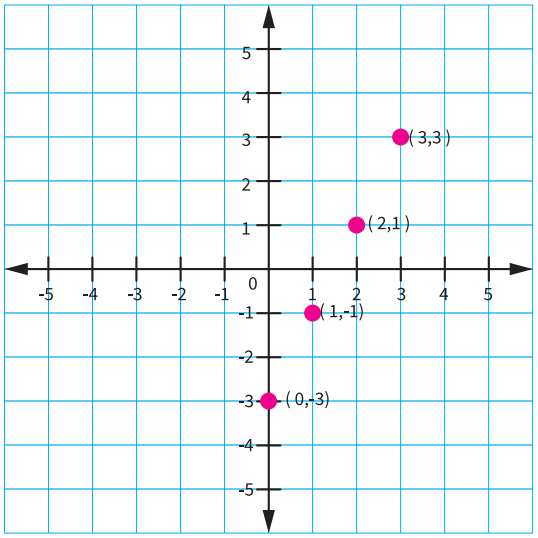
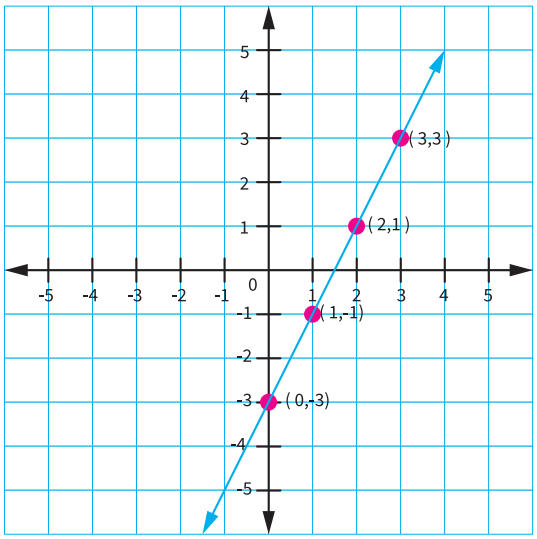
النشاطُ 3 تمثيلُ الاقترانِ الخطيِّ بيانيًّا.

1) أُكملُ جداولَ المدخلاتِ والمخرجاتِ للاقترانِ الآتيةِ، وأُمثِّلُها بيانيًّا

① $x \longmapsto 2x - 3$

المدخلةُ x	المخرجةُ $y = 2x - 3$	الزوجُ المرتبُ (المخرجةُ، المدخلةُ) (x,y)
0	$2(0) - 3 = -3$	$(0, -3)$
1	$2(1) - 3 = \ldots.$	$(1, \ldots)$
2	$2(\ldots.) - 3 = 1$	$(\ldots., 1)$
3	……	$(\ldots., \ldots.)$

إنَّ الأزواجَ المرتبةَ تنتجُ منْ تعويضِ قيمِ المدخلاتِ في المعادلةِ $y = 2x - 3$ لتمثيلِ الاقترانِ بيانيًّا؛ أتبعُ الخطواتِ الآتيةَ:

الخطوةُ ①	الخطوةُ ②
أُعيِّنُ الأزواجَ المرتبةَ $(3,3),(2,1),(1,-1),(0,-3)$ على المستوى الإحداثيِّ	أصلُ بينَ الأزواجِ المرتبةِ على المستوى الإحداثيِّ بخطٍّ مستقيمٍ، وأمدُّ الخطَّ منَ الجهتيْنِ (لماذا؟)
	

ألاحظُ أنَّ التمثيلَ البيانيَّ على شكلِ خطٍّ مستقيمٍ؛ لذلكَ يُسمّى $y = 2x - 3$ **اقترانًا خطيًّا**.

② $x \longmapsto 2(x+1)$

أتذكرُ

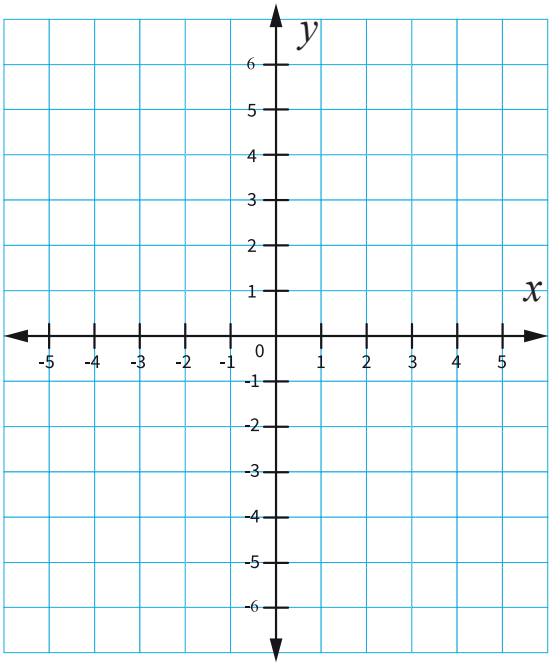
أختارُ قيمَ المدخلاتِ وأُعوِّضُها في المعادلةِ.

المدخلةُ x	المخرجةُ $y = 2(x+1)$	الزوجُ المرتبُ (المخرجةُ، المدخلةُ) (x,y)
0	$2(0+1) = 2$	$(0\ ,\ 2)$
1	$2(1+1) =$	(,)
2	.....	.....
-1	$2(-1+1) = 2 \times 0 = 0$	$(-1\ ,\ 0)$
-2	.....	.....

ألاحظُ أنَّ الأزواجَ المرتبةَ تنتجُ من تعويضِ قيمِ المدخلاتِ في المعادلةِ لتمثيلِ الاقترانِ بيانيًّا؛ أُنَفِّذُ ما يأتي:

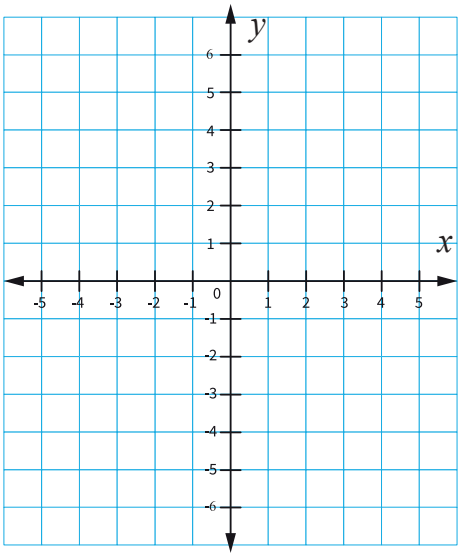
الخطوةُ ① أُعيِّنُ الأزواجَ المرتبةَ (-2,...),(-1,...),(2,...),(1,...),(0,2) على المستوى الإحداثيِّ.

الخطوةُ ② أصلُ بينَ الأزواجِ المرتبةِ على المستوى الإحداثيِّ وأمُدُّ الخطَّ منَ الجهتيْنِ.



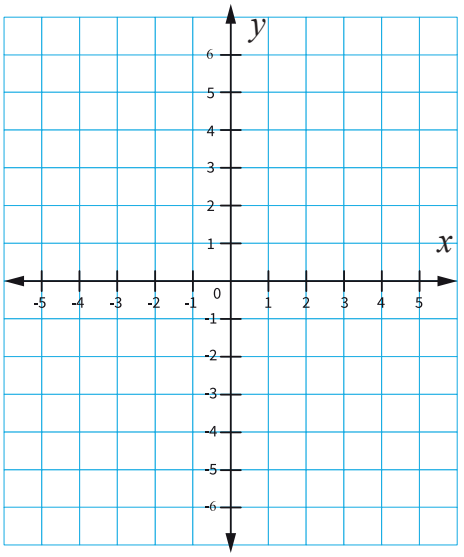
3) $x \longmapsto 2x - 2$

الزوجُ المرتبُ (x,y)	المخرجةُ y	المدخلةُ x
.....	.....	.....
.....	.....	.....
.....	.....	.....



4) $x \longmapsto 3(x - 2)$

الزوجُ المرتبُ (x,y)	المخرجةُ y	المدخلةُ x
.....	.....	.....
.....	.....	.....
.....	.....	.....



النشاطُ 4 مسائلُ حياتيةٌ.

تقدمُ إحدى الشركاتِ زيادةً سنويةً على راتبِ الموظفِ قدرُها 10 دنانيرَ، أكتبُ معادلةً مِن متغيريْنِ تُمثِّلُ مقدارَ زيادةِ راتبِ الموظفِ بعدَ مرورِ عددٍ منَ السنواتِ، ثمَّ أُمثِّلُ المعادلةَ بيانيًّا.

أَضَعُ ✓ أَسْفَلَ الصورةِ التي تمثِّلُ تَعَلُّمي

الاقترانُ التربيعيُّ

3

النتاجُ: • أذكرُ خصائصَ الاقترانِ التربيعيِّ.
• أمثّلُ الاقترانَ التربيعيَّ بيانيًّا في المستوى الإحداثي.

نشاط 1 خصائصُ الاقترانِ التربيعيِّ

أتعلمُ

الاقترانُ التربيعيُّ هو كلُّ اقترانٍ يكتبُ على الصيغة $f(x)=ax^2+bx+c$ حيثُ a,b,c أعدادٌ حقيقيةٌ $a\neq 0$
ويسمى الاقترانُ $f(x)=ax^2$ بالاقترانِ الرئيسِ لأنه أبسطُ صورة للاقترانِ التربيعيِّ.

أتعلمُ

القطع المكافئ: هو الشكلُ الناتجُ عن تمثيلِ الاقترانِ التربيعيِّ بيانيًّا $f(x)=ax^2+bx+c$ ويكونُ على شكلِ ∩ إذا كان $a<0$ أو على شكلِ ∪ إذا كانت $a>0$

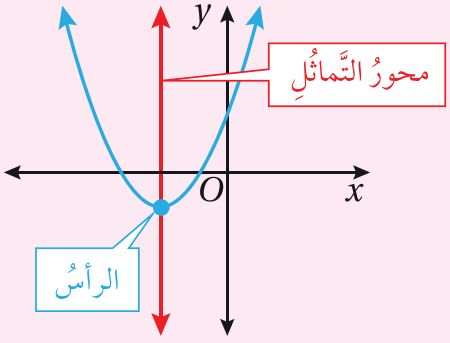
محورُ التماثلِ: الخطُّ الرأسيُّ الذي يقسمُ الشكلَ إلى قسمين متماثلين ومعادلتهُ $x=-\frac{b}{2a}$

رأس القطع: نقطةُ تقاطعِ محورِ التماثلِ معَ منحنى القطعِ، وإحداثياتهُ $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

وتكون: قيمةً عظمى إذا كانتْ $a<0$ / وقيمةً صغرى إذا كانتْ $a>0$

المجال: مجالُ الاقترانِ التربيعيِّ دائما هو $(-\infty, \infty)$

المـــدى: $\{y \mid y \geq f\left(\frac{-b}{2a}\right)\}$ إذا كانت $a>0$ / $\{y \mid y \leq f\left(\frac{-b}{2a}\right)\}$ إذا كانت $a<0$



1) أميزُ الاقترانَ التربيعيَّ في كلٍّ مما يأتي وأبررُ إجابتي:

الاقترانُ	تربيعيٌّ ومعاملاتهُ	غير تربيعيٍّ	التبريرُ
$f(x)=x^2+3x-2$	✓ a = 1 b = 3 c = −2		لأنه على الصيغةِ $f(x)=ax^2+bx+c$
$f(x)=x^3+3x$		✓	لأنَّ أكبر قوة للمتغيرِ فيه تساوي 3
$g(x)=4x^2+6$	✓ a = 4 b = 0 c = 6		لأنهُ على الصيغةِ $f(x)=ax^2+bx+c$ **أتذكرُ:** أيُّ حدٍّ من حدودِ الاقترانِ التربيعيِّ غيرُ موجودٍ يكونُ معاملهُ 0
$g(x)=4x-6$			لأنَّ قوةَ المتغيرِ فيه تساوي 1
$f(x)=2x^3-3x^2+4$		✓	
$f(x)=x^2$	✓ a = , b = , c =		
$f(x)=8x^3-1$			لأنَّ قوةَ المتغيرِ فيه تساوي 3

2) أجدُ معادلةَ محورِ التماثلِ وإحداثياتِ رأسِ القطعِ والقيمةِ العظمى أو الصغرى ومدى الاقتراناتِ الآتيةِ:

الاقترانُ	قيمُ المعاملاتِ a, b, c	معادلةُ محورِ $x=\frac{-b}{2a}$	إحداثياتُ رأسِ القطعِ $\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$	القيمةُ العظمى a < 0 القيمةُ الصغرى a > 0	المدى
$f(x)=x^2+2x+1$	a = 1 b = 2 c = 1	$x=\frac{-2}{2(1)}=-1$ $x=-1$	$f(-1)=(-1)^2+2(-1)+1$ $=1-2+1=0$ إحداثياتُ رأسِ القطعِ $(-1, 0)$	بما أن a=1 للاقترانِ قيمةٌ صغرى مقدارُها -1	$[-1, \infty)$ $\{y \mid y \geq -1\}$
$f(x)=x^2-6x-5$	a = 1 b = -6 c = −5	$x=\frac{-(-6)}{2(1)}$ $x=$	$f(3)=$ $=-14$ إحداثياتُ رأسِ القطعِ $(3, \quad)$	بما أن a=1 للاقترانِ قيمةٌ ..... مقدارُها.....	$[....., \infty)$ $\{y \mid y \geq .....\}$
$f(x)=-2x^2+4x$	a = b = c = 0	$x=$ $=$	$f(\ )=$ $=2$ إحداثياتُ رأسِ القطعِ $(\ ,\ )$	بما أن...a= للاقترانِ قيمةٌ عظمى مقدارُها.....	$(-\infty,.....]$ $\{y \mid y \leq .....\}$
$f(x)=4x^2-7$	a = b = c =	$x=$	$f(\ )=$ إحداثياتُ رأسِ القطعِ $(\ ,\ )$	بما أن...a= للاقترانِ قيمةٌ ..... مقدارُها.....	$[....., \infty)$ $\{y \mid y \geq .....\}$
$f(x)=-3x^2-6x-5$					
$f(x)=-x^2+6x$					
$f(x)=x^2-2x+4$					

نشاط 1 تمثيلُ الاقترانِ التربيعيِّ بيانيًّا

خطواتُ تمثيلِ الاقترانِ التربيعيِّ بيانيًّا

أحددُ اتجاهَ القطعِ: $a > 0$ مفتوحٌ للأعلى ∪ ، $a < 0$ مفتوحٌ للأسفلِ ∩

↓

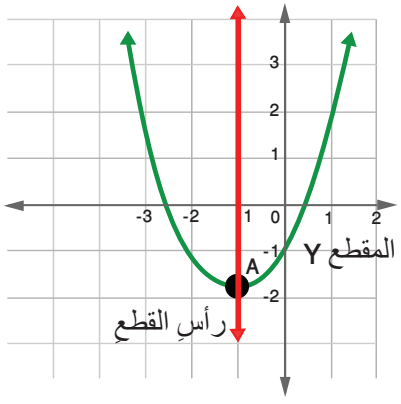
أجدُ معادلةَ محورِ التماثلِ

↓

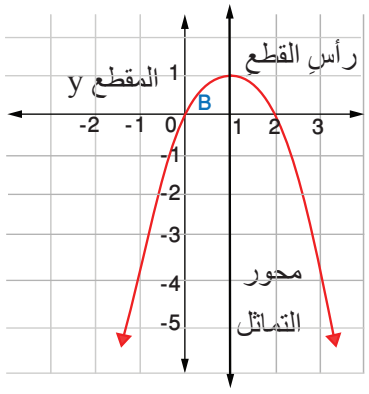
أجدُ إحداثياتِ رأسِ القطعِ

أجدُ أحداثياتِ المقطعِ y : أختارُ قيمةً للمتغيرِ x تقعُ في جهةِ المقطعِ y نفسِها

1) أمثلُ الاقترانَ $f(x)=x^2+2x-1$ بيانيًّا

السؤالُ	الحلُّ	التمثيلُ البيانيُّ
1 أجدُ قيمَ المعاملاتِ a,b,c	a= b= c=	محور التماثل 
2 أحددُ اتجاهَ القطعِ	بما أنَّ $a=1$ فإنَّ المنحنى مفتوحٌ للأعلى.	
3 أجدُ معادلةَ محورِ التماثلِ	$x =$ $x = -1$	
4 أجدُ إحداثياتِ رأسِ القطعِ	$f(-1)=$ إحداثيات الرأسِ (,)	
5 أجدُ المقطعَ y	المقطعُ y هو قيمةُ الثابتِ c فالمقطعُ يساوي -1 إذنْ إحداثيات المقطعِ y هو $(0 ,-1)$	
6 أختارُ قيمةً للمتغيرِ x والقيمةَ المناظرةَ لها في الاقترانِ $f(x)$	أختارُ قيمةَ $x =$ $f(1)=1^2+2(1)-1=2$ أحصلُ على الزوجِ المرتبِ $(1,2)$	المجالُ $(-\infty,\infty)$ المدى { y | } او القيمةُ الصغرى هي -2
7 أعينُ النقاطَ على المنحنى وأصلُ بينَها بخطٍّ منحنٍ، فيظهرُ الشكلُ في التمثيلِ البياني.	إحداثياتُ الرأسِ (,) إحداثياتُ المقطعِ y (,) إحداثياتُ نقطةٍ على المنحنى (,)	

2) أمثلُ الاقترانَ $f(x) = -x^2 + 2x$ بيانيًّا

السؤالُ	الحلُّ	التمثيلُ البيانيُّ
1 أجدُ قيمَ المعاملاتِ a,b,c	a= b= c=	
2 أحدد اتجاهَ القطعِ	بما انَّ a=−1 فإنَّ المنحنى مفتوحٌ.....	
3 أجدُ معادلةَ محورِ التماثلِ		
4 أجدُ إحداثيات رأسِ القطعِ	إحداثياتُ الرأسِ (,)	
5 أجدُ المقطعَ y	المقطع y يساوي اذنّ احداثياتُ المقطعِ y (,)	
6 أختارَ قيمةً للمتغيرِ x والقيمةَ المناظرةَ لها في الاقترانِ $f(x)$	أختارُ قيمةَ $x =$ ....: أحُصل على الزوجِ المرتبِ (,)	
7 أعينُ النقاطَ على المنحنى وأصلُ بينها بخطٍّ منحنٍ، فيظهرُ الشكلُ في التمثيل البيانيِّ.	إحداثياتُ الرأسِ (,) إحداثياتُ المقطعِ y (,) إحداثياتُ نقطةٍ على المنحنى (,)	

المجالُ .....

المدى .....

القيمةُ العظمى.....

أقيمُ ذاتي: أرسمُ الوجهَ الذي يُعبِّر عن درجةِ رضايَ عنْ أدائي وتفاعلي في أثناءِ الأنشطةِ داخلَ ( ).

أستطيعُ حلَّ الأنشطةِ من دونِ مساعدةٍ. أتوجهُ إلى كتابي وأكملُ حلَّ "أتدربُ" وأحلُّ المسائلَ.	أستطيعُ حلَّ الأنشطةِ معَ بعضِ المساعدةِ. أسألُ زميلاً أتقنَ المهارةَ.	لم أتمكنْ من حلِّ الأنشطةِ. أستعينُ بزميلٍ أتقنَ المهارةَ أو معلمي، ويمكنُ أن أبحثَ عن مصدرٍ آخرَ للمعرفةِ.
• أحددُ خواصَّ الاقترانِ التربيعيِّ ( )		• أمثلُ الاقترانَ التربيعيَّ بيانيًّا ( )