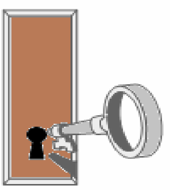
مدرسة البقعة الثانوية للبنين

Hasanat



الرياضيات 2022

الصف الثاني الثانوي

الأدبي 2005

الأدبي

وحدة الاقترانات الأُسِّية واللوغاريتمية

إعداد الأستاذ : **عبدالقادر الحسنات** 078 531 88 77

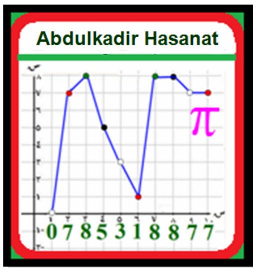
عبدالقادر الحسنات

2 ∞ & >

I ❤ Maths $\sqrt[3]{64}$ Ever

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

I LOVE MATH
SAID NO ONE EVER!



الرياضيات 2022

الصف الثاني الثانوي

الأدبي

مراجعة تأسيسية

إعداد الأستاذ : **عبدالقادر الحسنات** 078 531 88 77

I ❤ Maths $\sqrt[3]{64}$ Ever

2 ∞ & >

I LOVE MATH
SAID NO ONE EVER!

أهم المفاهيم الأساسية

1) الأعداد السالبة والموجبة

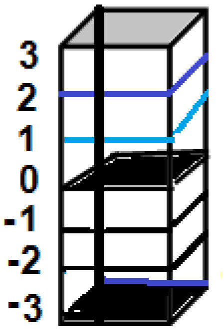
أ) الجمع والطرح : عند جمع عددين نعتبر الموجب (رصيد) أو (ربح) والسالب (دين) أو (خسارة)

مثال : (-8) + (+3) : تعني إذا كان عليك دين مقداره (8) دنانير وحصلت على رصيد لتسديد الدين مقداره (3) دنانير ، بعد التسديد ما هو وضعك المالي ؟

الجواب :يبقى عليك (5) دنانير دين ، إذاً الناتج (- 5)

أو :(- 8) + (3+) :قمتَ بعمليتين تجاريتين خسرتَ في الأولى (8) دنانير وربحتَ في الثانية (3) دنانير ماذا حدث لرأسمالك الأصلي ؟ زادَ أم نقص ؟

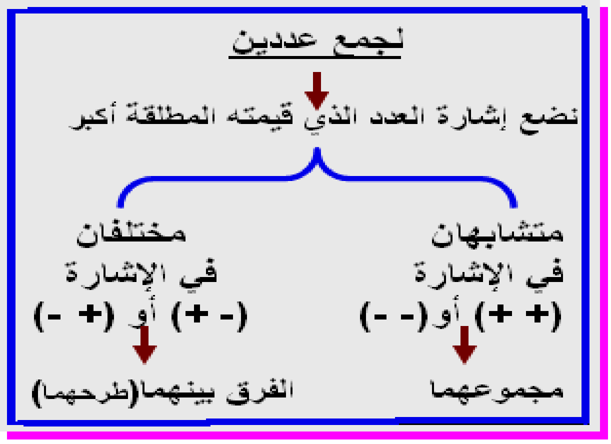
الجواب :نقصَ بمقدار (5) دنانير، إذاً الناتج (-5)



* * * كذلك يمكن أن تعتبر الموجب صعود والسالب نزول: (-3) + (+5) :
أنت في الطابق الثالث تحت الأرض (-3) وصعدت خمس طوابق ، فإلى أي طابق تصل ؟
(الطابق الثاني فوق الأرض (+2))

أيضاً : (-2) + (-3) : أنت في الطابق الثاني تحت الأرض ونزلت ثلاث طوابق فتصبح في الطابق الخامس تحت الأرض (-5)

كما يمكن استخدام القاعدة التالية:



مع ملاحظة أن (العدد الذي قيمته المطلقة أكبر) تعني العدد الأكبر بعد حذف الإشارات

مثلاً :(-5) قيمته المطلقة أكبر من (+3) لأن (5) أكبر من (3)

(-7) قيمته المطلقة أكبر من (-4) لأن (7) أكبر من (4)

مثال :

5 أكبر من 3 وإشارتها سالبة لذلك الناتج سيكون سالباً (-5+3=-2) أو 1) (-5) + (+3)= -2

ولأنهما مختلفان في الإشارة نجد الفرق بينهما (نطرح) فيكون الجواب (-2)

4 أكبر من 2 وإشارتها سالبة لذلك الناتج سيكون سالباً (-4-2=-6) أو 2) (- 4) + (-2)=-6

ولأنهما متشابهان في الإشارة نجد المجموع (نجمع) فيكون الجواب (-6)

6 أكبر من 2 وإشارتها موجبة لذلك الناتج سيكون موجباً (-2+6=+4) أو 3) (-2) + (+6)=+4

ولأنهما مختلفان في الإشارة نجد الفرق بينهما (نطرح) فيكون الجواب (4+)

ملاحظة(1): إذا لم يكن هناك إشارة أمام العدد فهو موجب : + 6 = 6

فعندما لا يكون هناك أقواس(وهذا هو الأغلب مثل : –3 +7) نعتبر العملية التي أمام العدد هي إشارته ، فهنا 3 سالبة و 7 موجبة ، والأكبر موجب ⇐ الناتج موجب : مختلفان في الإشارة
⇐ نطرح وبالتالي الناتج (+4)

2

ملاحظة(2): إذا التقت إشارتا سالب فنحولهما إلى موجب ، مثلا : 3 +=5 +2 – = 5 – – 2 –

أما إذا التقت إشارتا موجب وسالب(+ -) أو العكس (- +) فنحولهما إلى سالب

+ –
– + } ⇒ – | – – ⇒ +

إشارتان مختلفتان دائماً سالب
سالب سالب تعني موجب

مثلا:

(على أساس أن 9 سالبة و 3 موجبة ⇐ نطرح) 1) -9+3=-6

(على أساس أن 7 سالبة و 2 سالبة ⇐ نجمع) 2) -7-2=-9

4) موجبة و7 سالبة وهي الأكبر ، مختلفان في الإشارة ، إذاً نطرح) 3) 4 – 7 = - 3

(كلاهما سالب ⇐ نجمع) 4) -5x – 2x= -7x

Hasanat

ملاحظة(3): إذا لم يكن هناك إشارة أمام العددين وكان الجواب (لا يجوز)- أي دون التعامل مع السالب-

فنقوم بتبديل مكاني العددين ونضع إشارة سالب أمام الناتج : a – b = –(b – a)

مثلاً : 2– = (6 – 8)– = 8 – 6 ، كذلك ، 3 – = 10 – 7

تمارين

(a) 2 − 3= (b) − 3 − 5= (c) − 4 + 9= (d) 1 − 5 =

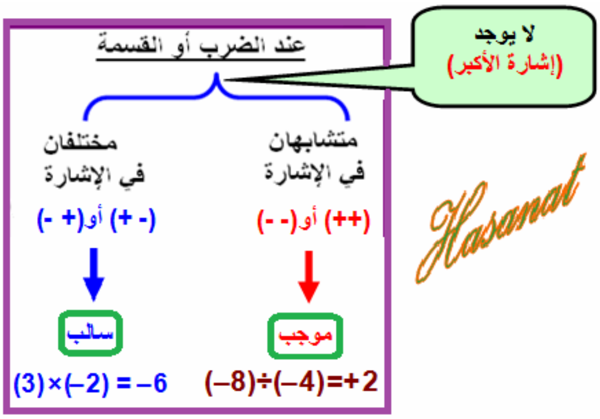
(e) − 5 − 7 = (f) − 6 + 2 = (g) 8 − 11 = (h) 2 − 10=

(i) −2 + 4= (j) −3 + 9 = (k) −7 + 10= (l) −6 + 1=

الإجابات	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o
	-1	- 8	5	- 4	-12	- 4	- 3	- 8	2	6	3	- 5			

ب) الضرب والقسمة:

عند الضرب أو القسمة لا يوجد أكبر (متشابهان في الإشارة الناتج موجب) ، (مختلفان في الإشارة الناتج سالب)



مثال : 1) (-5) x (+3)= -15

2) (-4) x (-2)= 8

3) (+6) x (-2)= -12

4) (-5)÷ (+5)=-1

5) (-8)÷ (-2)=4

تمارين

a) 2 × −3 = (b) −4 × 3= (c) −5 × 5= (d) −7 × −2=

e) −6 × −3= (f) 8 × −4 = (g) −9 × 3= (h) −5 × −8=

i) −10 ÷ 2 = (j) −12 ÷ 3= (k) −24 ÷ 4= (l) −42÷ 6=

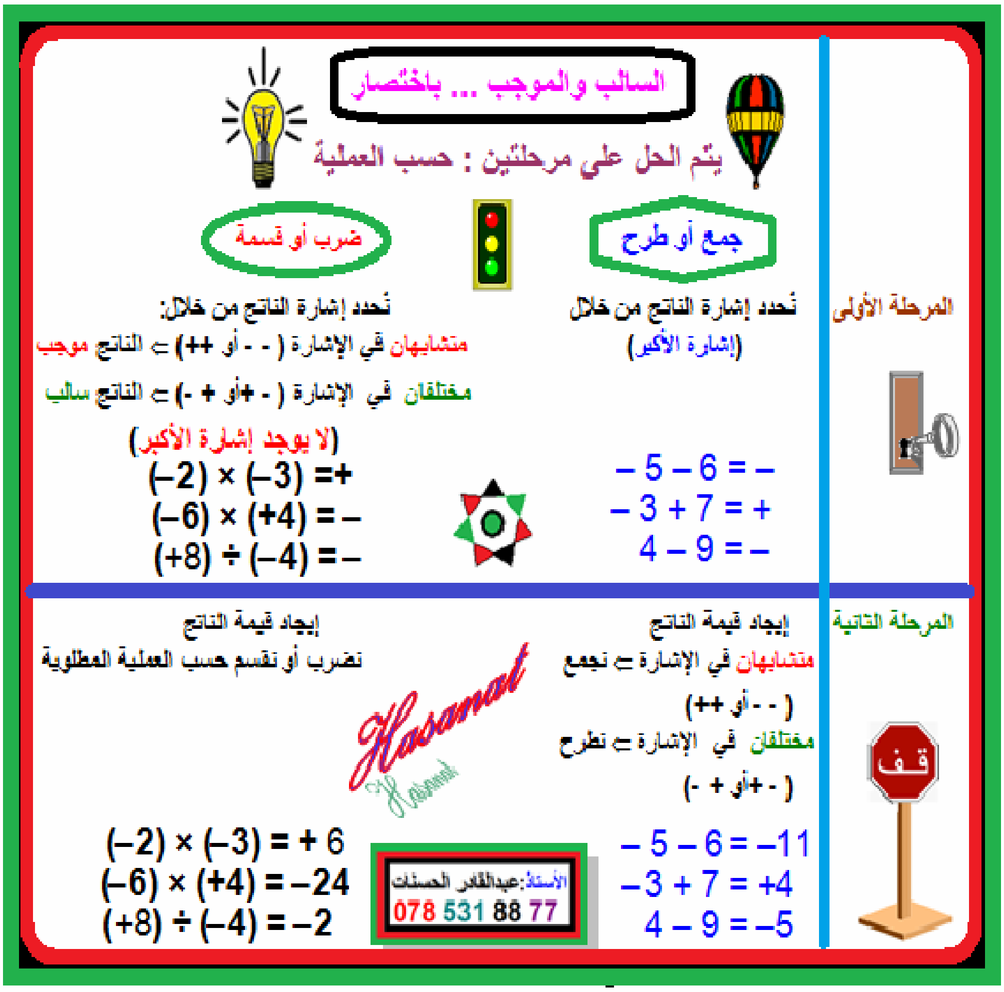
m) −10 ÷ − 5 = (n) −15 ÷ −3= (o) −36 ÷ −9= (p) 42 ÷ −7=

الإجابات	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p
	- 6	- 12	- 25	14	18	- 32	- 27	40	- 5	- 4	- 6	- 7	2	5	4	- 6

أخطاء قاتلة : بحجة سالب وسالب = موجب (الصواب(8−) لأنه جمع وليس ضرباً) 1) – 3 – 5 = + 8

2) –3×5 = +15 لأن إشارة الأكبر موجبة (الصواب(15−) لا يوجد أكبر عند الضرب)

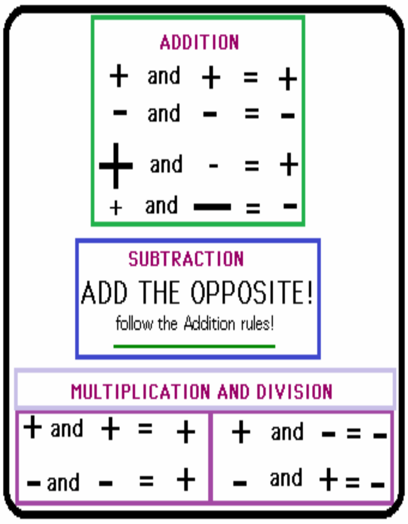
3) – 4 – 4 = 0 (الصواب(8–) لأن كلاهما سالب فنجمع)



السالب والموجب ... باختصار

يتم الحل على مرحلتين : حسب العملية

	جمع أو طرح	ضرب أو قسمة
المرحلة الأولى	نحدد إشارة الناتج من خلال (إشارة الأكبر) – 5 – 6 = – – 3 + 7 = + 4 – 9 = –	نحدد إشارة الناتج من خلال: متشابهان في الإشارة (- - أو ++) ⇐ الناتج موجب مختلفان في الإشارة (- +أو + -) ⇐ الناتج سالب (لا يوجد إشارة الأكبر) (–2) × (–3) =+ (–6) × (+4) = – (+8) ÷ (–4) = –
المرحلة الثانية	إيجاد قيمة الناتج متشابهان في الإشارة ⇐ نجمع (- - أو ++) مختلفان في الإشارة ⇐ نطرح (- +أو + -) – 5 – 6 = –11 –3 + 7 = +4 4 – 9 = –5	إيجاد قيمة الناتج نضرب أو نقسم حسب العملية المطلوبة (–2) × (–3) = + 6 (–6) × (+4) = –24 (+8) ÷ (–4) = –2



ADDITION

\+ and + = +
\- and - = -
\+ and - = +
\+ and — = -

SUBTRACTION

ADD THE OPPOSITE!

follow the Addition rules!

MULTIPLICATION AND DIVISION

+ and + = +	+ and - = -
- and - = +	- and + = -

(a) 4 + −1 = (b) − 6 + −2 = (c) 8 + −7 = (d) 3 + −5 =

(e) 1 + −7 = (f) −3 + 3= (g) −2 + −1= (h) −1− 1=

i) 2 × −3 = (j) −4 × 3= (k) −4 × 4= (l) −7 × −2=

m) −6 × −3= (n) 8 × −4 = (o) −9 × 3= (p) −5 × −8=

q) 10 ÷ −2 = (r) 12 ÷ − 3= (s) −16 ÷ 4= (t) 42 ÷ − 6=

u) −10 ÷ − 2 = (v) −15 ÷ 3= (w) −24 ÷ −8 = (x) −42÷ −7=

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p
الإجابات	3	- 8	1	- 2	- 6	0	- 3	- 2	- 6	- 12	- 16	14	18	- 32	- 27	40

	q	r	s	t	u	v	w	x
الإجابات	- 5	- 4	- 4	- 7	5	- 5	3	6

4

2) الكسور العادية

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

أ) قاعدة الجمع والطرح : نضرب بسط الأول في مقام الثاني ثم(±)
ثم بسط الثاني في مقام الأول ونقسم على حاصل ضرب المقامين

$$3\frac{7}{10}=\frac{(3\times10)+7}{10}$$

$$\frac{-3}{7}+\frac{5}{8}=\frac{-24}{56}+\frac{35}{56}=\frac{-24+35}{56}=\frac{11}{56}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{4}{9}=\frac{9+20}{45}=\frac{29}{45}$$

$$\frac{6}{5}-\frac{10}{3}=\frac{6\cdot3-10\cdot5}{3\cdot5}=\frac{18-50}{15}=\frac{-32}{15}$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3-2}{6}=\frac{1}{6}$$

$$\frac{7}{8}-\frac{5}{9}=\frac{63-40}{72}=\frac{23}{72}$$

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

ب) قاعدة الضرب:
نضرب بسط الأول في بسط الثاني مقسوما
على حاصل ضرب مقام الأول في مقام الثاني

$$\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

$$b\neq0\ ;\ c\neq0$$

$$\frac{-2}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{-2\times1}{5\times6}=\frac{-2}{30}$$

ج) قاعدة القسمة:نحول القسمة إلى ضرب
ونقلب المقسوم عليه ثم نطبق قاعدة الضرب السابقة

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

$$\frac{5}{-6}\div\frac{-3}{2}=\frac{5}{-6}\times\frac{+2}{-3}=\frac{5\times2}{-6\times(-3)}=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$$

$$\frac{-4}{5}\div2=\frac{-4}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{-4\times1}{5\times2}=\frac{-2}{5}$$

ملاحظة :
أي عدد أو متغير يوجد معه (3 واحدات) مخفية نُظهر منها ما يلزم للعملية الحسابية المطلوبة

$$6=\frac{1\times6^1}{1}$$

مثلاً:

$$7\times7^3=7^1\times7^3=7^{1+3}=7^4$$

$$3+\frac{2}{5}=\frac{3}{1}+\frac{2}{5}=\frac{15+2}{2}=\frac{17}{5}$$

$$4x+4=4x+4(1)=4(x+1)$$

$$3\frac{1}{2}=\frac{2\times3+1}{2}=\frac{7}{2}$$

تمارين

① $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=$

② $\frac{4}{5}+\frac{1}{6}=$

③ $7-\frac{5}{8}$

④ $\frac{3}{4}\times\frac{6}{9}$

⑤ $\frac{-1}{7}\times\frac{2}{3}$

⑥ $9\times(-1\frac{2}{7})$

⑦ $(\frac{6}{8})\times(-3\frac{1}{2})$

⑧ $2\frac{3}{5}\times2\frac{1}{6}$

⑨ $11\times1\frac{4}{5}$

⑩ $11\div\frac{2}{3}$

⑪ $\frac{4}{6}\div\frac{1}{12}$

⑫ $5\frac{3}{4}\div\frac{2}{7}$

3) الكسور العشرية

5

يُسمى الكسر العادي الذي مقامه (10) أو أحد قواها (10 ، 100 ، 1000 ، ...) بالكسر العشري

مثل : $\frac{3}{10}$; $\frac{125}{10}$; $\frac{4}{100}$ ويمكن كتابة الكسر العشري باستخدام الفاصلة (.)

بشرط أن يكون عدد المنازل على اليمين مساويا لعدد الأصفار أمام العدد (1) في المقام

مثلاً : $\frac{7}{10}=0.7$; $\frac{123}{100}=1.23$; $\frac{25}{1000}=0.025$

جمع وطرح الكسور العشرية :عند الجمع والطرح نكتب العددين تحت بعضهما بحيث كون الفاصلة تحت الفاصلة

$$\begin{array}{r} 31.3 \\ +16.4 \\ \hline 47.7 \end{array}$$

$$78.9-37.43= \begin{array}{r} 78.\overset{8}{\cancel{9}}{}^{1}0 \\ -37.43 \\ \hline 41.47 \end{array}$$

$$17-8.43= \begin{array}{r} 1\overset{6}{\cancel{7}}.\overset{9}{\cancel{0}}{}^{1}0 \\ -\ 8.43 \\ \hline 8.57 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 31.3 \\ -16.4 \\ \hline 14.9 \end{array}$$

$$23.6+1.75+300.002= \begin{array}{r} 23.600 \\ 1.750 \\ +300.002 \\ \hline 325.352 \end{array}$$

$$54.26-1.1= \begin{array}{r} 54.26 \\ -\ 1.10 \\ \hline 53.16 \end{array}$$

ضرب الكسور العشرية :عند الضرب نفترض عدم وجود الفواصل ونضرب العددين الصحيحين وفي الناتج نضع الفاصلة بحيث يكون عدد المنازل على اليمين مساويا لمجموع عددي المنازل على يمين العددين

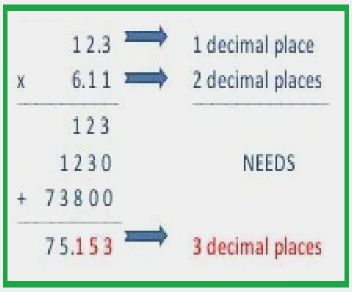
$$40.012\times 3.1=$$

$$\begin{array}{rl} 40.012 \leftarrow & \text{3 منازل} \\ \times\quad 3.1 \leftarrow & \text{منزلة واحدة} \\ \hline 40012 & \\ 120036 & \\ \hline 124.0372 \leftarrow & \text{المجموع 4 منازل} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7.3 \\ \times\ \ 27 \\ \hline 511 \\ +\ 1460 \\ \hline 197.1 \end{array}$$

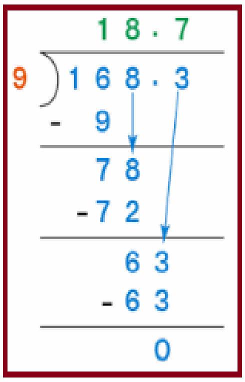
$$\begin{array}{r} 2.25 \\ \times\ \ 31 \\ \hline 225 \\ +\ 6750 \\ \hline 69.75 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3.45 \\ \times\ \ 1.2 \\ \hline 690 \\ +\ 3450 \\ \hline 4.140 \end{array}$$



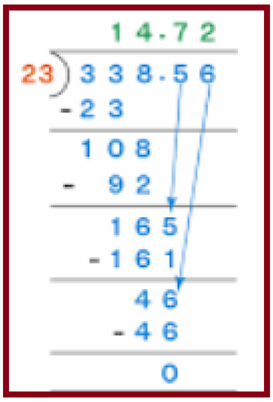
$$\begin{array}{rl} 12.3 \Rightarrow & \text{1 decimal place} \\ \times\quad 6.11 \Rightarrow & \text{2 decimal places} \\ \hline 123 & \\ 1230 & \text{NEEDS} \\ +\ 73800 & \\ \hline 75.153 \Rightarrow & \text{3 decimal places} \end{array}$$

قسمة الكسور العشرية :عند القسمة يجب أن يكون المقسوم عليه عددا صحيحا ، لذلك نُحرك الفاصلة إلى اليمين في المقسوم والمقسوم عليه حتى يصبح الأخير صحيحا ثم نقسم إلى أن نصل الفاصلة فنرفعها إلى الناتج



$$\begin{array}{r} 18.7 \\ 9\,\overline{)\,168.3} \\ -\ 9 \\ \hline 78 \\ -72 \\ \hline 63 \\ -63 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5.5 \\ 6\,\overline{)\,33.0} \\ 30 \\ \hline 30 \\ 30 \\ \hline 0 \end{array}$$

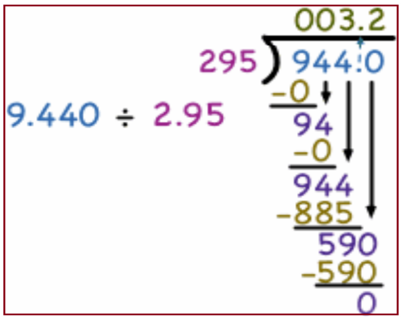


$$\begin{array}{r} 14.72 \\ 23\,\overline{)\,338.56} \\ -23 \\ \hline 108 \\ -\ 92 \\ \hline 165 \\ -161 \\ \hline 46 \\ -46 \\ \hline 0 \end{array}$$

5 ÷ 1.25 =

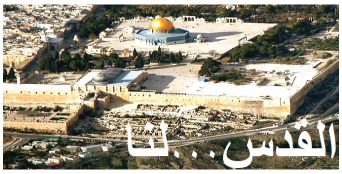
500 ÷ 125 =

$$\begin{array}{r} 4 \\ 125\,\overline{)\,500.} \\ 500 \\ \hline 0 \end{array}$$



$$9.440\div 2.95$$

$$\begin{array}{r} 003.2 \\ 295\,\overline{)\,944.0} \\ -0 \\ \hline 94 \\ -0 \\ \hline 944 \\ -885 \\ \hline 590 \\ -590 \\ \hline 0 \end{array}$$



Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

4) المقادير الجبرية:

1) مفهوم (الحد) في الرياضيات :هو أي مقدار جبري لا يحتوي على جمع (+) أو طرح (–)
مثلاً : (3xy) حد واحد بينما ($4x + 2y – 5$) يتكون من 3 حدود

يتكون الحد من جزأين : عددي وحرفي ، ويسمى العددي بالمعامل
مثلاً : (6xy) معامله (6) كذلك ($–3x^2$) معامله (– 3)

$$x + x = 2x$$

$$(x)(x) = x^2$$

$$\frac{x}{x} = 1$$

2) يتشابه حدان إذا كان فيهما نفس المتغيرات بنفس القوى
مثلاً : ($3x^2y$) ، ($5x^2y$) متشابهان ، بينما ($4x^2y^3$) ، ($5xy^3$) غير متشابهين

3) لا يمكن جمع أو طرح إلا الحدود الجبرية المتشابهة – عندها نجمع أو نطرح المعاملات
مثلاً : ($5xy^3 + 4xy^3 = 9xy^3$) بينما ($3xy^2 + 4xy^3 =$) لا يمكن جمعهما لأنهما غير متشابهين

4) عند الضرب أو القسمة لا يشترط التشابه حيث نضرب أو نقسم المعاملات
ونجمع الأسس عند الضرب ونطرحها عند القسمة : مثلاً : $(3x^2)(4x^3) = 12x^5$

ملاحظة : مفهوم (x) أو (y) :
يدل الرمز (x) عادة على قيمة مجهولة في مقدار جبري (لا يوجد فيه إشارة =) أو معادلة (تحتوي إشارة =)
مثلاً : ($x + 3 = 8$) وهذه معادلة تعني : ما هو العدد الذي إذا أضيف إليه (3) يعادل (8)؟ ، والجواب (5)
أما إذا أراد أحمد أن يتصدق يومياً بمبلغ من المال تبعا لتاريخ ذلك اليوم في الشهر مضافاً إلية خمسة قروش
فإن المقدار الذي سيتصدق به هو : (تاريخ اليوم المعني) + 5 أو المقدار= ($x + 5$) وهذه ليست معادلة بل مقدار

---

5) القوس المسبوق بإشارة سالب : نعكس جميع الإشارات داخله

مثلاً:
$$6x^2 + 5x – 8 – (4x^2 – 3x +1) = 6x^2 + 5x – 8 –4x^2 + 3x – 1 = 2x^2 + 8x – 9$$

---

6) الأسس (القوى) :

1) الضرب المكرر يتم تحويله إلى أسس مثلاً :
$(5)(5)(5)=5^3$

2) عند الضرب (وتساوي الأساسات) نجمع الأسس مثلاً :
$(4^3)(4^2) = 4^{2+3} =4^5$

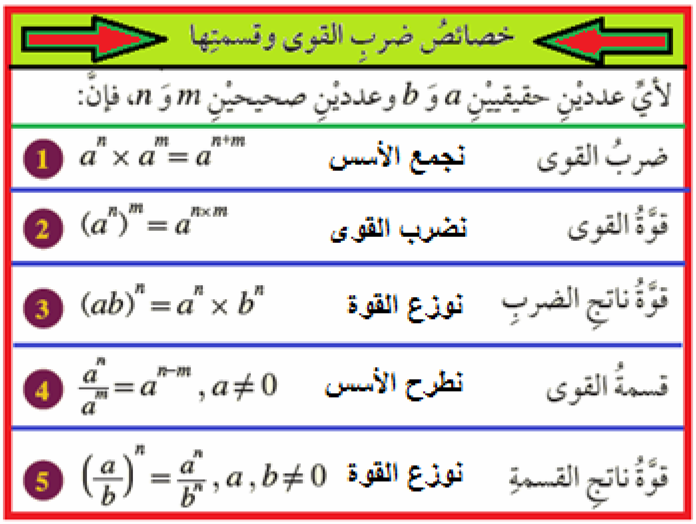
3) عند القسمة (وتساوي الأساسات) نطرح الأسس مثلاً :
$7^8 \div 7^2 = 7^{8-2} = 7^6$

$$\frac{7^4}{7^9}=7^{4-9}=7^{-5}=\frac{1}{7^5}$$

$$\frac{3^{11}}{3^6}=3^{11-6}=3^5$$

4) في حالة قوة القوة نضرب الأسس مثلاً :
$(7^3)^2 =(7)^{3(2)} = 7^6$

5) توزيع القوى ، مثلاً : $(x y)^2 = (x)^2 (y)^2$
كذلك $(3x)^2 = 9x^2$



خصائصُ ضربِ القوى وقسمتِها

لأيِّ عددينِ حقيقيَّيْنِ a وَ b وعددينِ صحيحيْنِ m وَ n، فإنَّ:

ضربُ القوى	نجمع الأسس	① $a^n \times a^m = a^{n+m}$
قوّةُ القوى	نضرب القوى	② $(a^n)^m = a^{n \times m}$
قوّةُ ناتجِ الضربِ	نوزع القوة	③ $(ab)^n = a^n \times b^n$
قسمةُ القوى	نطرح الأسس	④ $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, a \neq 0$
قوّةُ ناتجِ القسمةِ	نوزع القوة	⑤ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, a, b \neq 0$

- $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$
- $(x^m)^n = x^{m \times n}$
- $(x^m)(x^n) = x^{m+n}$

الأستاذ
عبدالقادر الحسنات
٠٧٨٥٣١٨٨٧٧

ملاحظة : $(x+ y)^2 \neq x^2 + y^2$ ، بل $(x+ y)^2 =(x+ y) (x+ y) = x^2 + 2xy + y^2$

$$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$$

$$(x-2)^2=(x-2)(x-2)=x^2-4x+4$$

7

6) القوة السالبة يتم تغيير مكانها من البسط إلى المقام أو العكس لتصبح موجبة :

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

أو نعكس البسط والمقام

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$

$3^{-2} = -9$ ✗

$$\frac{1}{9^{-2}} = \frac{9^2}{1} = \frac{81}{1} = 81$$

$$8^{-2} = \frac{1}{8^2} = \frac{1}{64}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^{+2} = \frac{25}{9}$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

7) القوة الكسرية يتم تحويلها إلى جذر :

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{m} = \sqrt[n]{\left(a^{m}\right)} \qquad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2 \qquad 25^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt[2]{25}\right)^{3} = 5^3 = 125$$

ملاحظة : أي عدد غير الصفر قوة صفر يساوي 1 ، مثلاً : $5^0 = 1$ ، $(2022)^0 = 1$ ، $(1443)^0 = 1$

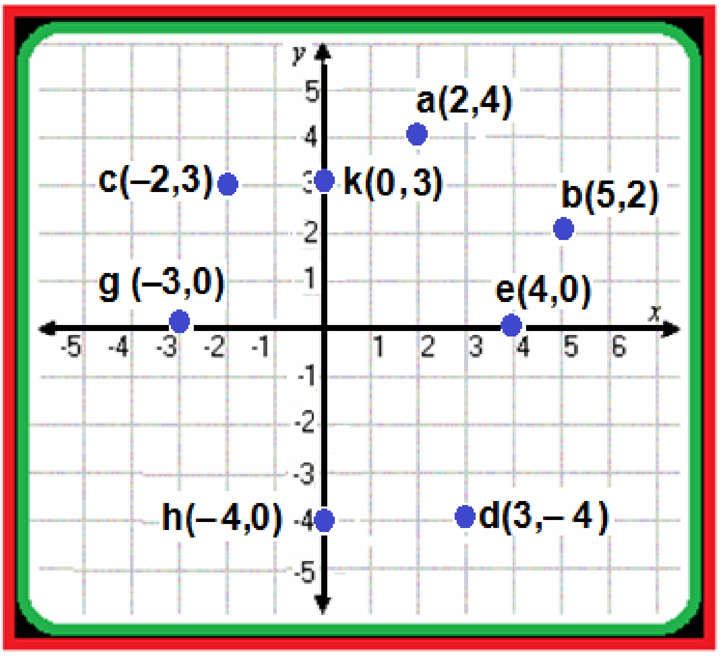
---

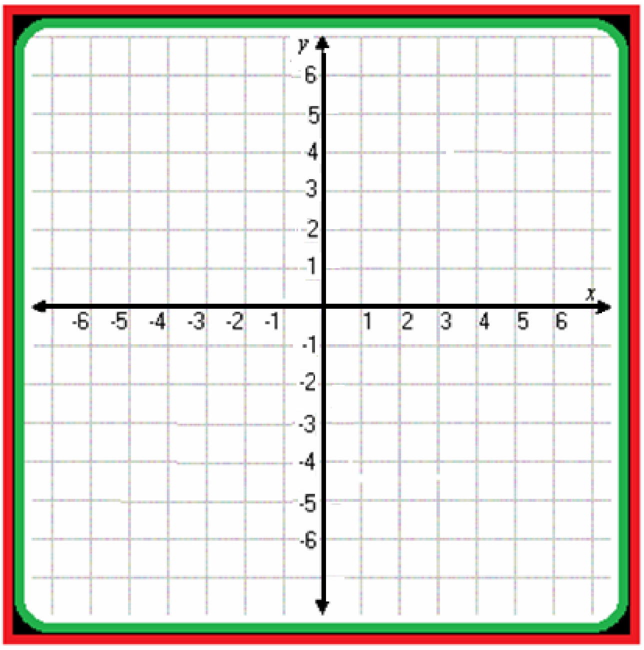
7) المستوى الديكارتي :

يتكون من مستقيمين متعامدين : الأفقي يسمى (x) ، والعمودي (y)

كل نقطة على المستوى (زوج مرتب) تتكون من جزأين : x و y ....(x ، y)

ولتحديد موقع النقطة (x ، y) ، نبدأ من نقطة الأصل ونتجه يمينا (إذا كان العدد موجبا) أو يسارا (في حالة السالب) ثم إلى الأعلى (موجب) أو الأسفل





حدد موقع النقاط الآتية على المستوى الديكارتي

a(1,4) b(–3,3) c(4,3) d(2,– 5) g(5,0)

e (–4,0) h (0,6) k(–5,0) m(–2, –6) n(–6,2)

8

8) الاقتران : صورة عدد ما في الاقتران هي القيمة الناتجة عن استبدال (x) بذلك العدد

مثلاً :

$f(x) = 3x - 1$

$f(2) = 3(2) - 1$

$= 5$

أي أن صورة العدد (2) في الاقتران f هي (5)

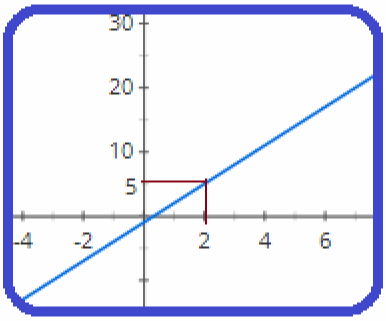
$g(x) = 5x^2 + 2x - 4$

$g(3) = 5(3)^2 + 2(3) - 4$

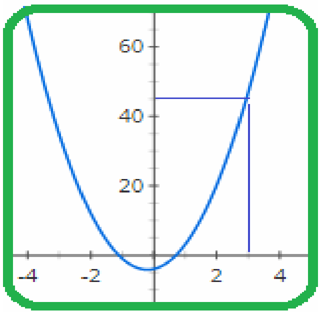
$= 47$

أي أن صورة العدد (3) هي (47)

والزوج المرتب (5 ، 2) يقع على منحنى الاقتران f



والزوج المرتب (47 ، 3) يقع على منحنى الاقتران g



9) فك الأقواس : الأول × الأول + الأول × الثاني + الثاني × الأول + الثاني × الثاني

1) $(x + 2)(x + 3) = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6$

2) $(3x + 1)(x - 5)= 3x^2 -15x + x - 5 = 3x^2 -14 x - 5$

3) $(2x^2 - x)(3x^3 - 5)= 6x^5 -10x^2 -3x^4 + 5x$

4) $(x +5)^2 = (x + 5)(x + 5) = x^2 + 10x + 25$

$(a + b)^2 = (\ )^2 + 2(\ )(\ ) + (\ )^2$

$= a^2 + 2ab + b^2$

مربع الأول + 2 × الأول × الثاني + مربع الثاني

$(2x + 5)(x^2 - 1) = 2x^3 - 2x + 5x^2 - 5 = 2x^3 + 5x^2 - 2x - 5$

$(a + b)^3 = (\ )^3 + 3(\ )^2(\ ) + 3(\ )(\ )^2 + (\ )^3$

مكعب الأول + 3× مربع الأول × الثاني +3×مربع الثاني × الأول + مكعب الثاني

تمارين

1) $4x(5x^2 -7x -3)=$

2) $6x^5 (5x^2 - 7x + 1)=$

3) $8xy(x + 8y)=$

4) $(x - 7)(3x + 1)=$

5) $(7n + 8)(8n - 3)=$

6) $(5p - 5)(7p + 6)=$

7) $(5x + 2)(7x - 2)=$

8) $(2a - 8b)(6a - 8b)=$

9) $(7x - 5y)(2x + 5y)=$

10) $(2a - 6b)(7a - 3b)=$

11) $(3m - 2)^2 =$

12) $(x^2 - 4)^2 =$

13) $(x + 6y)(5x + 7y)=$

14) $(3x - y)(6x^2 + 5xy - 7y^2)=$

10) ترتيب العمليات الحسابية (الأولويات):

1) الأقواس : ( ) ، [ ] ، { }

2) الأسس والجذور

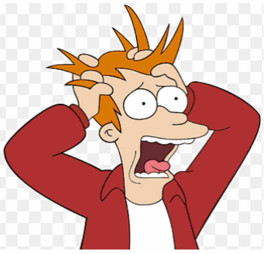
3) الضرب والقسمة

4) الجمع والطرح

9

The order of operations is:

1) Brackets
2) Indices
3) Dividing and Multiplying
4) Adding and Subtracting



$3+2\times 4 = 5\times 4 = 20$ ✗

$3+2\times 4 = 3 + 8 = 11$ ✓

الضرب قبل الجمع

مثلا :

1) $4 + 5(2)= 4 + 10 = 14$

2) $3 – 5^2 = 3 – 25 =– 22$

3) $6 + 5(3)^2 = 6 + 5(9) = 6 + 45 = 51$

4) $4 – (1 – 5)^2 + (4 – 6)^3 + 4(3)^2 = 4 – (–4)^2 + (–2)^3 + 4(9)$
$= 4 – 16 + – 8 + 36$
$= – 12 + 28 = 16$

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

1. $5(3 + 5) + 20 =$
2. $42 \div 7 + 9 \times 4 =$
3. $20 + 4^2 \times 2 =$
4. $5^2 + 3^2 \times 2 =$
5. $12(32 \div 4) + 4^2 =$
6. $4 \times 4 + 12 \times 7 =$
7. $10(4 \times 5) \times 2 =$
8. $5^2 \times 3(10 + 5) =$
9. $96 + 12(20 - 8) \times 2 =$
10. $22 \times 2 + 18 \times 2 =$

© Freemathworksheets 2021

1. $9 \times 8 + 7 \times 6 + 3^2 =$
2. $5 \times 2(6 + 6) + 4 \times 8 =$
3. $9^2 \times 2 + 2 \times 9 =$
4. $8 \times 8 + 7 \times 7 + 4^2 =$
5. $81 \div 9 \times 7 \div 7 =$
6. $5^2 \times 5 \times 2 =$
7. $54 \div 9 + 8 \times 5 =$
8. $5(5 \times 4) + 3(4 \times 2) =$
9. $18(5 - 3) \times 2 + 7^2 =$
10. $5 \times 5 + 6 \times 6 =$

11) التحليل إلى العوامل :

Factoring is an action in which polynomial is represented as
a product of simpler polynomials that cannot be further factored

التحليل إلى العوامل في المقادير الجبرية ،هو كتابة المقدار على شكل حاصل ضرب مجموعة من المقادير كل منها أصغر منه درجة ،ولا يمكن تحليل أيا منها

ومن طرقه (العامل المشترك ، الفرق بين مربعين ...) ولتجنب الأخطاء نقوم بذلك على شكل خطوات :

أولاً:العامل المشترك : دائماً نبدأ بالسؤال التالي : هل يوجد عامل مشترك؟(5x –10 ،

مثلاً:

1) $5x - 10 = 5x - 5(2) = 5(x-2)$

2) $3x^2 + 6x = 3xx + 2(3)x = 3x(x+2)$

ثانياً:الفرق بين مربعين:إذا لم يكن هناك عامل مشترك، نلاحظ فيما إذا كان المقدار فرق بين مربعين أو مكعبين :

مثلاً:

1) $x^2 - 9 = (x)^2 - (3)^2 = (x-3)(x+3)$

2) $x^2 + 4 = (b^2 - 4ac$ (المميز لا يمكن تحليلها لأن المميز سالب

3) $x^3 - 8 = (x)^3 - (2)^3 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$

4) $x^3 + 27 = (x)^3 + (3)^3 = (x+3)(x^2 - 3x + 9)$

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)}$$

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned}a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2-ab+b^2)\\ a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2+ab+b^2)\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\ (a-b)^3 &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\end{aligned}}$$

ثالثاً: إذا لم يكن كذلك نلاحظ فيما إذا كان ثلاثي حدود : $ax^2 + bx + c$

تحليل ثلاثي الحدود : $x^2 + bx + c$: نبحث عن عددين حاصل ضربهما (c) ومجموعهما (b)

1) $x^2 + 2x - 15$: نبحث عن عددين حاصل ضربهما (-15) ومجموعهما (2)

وهما (2– ، 5) لذلك :

$x^2 + 2x - 15 = (x-2)(x+5)$

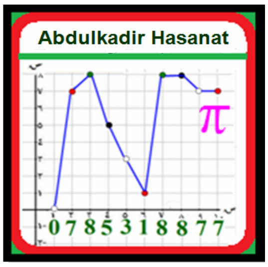
وهذا يعنى أن الاقتران $f(x) = x^2 + 2x - 15$ يقطع محور السينات عند النقطتين (x=2)،(x= – 5)

2) $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$

3) $x^2 - 9x + 20 = (x-5)(x-4)$

4) $x^2 - 8x - 20 = (x-10)(x+2)$

5) $x^2 + x - 20 = (x+5)(x-4)$



ويمكن استخدام القانون العام

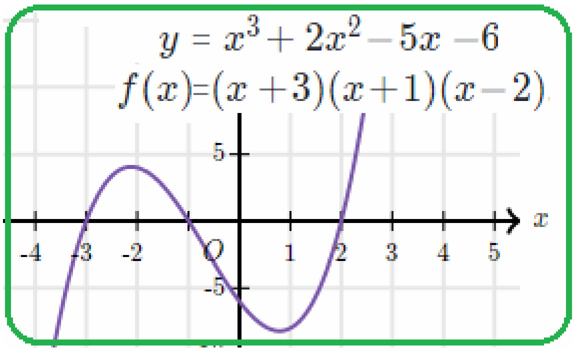
$x^2+12x+32=0$ $\boxed{a=1\ \ b=12\ \ c=32}$

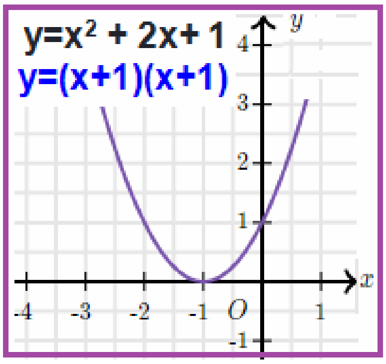
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-12\pm\sqrt{(12)^2-4(1)(32)}}{2(1)}$$

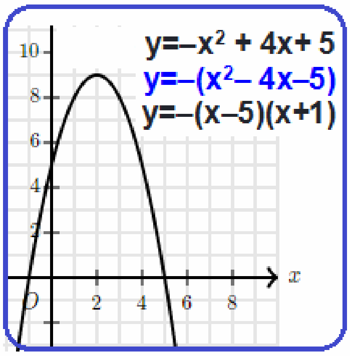
$$=\frac{-12\pm\sqrt{144-128}}{2}=\frac{-12\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{-12\pm4}{2}$$

$$=\frac{-12+4}{2}\ \boxed{x=-4}\qquad=\frac{-12-4}{2}\ \boxed{x=-8}$$

يمكن ملاحظة مفهوم التحليل إلى العوامل من خلال التمثيل البياني للاقتران المرافق وعلاقته بالمقطع من المحور (x)







1) $x^2 + 8x + 12 = (x \qquad)(x \qquad)$

2) $x^2 - 4x - 32 = (x \qquad)(x \qquad)$

3) $x^2 - 11x + 24 = (x \qquad)(x \qquad)$

4) $x^2 + x - 2 = (x \qquad)(x \qquad)$

5) $x^2 + 10x + 24 = (x \qquad)(x \qquad)$

6) $x^2 + 12x + 35 = (x \qquad)(x \qquad)$

7) $x^2 - 3x - 40 = (x \qquad)(x \qquad)$

8) $x^2 + 3x - 4 = (x \qquad)(x \qquad)$

9) $x^2 + 4x - 12 = (x \qquad)(x \qquad)$

10) $x^2 - 14x + 45 = (x \qquad)(x \qquad)$

11) $x^2 + 5x - 6 = (x \qquad)(x \qquad)$

12) $x^2 - 4 = (x \qquad)(x \qquad)$

13) $x^2 - 6x - 7 = (x \qquad)(x \qquad)$

14) $x^2 + 6x - 16 = (x \qquad)(x \qquad)$

15) $x^2 + 11x + 28 = (x \qquad)(x \qquad)$

16) $x^2 + 10x + 16 = (x \qquad)(x \qquad)$

17) $x^2 - 25x + 24 = (x \qquad)(x \qquad)$

18) $x^2 + 12x + 27 = (x \qquad)(x \qquad)$

19) $x^2 - 13x + 36 = (x \qquad)(x \qquad)$

20) $x^2 + 5x - 24 = (x \qquad)(x \qquad)$

21) $x^2 - 5x - 6 = (x \qquad)(x \qquad)$

22) $x^2 - 5x + 6 = (x \qquad)(x \qquad)$

23) $x^2 - 13x + 30 = (x \qquad)(x \qquad)$

24) $x^2 - 13x - 30 = (x \qquad)(x \qquad)$

ملاحظة: هناك حالات لا نجد فيها عددين صحيحين يحققان الشرطين السابقين عندها نستخدم المميز والقانون العام

هناك أكثر من طريقة $2x^2 + x - 6 =$

$(2x \qquad)(x \qquad)$

القريبان

البعيدان

$(2x - 3)(x + 2)$

حاصل ضرب القريبين : $-3x$

حاصل ضرب البعيدين : $4x$

المجموع = x = الحد الأوسط

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

أو عن طريق القانون العام :

a=2 , b= 1 , c = – 6

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-1 \mp \sqrt{1 - 4(2)(-6)}}{2(2)} = \frac{-1 \mp \sqrt{25}}{4} = \frac{-1 \mp 5}{4}$$

$x = \frac{-3}{2} \qquad x = 2$

$$y = ax^2 + bx + c \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$2x^2 + 5x - 3 = 0$ a = 2 / b = 5 / c = -3

$$\frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4}$$

$$= \frac{-5 \pm 7}{4} = \frac{-5 + 7}{4} \text{ or } \frac{-5 - 7}{4} = \frac{2}{4} \text{ or } \frac{-12}{4} = \left\{\frac{1}{2}, -3\right\}$$

الأستاذ
عبدالقادر الحسنات
٠٧٨٥٣١٨٨٧٧

طريقة التجميع المناسب أو التجزئة :

1) $2x^2 + 5x - 3$ نجد حاصل ضرب (الثابت × المعامل الرئيس = 2(-3) =-6)

نكتب الحد الأوسط كمجموع الناتج (5x=6x-x): $=2x^2 + 6x - x - 3 = 2x(x+3) - 1(x+3) = (x+3)(2x-1)$

ثم عامل مشترك بين كل حدين

2) $4x^2 + 12x + 5 = 4x^2 + 10x + 2x + 5 = 2x(2x+5) + 2x + 5 = (2x+1)(2x+5)$

3) $9x^2 - 15x + 4 = 9x^2 - 12x - 3x + 4 = (3x-1)(3x-4)$

4) $6x^2 + 11x - 10 = 6x^2 + 15x - 4x - 10 = (2x+5)(3x-2)$

تمارين

1) $6x^2 - 8x - 8 =$ $=(3x+2)(2x-4)$

2) $30x^2 - 8x - 6 =$ $= (5x-3)(6x+2)$

3) $2x^2 - 13x + 15 =$ $=(2x-3)(x-5)$

4) $3x^2 + 13x + 4 =$ $=(3x+1)(x+4)$

5) $2x^2 - x - 6 =$ $= (2x+3)(x-3)$

6) $2x^2 + 11x + 12 =$ $= (x+4)(2x+3)$

$$(a \mp b)^2 = a^2 \mp 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^2 + b^2 = - - - - - -$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

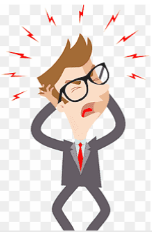
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$x^n - y^n = (x-y)\,(\,x^{n-1}y^0 + x^{n-2}y^1 + x^{n-3}y^2 + \dots + x^1y^{n-2} + x^0y^{n-1}$$

رابعاً : إذا لم يكن المقدار أياً مما سبق وكان من الدرجة الثالثة أو أكثر نحلل حده الثابت ونحاول الحصول على صفر (جذر) له مثل (a) ثم نستخدم القسمة التركيبية (أو الخوارزمية) ونقسمه على (x –a)



مثلاً: $f(x) = x^3 + 2x^2 - 11x - 12$

نبحث عوامل الحد الثابت (12) وهي: (1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 6 ، 12)

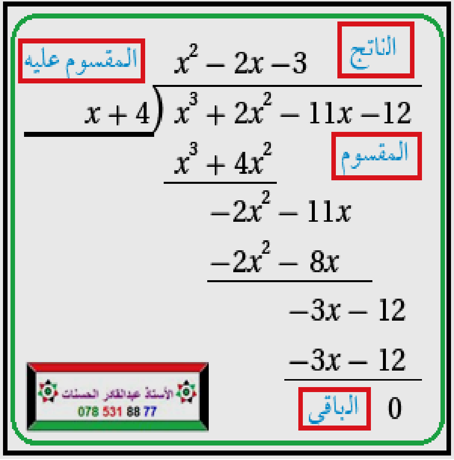
نعوض هذه العوامل بسالبها وموجبها في الاقتران إلى أن نحصل على (صفر) ونجده هنا $f(-4)=0$

نستخدم القسمة الخوارزمية لقسمة $f(x)$ على $(x + 4)$ ويجب أن يكون الباقي صفرا

وبالتالي : الاقتران = الناتج × العامل $(x+ 4)$

ثم نحلل الناتج (التربيعي) بالطرق السابقة $f(x) = (x+4)(x^2 - 2x - 3)$

$f(x) = (x+4)(x-3)(x+1)$



الناتج $x^2 - 2x - 3$

المقسوم عليه $x + 4$) $x^3 + 2x^2 - 11x - 12$ المقسوم

$x^3 + 4x^2$

$-2x^2 - 11x$

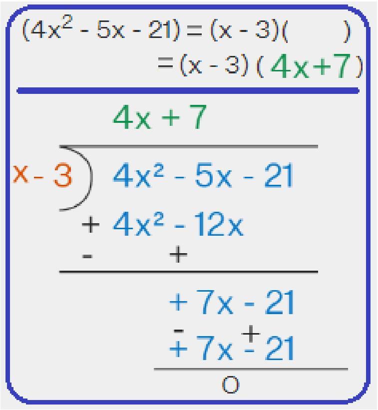
$-2x^2 - 8x$

$-3x - 12$

$-3x - 12$

الباقي 0

الأستاذ عبدالقادر الحسنات 078 531 88 77



$(4x^2 - 5x - 21) = (x - 3)(\quad)$

$= (x - 3)(4x+7)$

$4x + 7$

$x - 3$) $4x^2 - 5x - 21$

$+ 4x^2 - 12x$

$-\quad +$

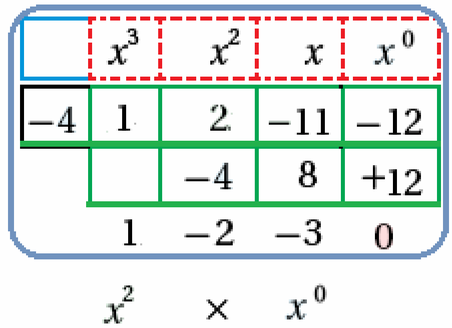
$+7x - 21$

$\overset{-}{+}7x \overset{+}{-}21$

0

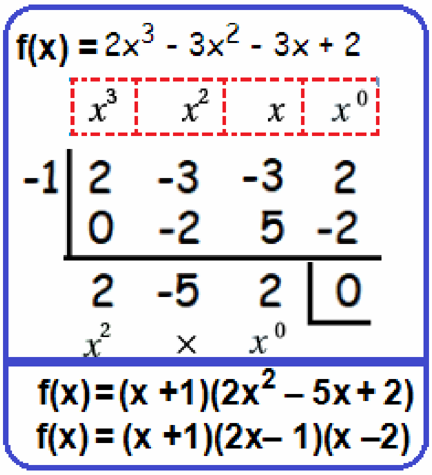
القسمة التركيبية : $f(x) = x^3+2x^2 - 11x - 12$

$f(x) = (x+4)(x-3)(x+1)$



	x^3	x^2	x	x^0
-4	1	2	-11	-12
		-4	8	$+12$
	1	-2	-3	0

$x^2 \quad \times \quad x^0$



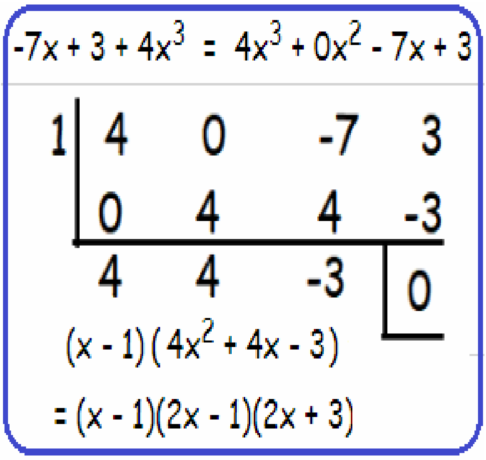
$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$

	x^3	x^2	x	x^0
-1	2	-3	-3	2
	0	-2	5	-2
	2	-5	2	0

$x^2 \quad \times \quad x^0$

$f(x) = (x+1)(2x^2 - 5x + 2)$

$f(x) = (x+1)(2x-1)(x-2)$

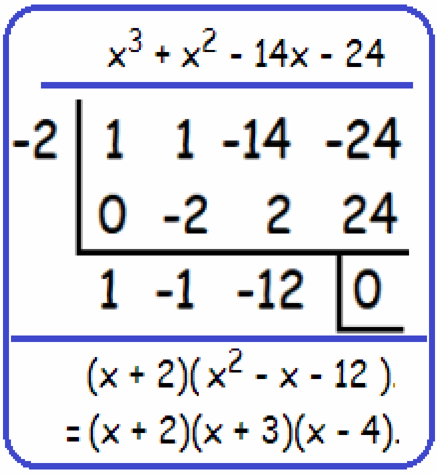


$-7x + 3 + 4x^3 = 4x^3 + 0x^2 - 7x + 3$

1	4	0	-7	3
	0	4	4	-3
	4	4	-3	0

$(x - 1)(4x^2 + 4x - 3)$

$= (x - 1)(2x - 1)(2x + 3)$



$x^3 + x^2 - 14x - 24$

-2	1	1	-14	-24
	0	-2	2	24
	1	-1	-12	0

$(x + 2)(x^2 - x - 12)$.

$= (x + 2)(x + 3)(x - 4)$.

تمارين

1) $(3x^2 - 5x + 4)$

2) $(x^3 - 3x^2 + 5x - 6)$

3) $(x^2 + 5x - 1)$

4) $(2x^2 - 9x - 5)$

5) $(3x^2 + 23x + 14)$

6) $(4x^2 - 10x + 6)$

12) حل المعادلات: هناك نوعان من المعادلات الجبرية بمتغير واحد ، وهما : الخطية وغير الخطية

13

أ) **الخطية** : وهي على الصورة : $\underbrace{ax + b}_{\text{طرف المتغيرات (المجاهيل)}} = \underbrace{c}_{\text{طرف الأعداد (الثوابت)}}$ ، نتعامل معها مثل الميزان ذو الكفتين

طريقة الحل : يجب تجميع الحدود المحتوية على (x) في أحد طرفي المعادلة ثم القسمة على معامل (x)

1) $2x + 5 = 9$

$2x + 5 - 5 = 9 - 5$

$2x = 4$

$2x \div 2 = 4 \div 2$

$x = 2$

2) $3x - 8 = 7x + 1$

$3x - 7x = 1 + 8$

$-4x = 9$

$x = \frac{9}{-4} = \frac{-9}{4}$

ملاحظة : تكافؤ الكسور :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \times d = b \times c \qquad b \neq 0,\ d \neq 0$$

تمارين

1) $2x + 1 = 11$

2) $x - 4 = 8$

3) $x - 1 = -6$

4) $x + 4 = -1$

5) $5x = 20$

6) $3x = -21$

7) $4x + 2 = 10$

8) $2x - 3 = 11$

9) $4x - 5 = -15$

10) $9x - 3 = 5x + 8$

11) $3x + 1 = 7x + 4$

12) $x - 4 = 5x - 12$

① $2(5x + 14) = 6$

② $3(4 - x) = 33$

③ $\frac{2}{3}(x - 8) = 7$

④ $\frac{4x - 1}{7} = 5$

⑤ $2(3x - 4) = 4x + 17$

⑥ $\frac{x + 4}{5} = 9 - 7x$

ب) **التربيعية** : صورتها العامة : $ax^2 + bx + c = 0$:

طريقة الحل : يجب أن نجعل الطرف الأيمن صفراً، ثم نقوم بتحليل الطرف الأيسر وكتابته على شكل حاصل ضرب عدة مقادير لكي نستخدم القاعدة ($a\,b = 0 \longrightarrow a = 0$ or $b = 0$) ثم حل المعادلات الناتجة

1) $x^2 - x = 6 \quad \rightarrow \quad x^2 - x - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad (x - 3)(x + 2) = 0$

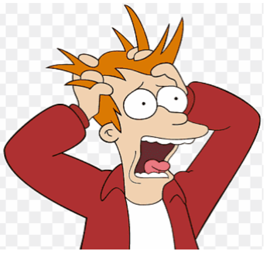
إما $(x - 3= 0)$ أو $(x + 2= 0)$ ومنها $x = 3 , x = -2$

2) $x^3 + 2x^2 = 11x + 12 \quad \rightarrow \quad x^3 + 2x^2 - 11x - 12 = 0$

$(x + 4) (x - 3) (x + 1) = 0$

إما $(x + 4= 0)$ أو $(x - 3= 0)$ أو $(x + 2= 0)$

ومنها $x = -4$, $x = 3$, $x = -2$



3) $x^2 - 4x = 0 \quad \longrightarrow \quad x(x - 4) = 0 \longrightarrow \quad x = 0 , x = 4$

ملاحظة(1): للمعادلة التربيعية على الأكثر حلان (جذران) : فقد لا يكون لها حل في ح

مثل : $x^2 + 4 = 0$ أو $x^2 + 3x + 4 = 0$

ملاحظة(2): يمكن استخدام القانون العام لحل أي معادلة تربيعية على الصورة : $ax^2 + bx + c = 0$

القانون العام :

$$\boxed{\begin{array}{c} ax^2 + bx + c = 0 \\ \hline x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{array}}$$

المميز = $b^2 - 4\,a\,c$

ولا يوجد حل للمعادلة في R إذا كان المميز سالباً (وتكون أولية)

$15x^2 + 1 = 8x$

$15x^2 - 8x + 1 = 0$

$(15x - 5)(15x - 3) = 0$

$(3x - 1)(5x - 1) = 0$

$3x - 1 = 0 \qquad 5x - 1 = 0$

$3x = 1 \qquad 5x = 1$

$x = \dfrac{1}{3} \qquad x = \dfrac{1}{5}$

$x^2 - 11x = -30$

$x^2 - 11x + 30 = 0$

$(x - 6)(x - 5) = 0$

$x - 6 = 0 \qquad x - 5 = 0$

$x = 6 \qquad x = 5$

$4\,x^2 + 6\,x - 18 = 0$

$2(2\,x^2 + 3\,x - 9) = 0$

$2(2x - 3)(x + 3) = 0$

$2x - 3 = 0 \quad or \quad x + 3 = 0$

$2x = 3 \qquad x = -3$

$x = \frac{3}{2}$

1) $x^2 - 14x + 24 = 0$

2) $x^2 + 8x + 12 = 0$

3) $x^2 - 4x = 32$

4) $x^2 + 12\,x + 30= 2x + 6$

5) $x^2 - 11x = x - 35$

6) $x^3 - 8= 0$

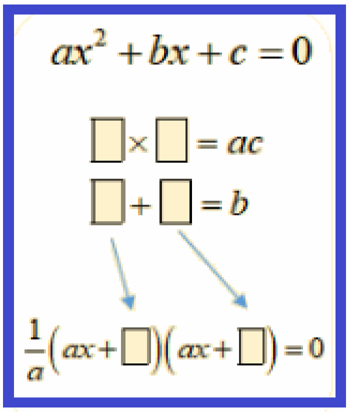
7) $2x^2 - 3x = 3$

8) $5x^2 = 5x + 1$

9) $2x^4 - 32 = 0$

الأستاذ:عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

* إذا كان المعامل الرئيس غير العدد (1) :

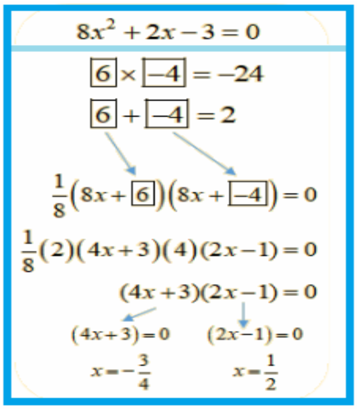


$$ax^2+bx+c=0$$

$$\square\times\square=ac$$

$$\square+\square=b$$

$$\frac{1}{a}(ax+\square)(ax+\square)=0$$



$$8x^2+2x-3=0$$

$$\boxed{6}\times\boxed{-4}=-24$$

$$\boxed{6}+\boxed{-4}=2$$

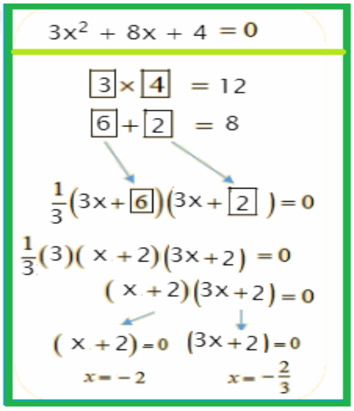
$$\frac{1}{8}(8x+\boxed{6})(8x+\boxed{-4})=0$$

$$\frac{1}{8}(2)(4x+3)(4)(2x-1)=0$$

$$(4x+3)(2x-1)=0$$

$$(4x+3)=0 \qquad (2x-1)=0$$

$$x=-\frac{3}{4} \qquad x=\frac{1}{2}$$



$$3x^2+8x+4=0$$

$$\boxed{3}\times\boxed{4}=12$$

$$\boxed{6}+\boxed{2}=8$$

$$\frac{1}{3}(3x+\boxed{6})(3x+\boxed{2})=0$$

$$\frac{1}{3}(3)(x+2)(3x+2)=0$$

$$(x+2)(3x+2)=0$$

$$(x+2)=0 \qquad (3x+2)=0$$

$$x=-2 \qquad x=-\frac{2}{3}$$

الطريقة الهندية لحل المعادلات :

ملخص الطريقة الهندية لحل المعادلات التربيعية

حيث المعامل الرئيس ≠ 1

نضرب (a) في (c) ونحل المعادلة الناتجة

ثم نقسم قيم (x) الناتجة على (a)

$ax^2+bx+c=0 \rightarrow x^2+bx+ac=0$

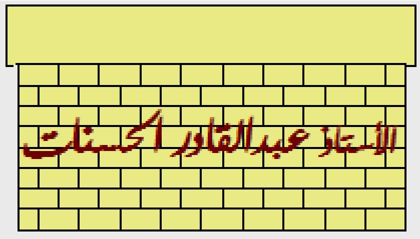
$2x^2+7x-4=0 \rightarrow x^2+7x-8=0$

$\rightarrow (x+8)(x-1)=0$

$x=-8$, $x=1$

$\rightarrow x=-8\div 2=-4$

$\rightarrow x=1\div 2=\frac{1}{2}$



13) أنظمة المعادلات

هناك طريقتان لحل نظام مكون من معادلتين خطيتين (أي إيجاد زوجاً مرتباً يحقق المعادلتين في نفس الوقت)

وهما : 1) طريقة الحذف elimination

أساسها : التخلص من أحد المتغيرين بجمع المعادلتين ثم إيجاد قيمة المتغير الآخر

$x+2y=6$

$x-y=3$

نضرب المعادلة الثانية في (2)

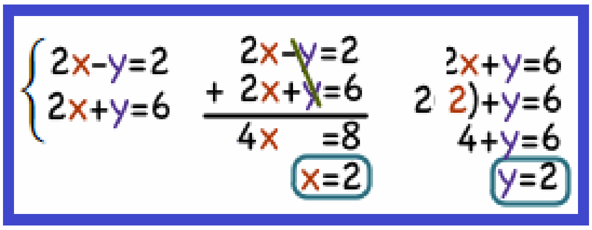
$x+2y=6$

$2x-2y=6$

نجمع $3x=12$

$x=4$

وبالتالي $y=1$



$$\begin{cases}2x-y=2\\2x+y=6\end{cases}$$

$$\begin{array}{r}2x-\cancel{y}=2\\+\ 2x+\cancel{y}=6\\\hline 4x\ \ =8\\\boxed{x=2}\end{array}$$

$2x+y=6$

2 2)+y=6

$4+y=6$

$\boxed{y=2}$

2) طريقة التعويض substitution

ملخصها :جعل أحد المتغيرين موضوعاً للقانون في إحدى المعالتين وتعويض قيمته في الأخرى لحلها

$x+2y=6$

$x-y=3$

نجعل (x) موضوعا للقانون في المعادلة الثانية

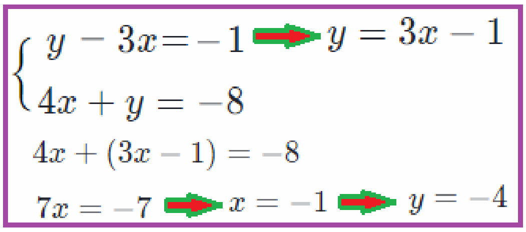
$x=3+y$

نعوض القيمة في الأولى $3+y+2y=6$

$3+3y=6$

$3y=3$ ومنها $y=1$

$x=4$



$$\begin{cases}y-3x=-1 \rightarrow y=3x-1\\4x+y=-8\end{cases}$$

$$4x+(3x-1)=-8$$

$$7x=-7 \rightarrow x=-1 \rightarrow y=-4$$

الأستاذ:عبدالقادر الحسنات

078 531 88 77

17) الاقترانات المثلثية

17

θ	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	غيرُ مُعرَّف

الجيب $\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

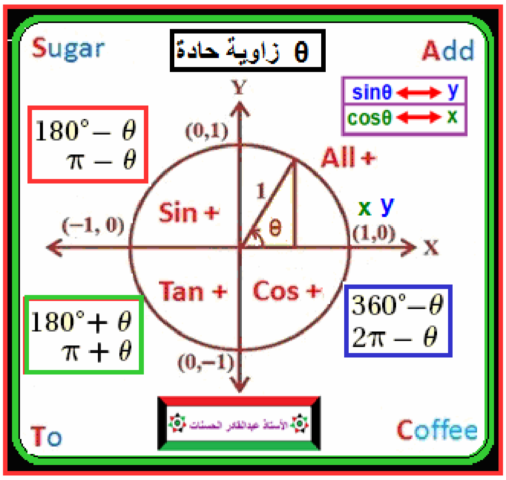
الجتا $\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

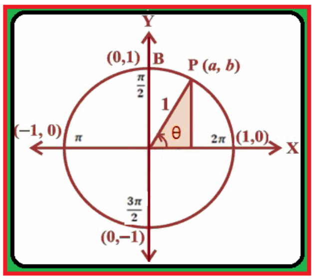
الظل $\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

نظرية فيثاغورس

مربع الوتر=مربع الاول+مربع الثاني

الأستاذ عبدالقادر الحسنات





y يرتبط مع sinθ

x يرتبط مع cosθ

Hasanat

الربع الأول	الربع الثاني
$\sin\theta, \csc\theta$: +	$\sin\theta, \csc\theta$: +
$\cos\theta, \sec\theta$: +	$\cos\theta, \sec\theta$: −
$\tan\theta, \cot\theta$: +	$\tan\theta, \cot\theta$: −
الربع الرابع	**الربع الثالث**
$\sin\theta, \csc\theta$: −	$\sin\theta, \csc\theta$: −
$\cos\theta, \sec\theta$: +	$\cos\theta, \sec\theta$: −
$\tan\theta, \cot\theta$: −	$\tan\theta, \cot\theta$: +

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

الأستاذ عبدالقادر الحسنات

الوحدة ① الاقترانات الأُسِّية واللوغاريتمية

الدرس 1 الاقترانات الأُسِّية Exponential Functions

1–1) **الاقتران الأسي** هو اقتران يكتب على الصورة : $f(x) = b^x$
بشرط أن تكون (b) موجبة ولا تساوي (1)

مثلاً : $f(x)=7^x$, $f(x)=(\frac{3}{5})^x$, $f(x)=(1.35)^x$

مثال1:

$$f(x)=3^x \Rightarrow f(2)=3^2=3\times3=9$$

مثال2:

$$f(x)=(\frac{3}{4})^x \Rightarrow f(-2)=(\frac{3}{4})^{-2}=(\frac{4}{3})^2=\frac{(4)^2}{(3)^2}=\frac{16}{9}$$

تمارين:

تذكَّر $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

$$(\frac{a}{b})^{-n}=(\frac{b}{a})^n$$

1) $f(x)=2^x \Rightarrow f(2)=$

2) $f(x)=4^x \Rightarrow f(-2)=$

3) $f(x)=8^x \Rightarrow f(0)=$

4) $f(x)=(\frac{1}{4})^x \Rightarrow f(-1)=$

5) $f(x)=(\frac{2}{3})^x \Rightarrow f(-2)=$

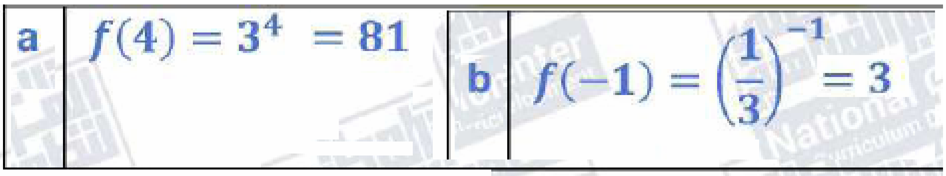
6) $f(x)=(\frac{5}{3})^x \Rightarrow f(-2)=$

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

أتحقَّق من فهمي أجد قيمة كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

b) $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x, x=-1$

a) $f(x)=3^x, x=4$



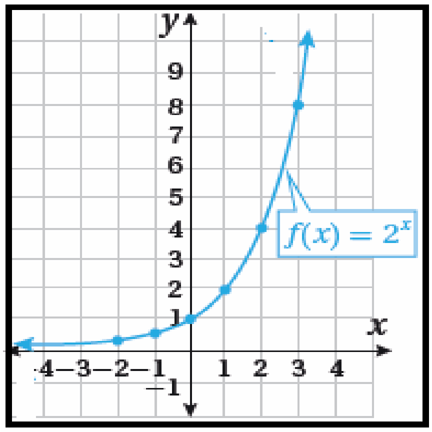
a	$f(4)=3^4 = 81$	b	$f(-1)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$

2-1) التمثيل البياني للاقتران الأُسِّي، وخصائصه :

لتمثيل الاقتران بيانيا ، نكون جدولا لقيم (x) وعادة تكون حول الصفر ثم نجد قيم (y) المقابلة لها فالتحديد على المستوى الديكارتي وتوصيلها معا بخط منحنى

مثال1) $f(x) = 2^x$

x	-2	-1	0	1	2
$y = f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4



ويمكن استنتاج الخصائص الآتية من خلال الرسم :

1) المجال : وهو مجموعة القيم التي يمكن تعويضها مكان (x) وهو هنا مجموعة الأعداد الحقيقية : R أو $(-\infty, \infty)$

2) المدى : وهو مجموعة القيم الناتجة من التعويض في (y) أو الجزء المستخدم من المحور (y) وهو هنا مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة : R^+ أو $(0, \infty)$

3) المقطع من المحور (x):دائما لإيجاد المقطع من المحور (x) نضع (y=0) ولا يوجد مقطع من (x) هنا

4) المقطع من المحور (y):دائما لإيجاد المقطع من المحور (y) نضع (x=0) والمقطع من (y) هنا يساوي (1) لأن $2^0 = 1$

5) التزايد والتناقص : إذا كانت قيم (y) تزداد بازدياد قيم (x) فإن الاقتران يكون متزايداً أي يصعد منحناه إلى الأعلى كلما اتجهنا إلى اليمين
أما إذا كانت قيم (y) تتناقص كلما زادت قيم (x) فإن الاقتران يكون متناقصاً أي ينزل منحناه إلى الأسفل كلما اتجهنا إلى اليمين
وفي هذا المثال نلاحظ أن الاقتران متزايد

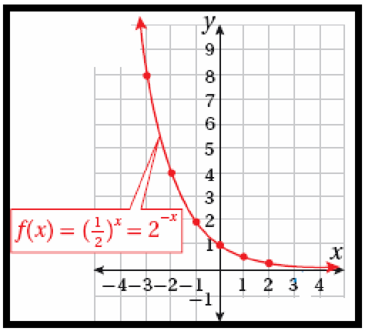
6) واحد لواحد : يكون الاقتران واحد لواحد إذا لم يكن هناك عنصرين لهما نفس الصورة أي(كل عنصر وصورته) أو عدم وجود خط أفقي يقطع المنحنى أكثر من مرة ...والاقتران هنا واحد لوحد

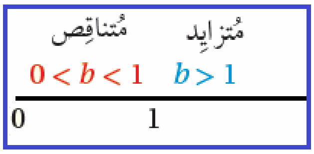
7) خط التقارب الأفقي:هو خط يقترب منه منحنى الاقتران عندما تقترب (x) من (∞) أو (- ∞) وهو هنا y = 0

مثال2) $f(x) = 2^{-x}$

x	-2	-1	0	1	2
$y = f(x)$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

نفس الخصائص باستثناء أن الاقتران متناقص





تعلّم $f(x) = b^{-x} = \left(\frac{1}{b}\right)^x$

---

3) مثل منحنى الاقتران $f(x) = 4^x$ بيانيا

x	-2	-1	0	1	2
$y = f(x)$					

ثم جد

1)المجال

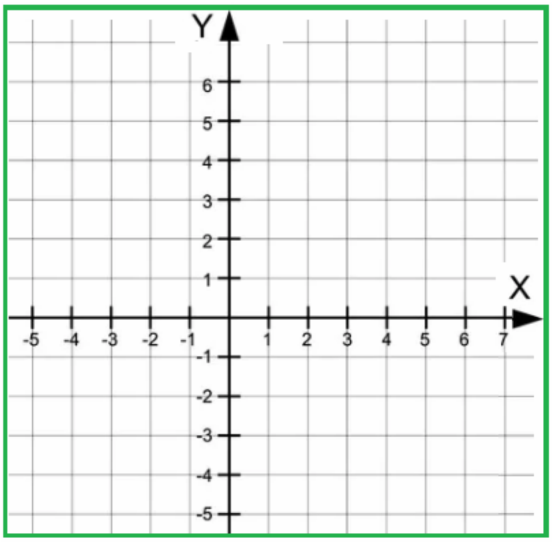
2)المدى

3) المقطع من (x)

4) المقطع من (y)

5)هل الاقتران متزايد أم متناقص؟

6) هل الاقتران واحد لواحد أم لا ؟



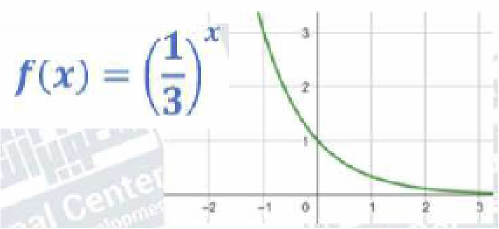
أتحقّق من فهمي إذا كان: $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$، فأُجيب عن الأسئلة الآتية:

a) أُمثِّل الاقتران بيانيًّا، ثم أُحدِّد مجاله ومداه وخطوط التقارب.

b) أجد المقطعين من المحورين الإحداثيين.

c) هل الاقتران $f(x)$ مُتزايِد أم مُتناقِص؟

d) هل الاقتران $f(x)$ واحد لواحد؟



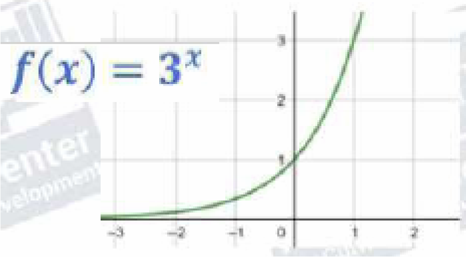
أتحقّق من فهمي إذا كان: $f(x) = 3^x$، فأُجيب عن الأسئلة الآتية:

a) أُمثِّل الاقتران بيانيًّا، ثم أُحدِّد مجاله ومداه وخطوط التقارب.

b) أجد المقطعين من المحورين الإحداثيين.

c) هل الاقتران $f(x)$ مُتزايِد أم مُتناقِص؟

d) هل الاقتران $f(x)$ واحد لواحد؟



أتدرّب وأحلّ المسائل

أجد قيمة كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

① $f(x) = (11)^x\ , x = 3$

② $f(x) = -5(2)^x\ , x = 1$

③ $f(x) = 3\left(\frac{1}{7}\right)^x\ , x = 2$

④ $f(x) = -(5)^x + 4, x = 4$

⑤ $f(x) = 3^x + 1, x = 5$

⑥ $f(x) = \left(\frac{1}{9}\right)^x - 3, x = 2$

أُمثِّل كل اقتران ممّا يأتي بيانيًّا، ثم أجد مجاله ومداه:

⑦ $f(x) = 4^x$

⑧ $f(x) = 9^{-x}$

⑨ $f(x) = 7\left(\frac{1}{7}\right)^x$

⑩ $f(x) = 3(6)^x$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 16

1 $f(3) = (11)^3 = 1331$

2 $f(1) = -5(2)^1 = -5(2) = -10$

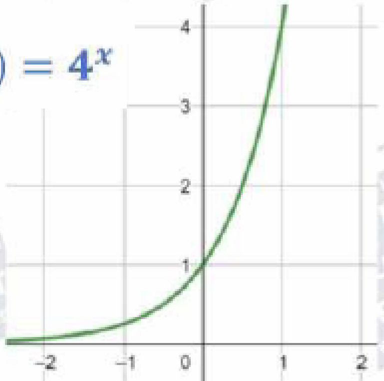
3 $f(2) = 3\left(\frac{1}{7}\right)^2 = 3\left(\frac{1}{49}\right) = \frac{3}{49}$

4 $f(4) = -(5)^4 + 4 = -(625) + 4 = -621$

5 $f(5) = (3)^5 + 1 = 243 + 1 = 244$

6 $f(2) = \left(\frac{1}{9}\right)^2 - 3 = \frac{1}{81} - 3 = \frac{1}{81} - \frac{243}{81} = -\frac{242}{81}$

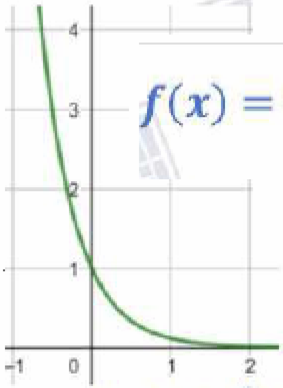
7 $f(x) = 4^x$



مجال هذا الاقتران هو R

مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$

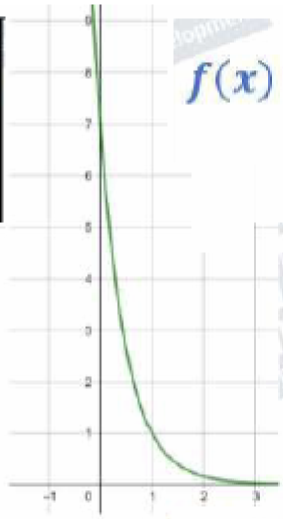
8 $f(x) = 9^{-x} = \left(\frac{1}{9}\right)^x$



مجال هذا الاقتران هو R

مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$

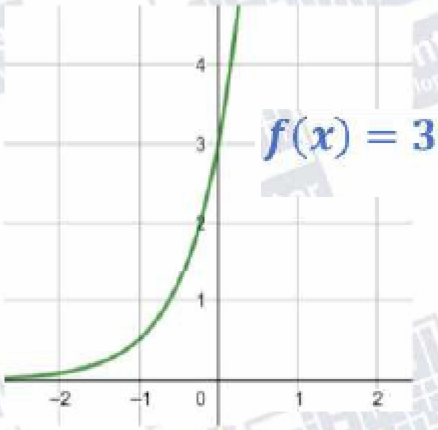
9 $f(x) = 7\left(\frac{1}{7}\right)^x$



مجال هذا الاقتران هو R

مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$

10 $f(x) = 3(6)^x$



مجال هذا الاقتران هو R

مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$

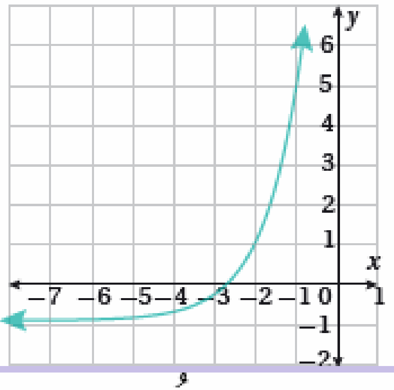
(3-1 خصائص الاقتران الأُسّي في صورة: $f(x)=ab^{x-h}+k$

خصائص $f(x)=ab^{x-h}+k$

- مدى الاقتران $f(x)$ هو الفترة (k,∞).
- الاقتران $f(x)$ مُتزايِد إذا كان $b>1$.
- مجال الاقتران $f(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية R.
- الاقتران $f(x)$ مُتناقِص إذا كان $0<b<1$.
- للاقتران $f(x)$ خط تقارب أفقيًّا هو المستقيم $\boxed{y=k}$

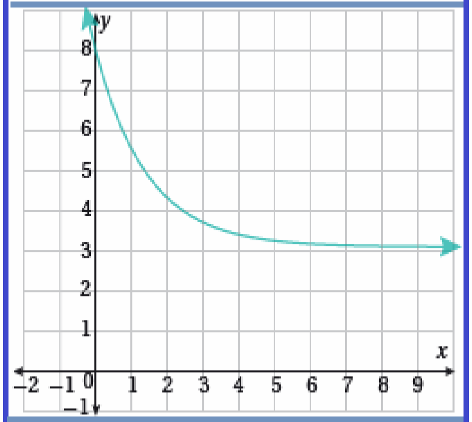
يُعتبر الاقتران $f(x)=ab^{x-h}+k$ تحويلا هندسيا لمنحنى الاقتران $f(x)=b^{x}$

$f(x)=2(3^{x+2})-1$

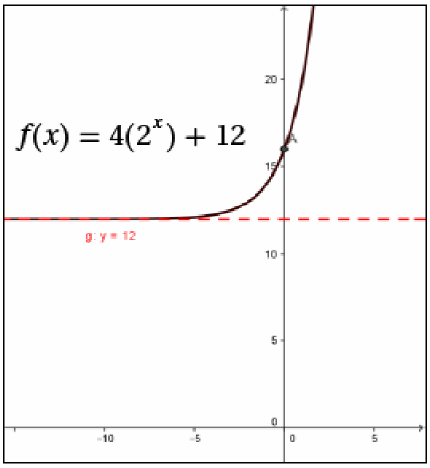


خط التقارب الأُفقي $y=-1$

$f(x)=5(2^{-x})+3$

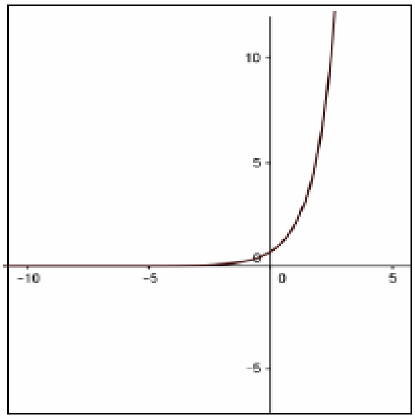


خط التقارب الأُفقي $y=3$



خط التقارب الافقي y=12

$h(x)=6(\frac{1}{3})^{2-x}$

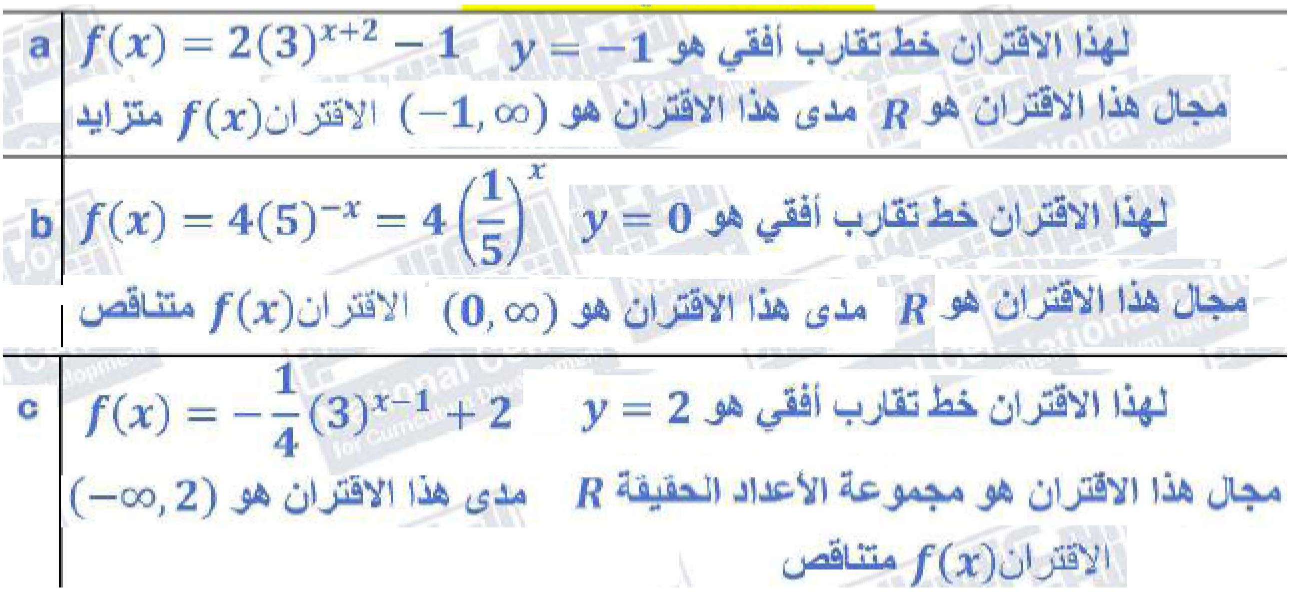


خط التقارب الافقي هو محور x

أتحقَّق من فهمي

أجــد خط التقارب الأفقي لكل اقتران ممّا يأتي، ثم أُحدِّد مجاله ومداه، مُبيِّنًا إذا كان مُتناقِصًا أم مُتزايدًا:

a) $f(x) = 2(3)^{x+2} - 1$ b) $f(x) = 4\,(5)^{-x}$ c) $f(x) = -\frac{1}{4}(3)^{x-1} + 2$



a	$f(x) = 2(3)^{x+2} - 1$ لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = -1$ مجال هذا الاقتران هو R مدى هذا الاقتران هو $(-1, \infty)$ الاقتران $f(x)$ متزايد
b	$f(x) = 4(5)^{-x} = 4\left(\frac{1}{5}\right)^{x}$ لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = 0$ مجال هذا الاقتران هو R مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$ الاقتران $f(x)$ متناقص
c	$f(x) = -\frac{1}{4}(3)^{x-1} + 2$ لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = 2$ مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R مدى هذا الاقتران هو $(-\infty, 2)$ الاقتران $f(x)$ متناقص

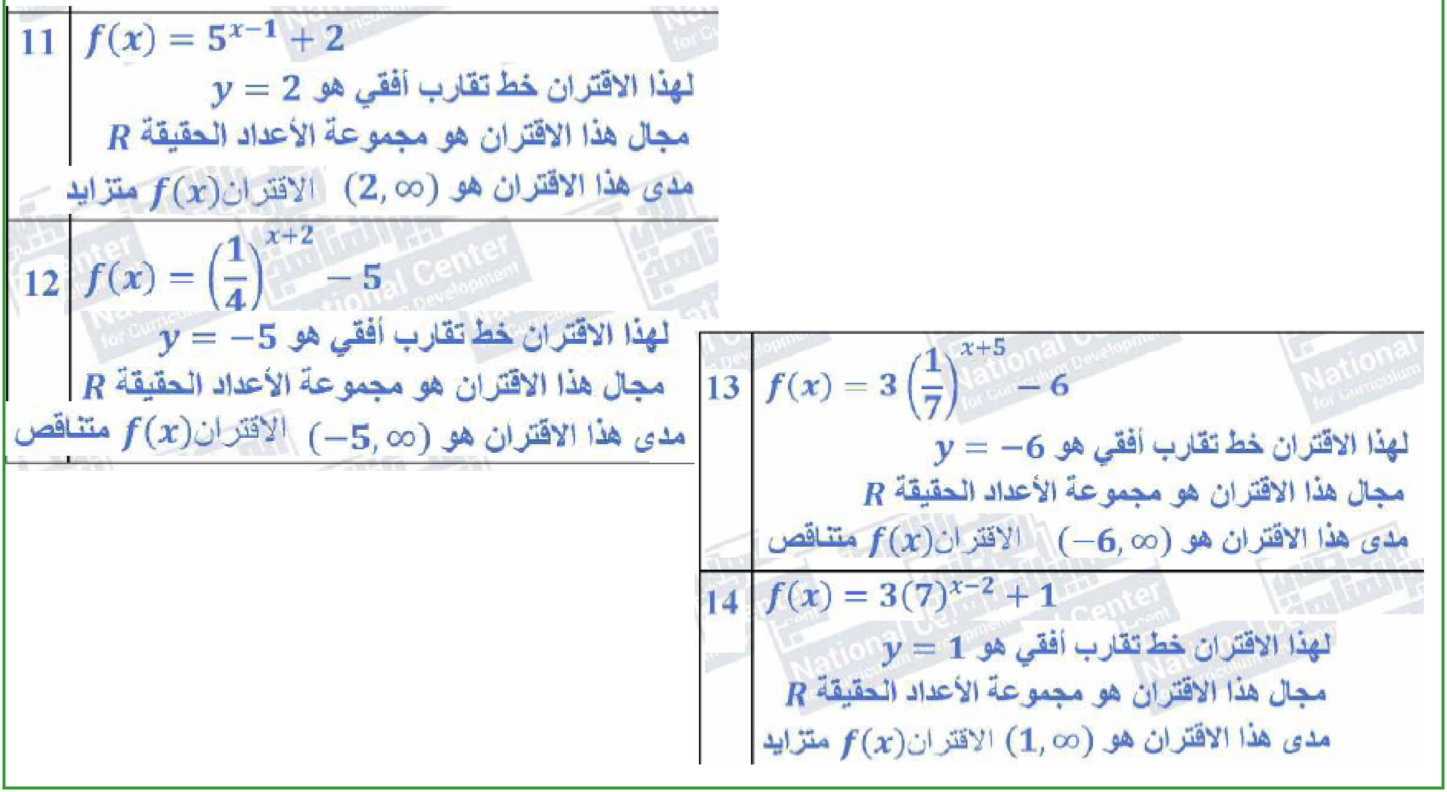
أجد خط التقارب الأفقي لكل اقتران ممّا يأتي، ثم أُحدِّد مجاله ومداه، مُبيِّنًا إذا كان مُتناقِصًا أم مُتزايِدًا:

⑪ $f(x) = 5^{x-1} + 2$

⑫ $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 5$

⑬ $f(x) = 3\left(\frac{1}{7}\right)^{x+5} - 6$

⑭ $f(x) = 3(7)^{x-2} + 1$



11	$f(x) = 5^{x-1} + 2$ لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = 2$ مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R مدى هذا الاقتران هو $(2, \infty)$ الاقتران $f(x)$ متزايد
12	$f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 5$ لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = -5$ مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R مدى هذا الاقتران هو $(-5, \infty)$ الاقتران $f(x)$ متناقص
13	$f(x) = 3\left(\frac{1}{7}\right)^{x+5} - 6$ لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = -6$ مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R مدى هذا الاقتران هو $(-6, \infty)$ الاقتران $f(x)$ متناقص
14	$f(x) = 3(7)^{x-2} + 1$ لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = 1$ مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R مدى هذا الاقتران هو $(1, \infty)$ الاقتران $f(x)$ متزايد

4-1) تطبيقات

1) تُمثّل المعادلة $N(t) = (\frac{1}{2})^{\frac{t}{1620}}$ الكميــة المتبقّية N بالغرامات من عيّنة كتلتها 1 g من الراديوم 226 حيث t الزمن بالسنوات.

① أجد كمّية الراديوم 226 المتبقية بعد 3240 سنة.

$$N(t) = (\frac{1}{2})^{\frac{t}{1620}}$$

$$N(3240) = (\frac{1}{2})^{\frac{3240}{1620}} = (\frac{1}{2})^2 = 0.25$$

② بعد كم سنة يبقى من كمّية الراديوم 0.125 g؟

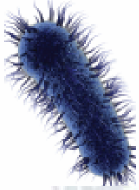
$$N(t) = (\frac{1}{2})^{\frac{t}{1620}}$$

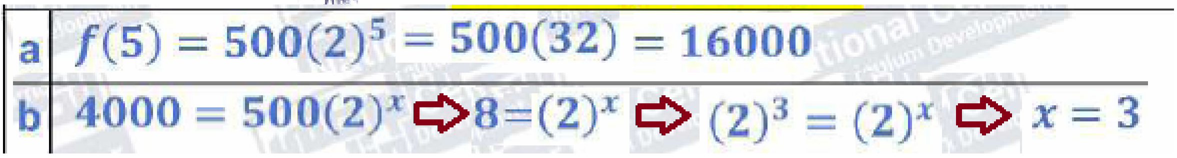
$$0.125 = (\frac{1}{2})^{\frac{t}{1620}} \longrightarrow \frac{1}{8} = (\frac{1}{2})^{\frac{t}{1620}} \longrightarrow (\frac{1}{2})^3 = (\frac{1}{2})^{\frac{t}{1620}} \Rightarrow 3 = \frac{t}{1620} \longrightarrow t = 4860$$

أتحقّق من فهمي: يُمثّل الاقتران: $f(x) = 500\,(2)^x$ عدد الخلايا البكتيرية في عيّنة مخبرية، حيث x الزمن بالساعات

a) أجد عدد الخلايا البكتيرية في العيّنة بعد 5 ساعات.

b) بعد كم ساعة يصبح عدد الخلايا البكتيرية في العيّنة 4000 خلية؟





a $f(5) = 500(2)^5 = 500(32) = 16000$

b $4000 = 500(2)^x \Rightarrow 8 = (2)^x \Rightarrow (2)^3 = (2)^x \Rightarrow x = 3$

أتدرّب وأحلّ المسائل

بكتيريا: يُمثّل الاقتران: $f(x) = 7000\,(1.2)^x$ عدد الخلايا البكتيرية في تجربة مخبرية، حيث x الزمن بالساعات:

⑮ أجد عدد الخلايا البكتيرية في بداية التجربة.

⑯ أجد عدد الخلايا البكتيرية بعد 12 ساعة.

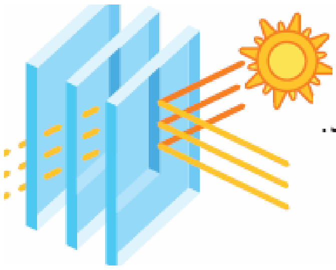
⑰ بعد كم ساعة يصبح عدد الخلايا البكتيرية 10080 خلية؟

16

ضوء: يُمثّل الاقتران: $f(x) = 100\,(0.97)^x$ النسبة المئوية للضوء المارّ خلال x من الألواح الزجاجية المتوازية:

⑱ أجد النسبة المئوية للضوء المارّ خلال لوح زجاجي واحد.

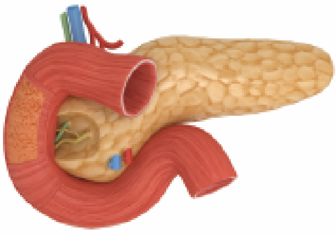
⑲ أجد النسبة المئوية للضوء المارّ خلال 3 ألواح زجاجية.



سرطان البنكرياس: يُمثّل الاقتران: $P(t) = 100(0.3)^t$ النســبة المئوية للمتعافين من مرضى سرطان البنكرياس، مِمَّنْ هم في المرحلة المُتقدِّمة، حيث تعافوا بعد t سنة من التشخيص الأوَّلي للمرض:

⑳ أجد النسبة المئوية للمتعافين بعد سنة من التشخيص الأوَّلي للمرض.

㉑ بعد كم سنة تصبح النسبة المئوية للمتعافين 9%؟



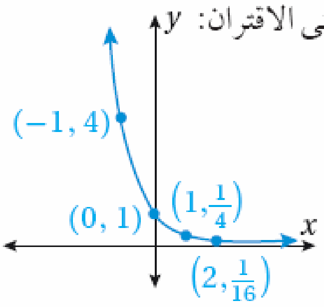
15	$f(0) = 7000(1.2)^0 = 7000(1) = 7000$ عدد الخلايا البكتيرية في بداية التجربة هو 7000 خلية
16	$f(12) = 7000(1.2)^{12} \approx 62413$ عدد الخلايا البكتيرية بعد 12 ساعة هو 62413 خلية تقريبًا
17	$10080 = 7000(1.2)^x$ $1.44 = (1.2)^x \Rightarrow (1.2)^2 = (1.2)^x \Rightarrow x = 2$ بعد ساعتين من بدء التجربة يصبح عدد الخلايا البكتيرية 10080 خلية

18	$f(1) = 100(0.97)^1 = 100(0.97) = 97$ نسبة الضوء المارّ خلال لوح زجاجي واحد هي 97%
19	$f(3) = 100(0.97)^3 \approx 91$ نسبة الضوء المارّ خلال 3 ألواح زجاجية هي 91%

20	$P(1) = 100(0.3)^1 = 100(0.3) = 30$ نسبة المتعافين بعد سنة من التشخيص الأولي للمرض هي 30%

21	$9 = 100(0.3)^t \Rightarrow 0.09 = (0.3)^t \Rightarrow (0.3)^2 = (0.3)^t \Rightarrow t = 2$ بعد سنتين تصبح نسبة المتعافين 9%

مهارات التفكير العليا



22 **تبرير:** يُبيِّن الشكل المجاور التمثيل البياني لمنحنى الاقتران: $f(x) = ab^x$. أجد $f(3)$، مُبرِّرًا إجابتي.

23 **أكتشف المُختلِف:** أيُّ الاقترانات الآتية مُختلِف، مُبرِّرًا إجابتي؟

$y = 5(3)^x$ $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ $f(x) = 2(4)^x$ $y = 3^x$

24 **تحدٍّ:** إذا كان الاقتران: $f(x) = ab^x$ أُسِّيًا، فأثبِت أنَّ $\frac{f(x+1)}{f(x)} = b$.

22	$f(x) = ab^x \Rightarrow 1 = ab^0 \Rightarrow 1 = a \times 1 \Rightarrow a = 1$ $\frac{1}{4} = ab^1 \Rightarrow \frac{1}{4} = (1)b^1 \Rightarrow b = \frac{1}{4}$ ومنه فإن قاعدة هذا الاقتران هي: $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x \Rightarrow f(3) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$
23	الاقتران المختلف هو $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ لأنه الاقتران الوحيد المتناقص والاقترانات الأخرى متزايدة.
24	$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{ab^{x+1}}{ab^x} = \frac{b^{x+1}}{b^x} = b$

معادلة خط التقارب الأفقي	مقطعه من (y)	مقطعه من (x)	الاقتران	
Y = 0	Y = 1	لا يوجد	$f(x) = 3^{2x}$	1
Y = - 16	Y = -15	X = 1.3	$f(x) = 2^{3x} - 16$	2
Y = 8	Y = 9	لا يوجد	$f(x) = 2^{x} + 8$	3
Y = - 4	Y = - 2	X = -1	$f(x) = 2^{1-x} - 4$	4
Y = 0	Y = 6	لا يوجد	$f(x) =2(3)^{x+1}$	5
Y = 1	Y = 5	لا يوجد	$f(x)= 4(2)^{x} +1$	6
y= –1	$y=e^{2} - 1$	x = -2	$f(x) = e^{x+2} - 1$	7
Y= 1	Y= 0	X = 0	$f(x) = 1 - e^{x}$	8

باختصار :

$$f(x) = ab^{x-h} + k$$

مدى الاقتران $f(x)$ هو الفترة (k, ∞)

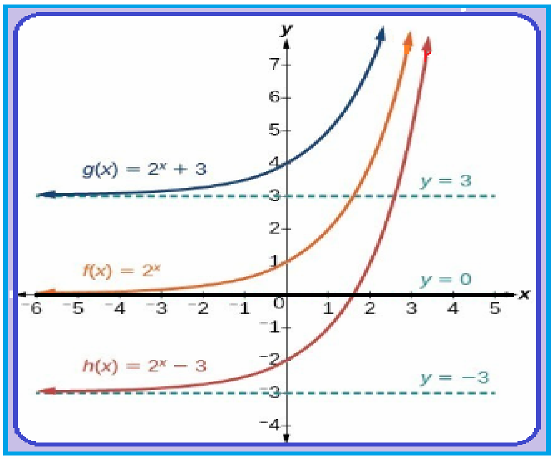
للاقتران $f(x)$ خط تقارب أفقيًا هو المستقيم $\boxed{y = k}$

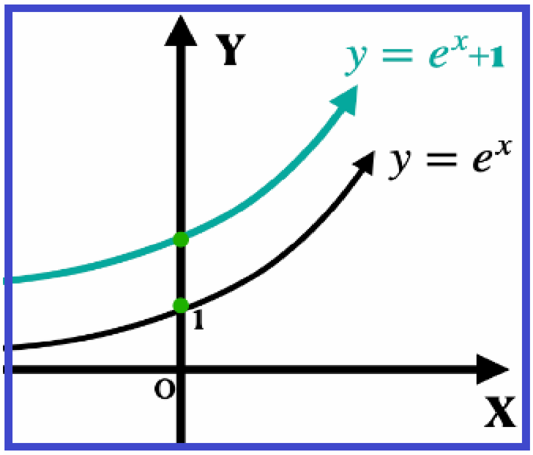
لإيجاد المقطع من (x) نضع y=0

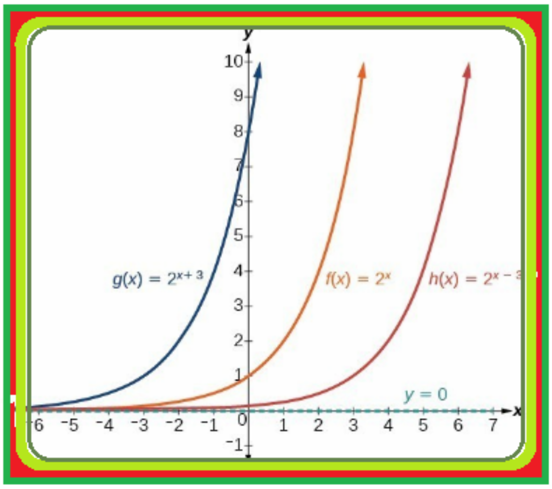
لإيجاد المقطع من (y) نضع x=0

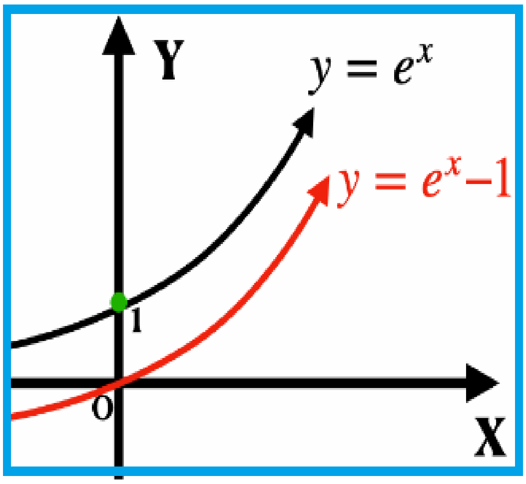
Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

أمثلة









الدرس 2 النمو والاضمحلال الأسّي

1-2) **مفهوم أساسي** **اقتران النمو الأسّي** هو كل اقتران أسّي يتزايد بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية.

$$A(t) = a\,(1+r)^t$$

t الفترة الزمنية، و a الكمّية الابتدائية، و r النسبة المئوية للنمو في فترة زمنية مُحدَّدة.

عامل النمو: أساس العبارة الأُسّية $(1+r)$

مثال1) بلغ عدد سكّان المملكة الأردنية الهاشمية في عام 2020، تقريبًا 10.8 مليون نسمة، فإذا كانت نسبة النمو السكّاني 2.6% سنويًّا تقريبًا؛

1. أكتبُ اقتران النمو الأسّي الذي يُمثّل عدد سكان المملكة بالمليون نسمة بعد t سنة منذ العام 2020
2. أجد عدد سكان المملكة التقريبي في عام 2030

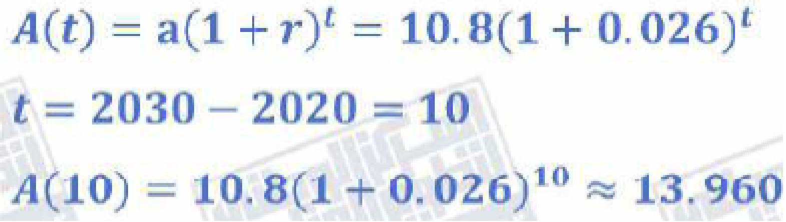
$$A(t) = a(1+r)^t$$
$$A(t) = 10.8\,(1+0.026)^t$$
$$A(t) = 10.8\,(1.026)^t$$
$$A(10) = 10.8\,(1.026)^{10} \quad \approx 13.96$$

مثال2) بلغ عدد سكّان لواء الموقّر في عام 2015 تقريبًا 84370 نسمة، فإذا كانت نسبة النمو السكّاني فيه 2.4% سنويًّا،

a) أكتبُ اقتران النمو الأسّي الذي يُمثّل عدد سكان لواء الموقر بعد t سنة منذ العام 2015

b) أجد عدد سكان اللواء التقريبي في عام 2050

مسألة اليوم بلغ عدد سكّان المملكة الأردنية الهاشمية نحو 10.8 ملايين نسمة عام 2020م. إذا كانت نسبة النمو السكّاني قرابة 2.6% سنويًّا، فأجد العدد التقريبي للسكّان عام 2030م.



$$A(t) = a(1+r)^t = 10.8(1+0.026)^t$$
$$t = 2030 - 2020 = 10$$
$$A(10) = 10.8(1+0.026)^{10} \approx 13.960$$

أتحقّق من فهمي في دراسة شملت إحدى مَزارع الأبقار، تبيَّن أنَّ عدد الأبقار في المزرعة يزداد بنسبة 18% سنويًّا:

a) أكتب اقتران النمو الأسّي الذي يُمثّل عدد الأبقار بعد t سنة، علمًا بأنّ عددها في المزرعة عند بَدْء الدراسة هو 327 بقرة.

b) أجد عدد الأبقار بعد 3 سنوات من بَدْء الدراسة.

a	$A(t) = 327(1+0.18)^t$ $A(t) = 327(1.18)^t$	b	$A(3) = 327(1.18)^3$ ≈ 537

2–2)

مفهوم أساسي اقتران الاضمحلال الأُسّي هو اقتران أُسّي يتناقص بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية.

t الفترة الزمنية، و a الكمّية الابتدائية، و r النسبة المئوية للنمو في فترة زمنية مُحدّدة.

$$A(t) = a\,(1-r)^t$$

عامل النمو: أساس العبارة الأُسّية $(1 + r)$

مثال1) بدأ باحثون دراسة على إحدى البحيرات؛ لتحديد مدى تأثير التلوّث على عدد الأسماك فيها، فوجدوا أنّ عدد الأسماك في البحيرة يقل بنسبة 20% كل سنة.

1 أكتبُ اقتران الاضمحلال الأُسّي الذي يُمثّل عدد الأسماك في البحيرة بعد (t) سنة، علمًا بأنّ عدد الأسماك عند بدء الدراسة يساوي 12000 سمكة.

$$A(t) = a(1-\text{r})^t$$

$$A(t) = 12000\,(1-0.2)^t$$

$$A(t) = 12000\,(0.8)^t$$

2 أجد عدد الأسماك في البحيرة بعد مرور 3 سنوات.

$$A(t) = 12000\,(0.8)^t$$

$$A(3) = 12000\,(0.8)^3 = 6144$$

مثال2) اشترى أحمد سيّارة تعمل على الشحن الكهربائي بمبلغ JD 25000. إذا كان ثمن السيّارة يقلّ بنسبة 10% سنويًّا؛

a) أكتبُ اقتران الاضمحلال الأُسّي لثمن السيارة بعد (t) سنة.

b) أجد ثمن السيّارة بعد 5 سنوات.

$$A\,(\text{t}) = a(1-r)^t = 25000(1-0.1)^t = 25000(0.9)^t$$

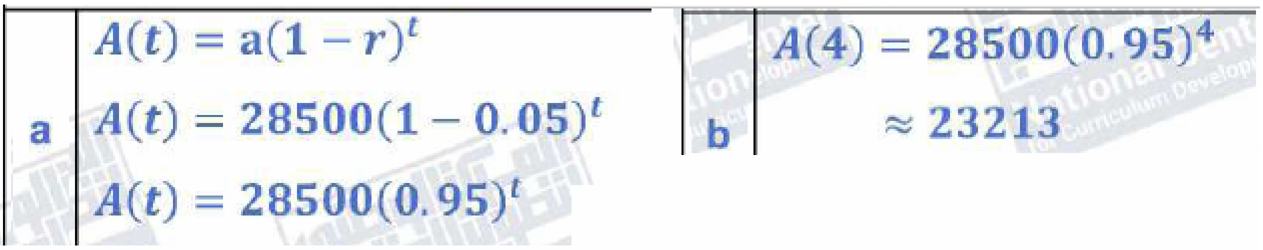
$$A\,(5) = 25000(0.9)^5 = 14762.25$$

أتحقّق من فهمي اشترت سوسن سيّارة هجينة قابلة للشحن بمبلغ JD 28500.

إذا كان ثمن السيّارة يقلّ بنسبة 5% سنويًّا،

a) أكتب اقتران الاضمحلال الأُسّي لثمن السيّارة بعد t سنة.

b) أجد ثمن السيّارة بعد 4 سنوات.



a	$A(t) = \text{a}(1-r)^t$ $A(t) = 28500(1-0.05)^t$ $A(t) = 28500(0.95)^t$	b	$A(4) = 28500(0.95)^4$ ≈ 23213

2–3)

مفهوم أساسي يُمكِن حساب جُمْلة المبلغ المستحق في حالة الربح المُركَّب باستعمال الصيغة الآتية:

n: عدد مرّات إضافة الربح المُركَّب في السنة.

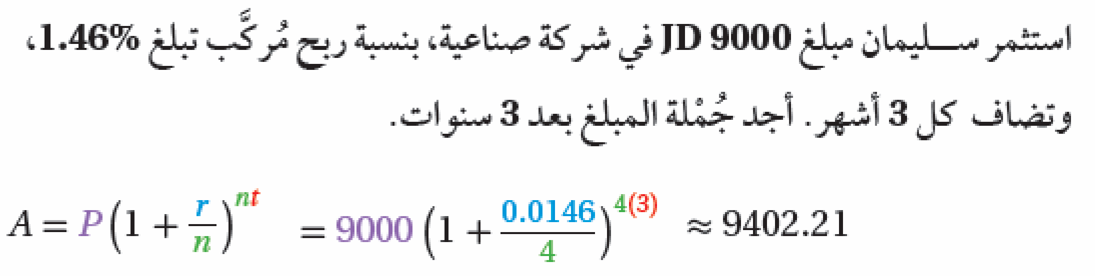
t: عدد السنوات.

r: مُعدَّل الفائدة السنوي الذي يُكتَب في صورة عشرية.

P : المبلغ الأصلي

$$\boxed{\text{جُمْلة المبلغ} = A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}}$$

مثال1)



استثمر سليمان مبلغ JD 9000 في شركة صناعية، بنسبة ربح مُركَّب تبلغ 1.46%، وتضاف كل 3 أشهر. أجد جُمْلة المبلغ بعد 3 سنوات.

$$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} \quad = 9000\left(1+\frac{0.0146}{4}\right)^{4(3)} \quad \approx 9402.21$$

مثال2) استثمر مبلغ (8000 JD) في بنك بنسبة ربح مركب قيمتها(1.34 %) بحيث تضاف كل(6) أشهر جد جملة المبلغ بعد (4) سنوات

$$A = P(1+\frac{r}{n})^{nt} = 8000(1+\frac{0.0134}{2})^{2(4)} = 8438.9$$

أتحقّق من فهمي استثمرت تهاني مبلغ JD 5000 في شركة، بنسبة ربح مُركَّب تبلغ 2.25%، وتضاف كل 6 أشهر. أجد جُمْلة المبلغ بعد 5 سنوات.

$$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$= 5000\left(1+\frac{0.0225}{2}\right)^{2\times 5}$$

$$\approx 5591.85$$

جملة المبلغ بعد 5 سنوات: JD 5591.85 تقريبًا.

(4-2 الاقتران الأسّي الطبيعي : $f(x) = e^x$ و الربح المُركّب المستمر

مفهوم أساسي يُمكِن حساب جُملَة المبلغ المستحق في حالة الربح المُركَّب المستمر باستعمال الصيغة الآتية:

r: مُعدَّل الفائدة المستمر الذي يُكتَب في صورة عشرية. t: عدد السنوات. P : المبلغ الأصلي

جُملَة المبلغ $= A = Pe^{rt}$

مثال1) أودع ماجد مبلغ(4000 JD) في بنك بمعدل فائدة قدرها (5 %) ،
واحتسب البنك الفائدة باستمرار
جد جملة المبلغ بعد 10 سنوات

$$A = Pe^{rt}$$

$$= (4000)e^{(0.05)(10)} = 6595$$

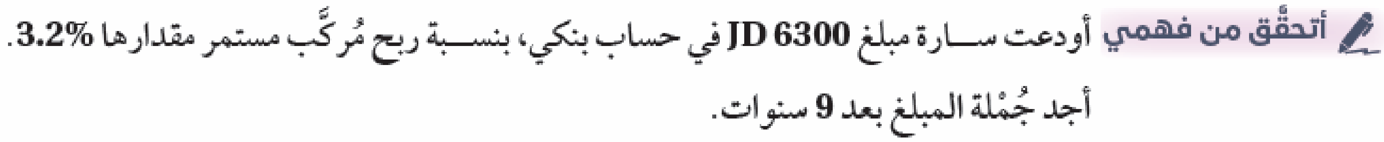
مثال2) أودع سالم مبلغ(5000 JD) في بنك بمعدل فائدة قدرها (3 %) ،
واحتسب البنك الفائدة باستمرار ،إذا بلغت جملة المبلغ بعد (t) سنة (10000)، جد عدد السنين

$$A = Pe^{rt}$$

$$10000 = (5000) \Rightarrow 2 = e^{0.03t} e^{0.03t} \Rightarrow 2 = e^{0.03t}$$

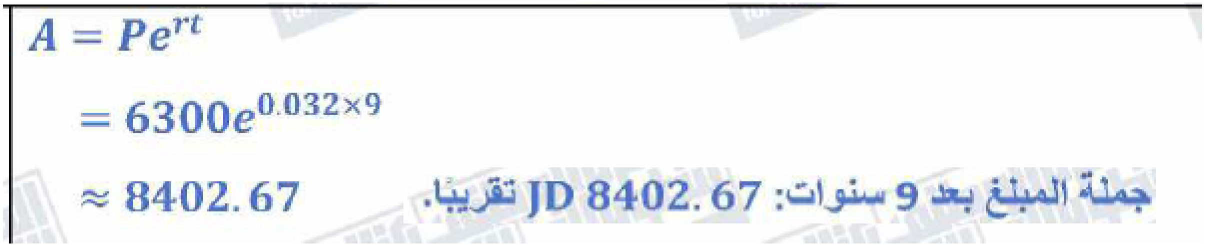
$$\ln 2 = \ln e^{0.03t} \Rightarrow 0.69 =^{0.03t} \ln e \Rightarrow t = 23$$

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77



أتحقق من فهمي أودعت سارة مبلغ JD 6300 في حساب بنكي، بنسبة ربح مُركَّب مستمر مقدارها 3.2%.

أجد جُمْلة المبلغ بعد 9 سنوات.



$$A = Pe^{rt}$$
$$= 6300e^{0.032\times9}$$
$$\approx 8402.67$$

جملة المبلغ بعد 9 سنوات: JD 8402.67 تقريبًا.

أتدرّب وأحُلُّ المسائل

يبلغ عدد المشـــاركين في مؤتمر طبي 150 طبيبًا هذه السنة، ويُتوقَّع زيادة هذا العدد بنسبة 8% كل سنة:

1 أكتب اقتران النمو الأُسّي الذي يُمثّل عدد المشاركين بعد t سنة.

2 أجد عدد المشاركين المُتوقَّع بعد 5 سنوات.

استخدم 50 ألف شخص موقعًا إلكترونيًا تعليميًا سنة 2019م، ثم ازداد عدد مستخدمي الموقع بنسبة 15% كل سنة:

3 أكتب اقتران النمو الأُسّي الذي يُمثّل عدد مستخدمي الموقع بعد t سنة.

4 أجد عدد مستخدمي الموقع سنة 2025م.

سيّارة: يتناقص ثمن سيّارة سعرها JD 17350 بنسبة 3.5% سنويًا:

5 أكتب اقتران الاضمحلال الأُسّي لثمن السيّارة بعد t سنة.

6 أجد ثمن السيّارة بعد 3 سنوات.

بكتيريا: يتناقص عدد الخلايا البكتيرية في عيّنة مخبرية بنسبة 27% كل ساعة بعد إضافة مضاد حيوي إلى العيّنة:

7 أكتب اقتران الاضمحلال الأُسّي الذي يُمثّل عدد الخلايا البكتيرية بعد t ساعة، علمًا بأنَّ عددها عند إضافة المضاد الحيوي هو 15275 خلية.

8 أجد عدد الخلايا البكتيرية في العيّنة بعد 7 ساعات.

9 دجاج: يَنفُق الدجاج في مزرعة للدواجن بنســبة 25% يوميًا نتيجة إصابته بمرض ما.
أجد العدد المُتبقّي منه بعد 5 أيام من بَدْء المرض، علمًا بأنَّ عدده الأوّلي في المزرعة هو 1550 دجاجة.

استثمر ربيع مبلغ JD 1200 في شركة، بنسبة ربح مُركَّب تبلغ 10%، وتضاف كل شهر:

10 أكتب صيغة تُمثّل جُملة المبلغ بعد t سنة.

11 أجد جُملة المبلغ بعد 5 سنوات.

استثمرت هند مبلغ JD 6200 في شركة، بنسبة ربح مُركَّب تبلغ 8.4%، وتضاف كل يوم:

12 أكتب صيغة تُمثّل جُملة المبلغ بعد t سنة.

13 أجد جُملة المبلغ بعد 6 سنوات.

14 أودع حســـام مبلغ JD 9000 في حســـاب بنكي، بنسبة ربح مُركَّب مســـتمر مقدارها 3.6%. أجد جُملة المبلغ بعد 7 سنوات.

15 أودعت ليلى مبلغ JD 8200 في حســـاب بنكي، بنسبة ربح مُركَّب مســـتمر مقدارها 4.9%. أجد جُملة المبلغ بعد 9 سنوات.

16 أعَدَّ باحث دراســـة عن تكاثر ذباب الفاكهة، وتوصَّل إلى أنّه يُمكِن تمثيل العـــدد التقريبي للذباب بالاقتـــران: $P(t) = 20e^{0.03t}$، حيث P عدد الذباب بعد t ســـاعة. أجد عدد ذباب الفاكهة بعد 72 ســـاعة من بَدْء الدراسة، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب عدد صحيح.

1
$$A(t) = a(1+r)^t$$
$$A(t) = 150(1+0.08)^t$$
$$A(t) = 150(1.08)^t$$

2
$$A(5) = 150(1.08)^5$$
$$\approx 220$$

3
$$A(t) = a(1+r)^t$$
$$A(t) = 50000(1+0.15)^t$$
$$A(t) = 50000(1.15)^t$$

4
$$t = 2025 - 2019 = 6$$
$$A(6) = 50000(1.15)^6$$
$$\approx 115653$$

5
$$A(t) = a(1-r)^t$$
$$A(t) = 17350(1-0.035)^t$$
$$A(t) = 17350(0.965)^t$$

6
$$A(3) = 17350(0.965)^3$$
$$\approx 15591.27$$

7
$$A(t) = a(1-r)^t$$
$$A(t) = 15275(1-0.27)^t$$
$$A(t) = 15275(0.73)^t$$

8
$$A(7) = 15275(0.73)^7$$
$$\approx 1687$$

9
$$A(t) = a(1-r)^t$$
$$A(5) = 1550(1-0.25)^5$$
$$= 1550(0.75)^5 \approx 368$$

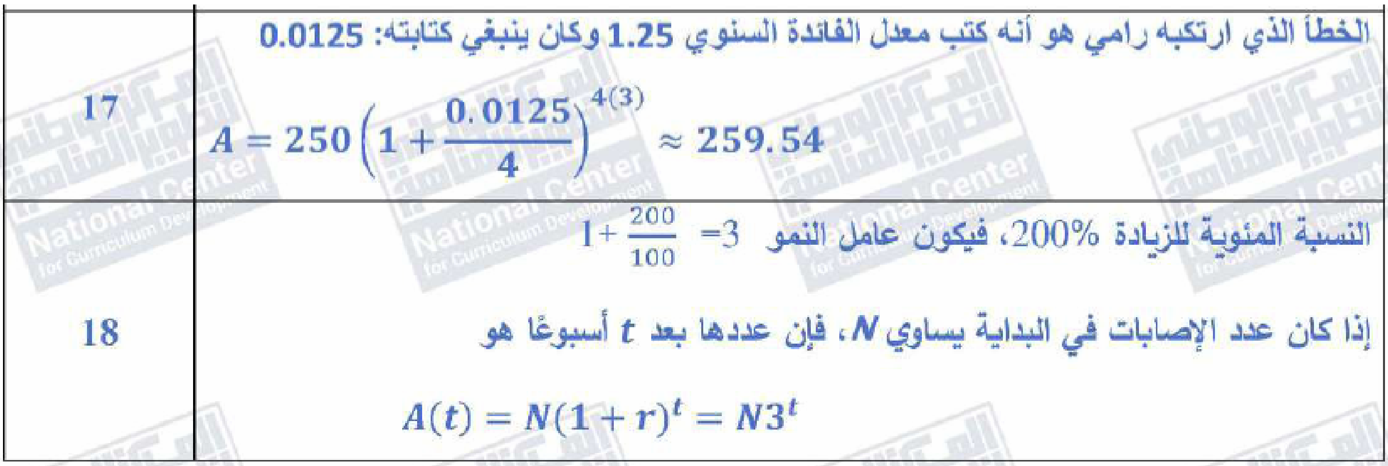
10
$$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$
$$= 1200\left(1+\frac{0.10}{12}\right)^{12t}$$

11
$$A = 1200\left(1+\frac{0.10}{12}\right)^{12\times 5}$$
$$\approx 1974.37$$

12
$$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$
$$= 6200\left(1+\frac{0.084}{365}\right)^{365t}$$

$A = 6200\left(1+\frac{0.084}{365}\right)^{365\times6}$ ≈ 10262.45 جملة المبلغ بعد 6 سنوات: JD 10262.45 تقريبًا.	13
$A = Pe^{rt}$ $= 9000e^{0.036\times7}$ ≈ 11579.36 جملة المبلغ بعد 7 سنوات: JD 11579.36 تقريبًا.	14

$A = Pe^{rt}$ $= 8200e^{0.049\times9}$ ≈ 12744.94 جملة المبلغ بعد 9 سنوات: JD 12744.94 تقريبًا.	15
$P(t) = 20e^{0.03t}$ $P(72) = 20e^{0.03\times72}$ ≈ 173 عدد ذباب الفاكهة بعد 72 ساعة من بدء الدراسة: 173 ذبابة تقريبًا.	16



الخطأ الذي ارتكبه رامي هو أنه كتب معدل الفائدة السنوي 1.25 وكان ينبغي كتابته: 0.0125 $A = 250\left(1+\frac{0.0125}{4}\right)^{4(3)} \approx 259.54$	17
النسبة المئوية للزيادة 200%، فيكون عامل النمو $1+\frac{200}{100} = 3$ إذا كان عدد الإصابات في البداية يساوي N، فإن عددها بعد t أسبوعًا هو $A(t) = N(1+r)^t = N3^t$	18

الدرس 3 الاقترانات اللوغاريتمية

3-1) مفهوم اللوغاريتم

مفهوم أساسي إذا كان: $x > 0, b > 0, b \neq 1$، فإنَّ:

الصورة اللوغاريتمية $\log_b x = y$ إذا وفقط إذا $b^y = x$ الصورة الأسّية

$\log_2 8$ تعني : كم مرة نضرب العدد (2) في نفسه ليكون الناتج (8) ؟؟؟ الجواب (3) . إذاً $\log_2 8 = 3$

كذلك: $\log_5 25$ تعني: (5) أس كم تساوي (25) ؟؟؟ الجواب (2) . إذاً $\log_5 25 = 2$

① $\log_2 16 = 4 \Rightarrow \log_2 16 = 4 \to 2^4 = 16$

② $\log_7 7 = 1 \Rightarrow \log_7 7 = 1 \to 7^1 = 7$

③ $\log_{10}\left(\frac{1}{1000}\right) = -3 \Rightarrow \log_{10}\left(\frac{1}{1000}\right) = -3 \to (10)^{-3} = \frac{1}{1000}$

④ $\log_5 1 = 0 \Rightarrow \log_5 1 = 0 \to 5^0 = 1$

الأستاذ
عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

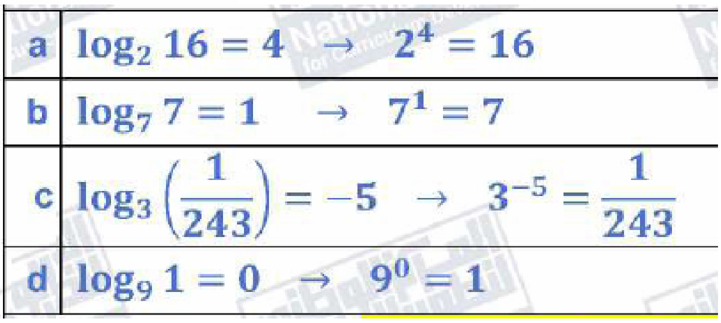
أتحقّق من فهمي أكتب كل معادلة لوغاريتمية ممّا يأتي في صورة أسّية:

a) $\log_2 16 = 4$

b) $\log_7 7 = 1$

c) $\log_3\left(\frac{1}{243}\right) = -5$

d) $\log_9 1 = 0$



a	$\log_2 16 = 4 \to 2^4 = 16$
b	$\log_7 7 = 1 \to 7^1 = 7$
c	$\log_3\left(\frac{1}{243}\right) = -5 \to 3^{-5} = \frac{1}{243}$
d	$\log_9 1 = 0 \to 9^0 = 1$

① $12^2 = 144 \Rightarrow 12^2 = 144 \to \log_{12} 144 = 2$

② $36^{\frac{1}{2}} = 6 \Rightarrow 36^{\frac{1}{2}} = 6 \to \log_{36} 6 = \frac{1}{2}$

③ $(3)^{-4} = \frac{1}{81} \Rightarrow (3)^{-4} = \frac{1}{81} \to \log_3\left(\frac{1}{81}\right) = -4$

④ $34^0 = 1 \Rightarrow 34^0 = 1 \to \log_{34} 1 = 0$

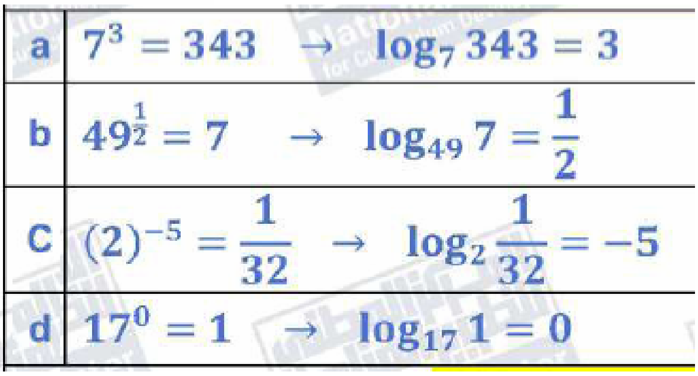
أتحقّق من فهمي أكتب كل معادلة أسّية ممّا يأتي في صورة لوغاريتمية:

a) $7^3 = 343$

b) $49^{\frac{1}{2}} = 7$

c) $(2)^{-5} = \frac{1}{32}$

d) $17^0 = 1$



a	$7^3 = 343 \to \log_7 343 = 3$
b	$49^{\frac{1}{2}} = 7 \to \log_{49} 7 = \frac{1}{2}$
c	$(2)^{-5} = \frac{1}{32} \to \log_2 \frac{1}{32} = -5$
d	$17^0 = 1 \to \log_{17} 1 = 0$

① $\log_2 8 \Rightarrow \log_2 8 = y \Rightarrow 2^y = 8$

$\Rightarrow 2^y = 2^3 \Rightarrow y = 3$

② $\log_7 \sqrt{7} \Rightarrow \log_7 \sqrt{7} = y \Rightarrow 7^y = \sqrt{7}$

$\Rightarrow 7^y = 7^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

③ $\log_9 3 \Rightarrow \log_9 3 = y \Rightarrow 9^y = 3$

$\Rightarrow (3^2)^y = 3 \Rightarrow 3^{2y} = 3^1$

$\Rightarrow 2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

④ $\log_{10} 0.01 \Rightarrow \log_{10} 0.01 = y \Rightarrow 10^y = 0.01$

$\Rightarrow 10^y = \frac{1}{100} \Rightarrow 10^y = 10^{-2}$

$\Rightarrow y = -2$

$$\boxed{\log_b b^x = x}$$

$$\boxed{b^{\log_b x} = x}$$

$$\boxed{\log_b b = 1}$$

الأستاذ
عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

أكتبُ كلّ معادلة لوغاريتمية ممّا يأتي، على الصورة الأُسّية:

① $\log_4 1024 = 5$ ② $\log_3 729 = 6$ ③ $\log_8 2 = \frac{1}{3}$ ④ $\log_{25} 5 = 0.5$

أكتبُ كلّ معادلة أُسّية ممّا يأتي، على الصورة اللوغاريتمية:

⑤ $6^3 = 216$ ⑥ $3^{-2} = \frac{1}{9}$ ⑦ $5^4 = 625$ ⑧ $2^{-3} = 0.125$

أجد قيمة كلّ ممّا يأتي، من دون استعمال الآلة الحاسبة:

⑨ $\log_2 256$ ⑩ $\log_9 27$ ⑪ $\log 0.1$ ⑫ $\log_{\frac{7}{2}} 1$

⑬ $e^{\ln \frac{1}{2}}$ ⑭ $\log_y \sqrt[3]{y}$ ⑮ $\log(1.0 \times 10^{-6})$ ⑯ $6^{\log_6 2.8}$

أتحقّق من فهمي أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

a) $\log_2 1$ b) $\log_{32} \sqrt{32}$ c) $\log_9 9$ d) $8^{\log_8 13}$

a	$\log_2 1 = 0$	b	$\log_{32} \sqrt{32} = \log_{32} 32^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$	c	$\log_9 9 = 1$	d	$8^{\log_8 13} = 13$

أتدرّب وأحلّ المسائل

صفحة 33

أكتب كل معادلة لوغاريتمية ممّا يأتي في صورة أُسِّية:

1. $\log_7 343 = 3$
2. $\log_4 256 = 4$
3. $\log_{125} 5 = \frac{1}{3}$
4. $\log_{36} 6 = 0.5$
5. $\log_9 1 = 0$
6. $\log_{57} 57 = 1$

أكتب كل معادلة أُسِّية ممّا يأتي في صورة لوغاريتمية:

7. $2^6 = 64$
8. $4^{-3} = \frac{1}{64}$
9. $6^3 = 216$
10. $5^{-3} = 0.008$
11. $(51)^1 = 51$
12. $9^0 = 1$

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

13. $\log_3 81$
14. $\log_{25} 5$
15. $\log_2 32$
16. $\log_{49} 343$
17. $\log_{10} 0.001$
18. $\log_{\frac{3}{2}} 1$
19. $\log_{\frac{1}{4}} 4$
20. $(10)^{\log_{10}\frac{1}{8}}$
21. $\log_2 \frac{1}{\sqrt{(2)^7}}$
22. $\log_a \sqrt[5]{a}$
23. $\log_{10}(1 \times 10^{-9})$
24. $8^{\log_8 5}$

1	$\log_7 343 = 3 \rightarrow 7^3 = 343$
2	$\log_4 256 = 4 \rightarrow 4^4 = 256$
3	$\log_{125} 5 = \frac{1}{3} \rightarrow 125^{\frac{1}{3}} = 5$

4	$\log_{36} 6 = 0.5 \rightarrow 36^{0.5} = 6$
5	$\log_9 1 = 0 \rightarrow 9^0 = 1$
6	$\log_{57} 57 = 1 \rightarrow 57^1 = 57$

7	$2^6 = 64 \rightarrow \log_2 64 = 6$
8	$4^{-3} = \frac{1}{64} \rightarrow \log_4 \frac{1}{64} = -3$
9	$6^3 = 216 \rightarrow \log_6 216 = 3$

10	$5^{-3} = 0.008 \rightarrow \log_5 0.008 = -3$
11	$51^1 = 51 \rightarrow \log_{51} 51 = 1$
12	$9^0 = 1 \rightarrow \log_9 1 = 0$

13	$\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$
14	$\log_{25} 5 = y \Rightarrow 25^y = 5$ $5^{2y} = 5^1 \Rightarrow 2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$
15	$\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$

16	$\log_{49} 343 = y \Rightarrow 49^y = 343$ $7^{2y} = 7^3 \Rightarrow 2y = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$
17	$\log_{10} 0.001 = \log_{10} 10^{-3}$ $= -3$
18	$\log_{\frac{3}{2}} 1 = 0$

19	$\log_{\frac{1}{4}} 4 = y \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^y = 4$ $\Rightarrow 4^{-y} = 4^1 \Rightarrow y = -1$
20	$(10)^{\log_{10}\frac{1}{8}} = \frac{1}{8}$
21	$\log_2 \frac{1}{\sqrt{2^7}} = \log_2 \frac{1}{(2)^{\frac{7}{2}}} = \log_2 (2)^{-\frac{7}{2}} = -\frac{7}{2}$

22	$\log_a \sqrt[5]{a} = \log_a a^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}$
23	$\log_{10}(1 \times 10^{-9}) = \log_{10} 10^{-9}$ $= -9$
24	$8^{\log_8 5} = 5$

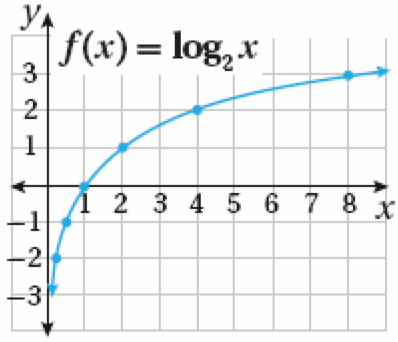
2-3) تمثيل الاقتران اللوغاريتمي بيانيًا

$f(x) = \log_2 x$

$y = \log_2 x$ تُكافِئ المعادلة: $x = 2^y$

اختيار قِيَم للمُتغيِّر y، ثم إيجاد قِيَم x المرتبطة بها

$x = 2^y$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	-2	-1	0	1	2



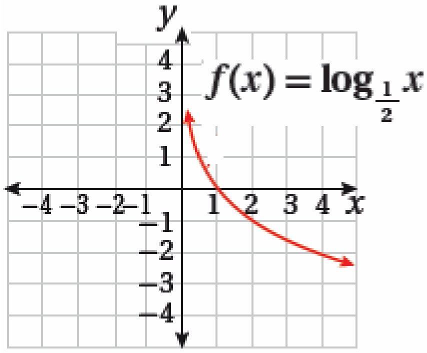
- مجال الاقتران هو الفترة $(0, \infty)$.
- مدى الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية.
- المقطع x هو 1
- لا يوجد للاقتران مقطع مع المحور y؛ لأنَّ $x > 0$ دائمًا.
- الاقتران له خط تقارب رأسي هو المحور y.
- الاقتران مُتزايِد.

$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

$y = \log_{\frac{1}{2}} x$ تُكافِئ المعادلة: $x = (\frac{1}{2})^y$.

اختيار قِيَم للمُتغيِّر y، ثم إيجاد قِيَم x المرتبطة بها

$x = (\frac{1}{2})^y$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
y	-2	-1	0	1	2



- مجال الاقتران هو الفترة $(0, \infty)$.
- المدى هو مجموعة الأعداد الحقيقية.
- المقطع x هو 1
- لا يوجد للاقتران مقطع مع المحور y؛ لأنَّ $x > 0$ دائمًا.
- الاقتران له خط تقارب رأسي هو المحور y.
- الاقتران مُتناقِص.

أتحقَّق من فهمي

أُمثِّل كل اقتران ممّا يأتي بيانيًّا، ثم أُحدِّد مجاله ومداه ومقطعيه من المحورين الإحداثيين وخطوط تقاربه، مُبيِّنًا إذا كان مُتناقِصًا أم مُتزايِدًا: b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ a) $f(x) = \log_3 x$

$f(x) = \log_3 x$

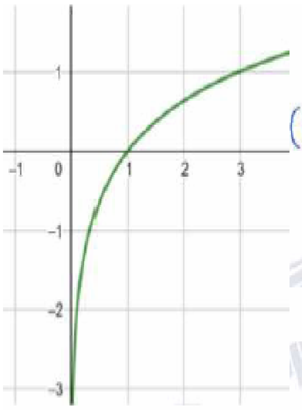
مجال هذا الاقتران هو R^+ أي $(0, \infty)$

مدى هذا الاقتران هو R

المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y

خط تقارب رأسي هو المحور y

الاقتران متزايد



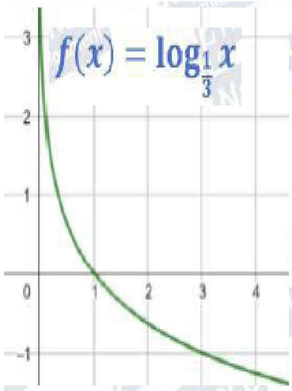
مجال هذا الاقتران هو R^+ أي $(0, \infty)$

مدى هذا الاقتران هو R

المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y

خط تقارب رأسي هو المحور y

الاقتران متناقص



3-3) مجال الاقتران اللوغاريتمي: $f(x) = \log_b g(x)$ هو قيم **(x)** التي يكون عندها **g(x)** موجبا

الاقتران	$f(x)=\log_5 x$	$g(x)=\log_5(x-1)$	$f(x)=3-\log_2(4-x)$	$g(x)=\log_3(x)-1$
مجاله	$x>0$	$x>1$	$x<4$	$x>0$

جد المجال :

a) $f(x)=\log_5(x-2)$ b) $f(x)=\ln(x+3)$ c) $f(x)=\log x+4$ d) $f(x)=\log_3(x+1)-2$

أتحقَّق من فهمي أجد مجال كل اقتران لوغاريتمي ممّا يأتي:

a) $f(x)=\log_7(5-x)$ b) $f(x)=\log_5(9+3x)$

a $5-x>0 \Rightarrow -x>-5 \Rightarrow x<5$ مجال الاقتران هو $(-\infty,5)$

b $9+3x>0 \Rightarrow 3x>-9 \Rightarrow x>-3$ مجال الاقتران هو $(-3,\infty)$

أتدرّب وأحلُّ المسائل صفحة 33

أُمثِّل كل اقتران ممّا يأتي بيانيًّا، ثم أُحدِّد مجاله ومداه ومقطعيه من المحورين الإحداثيين وخطوط تقاربه، مُبيِّنًا إذا كان مُتناقِصًا أم مُتزايِدًا:

㉕ $f(x)=\log_5 x$ ㉖ $g(x)=\log_4 x$ ㉗ $h(x)=\log_{\frac{1}{5}} x$

㉘ $r(x)=\log_{\frac{1}{8}} x$ ㉙ $f(x)=\log_{10} x$ ㉚ $g(x)=\log_6 x$

أجد مجال كل اقتران لوغاريتمي ممّا يأتي:

㉛ $f(x)=\log_3(x-2)$ ㉜ $f(x)=5-2\log_7(x+1)$ ㉝ $f(x)=-3\log_4(-x)$

㉞ أجد قيمة a التي تجعل منحنى الاقتران: $f(x)=\log_a x$ يمرُّ بالنقطة $(32, 5)$.

㉟ أجد قيمة c التي تجعل منحنى الاقتران: $f(x)=\log_c x$ يمرُّ بالنقطة $(\frac{1}{4}, -4)$.

إعلانات: يُمثِّل الاقتران: $P(a) = 10 + 20\log_5(a+1)$ مبيعات شركة (بآلاف الدنانير) من مُنتَج جديد، حيث a المبلغ (بمئات الدنانير) الذي تُنفِقه الشركة على إعلانات المُنتَج. وتعني القيمة: $P(1) \approx 19$ أنَّ إنفاق JD 100 على الإعلانات يُحقِّق إيرادات قيمتها JD 19000 من بيع المُنتَج:

㊱ أجد $P(4)$، و$P(24)$، و$P(124)$.

㊲ أُفسِّر معنى القِيَم التي أوجدْتُها في الفرع السابق.

مهارات التفكير العليا

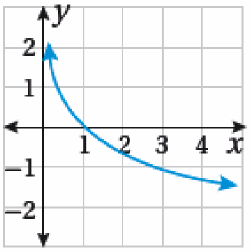
تبرير: أكتب بجانب كل اقتران ممّا يأتي رمز تمثيله البياني المناسب، مُبرِّرًا إجابتي:

㊳ $f(x) = \log_3 (x)$

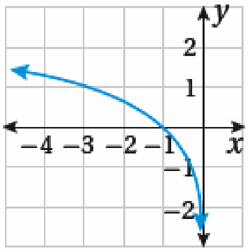
㊴ $f(x) = \log_3 (-x)$

㊵ $g(x) = -\log_3 x$

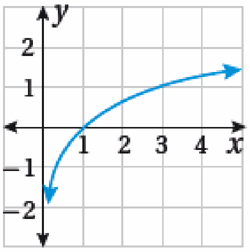
a)



b)



c)



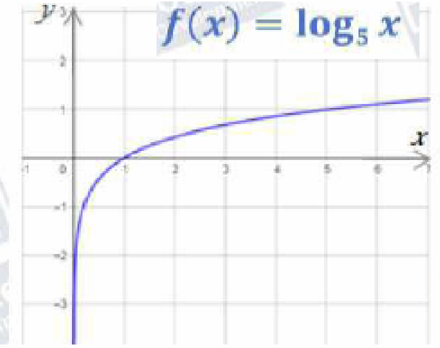
تحدٍّ: أجد مجال كل اقتران لوغاريتمي ممّا يأتي، مُحدِّدًا خط (خطوط) تقاربه الرأسي:

㊶ $f(x) = \log_3 (x^2)$

㊷ $f(x) = \log_3 (x^2 - x - 2)$

㊸ $f(x) = \log_3 \left(\frac{x+1}{x-5}\right)$

25



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$

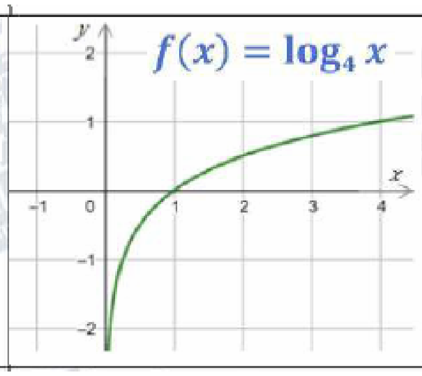
مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y

لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y

الاقتران متزايد

26



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$

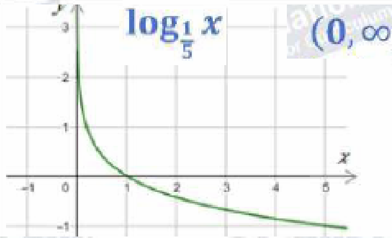
مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y

لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y

الاقتران متزايد

27



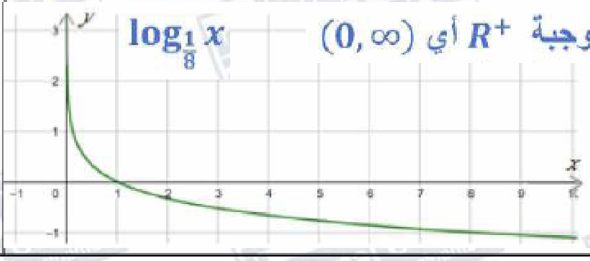
مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$

مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y

لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y الاقتران متناقص

28



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$

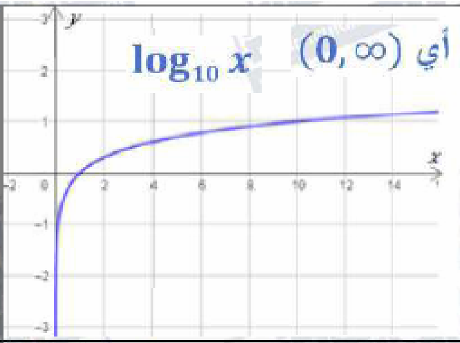
مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y

لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y

الاقتران متناقص

29



$\log_{10} x$

مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0,\infty)$

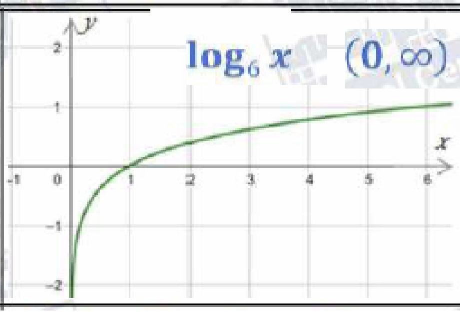
مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y

لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y

الاقتران متزايد

30



$\log_6 x$

مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0,\infty)$

مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y

لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y

الاقتران متزايد

31 $f(x) = \log_3(x-2) \Rightarrow x-2>0 \Rightarrow x>2$ مجال هذا الاقتران هو $(2,\infty)$

32 $f(x) = 5 - 2\log_7(x+1) \Rightarrow x+1>0 \Rightarrow x>-1 \Rightarrow (-1,\infty)$

33 $f(x) = -3\log_4(-x) \Rightarrow -x>0 \Rightarrow x<0$ مجال هذا الاقتران هو $(-\infty,0)$

34 $f(x) = \log_a x \Rightarrow f(32) = \log_a 32 \Rightarrow 5 = \log_a 32$

$a^5 = 32 \Rightarrow a^5 = (2)^5 \Rightarrow a = 2$

35 $f(x) = \log_c x \Rightarrow f\left(\frac{1}{4}\right) = \log_c \frac{1}{4} \Rightarrow -4 = \log_c \frac{1}{4} \Rightarrow c^{-4} = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{c^4} = \frac{1}{4} \Rightarrow c^4 = 4 \to c^2 = 2 \to c = \pm\sqrt{2}$

ولأن أساس اللوغاريتم لا يكون سالبًا

فإن: $c = \sqrt{2}$

36 $P(a) = 10 + 20\log_5(a+1)$

$P(4) = 10 + 20\log_5(4+1) = 10 + 20\log_5 5 = 10 + 20(1) = 30$

$P(24) = 10 + 20\log_5(24+1) = 10 + 20\log_5 25 = 10 + 20\log_5 5^2 = 50$

$P(124) = 10 + 20\log_5(124+1) = 10 + 20\log_5 125 = 10 + 20\log_5 5^3 = 70$

37

القيمة $P(4)=30$ تعني أن إنفاق JD400 على الإعلانات يحقق إيرادا قيمته JD 30000 من بيع المنتج

القيمة $P(24)=50$ تعني أن إنفاق JD 2400 على الإعلانات يحقق إيرادا قيمته JD 50000 من بيع المنتج

القيمة $P(124)=70$ تعني أن إنفاق JD 12400 على الإعلانات يحقق إيرادا قيمته JD 70000 من بيع المنتج

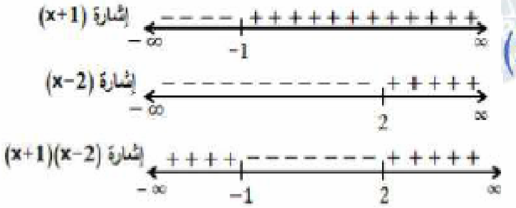
a	$g(x)=-\log_3 x$	40	b	$f(x)=\log_3(-x)$	39	c	$f(x)=\log_3 x$	38

41 $f(x)=\log_3(x^2)$

بما أنّ $x^2>0$ لجميع الأعداد الحقيقية عدا العدد 0 فإن مجال هذا الاقتران هو $R-\{0\}$

خط التقارب الرأسي هو $x=0$ (المحور y)

42 $f(x)=\log_3(x^2-x-2) \Rightarrow x^2-x-2>0 \Rightarrow (x-2)(x+1)>0$



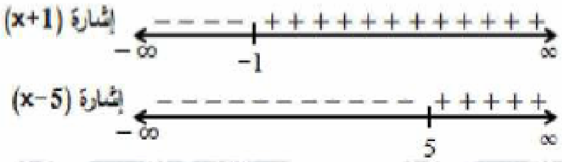
نلاحظ أن $(x-2)(x+1)>0$ في الفترتين $(-\infty,-1)$، و$(2,\infty)$

إذن، مجال الاقتران هو $(-\infty,-1),(2,\infty)$

خطا التقارب الرأسيان هما $x=-1, x=2$ وهما جذرا المعادلة $x^2-x-2=0$

43 $f(x)=\log_3\left(\frac{x+1}{x-5}\right)$

يكون $\frac{x+1}{x-5}>0$ عندما يكون البسط والمقام موجبان معًا، أو سالبان معًا



نلاحظ أن $x+1$، و$x-5$ لهما الإشارة نفسها في الفترتين $(-\infty,-1)$، و$(5,\infty)$

إذن، مجال هذا الاقتران هو $(-\infty,-1),(5,\infty)$

خطا التقارب الرأسيان هما $x=-1, x=5$ وهما جذرا المعادلتين $x-5=0, x+1=0$

44 الكتابة الصحيحة للصورة اللوغاريتمية هي: $\log_4\frac{1}{64}=-3$

National Center for Curriculum Development

يمكن استخدام العلاقة بين الصيغتين الأسية و اللوغاريتمية لإيجاد بعض اللوغاريتمات ، مثلاً

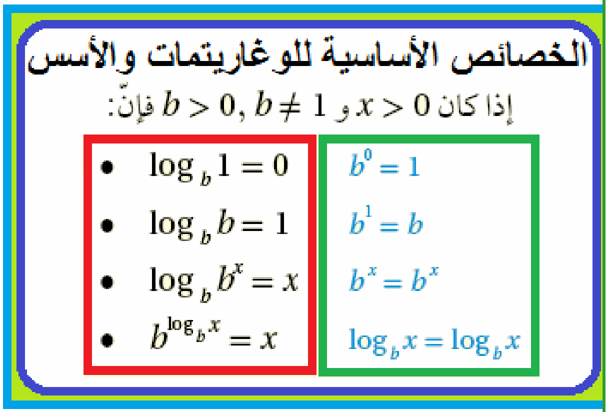
$\log_{8} 32 = ?$

نفرض أن $\log_{8} 32 = x$ ثم نحولها إلى الصيغة الأسية ونحل المعادلة الناتجة

$8^{x} = 32 \rightarrow (2^{3})^{x} = (2)^{5} \rightarrow 3x = 5 \rightarrow X = 1.7$

$\log_{9} 27 = 1.5$, $\log_{9} 3 = 0.5$

$\log_{25} 125 = 1.5$, $\log_{7} \sqrt{7} = 0.5$



الخصائص الأساسية للوغاريتمات والأسس

إذا كان $x > 0$ و $b > 0, b \neq 1$ فإنّ:

- $\log_{b} 1 = 0$ — $b^{0} = 1$
- $\log_{b} b = 1$ — $b^{1} = b$
- $\log_{b} b^{x} = x$ — $b^{x} = b^{x}$
- $b^{\log_{b} x} = x$ — $\log_{b} x = \log_{b} x$

ملاحظة : الاقتران اللوغاريتمي والأسي متعاكسان :كل منهما يلغي الآخر

$\log_{3} 9 = X \Longrightarrow \cancel{3}^{\cancel{\log}_{\cancel{3}} 9} = 3^{X} \Longrightarrow 9 = 3^{x} \Longrightarrow x = 2$

$4^{2} = 16 \Longrightarrow \cancel{\log}_{\cancel{4}} 4^{2} = \log_{4} 16 \Longrightarrow 2 = \log_{4} 16$

الأستاذ
عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

*** إذا كان $y=f(x)=\text{Log}_2(x-1)-4$ ، وأردنا أن نجد

1) المجال : نضع ما بداخل اللوغاريتم أكبر من صفر ونحل المتباينة الناتجة : $x-1>0 \rightarrow x>1$

2) المقطع من (x) نضع (y=0) فينتج أن $\text{Log}_2(x-1)-4=0 \rightarrow \text{Log}_2(x-1)=4 \rightarrow x-1=2^4 \rightarrow x=17$

3) المقطع من (y) نضع (x=0) فينتج أن :قيمة غير معرفة $y=f(x)=\text{Log}_2(0-1)-4 \rightarrow y=\text{Log}(-1)-4$

إذاً لا يقطع المحور (y)

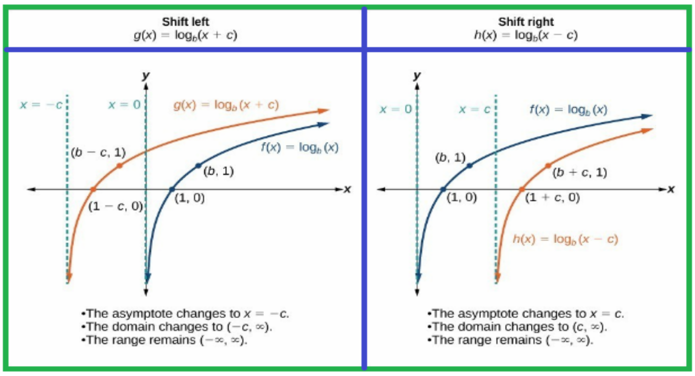
4) خط التقارب الرأسي: نساوي ما بداخل اللوغاريتم بالصفر ونحل المعادلة الناتجة : $x-1=0 \rightarrow x=1$

معادلة خط التقارب الراسي	مقطعه من (y)	مقطعه من (x)	مجاله	الاقتران	🟥
$x=-4$	$y=0$	$x=0$	$x>-4$	$f(x)=\text{Log}(x+4)$	1
$x=3$	لا يوجد	$x=3.5$	$x>3$	$f(x)=\text{Log}(2x-6)$	2
$x=1$	لا يوجد	$x=10$	$x>1$	$f(x)=\log_3(x-1)-2$	3
$x=-2$	$y=1.5$	$x=-1.75$	$x>-2$	$f(x)=\log_4(x+2)+1$	4
$x=-e$	$Y=2$	$e^{-1}-e$	$x>-e$	$f(x)=\text{Ln}(x+e)+1$	5

ملاحظة : في الاقتران $(f(x)=\text{Log}(x+a)+c)$: إذا كانت الإضافة أو الطرح داخل اللوغاريتم (+a)
فإن ذلك يعني الإزاحة يمين (-) أو يسار(+)

ولكن إذا كانت الإضافة أو الطرح على كامل الاقتران اللوغاريتمي(+c)
فإنه يتم إزاحة المنحنى إلى الأعلى(+) أو الأسفل (-)

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

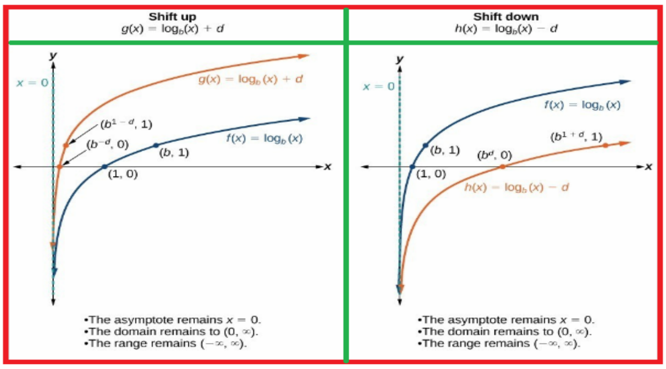


Shift left
$g(x)=\log_b(x+c)$

- The asymptote changes to $x=-c$.
- The domain changes to $(-c,\infty)$.
- The range remains $(-\infty,\infty)$.

Shift right
$h(x)=\log_b(x-c)$

- The asymptote changes to $x=c$.
- The domain changes to (c,∞).
- The range remains $(-\infty,\infty)$.



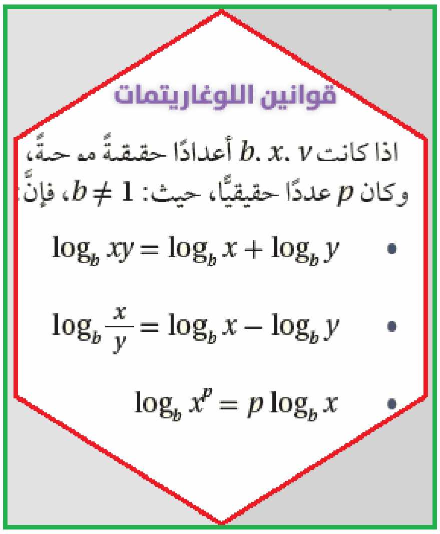
Shift up
$g(x)=\log_b(x)+d$

- The asymptote remains $x=0$.
- The domain remains to $(0,\infty)$.
- The range remains $(-\infty,\infty)$.

Shift down
$h(x)=\log_b(x)-d$

- The asymptote remains $x=0$.
- The domain remains to $(0,\infty)$.
- The range remains $(-\infty,\infty)$.

الدرس 4 قوانين اللوغاريتمات


قوانين اللوغاريتمات

إذا كانت b, x, y أعدادًا حقيقيةً موجبةً، وكان p عددًا حقيقيًّا، حيث: $b \neq 1$، فإنّ:

- $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$
- $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$
- $\log_b x^p = p \log_b x$

مثال1)

$$\log_3 4 = 1.26 \quad , \quad \log_3 6 = 1.63 \Rightarrow \log_3 24 = ?$$

$$\log_3 24 = \log_3(4\times 6) = \log_3 4 + \log_3 6$$

$$= 1.26 + 1.63 = 2.89$$

مثال2)

$$\log_4 5 = 1.16 \quad , \Rightarrow \quad \log_4 25 = ?$$

$$\log_4 25 = \log_4(5\times 5) = \log_4 5^2 = (2)\log_4 5$$

$$= (2)(1.16) = 2.32$$

مثال3)

إذا كان $\log_a 2 \approx 0.301$ و $\log_a 3 \approx 0.477$، فأجد كلًّا ممّا يأتي:

1. $\log_a 6 = \log_a(2\times 3) = \log_a 2 + \log_a 3 \approx 0.301 + 0.477 \approx 0.778$
2. $\log_a \frac{2}{3} = \log_a 2 - \log_a 3 \approx 0.301 - 0.477 \approx -0.176$
3. $\log_a 81 = \log_a(3^4) = 4\log_a 3 \approx 4(0.477) \approx 1.908$
4. $\log_a \frac{1}{4} = \log_a 1 - \log_a 4 = 0 - \log_a 2^2 = -2\log_a 2 \approx -2(0.301) \approx -0.602$

تمرين:

إذا كان $\log_b 4 \approx 0.86$ و $\log_b 3 \approx 0.68$، فأجد كلًّا ممّا يأتي:

a) $\log_b 12$

b) $\log_b 9$

c) $\log_b 0.75$

d) $\log_b \frac{1}{3}$

أتحقّق من فهمي إذا كان: $\log_b 7 \approx 1.21$، وكان: $\log_b 2 \approx 0.43$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) $\log_b 14$ b) $\log_b \frac{2}{7}$ c) $\log_b 32$ d) $\log_b \frac{1}{49}$

a	$\log_b 14 = \log_b(2\times 7) \approx 1.64$	b	$\log_b \frac{2}{7} = \log_b 2 - \log_b 7 \approx -0.78$
c	$\log_b 32 = \log_b 2^5 \approx 2.15$	d	$\log_b \frac{1}{49} = \log_b 1 - \log_b 49 \approx -2.42$

2-4)كتابة اللوغاريتمات بالصورة المُطوَّلة

نحتاجُ في بعض الأحيان إلى إعادة كتابة عبارات لوغاريتمية بصورة مطوّلة ، فنستخدم قوانين اللوغاريتمات لعمل ذلك

① $\log_4 5x^3 y = \log_4 5 + \log_4 x^3 + \log_4 y \quad = \log_4 5 + 3\log_4 x + \log_4 y$

② $\ln\frac{\sqrt{3x-5}}{7} = \ln\frac{(3x-5)^{\frac{1}{2}}}{7} = \ln(3x-5)^{\frac{1}{2}} - \ln 7 = \frac{1}{2}\ln(3x-5) - \ln 7$

$, x > \frac{5}{3}$

③ $\log_a \frac{x^2 y^5}{z^4} = \log_a x^2 y^5 - \log_a z^4 = \log_a x^2 + \log_a y^5 - \log_a z^4$

$$= 2\log_a x + 5\log_a y - 4\log_a z$$

④ $\log_a \sqrt[3]{\frac{a^2 b}{c^5}} = \log_a\left(\frac{a^2 b}{c^5}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}(\log_a a^2 b - \log_a c^5) = \frac{1}{3}(\log_a a^2 + \log_a b - \log_a c^5)$

$$= \frac{1}{3}(2\log_a a + \log_a b - 5\log_a c) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\log_a b - \frac{5}{3}\log_a c$$

اكتبُ بالصورة المطوّلة

a) $\log_3 a^2 bc^3$

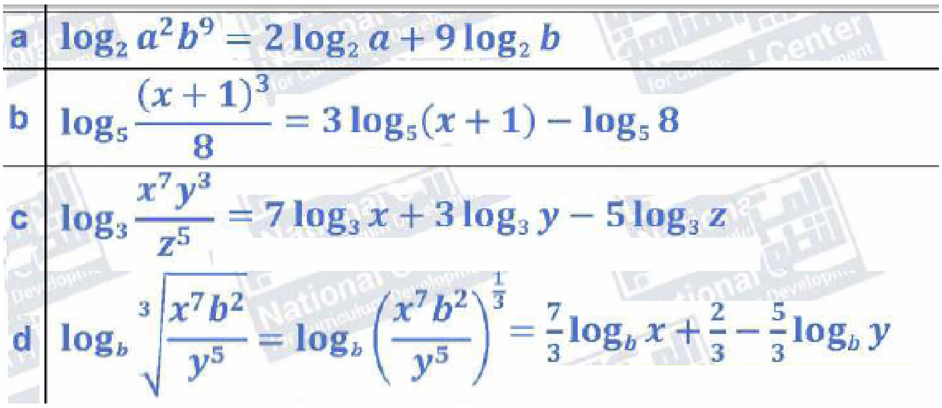
b) $\ln(a^2\sqrt{a-1})$

$, a > 1$

c) $\log_b \frac{x^2 y}{b^3}$

أتحقّق من فهمي أكتب كل مقــدار لوغاريتمي ممّا يأتي بالصورة المُطوَّلة، علمًا بـأنَّ المُتغيِّرات جميعها تُمثِّل أعدادًا حقيقيةً موجبةً:

a) $\log_2 a^2 b^9$ b) $\log_5 \frac{(x+1)^3}{8}$ c) $\log_3 \frac{x^7 y^3}{z^5}$ d) $\log_b \sqrt[3]{\frac{x^7 b^2}{y^5}}$



a	$\log_2 a^2 b^9 = 2\log_2 a + 9\log_2 b$
b	$\log_5 \frac{(x+1)^3}{8} = 3\log_5(x+1) - \log_5 8$
c	$\log_3 \frac{x^7 y^3}{z^5} = 7\log_3 x + 3\log_3 y - 5\log_3 z$
d	$\log_b \sqrt[3]{\frac{x^7 b^2}{y^5}} = \log_b\left(\frac{x^7 b^2}{y^5}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{7}{3}\log_b x + \frac{2}{3} - \frac{5}{3}\log_b y$

3-4)كتابة اللوغاريتمات بالصورة المُختصَرة

نحتاجُ في بعض الأحيان إلى كتابة المقدار اللوغاريتمي على شكل لوغاريتم واحد ، فنستخدم قوانين اللوغاريتمات أيضاً

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

① $\frac{2}{3}\ln 8-\ln(5^2-1)=\ln 8^{\frac{2}{3}}-\ln(25-1)=\ln 4-\ln 24$

$$=\ln\frac{4}{24}=\ln\frac{1}{6}=\ln 1-\ln 6=-\ln 6$$

② $\ln x^5-2\ln(xy)=\ln x^5-\ln(xy)^2=\ln x^5-\ln x^2y^2$

$$=\ln\frac{x^5}{x^2y^2}=\ln\frac{x^3}{y^2}$$

③ $2\log x-\frac{1}{2}\log y+3\log z=\log x^2-\log y^{\frac{1}{2}}+\log z^3=\log x^2+\log z^3-\log y^{\frac{1}{2}}$

$$=\log x^2z^3-\log y^{\frac{1}{2}}=\log\left(\frac{x^2z^3}{y^{\frac{1}{2}}}\right)=\log\left(\frac{x^2z^3}{\sqrt{y}}\right)$$

④ $\frac{1}{2}(\log_5(x^2-y^2)-\log_5(x+y))=\frac{1}{2}\log_5\left(\frac{x^2-y^2}{x+y}\right)=\frac{1}{2}\log_5\left(\frac{(x+y)(x-y)}{x+y}\right)$

$, x>y$ $\qquad =\frac{1}{2}\log_5(x-y)=\log_5(x-y)^{\frac{1}{2}}=\log_5\sqrt{(x-y)}$

أكتبُ كلّ عبارة لوغاريتمية ممّا يأتي بالصورة المختصرة؛

a) $\ln 25+\ln 4$

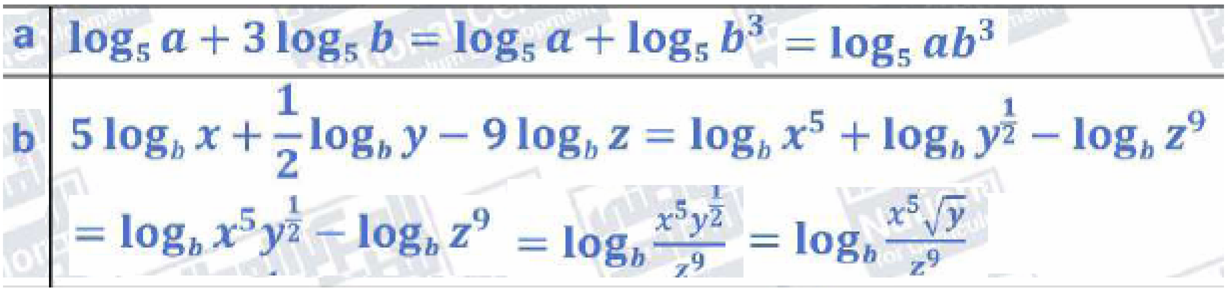
b) $\ln(3x+1)-\ln(3x^2-5x-2)$

c) $\frac{1}{2}(\log_2(a^2+ab)-\log_2 a)$

d) $\frac{1}{3}(\log_2 x+\log_2(x-4))$

أتحقق من فهمي أكتب كل مقــدار لوغاريتمي ممّا يأتي بالصورة المُختصَرة، علمًا بأنَّ المُتغيِّرات جميعها تُمثِّل أعدادًا حقيقيةً موجبةً:

a) $\log_5 a+3\log_5 b$ b) $5\log_b x+\frac{1}{2}\log_b y-9\log_b z$



a	$\log_5 a+3\log_5 b=\log_5 a+\log_5 b^3=\log_5 ab^3$
b	$5\log_b x+\frac{1}{2}\log_b y-9\log_b z=\log_b x^5+\log_b y^{\frac{1}{2}}-\log_b z^9$ $=\log_b x^5y^{\frac{1}{2}}-\log_b z^9=\log_b\frac{x^5y^{\frac{1}{2}}}{z^9}=\log_b\frac{x^5\sqrt{y}}{z^9}$

إذا كانت a, b, x أعدادًا حقيقية موجبة، حيث $b \neq 1, a \neq 1$ فإنّ: $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

① $\log_4 25 = \frac{\log 25}{\log 4} \approx 2.32$

② $\log_{\frac{1}{2}} 2 = \frac{\ln 2}{\ln \frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\ln 1 - \ln 2} = \frac{\ln 2}{-\ln 2} = -1$

في تجربة لتحديد مدى تأثير المُدَّة الزمنية في درجة تذكُّر الطلبة للمعلومات، تقدَّمت مجموعة من الطلبة لاختبار في مادَّة مُعيَّنة، ثم لاختبارات مُكافِئة لهذا الاختبار على مدار مُدَد شهرية بعد ذلك، فوجد فريق البحث أنَّ النسبة المئوية للموضوعات التي يتذكَّرها أحد الطلبة بعد t شهرًا من إنهائه دراسة المادَّة تعطى بالاقتران: $M(t) = 85 - 25\log_{10}(t+1)$.

أجد النسبة المئوية للمادَّة التي يتذكَّرها هذا الطالب بعد 19 شهرًا من إنهائه دراستها، علمًا بأنَّ $\log_{10} 2 \approx 0.3010$

$$M(t) = 85 - 25\log_{10}(t+1)$$

$$M(19) = 85 - 25\log_{10}(19+1) = 85 - 25\log_{10}(20)$$

$$= 85 - 25\log_{10}(10 \times 2) = 85 - 25(\log_{10} 10 + \log_{10} 2)$$

$$\approx 85 - 25((1) + 0.3010) \approx 85 - 25\,(1.3010) \approx 52$$

يُقاس الضغط الجوي P بوحدة الباسكال على ارتفاع مقداره H بالأمتار؛ باستعمال المعادلة $H = 15500(5 - \log(P))$.

أجد الضغط الجوي بالباسكال على قمة إفرست؛ إذا علمتُ أنّ ارتفاعها 8850 m عن سطح الأرض.

$$H = 15500(5 - \log p)$$

$$8850 = 15500(5 - \log p)$$

$$0.57 = 5 - \log p$$

$$\log p = 5 - 0.57$$

$$\log p = 4.43 \Rightarrow p = 10^{4.43} \approx 26915.35$$

أتحقق من فهمي يُمثِّل الاقتران: $M(t) = 92 - 28\log_{10}(t+1)$ النسبة المئوية للموضوعات التي يتذكَّرها طالب من مادَّة مُعيَّنة بعد t شهرًا من إنهائه دراستها. أجد النسبة المئوية للموضوعات التي يتذكَّرها هذا الطالب بعد 29 شهرًا من إنهائه دراسة المادَّة، علمًا بأنَّ $\log_{10} 3 \approx 0.4771$.

$$M(t) = 92 - 28\log_{10}(t+1)$$

$$M(29) = 92 - 28\log_{10}(29+1) = 92 - 28\log_{10} 30 = 92 - 28\log_{10}(10 \times 3)$$

$$= 92 - 28(\log_{10} 10 + \log_{10} 3) \approx 92 - 28(1 + 0.4771)$$

$$\approx 92 - 28(1.4771) \approx 92 - 41.3588 \approx 51$$

أتدرّب وأحلُّ المسائل

إذا كان: $\log_a 6 \approx 0.778$، وكان: $\log_a 5 \approx 0.699$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

① $\log_a \frac{5}{6}$ ② $\log_a 30$ ③ $\frac{\log_a 5}{\log_a 6}$ ④ $\log_a \frac{1}{6}$ ⑤ $\log_a 900$

⑥ $\log_a \frac{18}{15}$ ⑦ $\log_a (6\,a^2)$ ⑧ $\log_a \sqrt[4]{25}$ ⑨ $(\log_a 5)(\log_a 6)$

أكتب كل مقدار لوغاريتمي ممّا يأتي بالصورة المُطوَّلة، علمًا بأنَّ المُتغيِّرات جميعها تُمثِّل أعدادًا حقيقيةً موجبةً:

⑩ $\log_a x^2$ ⑪ $\log_a \left(\frac{a}{bc}\right)$ ⑫ $\log_a (\sqrt{x}\,\sqrt{y})$

⑬ $\log_a \left(\frac{\sqrt{z}}{y}\right)$ ⑭ $\log_a \frac{1}{x^2 y^2}$ ⑮ $\log_a \sqrt[5]{32x^5}$

⑯ $\log_a \frac{(x^2 y^3)^2}{(x^2 y^3)^3}$ ⑰ $\log_a (x+y-z)^7,\ x+y>z$ ⑱ $\log_a \sqrt{\frac{x^{12} y}{y^3 z^4}}$

أكتب كل مقدار لوغاريتمي ممّا يأتي بالصورة المُختصَرة، علمًا بأنَّ المُتغيِّرات جميعها تُمثِّل أعدادًا حقيقيةً موجبةً:

⑲ $\log_a x + \log_a y$ ⑳ $\log_b (x+y) - \log_b (x-y),\ x>y$ ㉑ $\log_a \frac{1}{\sqrt{x}} - \log_a \sqrt{x}$

㉒ $\log_a (x^2-4) - \log_a (x+2),\ x>2$ ㉓ $2\log_b x - 3\log_b y + \frac{1}{3}\log_b z$ ㉔ $\log_b 1 + 2\log_b b$

㉕ نمـو: يُمثِّل الاقتـران: $f(x) = 29 + 48.8\log_6 (x+2)$ النسـبة المئوية لطول الطفل الذكر الآن من طوله عند البلوغ، حيث x عمره بالسنوات. أجد النسبة المئوية لطول طفل عمره 10 سنوات من طوله عند البلوغ، علمًا بأنَّ $\log_6 2 \approx 0.3869$.

مهارات التفكير العليا

㉖ تحدٍّ: أُثبِت أنَّ $\frac{\log_a 216}{\log_a 36} = \frac{3}{2}$.

㉗ أكتشف الخطأ: أكتشف الخطأ في الحَلِّ الآتي، ثم أُصحِّحه: $\log_2 5x = (\log_2 5)(\log_2 x)$ ✗

㉘ تبرير: أُثبِت أنَّ $\log_b (b-3) + \log_b (b^2+3b) - \log_b (b^2-9) = 1$، حيث: $b>3$، مُبرِّرًا إجابتي.

1	$\log_a \frac{5}{6} = \log_a 5 - \log_a 6 \approx 0.699 - 0.778 \approx -0.079$
2	$\log_a 30 = \log_a(5\times 6) = \log_a 5 + \log_a 6 \approx 0.699 + 0.778 \approx 1.477$
3	$\frac{\log_a 5}{\log_a 6} = \frac{0.699}{0.778} = \frac{699}{778} \approx 0.90$
4	$\log_a \frac{1}{6} = \log_a 1 - \log_a 6 \approx 0 - 0.778 \approx -0.778$

5	$\log_a 900 = \log_a 30^2 = 2\log_a 30 = 2\log_a(5\times 6) = 2(\log_a 5 + \log_a 6)$ $\approx 2(0.699 + 0.778) \approx 2\times 1.477 \approx 2.954$
6	$\log_a \frac{18}{15} = \log_a \frac{6}{5} = \log_a 6 - \log_a 5 \approx 0.778 - 0.699 \approx 0.079$
7	$\log_a(6a^2) = \log_a 6 + \log_a a^2 = \log_a 6 + 2\log_a a \approx 0.778 + 2 \approx 2.778$

8	$\log_a \sqrt[4]{25} = \log_a \sqrt[4]{5^2} = \log_a 5^{\frac{2}{4}} = \log_a 5^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_a 5 \approx \frac{1}{2}\times 0.699 \approx 0.350$
9	$(\log_a 5)(\log_a 6) \approx 0.699\times 0.778 \approx 0.544$
10	$\log_a x^2 = 2\log_a x$

11	$\log_a\left(\frac{a}{bc}\right) = \log_a a - \log_a bc = \log_a a - (\log_a b + \log_a c)$ $= \log_a a - \log_a b - \log_a c = 1 - \log_a b - \log_a c$
12	$\log_a(\sqrt{x}\sqrt{y}) = \log_a \sqrt{x} + \log_a \sqrt{y} = \log_a x^{\frac{1}{2}} + \log_a y^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_a x + \frac{1}{2}\log_a y$
13	$\log_a\left(\frac{\sqrt{z}}{y}\right) = \log_a \sqrt{z} - \log_a y = \log_a z^{\frac{1}{2}} - \log_a y = \frac{1}{2}\log_a z - \log_a y$

14	$\log_a \frac{1}{x^2y^2} = \log_a 1 - \log_a x^2y^2 = \log_a 1 - (\log_a x^2 + \log_a y^2)$ $= 0 - (2\log_a x + 2\log_a y) = -2\log_a x - 2\log_a y$
15	$\log_a \sqrt[5]{32x^5} = \log_a\left(\sqrt[5]{32}\times\sqrt[5]{x^5}\right) = \log_a 2x = \log_a 2 + \log_a x$
16	$\log_a \frac{(x^2y^3)^2}{(x^2y^3)^3} = \log_a \frac{1}{x^2y^3} = \log_a 1 - \log_a x^2y^3$ $= \log_a 1 - (\log_a x^2 + \log_a y^3) = -2\log_a x - 3\log_a y$
17	$\log_a(x+y-z)^7 = 7\log_a(x+y-z)$

18	$\log_a \sqrt{\frac{x^{12}y}{y^3z^4}} = \log_a \sqrt{\frac{x^{12}}{y^2z^4}} = \log_a \frac{\sqrt{x^{12}}}{\sqrt{y^2}\sqrt{z^4}} = \log_a \frac{x^{\frac{12}{2}}}{y^{\frac{2}{2}}z^{\frac{4}{2}}} = \log_a \frac{x^6}{yz^2}$ $= \log_a x^6 - \log_a yz^2 = 6\log_a x - (\log_a y + \log_a z^2)$ $= 6\log_a x - (\log_a y + 2\log_a z) = 6\log_a x - \log_a y - 2\log_a z$
19	$\log_a x + \log_a y = \log_a xy$
20	$\log_b(x+y) - \log_b(x-y) = \log_b \frac{x+y}{x-y}$

21	$\log_a \frac{1}{\sqrt{x}} - \log_a \sqrt{x} = \log_a \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \log_a \frac{1}{x}$
22	$\log_a(x^2-4) - \log_a(x+2) = \log_a \frac{(x^2-4)}{(x+2)} = \log_a \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)} = \log_a(x-2$
23	$2\log_b x - 3\log_b y + \frac{1}{3}\log_b z = \log_b x^2 - \log_b y^3 + \log_b z^{\frac{1}{3}}$ $= \log_b \frac{x^2}{y^3} + \log_b z^{\frac{1}{3}} = \log_b \frac{x^2 z^{\frac{1}{3}}}{y^3} = \log_b \frac{x^2\sqrt[3]{z}}{y^3}$
24	$\log_b 1 + 2\log_b b = \log_b b^2 = 2$

25	$f(10) = 29 + 48.8\log_6(10+2) = 29 + 48.8\log_6 12 = 29 + 48.8\log_6(6\times 2)$ $= 29 + 48.8(\log_6 6 + \log_6 2) \approx 29 + 48.8(1 + 0.3869) \approx 29 + 48.8(1.3869)$ $\approx 29 + 67.68072 \approx 97$ النسبة المنوية 97%
26	$\frac{\log_a 216}{\log_a 36} = \frac{\log_a 6^3}{\log_a 6^2} = \frac{3\log_a 6}{2\log_a 6} = \frac{3}{2}$
27	$\log_2 5x = \log_2 5 + \log_2 x$
28	$\log_b(b-3) + \log_b(b^2+3b) - \log_b(b^2-9) = \log_b(b-3)(b^2+3b) - \log_b(b^2-9)$ $= \log_b \frac{(b-3)(b^2+3b)}{(b^2-9)} = \log_b \frac{(b-3)\times b(b+3)}{(b-3)(b+3)} = \log_b b = 1$

الدرس 5 المعادلات الأُسِّية

المعادلة الأُسّية :هي معادلة تتضمَّن قوى أُسسها مُتغيِّرات، ولحلِّها نكتب طرفي المعادلة في صورة قوّتين للأساس نفسه، ثم نقارن بين أُسَّي الطرفين

إذا كان: $a^x = a^y$ ، فإنَّ $x = y$ ، حيث: $a > 0, a \neq 0$

1) $3^{2x} = 81 \Rightarrow 3^{2x} = 3^4 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$

2) $2^{3x} = 64 \Rightarrow 2^{3x} = 2^6 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$

***** في بعض المعادلات الأُسِّية لا يُمكِن كتابة طرفي المعادلة في صورة قوَّتين للأساس نفسه، مثلا : $2^x = 25$**

عندها نستعمل خاصية المساواة اللوغاريتمية (ذلك أنَّ الاقتران اللوغاريتمي هو اقتران واحد لواحد)

ولذلك عند حَلِّ هذا النوع من المعادلات الأُسّية نأخذ اللوغاريتم نفسه لطرفي المعادلة، ثم نستعمل قانون القوّة في اللوغاريتم

الأستاذ عبدالقادر الحسنات 077 88 531 078

إذا كان $b > 0$، حيث: $b \neq 1, x > 0, y > 0$، فإنَّ: $\log_b x = \log_b y$ إذا وفقط إذا $x = y$

3) $2^x = 13 \Rightarrow \log 2^x = \log 13 \Rightarrow x \log 2 = \log 13 \Rightarrow x = \dfrac{\log 13}{\log 2} \Rightarrow x \approx 3.7$

4) $3^x = 20 \Rightarrow \log 3^x = \log 20 \Rightarrow x \log 3 = \log 20 \Rightarrow x = \dfrac{\log 20}{\log 3} \Rightarrow x \approx 2.7268$

5) $100\, e^{0.08t} = 2500 \Rightarrow e^{0.08t} = 25 \Rightarrow \ln e^{0.08t} = \ln 25 \Rightarrow 0.08t = \ln 25$

$\Rightarrow t = \dfrac{\ln 25}{0.08} \Rightarrow t \approx 40.2359$

6) $4^{x+3} = 3^{-x} \Rightarrow \log 4^{x+3} = \log 3^{-x} \Rightarrow (x+3) \log 4 =-x \log 3$

$\Rightarrow x \log 4 + 3 \log 4 = -x \log 3 \Rightarrow x \log 4 + x \log 3 = -3 \log 4$

$\Rightarrow x(\log 4 + \log 3) = -3 \log 4 \Rightarrow x = \dfrac{-3 \log 4}{\log 4 + \log 3} \approx -1.6737$

7) $4^x + 2^x - 12 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 + 2^x - 12 = 0 \Rightarrow u^2 + u - 12 = 0 \Rightarrow (u+4)(u-3) = 0$

$\Rightarrow u = -4 \quad or \quad u = 3$

$2^x = -4$ ✗ $\qquad 2^x = 3 \Rightarrow \log 2^x = \log 3 \Rightarrow x \log 2 = \log 3$

$\Rightarrow x = \dfrac{\log 3}{\log 2} \approx 1.5850$

لا يُمكن حلّ المعادلة $2^x = -4$.

حلّ المعادلات الأُسّية الآتية :

a) $5^x = 8$

b) $4e^{2x} - 3 = 2$

c) $2^{x-1} = 3^{3x+2}$

d) $9^x + 3^x - 20 = 0$

حلّ المعادلات الأُسّية الآتية :

(22) $5^{x+2} = 4^{1-x}$

(23) $e^x + e^{-x} - 6 = 0$

(24) $3^{x^2+4x} = \frac{1}{27}$

(25) $25^x - 3(5^x) + 2 = 0$

حلّ كلًّا من المعادلات الآتية:

(33) $|2^{x^2} - 8| = 3$

(32) $7e^{3k} - 7e^{-3k} - 48 = 0$

أتحقّق من فهمي أحُلّ المعادلات الأُسّية الآتية، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب 4 منازل عشرية:

a) $7^x = 9$

b) $2e^{5x} = 64$

c) $7^{2x+1} = 2^{x-4}$

d) $4^x + 2^x - 12 = 0$

a	$7^x = 9 \Rightarrow x = \log_7 9 = \frac{\log 9}{\log 7} \approx 1.1292$
b	$2e^{5x} = 64 \Rightarrow e^{5x} = 32 \Rightarrow 5x = \ln 32 \Rightarrow x = \frac{1}{5}\ln 32 \approx 0.6931$
c	$7^{2x+1} = 2^{x-4} \Rightarrow \log 7^{2x+1} = \log 2^{x-4} \Rightarrow (2x+1)\log 7 = (x-4)\log 2$ $2x\log 7 + \log 7 = x\log 2 - 4\log 2 \Rightarrow 2x\log 7 - x\log 2 = -\log 7 - 4\log 2$ $x(2\log 7 - \log 2) = -\log 7 - 4\log 2 \Rightarrow x = \frac{-\log 7 - 4\log 2}{2\log 7 - \log 2} \approx -1.4751$
d	$4^x + 2^x - 12 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 + 2^x - 12 = 0 \Rightarrow u^2 + u - 12 = 0$ $(u+4)(u-3) = 0 \Rightarrow u = -4 \text{ or } u = 3 \Rightarrow 2^x = -4 \text{ or } 2^x = 3$ المعادلة $2^x = -4$ ليس لها حل لأن $2^x > 0$ لكل قيم المتغير x $2^x = 3 \rightarrow x = \log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.5850$

مثال1) قُدِّر عدد سكّان العالَم بنحو 6.5 مليار نسمة عام 2006م. ويُمثِّل الاقتران: $P(t) = 6.5(1.014)^t$ عدد سكّان العالَم (بالمليار نسمة) بعد t عامًا منذ عام 2006م.

بعد كم سنةً من عام 2006م سيبلغ عدد سكّان العالَم 13 مليار نسمة؟ 9 مليارات نسمة؟

$$P(t) = 6.5\,(1.014)^t$$

$$13 = 6.5\,(1.014)^t \longrightarrow 2 = (1.014)^t \longrightarrow \ln 2 = \ln(1.014)^t$$

$$\longrightarrow \ln 2 = t \ln 1.014 \longrightarrow t = \frac{\ln 2}{\ln 1.014} \approx 50$$

$$9 = 6.5(1.014)^t \longrightarrow \frac{9}{6.5} = (1.014)^t \longrightarrow \ln\frac{9}{6.5} = \ln(1.014)^t$$

$$\longrightarrow \ln 9 - \ln 6.5 = t \ln 1.014 \longrightarrow t \approx 23$$

مثال2) وجد العلماء أنّه يُمكن معرفة عمر عيّنة من كائن ميّت؛ وفقًا لنسبة الكربون 14 المتبقّية فيها عن طريق الاقتران: $A(p) = \frac{\ln p}{-0.000121}$، حيث $A(p)$ عمر العيّنة بالسنوات، P النسبة المئوية (بالصورة العشرية) المتبقّية من الكربون 14 في العيّنة. أجد النسبة المئوية من الكربون 14 المتبقّية في جمجمة إنسان عمرها 2715 عامًا تقريبًا.

$$A(p) = \frac{\ln p}{-0.000121} \longrightarrow 2715 = \frac{\ln p}{-0.000121} \longrightarrow -0.328515 = \ln p$$

$$\longrightarrow p = e^{-0.328515} \longrightarrow p \approx 0.72 \longrightarrow 72\%$$

مثال3) تُمثِّل المعادلة $T = 27 + 219e^{-0.032t}$ درجة حرارة معدن (بالسلسيوس °C) بعد t دقيقة من بدء تبريده.

جد الزمن اللازم لتبريد المعدن لدرجة حرارة 100 °C

$$T = 27 + 219e^{-0.032t}$$

$$100 = 27 + 219e^{-0.032t} \Rightarrow 73 = 219e^{-0.032t}$$

$$\frac{1}{3} = e^{-0.032t} \Rightarrow \ln\frac{1}{3} = -0.032t \Rightarrow t \approx 34.332$$

مثال4) تُمثّل المعادلة $T = 18 + 12\,e^{0.002t}$ درجة حرارة حساس جهاز إلكتروني (بالسلسيوس °C) بعد t ساعة من بدء تشغيل الجهاز.

⑭ جد حرارة الحساس بعد 5 ساعات من بدء التشغيل. ⑮ بعد كم ساعة من بدء تشغيل الجهاز تصل حرارة الحساس إلى 50°C

$$T = 18 + 12e^{0.002t} \longrightarrow T = 18 + 12e^{0.002\times 5} \longrightarrow T \approx 30.121$$

$$T = 18 + 12e^{0.002t} \longrightarrow 50 = 18 + 12e^{0.002t} \longrightarrow 32 = 12e^{0.002t} \Rightarrow e^{0.002t} \approx 2.7$$

$$\longrightarrow e^{0.002t} = e \longrightarrow t = \frac{1}{0.002} = 500$$

أتدرّب وأحُلّ المسائل

أستعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كلٍّ ممّا يأتي.

① $\log 19$ ≈ 1.3

② $\log(2.5\times10^{-3})$ ≈ -2.6

③ $\ln 3.1$ ≈ 1.1

④ $\log_2 10$ $=\dfrac{\log 10}{\log 2}\approx 3.3$

⑤ $\log_3 e^2$ $\dfrac{\ln e^2}{\ln 3}=\dfrac{2}{\ln 3}\approx 1.8$

⑥ $\ln 5$ ≈ 1.6

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب جزء من مئة (إنْ لزم):

⑦ $\log_3 33$ $=\dfrac{\log 33}{\log 3}\approx 3.18$

⑧ $\log_{\frac{1}{3}} 17$ $=\dfrac{\log 17}{\log\frac{1}{3}}=\dfrac{\log 17}{\log 1-\log 3}\approx -2.58$

⑨ $\log_6 5$ $=\dfrac{\log 5}{\log 6}\approx 0.90$

⑩ $\log_7 \frac{1}{7}$ $\log_7 1-\log_7 7=0-1=-1$

⑪ $\log 1000$ $=3$

⑫ $\log_3 15$ $=\dfrac{\log 15}{\log 3}\approx 2.46$

أحُلّ المعادلات الأُسّية الآتية، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب 4 منازل عشرية:

⑬ $6^x=121$

⑭ $-3e^{4x}=-27$

⑮ $5^{7x-2}=3^{2x}$

⑯ $25^x+5^x-42=0$

⑰ $2(9)^x=32$

⑱ $27^{2x+3}=2^{x-5}$

13
$6^x=121$
$\log 6^x=\log 121\rightarrow x\log 6=\log 121$
$\rightarrow x=\dfrac{\log 121}{\log 6}\approx 2.6766$

14
$-3e^{4x}=-27 \Rightarrow e^{4x}=9$
$4x=\ln 9$
$x=\dfrac{1}{4}\ln 9\approx 0.5493$

15
$\log 5^{7x-2}=\log 3^{2x} \Rightarrow (7x-2)\log 5=(2x)\log 3$
$\Rightarrow 7x\log 5-2\log 5=2x\log 3 \Rightarrow 7x\log 5-2x\log 3=2\log 5$
$\Rightarrow x(7\log 5-2\log 3)=2\log 5 \Rightarrow x\approx 0.3549$

16
$(5^x)^2+5^x-42=0 \Rightarrow u^2+u-42=0 \Rightarrow (u+7)(u-6)=0$
$\Rightarrow u=-7 \quad or \quad u=6 \Rightarrow \cancel{5^x=-7} \quad or \quad 5^x=6$
$5^x=6 \quad \rightarrow x\log 5=\log 6\rightarrow x=\dfrac{\log 6}{\log 5}\approx 1.1133$

17
$2(9)^x=32\rightarrow 9^x=16\rightarrow x\log 9=\log 16 \Rightarrow x=\dfrac{\log 16}{\log 9}\approx 1.2619$

18
$\log 27^{2x+3}=\log 2^{x-5} \Rightarrow (2x+3)\log 27=(x-5)\log 2$
$\Rightarrow 2x\log 27+3\log 27=x\log 2-5\log 2$
$\Rightarrow 2x\log 27-x\log 2=-3\log 27-5\log 2 \Rightarrow x\approx -2.2638$

أودعت سميرة مبلغ P في حساب بنكي، بنسبة ربح مُركَّب مستمر مقدارها 5 %:

19 بعد كم سنةً تصبح جُمْلة المبلغ مثلي المبلغ الأصلي؟ **20** بعد كم سنةً تصبح جُمْلة المبلغ 3 أمثال المبلغ الأصلي؟

إرشاد: صيغة جُمْلة المبلغ للربح المُركَّب المستمر هي: $A = Pe^{rt}$.

19 $2P = Pe^{0.05t} \rightarrow 2 = e^{0.05t} \rightarrow 0.05t = \ln 2 \rightarrow t = \dfrac{1}{0.05}\ln 2 = 20\ln 2 \approx 14$

20 $3P = Pe^{0.05t} \rightarrow 3 = e^{0.05t} \rightarrow 0.05t = \ln 3 \rightarrow t = 20\ln 3 \approx 22$

21 كوالا: تناقصت أعداد حيوان الكوالا في إحدى الغابات وَفق الاقتران: $N = 873e^{-0.078t}$، حيث N العدد المُتبقّي من هذا الحيوان في الغابة بعد t سنة. بعد كم سنةً يصبح في الغابة 97 حيوانًا من الكوالا؟

21 $97 = 873e^{-0.078t} \rightarrow \dfrac{97}{873} = e^{-0.078t} \rightarrow \dfrac{1}{9} = e^{-0.078t} \rightarrow -0.078t = \ln\dfrac{1}{9}$

$\rightarrow -0.078t = \ln 1 - \ln 9 \rightarrow -0.078t = 0 - \ln 9 \rightarrow t = \dfrac{\ln 9}{0.078} \approx 28$

مهارات التفكير العليا

22 تبرير: أجد قيمة كلٍّ من k، و h إذا وقعت النقطة $(-2, k)$، والنقطة $(h, 100)$ على منحنى الاقتران: $f(x) = e^{0.5x+3}$، مُبرِّرًا إجابتي.

23 تحدٍّ: أحُلّ المعادلة: $3^x + \dfrac{4}{3^x} = 5$.

22 $f(x) = e^{0.5x+3} \rightarrow f(-2) = e^{0.5(-2)+3} \rightarrow k = e^2 \approx 7.39$

بما أن النقطة $(h, 100)$ تقع على منحنى الاقتران، فإن إحداثياها يحققان معادلة المنحنى

$f(h) = e^{0.5h+3} \rightarrow 100 = e^{0.5h+3} \rightarrow 0.5h + 3 = \ln 100$

$\rightarrow 0.5h = \ln 100 - 3 \rightarrow h = \dfrac{1}{0.5}\ln 100 - \dfrac{3}{0.5}$

$\rightarrow h = 2\ln 100 - 6 \approx 3.2$

23 $3^x\left(3^x + \dfrac{4}{3^x}\right) = 3^x \times 5 \rightarrow 3^{2x} + 4 = 5(3^x) \rightarrow 3^{2x} - 5(3^x) + 4 = 0$

$\rightarrow (3^x)^2 - 5(3^x) + 4 = 0 \rightarrow u^2 - 5u + 4 = 0 \rightarrow (u-4)(u-1) = 0$

$\rightarrow u = 4 \quad or \quad u = 1 \rightarrow 3^x = 4 \quad or \quad 3^x = 1$

$\rightarrow 3^x = 4 \quad \rightarrow x = \log_3 4 \approx 1.26 \rightarrow 3^x = 1 \quad \rightarrow x = \log_3 1 = 0$