الدرس الأول الاقترانات الأسِّية

المطلوب من الدرس:

1. نتعرف على الاقتران الأسي (نعرف نحدده).
2. إيجاد ناتج الاقتران الأسي.
3. نتعرف خصائص الاقتران الأسي.
4. نرسم الاقتران بيانيًا ونحدد خصائصه من الرسم.
5. نستخدمه لحل أسئلة حياتية وعملية.

1. المجال.
2. المدى.
3. متزايد/متناقص.
4. خط التقارب الأفقي.
5. هل هو اقتران واحد لواحد.

1. نتعرف على الاقتران الأسي

الاقتران الأسَّي اقتران أساسه ثابت وأسه متغير

يكتب الاقتران الأسي الرئيس على صورة:

$f(x) = b^x$ حيث $b > 0$ و $b \neq 1$

$f(x) = b^x$

1. لازم (x) في الأس
2. $\neq 1$ ليس 1
3. موجب أكبر من 0

الشروط الواجب توفرها ليكون الاقتران أسي هي:

1. يوجد متغير في الأس (x)
2. العدد في الأساس لا يساوي 1 (ليش) ؟ ← لأنه سيتحول إلى اقتران ثابت.
3. العدد في الأساس أكبر من صفر (موجب) (ليش) ← لأنه قد يكون غير معرف عند بعض القيم.

مثلاً $(-4)^{\frac{1}{2}} \leftarrow \sqrt{-4} \leftarrow$ غير معرف

أمثلة على الاقتران الأسي

$f(x) = (0{,}6)^x$ $\quad$ $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ $\quad$ $f(x) = 3^x$

$f(x) = 3(6)^x$ $\quad$ $f(x) = 9^{-x}$ $\quad$ $f(x) = 7^{-x}$

1. حدد أي من الاقترانات التالية (أسي / ليس أسي) مع بيان السبب في حال كان ليس أسي:

1) $f(x) = 4^x \longrightarrow (\qquad)$

2) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x \longrightarrow (\qquad)$

3) $f(x) = x^3 \longrightarrow (\qquad)$

4) $f(x) = (0.4)^3 \longrightarrow (\qquad)$

5) $f(x) = (1)^x \longrightarrow (\qquad)$

6) $f(x) = (-3)^x \longrightarrow (\qquad)$

7) $f(x) = -(3)^x \longrightarrow (\qquad)$

8) $f(x) = (3)^{-x} \longrightarrow (\qquad)$

9) $f(x) = (0)^x \longrightarrow (\qquad)$

10) $f(x) = 5(2)^x \longrightarrow (\qquad)$

11) $f(x) = (4)^{x+3} \longrightarrow (\qquad)$

12) $f(x) = \left(\frac{-2}{3}\right)^x \longrightarrow (\qquad)$

13) $f(x) = (0.5)^{2x} \longrightarrow (\qquad)$

14) $f(x) = 0(8)^x \longrightarrow (\qquad)$

15) $f(x) = -3(2)^{\frac{x}{5}} \longrightarrow (\qquad)$

2. إيجاد ناتج الاقتران الأسي

لإيجاد ناتج وقيمة الاقتران الأسي نقوم (بالتعويض) مكان المتغير (x) بالقيمة في السؤال:

وهُنا لازم الانتباه لما يلي:

أولًا: الأولويات عند وجود أسس وضرب الأولوية الأسس ثم الضرب.

ثانيًا: لازم فهم وحفظ نتائج الأسس (الجدول).

ثالثًا: تذكر الخصائص التالية

الأس السالب	الأس 0	توزيع الأس عند القسمة
$b^{-N} = \frac{1}{b^N}$	$b^0 = 1$	$\left(\frac{a}{b}\right)^N = \frac{a^N}{b^N}$

مثال للتوضيح

إذا كان $f(x) = 2^x$

فجد قيمة كل مما يلي :

1) $f(3) = (2)^3 = 8$

2) $f(-4) = (2)^{-4} \overset{\text{نقلب}}{=} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

3) $f(0) = (2)^0 = 1$

4) $f(5) = (2)^5 = 32$

5) $f(-1) = (2)^{-1} \overset{\text{نقلب}}{=} \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$

إذا كان $1)\ f(x) = (3)^x$

فجد ناتج كل مما يلي:

a) $f(3) \longrightarrow$

b) $f(-2) \longrightarrow$

c) $f(0) \longrightarrow$

d) $f(-1) \longrightarrow$

إذا كان $2)\ f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

فجد ناتج كلًا مما يلي:

a) $f(3) \longrightarrow$

b) $f(-4) \longrightarrow$

c) $f(0) \longrightarrow$

d) $f(-1) \longrightarrow$

إذا كان $3)\ f(x) = 5(2)^x$

فجد ناتج كلًا مما يلي:

a) $f(5) \longrightarrow$

b) $f(-2) \longrightarrow$

c) $f(-1) \longrightarrow$

d) $f(0) \longrightarrow$

إذا كان $4)\ f(x) = 9\left(\frac{1}{3}\right)^x$

فجد ناتج كلًا مما يلي:

a) $f(2) \longrightarrow$

b) $f(-2) \longrightarrow$

c) $f(-1) \longrightarrow$

d) $f(0) \longrightarrow$

إذا كان $5)\ f(x) = (4)^{-x}$

فجد قيمة كلًا مما يلي:

a) $f(2) \longrightarrow$

b) $f(-1) \longrightarrow$

c) $f(-3) \longrightarrow$

d) $f(1) \longrightarrow$

إذا كان $6)\ f(x) = 5(3)^{x-1}$

فجد قيمة كلًا مما يلي:

a) $f(1) \longrightarrow$

b) $f(2) \longrightarrow$

c) $f(0) \longrightarrow$

d) $f(-3) \longrightarrow$

e) $f(4) \longrightarrow$

3. خصائص الاقتران الأسي الرئيس

ملاحظة:

المجال←قيم (x)

المدى←قيم $f(x)(y)$

$$f(x) = b^x$$

1. مجال الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R.$(-\infty , \infty)$ ⟵ **(دائمًا)**
2. مدى الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي الفترة.$(0 , \infty)$ ⟵ **(دائمًا)**
3. للاقتران خط تقارب أفقي هو المحور x وهو ⟵ $y = 0$
4. يقطع الاقتران الأُسّي الرئيس المحور y في نقطة واحدة هي$(0 , 1)$ ، ولا يقطع المحور x .
5. هو اقتران واحد لواحد. **(دائمًا)**
6. من يحدد التزايد والتناقص قيمة b .

* إذا كانت $b > 1$

يكون الاقتران متزايدًا.

هنا متزايد | 1 | هنا متناقص | 0 | سالب ممنوع

× ممنوع

* إذا كانت $0 < b < 1$

يكون الاقتران متناقصًا.

$$f(x) = ab^x$$

ماذا يحدث عند وجود عدد a مضروبًا في الاقتران الأسي:

إذا كان a

موجب

لا تتغير الخصائص إلا أنه يقطع في المحور y في النقطة

$(0, a)$

سالب

*المدى يصبح $(-\infty , 0)$

*ينعكس الاقتران حول محور (x) وبالتالي ينعكس التزايد والتناقص.

ركزززز

** دير بالك تنخدع

$f(x) = b^{(-x)}$

زبطها $f(x) = \left(\frac{1}{b}\right)^x$

1. أكمل الجدول التالي للإجابة عن خصائص كل من الاقترانات التالية:

نقطة قطع المحورين الاحداثيين	متزايد أم متناقص	خط التقارب الأفقي	المدى	المجال	الاقتران
$(0,1)$	متزايد	$y=0$	$(0,\infty)$	R $(-\infty,\infty)$	1) $f(x)=5^x$
$(0,1)$	متناقص	$y=0$	$(0,\infty)$	R	2) $f(x)=\left(\frac{1}{7}\right)^x$
$(0,1)$	متناقص	$y=0$	$(0,\infty)$	R	3) $f(x)=(6)^{-x}$
$(0,2)$	متزايد	$y=0$	$(0,\infty)$	R	4) $f(x)=2(5)^x$
$(0,-3)$	متناقص	$y=0$	$(-\infty,0)$	R	5) $f(x)=-3(6)^x$
$(0,-5)$	متزايد	$y=0$	$(-\infty,0)$	R	6) $f(x)=-5\left(\frac{1}{2}\right)^x$

2. حدد المدى - وخط التقارب الأفقي - والتزايد والتناقص - ونقطة قطع المحورين الاحداثيين للاقترانات التالية:

1) $f(x)=(9)^x$

2) $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^x$

3) $f(x)=(2)^{-x}$

4) $f(x)=-5(4)^{-x}$

4. التمثيل البياني للاقتران الأسي

1) ارسم منحنى الاقتران

إذا كان $f(x) = 2^x$

الخطوة 1: أنشِئ جدول قِيَم

x	-2	-1	0	1	2
$y = f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
(x, y)	$\left(-2, \frac{1}{4}\right)$	$\left(-1, \frac{1}{2}\right)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 4)$

نعوض قيم x

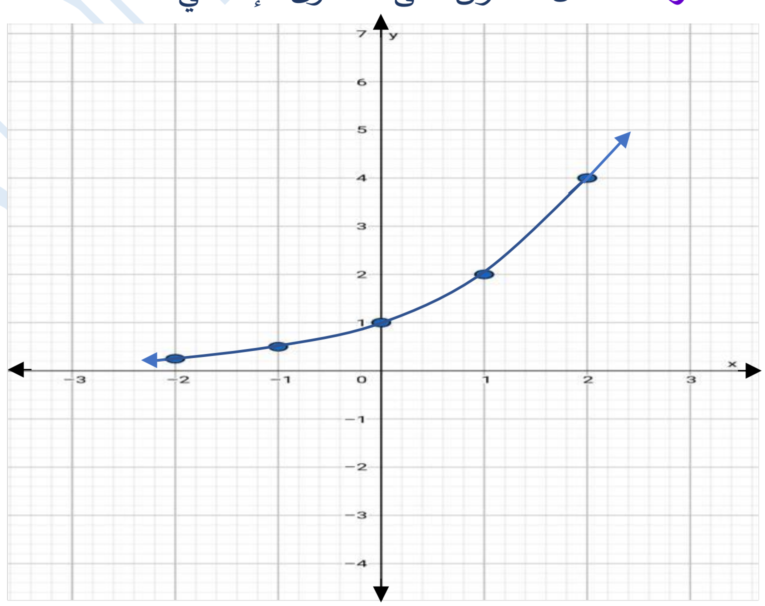
نعوض لإيجاد y

النقاط (x, y)

الخطوة 2: نعوض بقيم (x) التي في الإقتران لإيجاد الصور $f(x)$

- $f(2) = 2^2 = 4$　　$(2,4)$
- $f(1) = 2^1 = 2$　　$(1,2)$
- $f(0) = (2)^0 = 1$　　$(0,1)$
- $f(-1) = (2)^{-1} = \frac{1}{2}$　　$\left(-1, \frac{1}{2}\right)$
- $f(-2) = (2)^{-2} = \frac{1}{4}$　　$\left(-2, \frac{1}{4}\right)$

الخطوة 3: أمثّل الاقتران على المستوى الإحداثي.



- ومن خلال الرسم نلاحظ أن الاقتران:

1. مجاله R.
2. مداه R^+.
3. **متزايد** ← كلما زادت (x) ← زادت قيم (y).
4. لا يقطع محور (x) ← يقطع محور y عند **النقطة** $(0,1)$.
5. للاقتران خط تقارب أفقي هو محور (x)　$y = 0$ ← المنحنى يقترب من محور (x).
6. الاقتران هو اقتران **واحد لواحد** ← باستخدام اختبار الخط الأفقي.

2) إذا كان $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

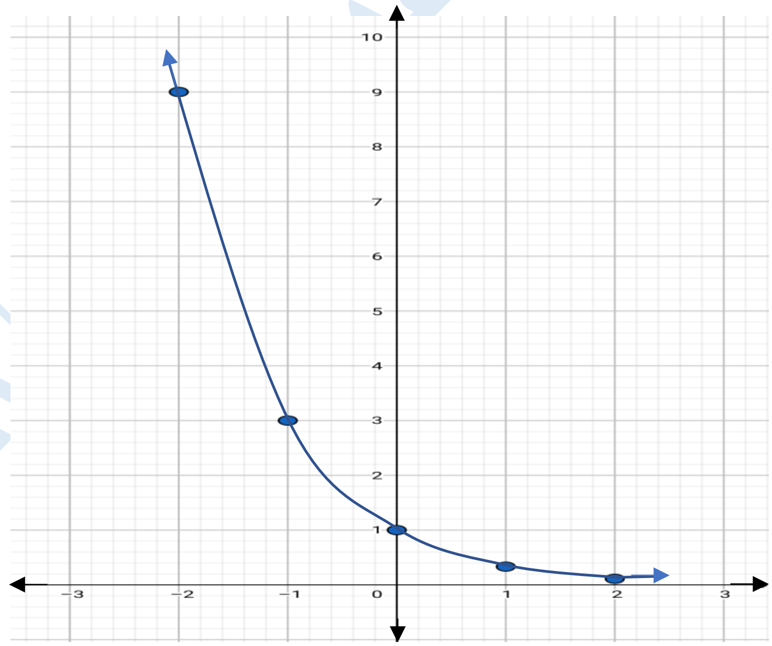
ارسم منحنى الاقتران وحدد المجال والمدى وخط التقارب الأفقي وهل هو متزايد أم متناقص.

نعوض قيم x

نعوض لإيجاد الصور

x	-2	-1	0	1	2
$y = f(x)$	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
(x, y)	$(-2, 9)$	$(-1, 3)$	$(0, 1)$	$\left(1, \frac{1}{3}\right)$	$\left(2, \frac{1}{9}\right)$

- $f(2) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$
- $f(1) = \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{3}$
- $f(0) = \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$
- $f(-1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = \left(\frac{3}{1}\right)^1 = 3$
- $f(-2) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{1}\right)^2 = 9$



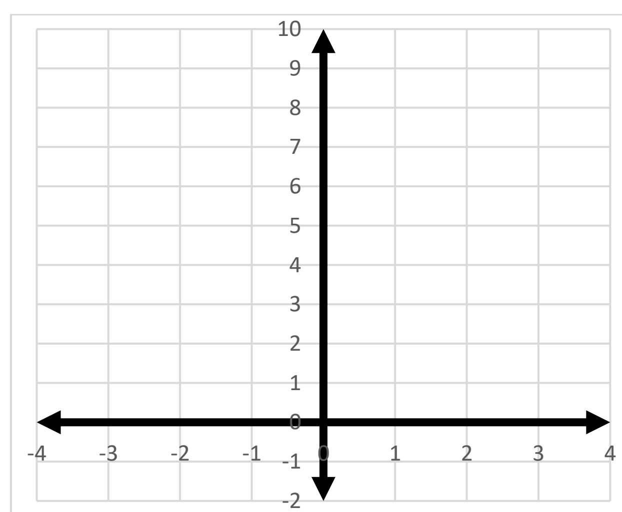
- ومن خلال الرسم نلاحظ أن الاقتران:

1. مجاله $R \leftarrow (-\infty, \infty)$.
2. مداه $R^+ \leftarrow (0, \infty)$.
3. خط التقارب الأفقي $y = 0$.
4. الاقتران متناقص.

3) إذا كان $f(x) = 3^x$ ، فأجب عن الأسئلة التالية:

1.أُمثِّل الاقتران بيانيًا، ثم أجد مجاله ومداه وخطوط التقارب.

x					
$y = f(x)$					
(x, y)					



خصائص الاقتران الأسّي في صورة $f(x) = ab^{x-h} + k$

إذا كان الاقتران $f(x) = ab^{x-h} + k$، حيث a, b, k, h أعداد حقيقة، $b > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$ ، فإن:

* مجال الاقتران $f(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقة R .

* مدى الاقتران $f(x)$ هو الفترة (k, ∞).

* الاقتران $f(x)$ مُتزايد إذا كان $b > 1$.

* الاقتران $f(x)$ مُتناقص إذا كان $0 < b < 1$.

* للاقتران $f(x)$ خط تقارب أفقيًا هو المستقيم $y = k$.

* مع الانتباه إذا كانت قيمة a سالبة $-a\, b^{x-h} + k$

1. ينعكس الاقتران حول محور (x) وبالتالي ينعكس التزايد و التناقص.

2. المدى يصبح $(-\infty, k)$.

* و أكيد انتو ما بتنسوا ⟵ لما يكون إشارة (x) سالب ← بنقلب $\left(\frac{1}{b}\right)^{x}$ $\quad b^{-x}$

أجد خط التقارب لكل اقتران ممّا يأتي، ثم أحدد مجاله ومداه مُبيّنًا إذا كان مُتناقصًا أم مُتزايدًا:

الاقتران	التقارب الأفقي	المجال	المدى	متزايد / متناقص
1) $f(x) = 5(3)^{x+1} - 2$	$y = -2$	R $(-\infty, \infty)$	(k, ∞) $(-2, \infty)$	متزايد
2) $f(x) = 7(2)^{-x} + 3$				
(نزبط) $f(x) = 7\left(\frac{1}{2}\right)^{x} + 3$	$y = 3$	R	$(3, \infty)$	متناقص
3) $f(x) = -3(4)^{x} + 1$	$y = 1$	R	$(-\infty, 1)$	متناقص
4) $f(x) = -4\left(\frac{1}{3}\right)^{x} + 5$	$y = 5$	R	$(-\infty, 5)$	متزايد (ليش؟؟)
5) $f(x) = -4\left(\frac{5}{2}\right)^{x} - 1$	$y = -1$	R	$(-\infty, -1)$	متناقص (ليش؟؟)

5. استخدام الاقتران الأسي لحل مسائل عملية وحياتية

الفكرة هنا باختصار

إما مطلوب إيجاد قيمة الاقتران ← التعويض مكان (المتغير) الموجود في الأس.

أو

إيجاد قيمة المتغير الموجود في الأس والمعطى قيمة الاقتران. (حل مُعادلة أُسية)

1. إذا كان $f(x) = 50(2)^x$

a) جد قيمة الاقتران إذا كان $x = 3$

$f(3) = 50(2)^3$

$= 50(8) = \boxed{400}$

b) جد قيمة x إذا كانت قيمة الاقتران تساوي 800

$f(x) = 50(2)^x$

$\frac{800}{50} = \frac{50}{50}(2)^x$ نقسم على 50

$16 = (2)^x$

$(2)^4 = (2)^x$ نجعل الأساس في الجهتين (2)

$\boxed{x = 4}$

تدريبات حل معادلة أسية (جد x)

3) $1920 = 30(2)^{\frac{x}{4}}$	2) $64 = (4)^x$	1) $135 = 5(3)^x$
6) $64 = (0.125)^x$	5) $320 = 20(0.5)^x$	4) $16 = (0.25)^x$

1. حشرات: يمثل الاقتران $f(x) = 30(2)^x$ عدد حشرات خنفساء الدقيق في كيس دقيق، حيث x عدد الأسابيع منذ بداية رصد وجودها في الكيس:

1. أجد عدد هذه الحشرات في كيس الدقيق بعد 6 أسابيع.

هنا ← فقط نعوض محل x بـ 6.

$$f(6) = 30(2)^6$$

$$f(6) = 30(64)$$

$$f(6) = 1920$$

2. بعد كم أسبوعًا يصبح عددها في الكيس 7680 حشرة؟

هنا قيمة الاقتران $f(x)$ ← يساوي 7680 والمطلوب (x).

$$\frac{7680}{30} = \frac{30}{30}(2)^x$$

$$256 = (2)^x \rightarrow (2)^8 = (2)^x$$

$$x = 8$$

---

2. بكتيريا: يمثل الاقتران $f(x) = 500(2)^x$ عدد الخلايا البكتيرية عينة مخبرية، حيث x الزمن بالساعات:

1. أجد عدد هذه الخلايا البكتيرية في العينة بعد 5 ساعات.

2. بعد كم ساعة يصبح عدد الخلايا البكتيرية في العينة 4000 خلية؟

3. بكتيريا: يمثل الاقتران $f(x) = 7000(1.2)^x$ عدد الخلايا البكتيرية في تجربة مخبرية، حيث x الزمن بالساعات:

1. أجد عدد الخلايا البكتيرية في بداية التجربة.

2. أجد عدد الخلايا البكتيرية بعد 3 ساعات.

3. بعد كم ساعة يصب عدد الخلايا البكتيرية 10080 خلية؟

لايشتمل قاموس النجاح على لكن أو اذا ولكنه يتضمن عبارة أنا قادر على تحقيق النجاح وهدفي يستحق

4. ضوء: يمثل الاقتران $f(x) = 100(0.97)^x$ نسبة الضوء المار خلال x من الألواح الزجاجية المتوازية:

1. أجد نسبة الضوء المار خلال لوح زجاجي واحد.

هنا ← فقط نعوض محل x بـ 1.

$$f(1) = 100(0.97)^1$$

$$f(1) = 100\left(\frac{97}{100}\right)$$

$$= 97\%$$

2. أجد نسبة الضوء المار خلال لوحين زجاجيين.

$$f(2) = 100(0.97)^2$$

$$f(2) = 100(0.9409)$$

$$f(2) = 1\cancel{00}\left(\frac{9409}{100\cancel{00}}\right)$$

$$94.09\%$$

5. سرطان البنكرياس: يمثل الاقتران $P(t) = 100(0.3)^t$ نسبة المتعافين من مرضى سرطان البنكرياس، ممن هم في المرحلة المتقدمة، حيث تعافوا ب t سنة من التشخيص الأولي للمرض:

1. أجد نسبة المتعافين بعد سنة من التشخيص الأولي للمرض.

هنا بعد سنة نعوض ب (1) محل t

$$P(1) = 100(0.3)^1$$

$$P(1) = 30\%$$

2. بعد كم سنة تصبح المتعافين 9%؟

المطلوب t والمعطى قيمة الاقتران ←

$$P(t) = 100(0.3)^t$$

$$\frac{9}{100} = \frac{\cancel{100}}{\cancel{100}}\left(\frac{3}{10}\right)^t$$

$$\left(\frac{\cancel{3}}{\cancel{10}}\right)^2 = \left(\frac{\cancel{3}}{\cancel{10}}\right)^t$$

$$t = 2$$

6. يمثل الاقتران $f(x) = 400(2)^{\frac{x}{3}}$ عدد الخلايا البكتيرية بعد x ساعة في تجربة مخبرية:

1. أجد عدد الخلايا البكتيرية عند بدء التجربة.

2. أجد عدد الخلايا البكتيرية بعد 12 ساعة.

3. بعد كم ساعة يصبح عدد الخلايا البكتيرية 102400 خلية؟

مطلوب تابع لسؤال 6

---

7. يمثل الاقتران $f(x) = 2(0.75)^x$ كمية الماء المتبقية في خزان (بالمتر المكعب) بعد x ساعة نتيجة ثقب فيه؟

1. أجد كمية الماء المتبقية في الخزان بعد ساعة واحدة.

$$f(1) = 2(0.75)^1$$

$$f(1) = 2\left(\frac{75}{100}\right) \to 2\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1.5m$$

2. ما الزمن الذي تصبح فيه كمية الماء المتبقية في الخزان $\frac{9}{8}m^3$ تقريبًا.

$$2 * \frac{9}{8} = \frac{2}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^x$$

$$\frac{9}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^x$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^x$$

ساعتان $x = 2$

لازم نعرف

$$0.50 \longrightarrow \frac{1}{2}$$

$$0.25 \longrightarrow \frac{1}{4}$$

$$0.75 \longrightarrow \frac{3}{4}$$

$$0.125 \longrightarrow \frac{1}{8}$$

---

8. يمثل الاقتران $P(t) = 325(0.25)^t$ تركيز دواء في دم مريض بعد t ساعة من تناوله. أجد تركيز الدواء بعد 5 ساعات من تناوله.

$$P(5) = 235\left(\frac{1}{4}\right)^5$$

$$= 235\frac{1}{1024} = \frac{235}{1024}$$

9. مواد مشعة: تمثل الاقتران $A(t)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1620}}$ الكمية المتبقية A بالغرامات g من الراديوم 226 من 1 g حيث t الزمن بالسنوات.

1. أجد كمية الراديوم 226 المتبقية بعد 3240 سنة.

$$A(3240)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3240}{1620}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=\frac{1}{4}$$ أو $0.25g$ غرام

2. بعد كم سنة يبقى من كمية الراديوم $0.125g$.

$$0.125=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1620}}$$

$$\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1620}}\longrightarrow\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)^{3}=\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)^{\frac{t}{1620}}$$

$$3=\frac{t}{1620}=4860$$ سنة

---

10. تمثل المعادلة $A(t)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}}$ الكمية المتبقية A بالغرامات عينة من $1g$ السيزيوم 137 حيث t الزمن بالسنوات

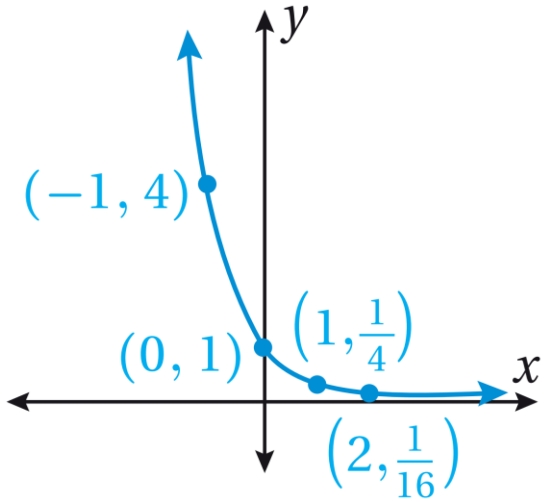
1. أجد كمية السيزيوم 137 المتبقية بعد 30 سنة.

2. بعد كم سنة يبقى من السيزيوم $0.25\ g$.

مهارات التفكير العليا

1. تبرير: يُبين الشكل المجاور البياني لمنحنى الاقتران:

$f(x) = ab^x$ أجد $f(3)$ ، مُبررًا إجابتي.



أولًا: لايجاد قيمة a و b نستخدم أي نقطتين:

$f\ f(x)$

$(0,1)$

$f(x) = a\,b^x$

$f(0) = a\,b^0$

$1 = a * 1$

$a = 1$

$(-1,4)$

$f(-1) = 1(b)^{-1}$

$4 = b^{-1}$

$\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = (b)^{-1}$

$b = \frac{1}{4}$

$\rightarrow f(x) = 1\left(\frac{1}{4}\right)^x$

$f(x) = 1\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$

---

2. اكتشف المُختلف: أي الاقترانات الآتية مُختلف، مُبررًا إجابتي؟

a) $y = 3^x$ b) $f(x) = 2(4)^x$ c) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ d) $y = 5(3)^x$

الاقتران المختلف هو ← c لأن جميع الاقترانات الأساس > 1 متزايد عدا c $0 < x < 1$ متناقص.

---

3. اذا كان الاقتران $f(x) = ab^x$ أسيًّا، فأثبت أن $\frac{f(x+1)}{f(x)} = b$.

$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{a\,b^{x+1}}{a\,b^x} \rightarrow$ نطرح الأسس $b^{x+1-x} \rightarrow b$ وهو المطلوب

---

4. يمر منحنى الاقتران $y = k(2^x) + C$ بالنقطتين $(-1\,,7\,)$, $(0,10\,)$

a) أجد قيمة كل من الثابتين c,k

نعوض النقطة $(0,10)$

$10 = K(2)^0 + c$

$10 = K + c \rightarrow (1)$

نعوض النقطة $(-1,7)$

$7 = K(2)^{-1} + c$

$7 = K\left(\frac{1}{2}\right) + c$

$7 = \frac{1}{2}K + c \rightarrow 2$

نلجأ للحذف والتعويض

$10 = K + c$

$7 -= -\frac{1}{2}K - c$ -1 نضرب←

$3 = \frac{1}{2}K$

$K = 6 \rightarrow$ نعوض $10 = 6 + c$

$c = 4$

b) أجد قيمة y عندما $x = 3$

$y = 6(2)^x + 4$

$y = 6(2)^3 + 4$ المطلوب b

$y = 6(8) + 4 = 52$

الاقتران الأسي $f(x) = ab^x$

بوضع $(1+r)$ بدل b

ووضع t بدلًا من x

ينتج قانون **النمو الأسي**

$A(t) = a(1+r)^t$

بوضع $(1-r)$ بدلًا من b

ووضع t بدلًا من x

ينتج قانون **الاضمحلال الأسي**

$A(t) = a(1-r)^t$

قانون النمو الأسي

$A(t) = a(1+r)^t$ كلمات دالة يزداد/ يزيد ← النمو

لإيجاد مقدار الكميات التي زادت بعد فترة (t)

حيث t الفترة الزمنية، a الكمية الابتدائية، و r النسبة المئوية للمنو في فترة زمنية مُحدد. أمّا أساس العبارة الأُسيّة $(1+r)$ فيسمى عامل النمو (growth factor).

بالكلمات: اقتران النمو الأسّي هو كل اقتران أسّي يتزايد بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية.

بالرموز: $A(t) = a(1+r)^t$

- a: الكمّية الابتدائية
- r: النسبة المئوية للنمو
- $(1+r)$: عامل النمو
- t: الفترة الزمنية للنمو

قانون الاضمحلال الأسي

$A(t) = a(1-r)^t$ كلمات دالة ينقص/ يقل ← الاضمحلال

يستخدم لايجاد القيمة بعد النقصان بعد فترة فترة زمنية مقدارها T

بالكلمات: اقتران الاضمحلال الأسّي هو كل اقتران أسّي يتناقص بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية.

بالرموز: $A(t) = a(1-r)^t$

- a: الكمّية الابتدائية
- r: النسبة المئوية للاضمحلال
- $(1-r)$: عامل الاضمحلال
- t: الفترة الزمنية للاضمحلال

1. خِراف: في دراسة شملت إحدى مَزارع الأغنام، تبيَّن أن عدد الخِراف في المزرعة يزداد بنسبة تبلغ نحو 31% سنويًا:

1. أكتب اقتران النمو الأسّي الذي يمثل عدد الخِراف بعد t سنة، علمًا بأن عددها في المزرعة عند بدء الدراسة هو 1524 خروفًا.

$$A(t) = a(1+r)^t$$
$$A(t) = 1524(1+0.31)^t$$
$$A(t) = 1524(1.31)^t$$

2. أجد عدد الخِراف بعد 5 سنوات من بَدء الدراسة.

هنا نعوض في الاقتران محل t بـ 5

$$A(t) = 1524(1.31)^t$$
$$A(5) = 1524(1.31)^5$$

باستخدام الآلة الحاسبة ≈ 5880 تقريبًا.

2. في دراسة شملت إحدى مَزارع الأبقار، بيّين أنّ عدد الأبقار في المزرعة يزداد بنسبة تبلغ نحو 20% سنويًا:

1. أكتب اقتران النمو الأسّي الذي يمثل عدد الأبقار بعد t سنة، علمًا بأن عددها في المزرعة عند بدء الدراسة هو 500 بقرة.

$$A(t) = a(1+r)^t \qquad a = 500$$
$$A(t) = 500(1+0.20)^t \qquad r = 0.20$$
$$A(t) = 500(1.20)^t$$

2. أجد عدد الأبقار بعد سنتان من بَدْء الدراسة.

هنا نعوض في الاقتران محل t بـ 2

$$A(2) = 500(1.2)^2$$
$$A(2) = 500\,(1.44)$$
$$A(2) = 720$$ بقرة

3. كيمياء: تناقص 5g من عنصر الكروم بما نسبته 2.45% يوميًا نتيجة تفاعله مع الهواء:

1. أكتب اقتران الاضمحلال الأسّي الذي يمثل كمية الكروم (بالغرام) بعد t يوم.

$$A(t) = a(1-r)^t$$
$$A(t) = 5\left(1-\frac{2.45}{100}\right)^t$$
$$A(t) = 5(1-0.0245)$$
$$A(t) = 5(0.9755)^t$$

2. أجد كمية الكروم (بالغرام) بعد 3 أيام.

هنا نعوض في الاقتران محل t بـ 5

$$A(t) = 5(0.9755)^t$$
$A(3) = 5(0.9755)^3 \rightarrow$ تترك هكذا أو

باستعمال الآلة الحاسبة ≈ 4.6 تقريبًا.

4. **سيّارة:** اشترت سوسن سيارة هجينة قابلة للشحن بمبلغ JD 30000. إذا كان ثمن السيّارة يقل بنسبة 5% سنويًّا.

1. أكتب اقتران الاضمحلال الأسّي الذي لثمن السيارة بعد t سنة.

$A(t) = a(1-r)^t$

$A(t) = 30000(1-0.05)^t$

$A(t) = 30000(0.95)^t$

2. أجد ثمن السيارة بعد 4 سنوات علمًا بأن تقريبًا

$(0.95)^4 = 0.8145$

$A(4) = 30000(0.95)^4$

$A(4) = 3000(0.8145)$ الى هنا فقط الإجابة بدون حاسبة

$A(4) \approx 24435$ بالالة الحاسبة دينار

5. **تلوّث:** بدأ العلماء دراسة على إحدى البحيرات، لتحديد مدى تأثير التلوّث على عدد الأسماك فيها، فوجدوا أن عدد الأسماك في البحيرة يقل بنسبة 20% كل سنة.

1. أكتب اقتران الاضمحلال الأسّي الذي يمثل عدد الأسماك في البحيرة بعد t سنة، علمًا بأن عدد الأسماك عند بدء الدراسة يساوي 12000 سمكة.

$A(t) = a(1-r)^t$

$A(t) = 12000(1-0.20)^t$

$A(t) = 12000(0.80)^t$

2. أجد عدد الأسماك في البحيرة بعد مرور 3 سنوات.

$A(3) = 12000(0.80)^3$

$= 12000(0.512) = 6144$ سمكة

6. **سكّان:** بلغ عدد سكّان المملكة الأردنية الهاشمية في عام 2020، 10 مليون نسمة تقريبًا، فإذان كانت نسبة النمو السكاني 2.5% سنويًّا تقريبًا؛ فأجيب عما يأتي:

1. أكتب اقتران النمو الأسّي الذي يمثل عدد سكان المملكة بالمليون نسمة بعد t سنة.

$A(t) = a(1+r)^t$

$A(t) = 10(1+0.025)^t$

$A(t) = 10(1,0.25)^t$

2. أجد عدد سكان المملكة التقريبي في عام 2030 علمًا بأن

$(1.025)^{10} = 1.280$

$t = 2030 - 2020$

$t = 10$

$A(10) = 10(1.025)^{10}$

$= 10(1.280)^{10} = 12.8$ مليون

7. استخدم 50 ألف شخص موقعًا إلكترونيًا تعليميًّا سنة 2019م، ثم ازداد عدد مستخدمي الموقع بنسبة 15% كل سنة:

1. أكتب اقتران النمو الأسّي الذي يمثل عدد مستخدمي الموقع بعد t سنة.

2. أجد عدد مستخدمي الموقع سنة 2025م. علمًا بأن $(1.15)^6 = 2.313$

الربح الموكب

وهو الفائدة المستحقة على مبلغ الاستثمار الأصلي الذي يسمى رأس المال، والفوائد المستحقة سابقًا.

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

بالكلمات: يمكن حساب جُملة المبلغ المستحق في حالة الربح الموكب باستعمال الصيغة الآتية:

بالرموز:

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

جُملة المبلغ

المبلغ الأصلي

r : معدل الفائدة السنوي الذي يُكتب في صورة عشرية.

n : عدد مرات إضافة الربح المُركب في السنة.

t : عدد السنوات.

المبلغ الأصلي	$P \longrightarrow$	جملة المبلغ مع الفائدة	$A \longrightarrow$
عدد السنوات	$t \longrightarrow$	معدل الفائدة	$r \longrightarrow$

عدد مرات إضافةالربح السنوية $N \longrightarrow$

$$N = \frac{12}{\text{كل كم شهر}}$$

1. استثمر أوس مبلغ JD 9000 في شركة صناعية، بنسبة ربح مُركب المبلغ 8% وتضاف كل 3 أشهر. أجد جُملة المبلغ بعد 3 سنوات.

لإيجاد $N \longleftarrow 4 = \frac{12}{3}$

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$A = 9000\left(1 + \frac{0.08}{4}\right)^{4(3)}$$

$$A = 9000(1 + 0.02)^{12}$$

$$A = 9000(1.02)^{12}$$ الى هنا علامة كاملة

$A = 11414$ دينار $\longrightarrow$ باستخدام الآلة الحاسبة

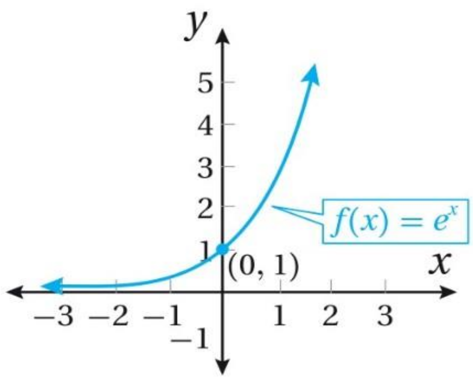
2. استثمر الاستاذ محمود المحارمة مبلغ JD 10000 في شركة، بنسبة ربح مُركب تبلغ 10% وتضاف كل 6 أشهر. جد جُملة المبلغ بعد 5 سنوات. علمًا بأن $(1.05) \approx 1.629$.

الاقتران الأسي الطبيعي $f(x) = e^x$

$e = 2.71828$

تقريبًا $= 2.7$

إذا كان أساس الاقتراان الأسي هو العدد النيبيري e يسمى بـ (الاقتران الأسي الطبيعي)



أُلاحظ من الشكل المجاور أن خصائص التمثيل البياني للاقتران الأُسي الطبيعي هي نفسها خصائص التمثيل البياني للاقتران $f(x) = ab^x$، حيث $a > 0$ و $b > 1$.

توجد تطبيقات عديدة للاقتران الأسي الطبيعي، منها حساب **الربح المركب المستمر**

وهو عملية حساب جُملة المبلغ بعد إضافة الربح المركب إلى رأس المال عددًا لا نهائيًا من المرات في السنة.

$$A = Pe^{rt}$$

بالكلمات: يمكن حساب جُملة المبلغ المستحق في حالة الربح المركب باستعمال الصيغة الآتية:

بالرموز:

$$A = Pe^{rt}$$

A: جُملة المبلغ

P: المبلغ الأصلي

r : معدل الفائدة المستمر الذي يكتب في صورة عشرية.

t : عدد السنوات.

خطوات الحل:

1. نكتب القانون ← 2. نستخرج المعطيات ← 3. نعوض في القانون لإيجاد جملة المبلغ.

المبلغ الأصلي المستثمر $\rightarrow P$

معدل الفائدة (بصورة عشرية) $\rightarrow r$

عدد السنوات $\rightarrow t$

العدد النيبيري $(2.7) \rightarrow e$

الربح المركب المستمر

1. أودع علي مبلغ (10000) دينار في حساب بنكي بنسبة **ربح مركب مستمر** مقدارها (5%) سنويًا، **جد جملة المبلغ** بعد 20 سنة. علمًا بأن $e = 2.7$.

2. أودعت سارة (20000) دينار في حساب بنكي بنسبة **ربح مركب مستمر** مقدارها (4%) سنويًا، **جد جملة المبلغ** بعد 25 سنة.

3. أودع أوس المحارمة مبلغ (10000) دينار في حساب بنكي بنسبة **ربح مركب مستمر** مقدارها (8%) سنويًا، جد **جملة المبلغ** بعد 25 سنة.

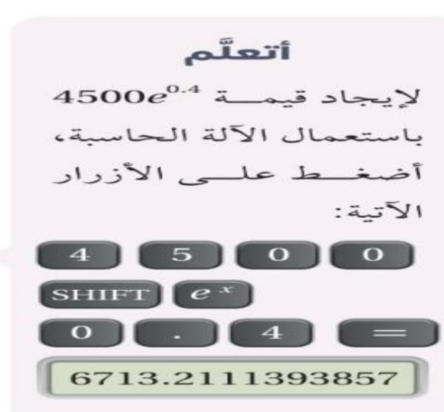
4. أودع على مبلغ JD 4500 في حساب بنكي، بنسبة **ربح مُركب مستمر** مقدارها 4%. أجد جُملة المبلغ بعد 10 سنوات.

$$A = Pe^{rt}$$

$$= 4500e^{0.04(10)}$$

$$= 4500e^{0.04(10)}$$

$$\approx 6713.21$$



تدريبات متنوعة(كتاب)

1. **ذباب الفاكهة**: أعد باحث دراسة عن تكاثر ذباب الفاكهة، وتوصل إلى أنّه يُمكن تمثيل العدد التقريبي للذباب بالاقتران $P(t) = 20e^{0.03t}$ ، حيث P عدد الذباب بعد t ساعة. أجد عدد ذباب الفاكهة بعد 72 ساعة من بدء الدراسة مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب عدد صحيح.

$P(72) = 20e^{\frac{3}{100} * 72}$

$P(72) = 20e^{2.16}$ الى هنا نترك الإجابة

$P(72) = 173 \leftarrow$ تقريبًا باستخدام الآلة الحاسبة

2. **بكتيريا**: يتناقص عدد الخلايا البكتيرية في عينة مخبرية بنسبة 27% كل ساعة بعد إضافة مضاد حيوي إلى العينة:

a) أكتب اقتران الاضمحلال الأُسي الذي يمثل عدد الخلايا البكتيرية بعد t ساعة، علمًا بأن عددها عند إضافة المضاد الحيوي هو 15275 خلية.

b) أجد عدد الخلايا البكتيرية في العينة بعد 7 ساعات.

3. **دجاج**: ينفق الدجاج في مزرعة للدواجن بنسبة 25% نتيجة إصابته بمرض ما. أجد العدد المُتبقي منه بعد 5 أيام من بَدء المرض، علمًا بأنّ عدده الأوَّلي في المزرعة هو 1550 دجاجة.

4. استثمر ربيع مبلغ JD 20000 في شركة، بنسبة **ربح مُركب** تبلغ 10%، وتضاف كل شهر:

a) أكتب صيغة تُمثل جُملة المبلغ بعد t سنة.

b) أجد جُملة المبلغ بعد 5 سنوات. علمًا بأن $(1.1)^5 = 1.61$

5. أودع حسام مبلغ JD 9000 في حساب بنكي، بنسبة ربح مُركَّب **مستمر** مقدارها 2.5% أجد جُملة المبلغ بعد (40) سنة.

مهارات التفكير العليا

1. اكتشف الخطأ: أوجد رامي جُملة مبلغ مقداره JD 250 بعد إيداعه في حساب بنكي بعد 3 سنوات، بنسبة ربح مُركب تبلغ %1.25، وتضاف كل 3 أشهر، كما يأتي:

$$A = 250\left(1 + \frac{1.25}{4}\right)^{4(3)}$$

$$= 6533.29$$

اكتشف الخطأ في حَلّ رامي، ثم أصحّحه.

---

2. تحدٍّ: أكتب اقترانًا يُمثِّل عدد المصابين بالإنفلونزا الموسمية بعد t أسبوعًا، علمًا بأن العدد يتضاعف بمقدار 3 مرات كل أسبوع.

---

3. بلغ عدد سكان لواء الموقر (شرق العاصمة عمان) 80000 نسمة تقريبًا سنة 2015م. إذا كانت نسبة النمو السكّاني في اللواء %2.5 سنويًّا، فأجيب عن السؤالين الآتيين:

a) أكتب اقتران النمو الأسّي الذي يمثل عدد سكان اللواء بعد t سنة.

b) أجد العدد التقريبي لسكان اللواء سنة 2045 ← علمًا بأن ← تقريبًا $(1.025)^{30} = 2.1$.

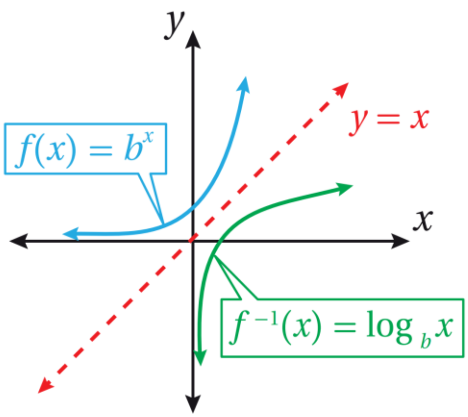
---

4. تم إيداع مبلغ من المال في أحد البنوك بفائدة %10 سنويًا بربح مركب مستمر إذا علمت بعد مرور (10) سنوات بلغ جملة المبلغ (2700) دينار فجد قيمة المبلغ الأصلي الذي تم إيداعه.

الاقترانات اللوغاريتمية

يُطلق على الاقتران العكسي للاقتران الأسي الذي صورته $f(x) = b^x$ ، اسم الاقتران اللوغاريتمي للأساس b ويرمز إليه بالرمز $g(x) = \log_b x$ ، ويقرأ: لوغاريتم x للأساس b.

إذن، إذا كان الاقتران: $f(x) = b^x$، حيث $b > 0, b \neq 1$ ، فإن $f^{-1}(x) = \log_b x$ ← الاقتران العكسي معناه $f^{-1}(x)$.



ويبين الشكل المجاور التمثيل البياني للاقترانين معًا.

العلاقة بين الصورة الأسية والصورة اللوغاريتمية

إذا كان: $x > b > 0, b \neq 1$ فإن:

الصورة اللوغاريتمية: $\log_b x = y$ (الأساس b، الأُسّ y)

إذا و فقط إذا

الصورة الأسِّية: $b^y = x$ (الأساس b، الأُسّ y)

- للتحويل من الصيغة $\log_b x = y$

اللوغاريتمية إلى ← الأسية:

أولًا: نتخلص من ال log.

ثانيًا: إعمل هيك والباقي عليك

$\log_b x = y \longrightarrow b^y = x$

- للتحويل من الصيغة $b^y = x$

الصورة الأسية ⟵ إلى ←اللوغاريتمية

أولًا: الأساس هو نفسه الأساس.

ثانيًا: الأس هو (الإجابة) نضعه بعد ال =

ثالثًا: الناتج الموجود بعد ال = نضعه أمام log

$b^y = x \longrightarrow \log_b x = y$

التحويل من صيغة لوغاريتمية إلى صيغة أسية وبالعكس

$\log_b x = y \longrightarrow b^y = x$

1. اكتب كل معادلة لوغاريتمية ممّا يأتي في صورة أسية:

1) $\log_8 8 = 1 \longrightarrow 8^1 = 8$

2) $\log_7 1 = 0 \longrightarrow 7^0 = 1$

3) $\log_2 16 = 4 \longrightarrow 2^4 = 16$

4) $\log_{10}\left(\frac{1}{100}\right) = -2 \longrightarrow 10^{-2} = \frac{1}{100}$

5) $\log_3\left(\frac{1}{243}\right) = -5 \longrightarrow 3^{-5} = \frac{1}{243}$

6) $\log_3 729 = 6 \longrightarrow$

7) $\log_9 1 = 0 \longrightarrow$

8) $\log_{64} 8 = 0.5 \longrightarrow$

9) $\log_{23} 23 = 1 \longrightarrow$

10) $\log_{27} 3 = \frac{1}{3} \longrightarrow$

11) $\log_b 1 = 0 \longrightarrow$

12) $\log_2 32 = 5 \longrightarrow$

2. اكتب كل معادلة أَسِّية ممّا يأتي في صورة لوغاريتمية:

1) $2^3 = 8 \longrightarrow \log_2 8 = 3$

2) $3^{-2} = \frac{1}{9} \longrightarrow \log_3\left(\frac{1}{9}\right) = -2$

3) $(25)^{\frac{1}{2}} = 5 \longrightarrow \log_{25} 5 = \frac{1}{2}$

4) $6^0 = 1 \longrightarrow \log_6 1 = 0$

5) $(5)^{-3} = \frac{1}{125} \longrightarrow \log_5\left(\frac{1}{125}\right) = -3$

6) $7^3 = 343 \longrightarrow$

7) $2^{-5} = \frac{1}{32} \longrightarrow$

8) $49^{\frac{1}{2}} = 7 \longrightarrow$

9) $17^0 = 1 \longrightarrow$

10) $35^1 = 35 \longrightarrow$

11) $5^{-2} = 0.04 \longrightarrow$

12) $4^5 = 1024 \longrightarrow$

13) $x^0 = 1 \longrightarrow$

إيجاد ناتج اللوغاريتمات

إيجاد قيمة العبارة اللوغاريتمية

لايجاد ناتج العبارة اللوغاريتمية (القيمة) بدون استخدام آلة حاسبة هنا يمكن الحل بطريقتين.

الطريقة الأولى: تحويل العبارة اللوغاريتمية إلى الصيغة الأسية بوضع الناتج $= Y$ ثم حل المعادلة الأسية باستخدام خصائص الأسس وقيمة Y هي الإجابة.

الطريقة الثانية: استخدام خصائص اللوغاريتمات لإيجاد ناتج العبارة اللوغاريتمية وتاليا **الخصائص الاساسية** الواجب معرفتها

إذا كا $b > 0, b \neq 1$ ، فإن:

$b^0 = 1$	$\log_b 1 = 0$
$b^1 = b$	$\log_b b = 1$
$b^x = b^x$	$\log_b b^x = x$
$\log_b x = \log_b x$	$b^{\log_b x} = x \;,\; x > 0$

ملاحظات هامة

1) $\log 0 \rightarrow$ غير معرف

2) القيمة الموجودة أمام اللوغاريتم يجب أن تكون $0 <$ بمعنى عدد **موجب** ولا يساوي صفر وإلا يكون الناتج **غير معرف**

أمثلة للتوضيح (جد قيمة كل مما يأتي دون استعمال الآلة الحاسبة)

1) $\boxed{\log_2 64 = y}$

الطريقة الأولى (خصائص الأسس)

← بافتراض أن المقدار $= y$: $\log_2 64 = y$

← تحويل لصيغة أسية: $2^y = 64$

← جعل الأساس متساوي: $2^y = 2^6$

← مساواة الأسس: $\boxed{y = 6}$

الطريقة الثانية (خصائص اللوغاريتمات)

← $\log_2 64$

← نجعل ما أمام اللوغاريتم مساويًا للأساس: $\cancel{\log_2} 2^6$

← خاصية $\log_b b^x = x$: $= \boxed{6}$

2) $\boxed{\log_{13} \sqrt{13}}$

الطريقة الأولى

$\log_{13} \sqrt{13} = y$

$13^y = \sqrt{13}$

$\cancel{13}^y = \cancel{13}^{\frac{1}{2}}$

$y = \frac{1}{2}$

الطريقة الثانية

$\cancel{\log_{13}(13)}^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}$

تدريبات إيجاد ناتج اللوغاريتمات

6) $\log_{25} 125 \longrightarrow \log_{25}(25)^{\frac{3}{2}} \longrightarrow \frac{3}{2}$

7) $\log_{10}(1 \times 10^{-5}) \longrightarrow \log_{10}(10)^{-5} \longrightarrow -5$

هل تعلم: أنه إذا كان أساس اللوغاريتم هو العدد 10 ← يسمى لوغاريتم اعتيادي وعند عدم كتابة أساس ← يكون الأساس 10 $\boxed{\log b}$ ← هنا الاساس 10 .

3) $\log_{36} 6 \longrightarrow \log_{36} \sqrt{36} \longrightarrow \log_{36}(36)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow \frac{1}{2}$

4) $\log_{10} 0.1 \longrightarrow \log_{10} \frac{1}{10} \longrightarrow \log_{10} 10^{-1} \longrightarrow -1$

5) $\log_2 \frac{1}{\sqrt{2^5}} \longrightarrow \log_2 \frac{1}{2^{\frac{5}{2}}} \longrightarrow \log_2 2^{\frac{-5}{2}} \longrightarrow \frac{-5}{2}$

إجابات سريعة بناء على الخصائص

1) $\log_3 1 \longrightarrow 0$

2) $\log_{17} \sqrt{17} \longrightarrow \log_{17}(17)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow \frac{1}{2}$

3) $\log_5 5 \longrightarrow 1$

4) $7^{\log_7 5} \longrightarrow 5$

تدريبات سريعة بناء على الخصائص

$\log_{\frac{5}{3}} 1 \rightarrow$

$\log_9 9 \rightarrow$

$(10)^{\log_{10}\frac{1}{9}} \rightarrow$

$\log_b \sqrt[7]{b} \rightarrow$

$\log_{\frac{1}{6}} 6 \rightarrow$

- أجد قيمة كل مما يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة: **واجب**

a) $\log_5 25$

b) $\log_8 \sqrt{8}$

c) $\log_{81} 9$

d) $\log_3 \frac{1}{27}$

e) $\log_3 \frac{1}{\sqrt[3]{(3)^6}}$

f) $\log_{10} 0.0001$

خصائص الاقتران اللوغاريتمي

خصائص الاقتران اللوغاريتمي $f(x) = \log_b x$

بما أن الاقتران اللوغاريتمي هو الاقتران العكسي للاقتران الأسي فإن خصائصه تكون **عكس** خصائص الاقتران الأسي

$$f(x) = b^x$$

خصائص الاقتران $\boxed{f(x) = \log_b x}$

1) مجال الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة $\mathbf{R}^+$ ؛ أي الفترة $(0, \infty)$.

2) مدى الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbf{R}$.

3) الاقتران متزايد إذا كان $b > 1$.

4) الاقتران متناقص إذا كان $0 < b < 1$.

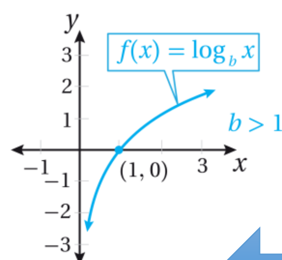
5) وجود خط تقارب رأسي للاقتران هو المحور y. ومعادلته ← $x = 0$

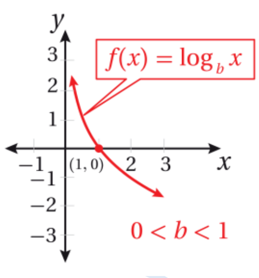
6) الاقتران يقطع المحور x في نقطة واحدة هي $(1, 0)$، ولا يقطع المحور y.

شكل الاقتران

$f(x) = \log_b x$

متزايد $b > 1$ | متناقص $0 < b < 1$





ملاحظات هامّة

1) إذا كان اللوغاريتم مضروبًا بعدد a ← $a \log_b x$

- موجب: لا تأثير على التزايد والتناقص
- سالب: ينعكس التزايد والتناقص

2) إذا كان معامل (x) سالب
   1) ينعكس التزايد والتناقص
   2) يصبح المجال $(-\infty, 0)$

3) لإيجاد خط التقارب الرأسي ← دائمًا ما أمام اللوغاريتم $= 0$ ثم إيجاد قيمة x . فيصبح خط التقارب $\boxed{x = \text{العدد}}$

4) لإيجاد المجال دائمًا ← ما أمام اللوغاريتم > 0. والاجابة على شكل فترة مفتوحة من الجهتين (,   )

تدريبات خصائص الاقتران اللوغاريتمي

1) جد المجال والمدى وخط التقارب الرأسي ومقطعيه من المحورين الاحداثيين وخط التقارب الرأسي مبينًا إن كان متزايدًا أم متناقصًا لكل من الاقترانات التالية:

متزايد / متناقص	مقطعيه من المحورين	خط التقارب الرأسي	المدى	المجال	الاقتران
متزايد	$(1,0)$ يقطع محور x	$x = 0$	R $(-\infty, \infty)$	$x > 0$ $(0, \infty)$	1) $f(x) = \log_3 x$
متناقص	$(1,0)$	$x = 0$	R	$x > 0$ $(0, \infty)$	2) $g(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$
متناقص	$(-1,0)$	$x = 0$	R	$-x > 0$ $x < 0$ $(-\infty, 0)$	3) $h(x) = \log_2(-x)$
متناقص	$(1,0)$	$x = 0$	R	$x > 0$ $(0, \infty)$	4) $R(x) = -\log_{\frac{5}{2}} x$

2) جد المجال والمدى وخط التقارب الرأسي ومقطعيه من المحورين الاحداثيين وخط التقارب الرأسي مبينًا إن كان متزايدًا أم متناقصًا لكل من الاقترانات التالية:

متزايد / متناقص	مقطعيه من المحورين	خط التقارب الرأسي	المدى	المجال	الاقتران
					1) $f(x) = \log_8 x$
					2) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$
					3) $f(x) = -2\log_2 x$
					4) $f(x) = -3\log_4(-x)$
					5) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x) - 1$

تدريبات مجال الاقتران اللوغاريتمي

مجال الاقتران اللوغاريتمي في صورة: $f(x) = \log_b g(x)$

عند وجود معادلة جمع وطرح امام اللوغاريتم

⟵ لإيجاد المجال ⟵ نجعل ما أمام اللوغاريتم $g(x) = 0$ ⟵ ندرس الإشارة على خط الاعداد والاجابة **الفترة الموجبة**

⟵ لإيجاد خط التقارب الرأسي ⟵ $g(x) = 0$ اللي امام اللوغاريتم مساواته بالصفرويتم حل معادلة لإيجاد قيمة x

⟵ اذاكان الموجود أمام اللوغاريتم **عبارة تربيعية** (نحلل)/ واذا كان لدينا بسط ومقام نوجد اصفار المقام ونستثنيهامن المجال

** **جد مجال الاقتران وخط التقارب الرأسي للاقترانات التالية:**

1) $f(x) = \log_5(8-2x)$

$8 - 2x > 0$

نقسم على -2 $\quad -2x > -8$

$x < 4$

- **المجال**← $(-\infty, 4)$
- **خط التقارب الرأسي** ← $x = 4$

2) $f(x) = \log_5(9+3x)$

$9 + 3x > 0 \rightarrow 3x > -9$

$x > -3$

- **المجال** ← $(-3, \infty)$
- **خط التقارب الرأسي** ← $x = -3$

3) $f(x) = -3\log_4(-x)$

نقسم على $-$ $\quad -x > 0 \rightarrow x < 0$

- **المجال**← $(-\infty, 0)$
- **خط التقارب الرأسي** ← $x = 0$

4) $f(x) = \log_5(x^2 - 2x - 3)$ Super

$x^2 - 2x - 3 > 0$ نحولها لمعادلة

$x^2 - 2x - 3 = 0$ نحلل

$(x-3)(x+1) = 0$

$x = 3, -1$

خط الأعداد: $-\infty$ ‎ $++$ ‎ -1 ‎ $---$ ‎ 3 ‎ $++$ ‎ ∞

- **المجال**← $(3, \infty)$, $(-\infty, -1)$
- **خط التقارب** ← $x = -1$, $x = 3$

5) $f(x) = \log_4(x-3)$

6) $f(x) = \log_7(5-x)$

7) $f(x) = 3\log(x-1)$

8) $f(x) = \log x^2$ قوي

$x^2 > 0$

$x^2 > 0 \rightarrow x = 0$

$-\infty$ ‎ $+++$ ‎ 0 ‎ $+++$ ‎ ∞

- **المجال** R ← $(-\infty, \infty)$ماعدا ال $\{0\}$
- **خط التقارب الرأسي** ← $x^2 = 0$

تمثيل الاقتران اللوغاريتمي بيانيًا

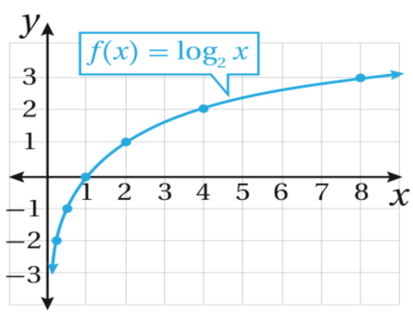
1) ارسم منحنى الاقتران $f(x) = \log_2 x$ مبينًا مجاله ومداه وخط تقاربه وهل هو متزايد أم متناقص؟

أولاً: نقوم بإنشاء جدول القيم نعوض قيم لـ x منها العدد 1 والعدد نفسه ومضاعفاته ومقلوبه.

$x = 2^y$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	-2	-1	0	1	2
(x, y)	$(\frac{1}{4}, -2)$	$(\frac{1}{2}, -1)$	$(1, 0)$	$(2, 1)$	$(4, 2)$

ثانيًا: نعوض في الاقتران لإيجاد قيم y.

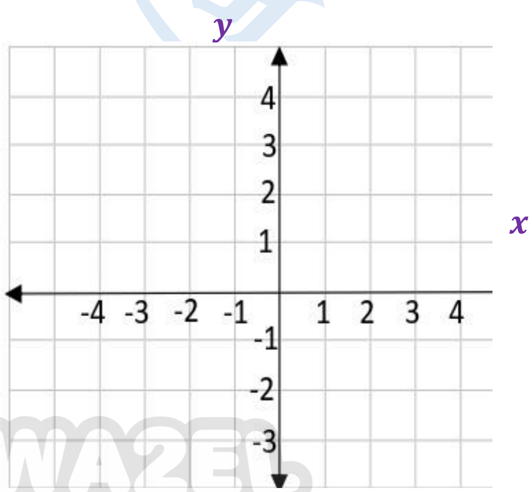
ثالثًا: نقوم بتوصيل النقاط التي تم تحديدها على منحنى الرسم البياني ومن الرسم نجد أن:



1. المجال $(0, \infty)$.
2. المدى $\mathbf{R}$.
3. خط التقارب الرأسي $x = 0$.
4. منحنى الاقتران **متزايد.** لانه كلما زادت قيم x تزداد قيم y

2) ارسم منحنى الاقتران $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

x					
y					
(x, y)					



3) ارسم منحنى الاقتران $f(x) = \log_3 x$ مبينًا مجاله وخط تقاربه.

4) إذا كان $f(x) = \log_2(x - 1)$

a) أكمل الجدول المجاور بما يناسب.

b) ارسم منحنى الاقتران $f(x)$ مستعينًا بالجدول المجاور.

c) حدد مجال الاقتران $f(x)$.

x	5	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$
y				
(x, y)				

مجاهيل ومسائل عملية (كتاب)

1) أجد قيمة a التي تجعل منحنى الاقتران: $f(x) = \log_a x$ يمرُّ بالنقطة $(32, 5)$. $\longleftarrow$ الاجابة $a = 2$

2) أجد قيمة c التي تجعل منحنى الاقتران: $f(x) = \log_c x$ يمرُّ بالنقطة $\left(\frac{1}{256}, -4\right)$. $\longleftarrow$ الاجابة $c = 4$

3) إعلانات: يُمثل الاقتران $P(a) = 10 + 20\, log_5(a+1)$ مبيعات شركة (بآلاف الدنانير) من مُنتج جديد، حيث a المبلغ (بمئات الدنانير) الذي تُنفِقه الشركة على إعلانات المُنتج. وتعني القيمة $P(1) \approx 19$ أن إنفاق **JD 100** على الإعلانات يُحقق إيرادات قيمتها **JD 19000** من بيع المنتج:

a) أجد $P(4)$ و, $P(24)$ و, $P(124)$

b) أفسر معنى القِيم التي أوجدّتُها في الفرع السابق.

$\longleftrightarrow P(4) = 10 + 10(\log_5(4+1)) \longrightarrow P(4) = 10 + 20(\log_5 5)$

$\longrightarrow P(4) = 10 + 20(1) = \mathbf{30} \longrightarrow$ إنفاق (400) دينار إعلانات يحقق إيرادات (30) ألف

$P(24) = 10 + 20(\log_5(25)) \longrightarrow P(24) = 10 + 20(\log_5 5^2)$

$P(24) = 10 + 40 = \mathbf{50}$

التفسير ⟵ إنفاق (2400) دينار إعلانات يحقق إيرادات قيمتها (50000) دينار.

$P(124) = 10 + 20(\log_5 125) \longrightarrow P(124) = 10 + 20(\log_5 5^3)$

$P(124) = 10 + 60 = \mathbf{70} \longrightarrow$ إنفاق (12400) إعلانات ⟵ إيرادات (70) ألف

4) ضوء: تُمثل المعادلة: $log_{10}\left(\frac{1}{12}\right)$ العلاقة بين شدة الضوء I بوحدة $Iumen$ والعمق x بالأمتار في إحدى البحيرات. كم تبلغ شدة الضوء عند عمق $10\ m$؟

مهارات عُليا

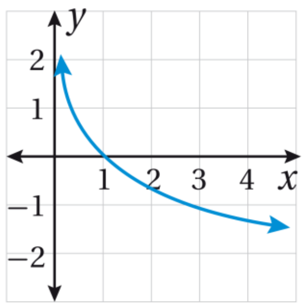
1) تبرير: أكتب بجانب كل اقتران مما يأتي رمز تمثيله البياني المناسب، مُبرِّرًا إجابتي:

1) $f(x) = \log_3(x)$

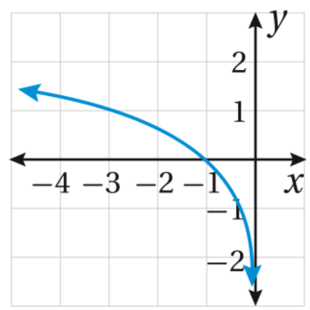
2) $f(x) = \log_3(-x)$

3) $f(x) = -\log_3(x)$

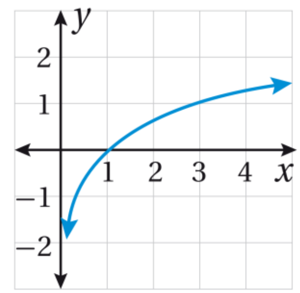
a)



b)



c)



2) تحدٍّ: أجد مجال كل اقتران لوغاريتمي ممّا يأتي، مُحددًا خط (خطوط) تقاربه الرأسي: **قوي**

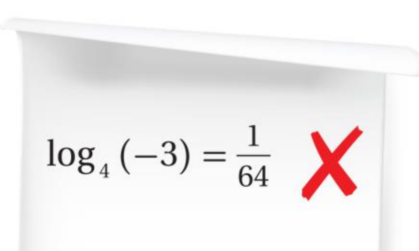
a) $f(x) = \log_3(x^2)$

b) $f(x) = \log_3(x^2 - x - 2)$

c) $f(x) = \log_3\left(\frac{x+1}{x-5}\right)$

3) أكتشف الخطأ: كتبت منى المعادلة الأسية: $4^{-3} = \frac{1}{64}$ في صورة لوغاريتمية كما يأتي:

أكتشف الخطأ الذي وقعت فيه منى، ثم أصحّحه.



قوانين اللوغاريتمات

إذا كانت b, x, y أعدادًا حقيقية موجبة، وكان p عددًا حقيقيًا، حيث $b \neq 1$ فإنَّ:

- **قانون الضرب:** $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$ ← عند وجود ضرب أمام اللوغاريتم ← يتحول لجمع لوغاريتمين.
- **قانون القسمة:** $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$ ← عند وجود قسمة أمام اللوغاريتم ← يتحول لطرح لوغاريتمين.
- **قانون القوّة:** $\log_b x^p = p \log_b x$ ← الأسس يوضع خلف اللوغاريتم مضروبًا في الناتج.

خاصية التوزيع ← $\log_b (xy)^n \to \log_b x^n + \log_b y^n \to n \log_b x + n \log_b y$

مثـــــــال للتوضيح

إذا كان $\log_a(y) = 4$, $\log_a(x) = 3$ فجد قيمة كلًا مما يأتي:

1) $\log_a xy \to \log_a(x) + \log_a(y)$

$3 + 4 = 7$

تحويل الضرب إلى جمع.

2) $\log_a \frac{x}{y} \to \log_a(x) - \log_a(y)$

$3 - 4 = -1$

تحويل القسمة إلى طرح.

3) $\log_a x^2 y^5 \to \log_a x^2 + \log_a y^5$

$2\log_a(x) + 5\log_a(y)$

$2(3) + 5(4)$

$6 + 20$

26

4) $\log_a \sqrt{xy} \to \log_a (xy)^{\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{2}(\log_a xy) \to \frac{1}{2}(\log_a(x) + \log_a y)$

$\frac{1}{2}(3+4)$

$\frac{1}{2}(7) = \frac{7}{2}$

5) $\log_a y^2 - \log_a(xy)$

$2\log_a y - (\log_a(x) + \log_a y)$

$2(4) - (3+4)$

$8 - 7$

1

أولًا: تدريبات قوانين اللوغاريتمات لإيجاد الناتج

1) إذا كان $\log_a 5 \approx 2.32$ وكان: $\log_a 3 \approx 1.59$، فأجد كُلًا مما يأتي:

2) $\log_a \frac{3}{5} \to \log_a 3 - \log_a 5$ $1.59 - 2.32$ ≈ -0.73 تقريبًا	1) $\log_a 15 \to \log_a(5 \times 3)$ الضرب نحوله جمع. $\log_a 5 + \log_a 3$ $2.32 + 1.59$ ≈ 3.91
4) $\log_a \frac{1}{9} \to \log_a(1) - \log_a(9)$ $- \log_a 3^2$ $0 - 2\log_a 3$ $0 - 2(1.59)$ ≈ -3.18	3) $\log_a 125 \to$ نحاول جعله 5 $\boxed{135 = 5^3}$ $\log_a(5)^3 + 3\log_a 5$ $3(2.32)$ ≈ 6.96

2) إذا كان $\log_a 7 \approx 1.21$ وكان: $\log_a 2 \approx 0.43$، فأجد كُلًا مما يأتي:

b) $\log_a \frac{2}{7}$	a) $\log_a 14$
d) $\log_a \frac{1}{49}$	c) $\log_a 32$

3) إذا كان $\log(x) = 0.9$ ، $\log 36 = 1.6$ مهارات عليا خارجي

فجد $\log \sqrt[3]{x} + \log 3.6$

أكيد تعلم أن
log بدون أساس
أساسه هو 10

إجابة السؤال ← 0.9

ثانيًا: كتابة اللوغاريتمات بالصورة المطولة

هُنا يكون السؤال يحتوي **لوغاريتم واحد** ← ويتم استخدام قوانين اللوغاريتمات لتحويل المقدار بصورة تحتوي **عدة لوغاريتمات.** لاحظ هنا غير مطلوب إيجاد ناتج.

مثـال للتوضيح ← اكتب كل مقدار لوغاريتمي مما يأتي (بالصورة المطلولة) علمًا بأن المتغيرات تمثل أعدادًا حقيقية موجبة.

1) $\boxed{\log_5 x^8 y^3}$

$= \log_5 x^8 + \log_5 y^3$

$8\log_5 x + 3\log_5 y$

2) $\boxed{\log_7 \frac{(5x+3)^2}{4}}$

$\log_7 (5x+3)^2 - \log_7 4$

$\mathbf{2\log_7 (5x+3) - \log_7 4}$

3) $\boxed{\log_4 \frac{xy^3}{z^2}}$

$\log_4 xy^3 - \log_4 z^2$

$\log_4 x - \log_4 y^3 - 2\log_4 z$

$\mathbf{\log_4 x - 3\log_4 y - 2\log_4 z}$

4) $\boxed{\log_a \sqrt{\frac{x^2y^3}{a^5}}}$

$\log_a \left(\frac{x^2y^3}{a^5}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{2}(\log_a x^2y^3 - \log_a a^5)$

$\frac{1}{2}(\log_a x^2 + \log_a y^3 - 5\log_a a)$

$\frac{1}{2}(2\log_a x + 3\log_a y - 5)$

$\mathbf{\log_a x + \frac{3}{2}\log_a y - \frac{5}{2}}$

5) $\boxed{\log_a \sqrt[5]{32x^5}}$

$\log_a (32x^5)^{\frac{1}{5}}$

$\log_a 32^{\frac{1}{5}} + \log_a (x^5)^{\frac{1}{5}}$

$\mathbf{\frac{1}{5}\log_a 32 + \log_a x}$

تدريبات الصورة المطولة

أكتب كل مقدار لوغاريتمي ممّا يأتي بالصورة **المُطوَّلة**، علمًا بأن المُتغيرات جميعها تُمثل أعدادًا حقيقية موجبة:

1) $\log_2 a^2 b^9$

2) $\log_7 \frac{(x+1)^3}{8}$

3) $\log_3 \frac{x^7 y^3}{z^5}$

4) $\log_a(\sqrt{x}\sqrt{y})$

5) $\log_b \sqrt[3]{\frac{x^7 b^2}{y^5}}$

6) $\log_a \frac{1}{x^2 y^2}$

7) $\log_a \frac{(x^2 y^3)^2}{(x^2 y^3)^3}$

ثالثًا: كتابة اللوغاريتمات بالصورة المختصرة

هُنا يتم تحويل المقدار اللوغاريتمي من الصورة **المطولة** إلى الصورة المختصرة أي إعادة كتابة المقدار في صورة (**لوغاريتم واحد**) فقط أكيد باستخدام قوانين اللوغاريتمات.

أكتب كل مقدا لوغاريتمي ممّا يأتي بالصورة المُختصرة:

2) $5\log_a x + \frac{1}{3}\log_a y - 7\log_a z$

$\log_a x^5 + \log_a y^{\frac{1}{3}} - \log_a z^7$

$\log_a x^5 y^{\frac{1}{3}} - \log_a z^7$

$\log_a \frac{x^5 y^{\frac{1}{3}}}{z^7} \to \log_a\left(\frac{x^5\sqrt[3]{y}}{z^7}\right)$

1) $3\log_2 x + 4\log_2 y$

$\log_2 x^3 + \log_5 y^4$ **الجمع يصبح ضرب**

$\log_2 x^3 y^4$

4) $5\log_b x + \frac{1}{2}\log_b y - 9\log_b z$

$\log_b x^5 + \log_b y^{\frac{1}{2}} - \log_b z^9$

$\log_b x^5 y^{\frac{1}{2}} - \log_b z^9$

$\log\left(\frac{x^5 y^{\frac{1}{2}}}{z^9}\right) \to \sqrt{y} \leftarrow y^{\frac{1}{2}}$ **جعل** وممكن

3) $\log_5 x + 3\log_5 b$

6) $2\log_b x - 3\log_b y + \frac{1}{3}\log_b z$

5) $\log_a \frac{1}{\sqrt{x}} - \log_a \sqrt{x}$

8) $\log_b(b-1) + 2\log_b b, b > 1$

7) $\log_a(x^2 - 25) - \log_a(x+5)$, $x > 5$

$\log_a \frac{x^2-25}{x+5}$

$\log_a \frac{(x-5)\cancel{(x+5)}}{\cancel{(x+5)}}$ **وممكن نحلل**

$\log_a(x-5)$

رابعًا: التطبيقات الحياتية (قوانين اللوغاريتمات)

1) **نسيان:** في تجربة لتحديد مدى تأثير المُدة الزمنية في درجة تذكر الطلبة للمعلومات، تقدمت مجموعة من الطلبة لاختبار في مادة مُعينة، ثم لاختبارات مُكافِئَة لهذا الاختبار على مدار مُدّدْ شهرية بعد ذلك، فوجد فريق البحث أنّ النسبة المئوية للموضوعات التي يتذكرها أحد الطلبة بعد t شهرًا من إنهائه دراسة المادَّة تعطى بالاقتران $M(t) = 85 - 25\log_{10}(t+1)$ أجد النسبة المئوية للمادة التي يتذكرها هذا الطالب بعد 19 شهرًا من إنهائه دراستها، علمًا بأنّ $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ مقربًا إجابتي إلى أقرب عدد صحيح.

المعادلة المعطاة: $M(t) = 85 - 25\log_{10}(t+1)$

بتعويض $t = 19$: $M(19) = 85 - 25\log_{10}(19+1)$

بالتبسيط: $= 85 - 25\log_{10}(20)$

$10 \times 2 = 20$: $= 85 - 25\log_{10}(10 \times 2)$

قانون الضرب في اللوغاريتمات: $= 85 - 25(\log_{10}10 + \log_{10}2)$

بتعويض $\log_{10}2 \approx 0.3010.\log_b b = 1$: $= 85 - 25\big((1) + 0.3010\big)$

بالتبسيط (الة حاسبة): $= 85 - 25(1.3010)$

بالتبسيط: $\approx \mathbf{52}$

2) يُمثل الاقتران: $M(t) = 92 - 28\log_{10}(t+1)$ النسبة المئوية للموضوعات التي يتذكرها طالب من مادر معينة بعد **t** شهرًا من إنهائه دراستها. أجد النسبة المئوية للموضوعات التي يتذكرها هذا الطالب بعد 29 شهرًا من إنهائه دراسة المادة.

علمًا بأن $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ مقربًا إجابتي إلى أقرب عدد صحيح. **الإجابة تقريبًا** ≈ 51 (تحتاج الة حاسبة)

3) **نمو**: يُمثل الاقتران: $f(x) = 29 + 48.8\log_6(x+2)$ النسبة المئوية لطول الطفل الذكر الآن من طوله عند البلوغ، حيث x عمره بالسنوات. أجد النسبة المئوية لطول طفل عمره 10 سنوات من طوله عند البلوغ، علمًا بأن $\log_6 2 \approx 0.3869$.

نعوض محل x بـ 10

$f(10) = 29 + 48.8\log_6(10+2)$

نحول 12 ← (6×2)

$f(10) = 29 + 48.8\log_6(12)$

نحول الضرب إلى جمع

$f(10) = 29 + 48.8(\log_6 6 \times 2)$

$f(10) = 29 + 48.8(\log_6 6 + \log_6 2)$

$= 29 + 48.8(1 + 0.3869)$

$= 29 + 48.8(1.3869)$ الى هنا علامة كاملة

باستخدام الآلة الحاسبة

≈ 87.68072

4) **إيرادات**: يُمثل الاقتران: $T(a) = 10 + 20\log_6(a+1)$ مبيعات شركة (بآلاف الدنانير) من منتج جديد، حيث a المبلغ (بآلاف الدنانير) الذي تُنفقه الشركة على الإعلانات المنتج، $a \geq 1$. وتعني القيمة $T(1) \approx 17.7$ أن إنفاق JD 1000 على الإعلانات يحقق إيرادات قيمتها JD 17700 من بيع المُنتج. **أجد** قيمة إيرادات الشركة بعد إنفاقها مبلغ 11 ألف دينار على الإعلانات، علمًا بأن $\log_6 2 \approx 0.3869$. الإجابة ≈ 37.738 دينار

5) يُمثل الاقتران: $L = 10\log_{10} R$ شِدة الصوت بالديسيبل، حيث R شِدة الصوت النسبية بالواط لكل متر مربع. أجد شِدة صوت بالديسيبل إذا كانت شِدته النسبية $100 \times 10^6 W/m^2$

$L = 10\log_{10}(100 \times 10^6)$

$L = 10(\log_{10} 100 + \log_{10} 10^6)$

$L = 10(\log_{10} 10^2 + 6\log_{10} 10)$

$10(2+6)$

$10 \times 8 = 80$ ديسيبل

مهارات عُليا (قوانين اللوغاريتمات)

1) أثبت أنّ $\frac{\log_a 216}{\log_a 36} = \frac{3}{2}$.

2) أثبت أنّ $\log_b(b-3) + \log_b(b^2+3b) - \log_b(b^2-9) = 1$، حيث: $b > 3$، مبررًا إجابتي.

حللنا عامل مشترك وفرق بين مربعين $\log_b(b-3) + \log_b\big(b(b+3)\big) - \log_b(b-3)\,(b+3)$

حولنا الضرب الى جمع $\log_b(b-3) + \log_b b - \big(\log_b(b-3)\,(+\log_b(b+3\,)\big)$

وزعنا السالب عالقوس وحذفنا المقادير $\log_b\cancel{(b-3)} + 1 + \log_b\cancel{(b+3)} - \log_b\cancel{(b-3)} - \log_b\cancel{(b+3)}$

يمكن الحل بطريقة أخرى وهو المطلوب $\boxed{=1}$

3) إذا كان $\log_{10} 7 = 0.85$، $\log_{10} 5 = 0.7$، جد $\log_{10}\left(\frac{1}{35}\right)$.

4) جد قيمة $\log_{10} 300 + \log_{10} 20 - \log_{10} 60$

5) اكتشف الخطأ: اكتشف الخطأ في الحل الآتي، ثم أصحّحه:

$$\log_2 5x = (\log_2 5)(\log_2 x)$$

المطلوب من الدرس:

أولًا: التعرف على اللوغاريتم الاعتيادي واللوغاريتم الطبيعي وإيجاد الناتج باستخدام الآلة الحاسبة.

ثانيًا: استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد ناتج اللوغاريتمات في حال (تغيير الأساس).

ثالثًا: حل المعادلات الأسية العادية.

رابعًا: حل المعادلات الأسية باستعمال خاصية (المساواة اللوغاريتمية).

خامسًا: استعمال المعادلات الأُسية في تطبيقات حياتيه وعملية.

أولًا: يجب التعرف على

اللوغاريتم الاعتيادي

- هو اللوغاريتم الذي يكون أساسه 10.

  ويكتب عادة (دون أساس) ← $\log x$
- وهو الاقتران العكسي للاقتران الأسي $y = 10^x$.
- للتحويل من أسي إلى لوغاريتمي اعتيادي

  $x = 10^y \rightarrow y = \log x$
- في الآلة الحاسبة الزر الخاص باللوغاريتم← هو log
- دائمًا $\log 10 = 1$
- $\log 100 \rightarrow \log 10^2 = 2$

  $\log(0.1) \rightarrow \log 10^{-1} = -1$

اللوغاريتم الطبيعي

- هو اللوغاريتم الذي يكون أساسه e.

  ويرمز له بالرمز← $\ln$
- وهو الاقتران العكسي للاقتران الأسي الطبيعي $y = e^x$.
- للتحويل من أسي طبيعي← إلى لوغاريتمي طبيعي

  $e^y = x \rightarrow y = \ln x$
- في الآلة الحاسبة الزر الخاص باللوغاريتم الطبيعي هو ← $\ln$.
- دائمًا $\ln e = 1$
- $\ln e^3 = 3$

إيجاد ناتج اللوغاريتم الطبيعي والاعتيادي

إيجاد ناتج اللوغاريتم والطبيعي باستخدام الآلة الحاسبة:

1) استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل ممّا يأتي، إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة:

1) $\text{Log } 2.7$ ← استعمل الآلة الحاسبة $\rightarrow \log 2.7 = 0.4313637642$

إذن $\log 2.7 \approx 0.4$

2) $\text{Log}(1.3 \times 10^5)$ ← استعمل الآلة الحاسبة إذن $\rightarrow \log(1.3 \times 10 \times\ 5) = 5.113943352$

إذن $\text{Log}(1.3 \times 10^5) \approx 5.1$

3) **$Ln\ 17$** $\rightarrow \ln 17 = 2.833213344$ استعمل الآلة الحاسبة إذن

إذن $Ln\ 17 \approx 2.8$

4) $Log(8.2 \times 10^9) \rightarrow \log(8.2 \times 10 \times \quad 9) = 9.913813852$ إ استعمل الآلة الحاسبة

إذن $Log(8.2 \times 10^9) \approx 9.9$

---

2) استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل ممّا يأتي، إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة:

1) $Log\ 19$

2) $Log(25 \times 10^{-3})$

3) $Ln\ 3.1$

4) $Ln\ 0.25$

5) $Log(3.1 \times 10^4)$

ثانيًا: تغير الأساس

تعلمت سابقًا أن معظم الآلات الحاسبة تحتوي على زِرّين للوغاريتمات، هما **log** ، و **Ln**. ولكن، كيف يمكنني إيجاد $\log_4 7$ باستعمال هذا النوع من الآلات الحاسبة؟

يمكنني إيجاد ذلك بتغيير الأساس غير المر غوب فيه (الأساس 4 في هذه الحالة) إلى حاصل قسمة لوغاريتمين للأساس نفسه.

يعني ← نوجد $\frac{\text{لوغاريتم ما أمام}}{\text{لوغاريتم الأساس}}$ وهنا ما بتفرق لو أخذنا لوغاريتم اعتيادي أو طبيعي.

$\frac{\log 7}{\log 4} = \frac{\ln 7}{\ln 4} = 1.40$ تقريبًا

مفهوم أساسي — **صيغة تغيير الأساس**

إذا كانت a, b, x أعدادًا حقيقيةً موجبةً، حيث: $a \neq 1, b \neq 1$، فإنَّ:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

أجد قيمة كل مما يأتي، مقربًا إجابتي إلى أقرب جزء من مئة إن لزم الأمر:

1) $\log_3 16$ — صيغة تغير الأساس $= \frac{\ln 16}{\ln 3}$ — استعمل الآلة الحاسبة ≈ 2.52	**2)** $\log_4 25$ — صيغة تغير الأساس $= \frac{\log 25}{\log 4}$ — استعمل الآلة الحاسبة ≈ 2.32
3) $\log_{\frac{1}{2}} 2$ — صيغة تغير الأساس $= \frac{\ln 2}{\ln 1 - \ln 2}$ — قانون القسمة في اللوغاريتمات $= \frac{\ln 2}{-\ln 2}$ — $\ln 1 = 0$ $= -1$ — بالتبسيط	**4)** $\log_6 10$ — صيغة تغير الأساس $= \frac{\log 10}{\log 6}$ $= \frac{1}{\log 6}$ — $\log 10 = 1$ ≈ 1.29 — استعمل الآلة الحاسبة

أجد قيمة كل مما يأتي، مقربًا إجابتي إلى أقرب جزء من مئة إن لزم الأمر:

a) $\log_2 89$ b) $\log_5 19$ c) $\log_{\frac{1}{2}} 12$ b) $\log_8 e^2$

ثالثًا: حل المعادلات الأسية

ثالثا : المعادلات الأسية (بدون استخدام اللوغاريتمات)

تعلمت سابقًا مفهوم المعادلة الأسية؛ وهي معادلة تتضمن قوى أسها متغيرات، ويتطلب حلها كتابة طرفي المعادلة في صورة قوتين للأساس نفسه، ثم المقارنة بين أُسّي الطرفين وفق القاعدة الآتية:

إذا كان $a^x = a^y$ فإن $x = y$

حيث $a > 0 , a$

الخطوات:

أولاً: نجعل الأساس متساوي في الجهتين.

ثانيًا: نطبق قاعدة إذا الأساس = الأساس إذاً الأس= الأس.

ثالثًا: نقوم بحل المعادلة لإيجاد المجهول .

حل المعادلات الأُسيّة الآتية:

1) $\mathbf{2^x = 16}$

$2^x = 2^4 \to x = 4$

2) $\mathbf{3^{2x} = 81}$

$3^{2x} = 3^4 \to 2x = 4 \to x = 2$

3) $\mathbf{5^{2x+6} = 1}$ هنا الـ **1** ← هدية (نفس العدد)

$5^{2x+6} = 5^0 \to 2x + 6 = 0 \to 2x = -6 \to x = -3$

4) $\mathbf{e^{x^2} = 1} \to e^{x^2} = e^0 \to x = 0$

5) $\mathbf{2^{x+1} = 4^{x-1}} \to 2^{x+1} = 2^{2(x-1)}$

$\to 2^{x+1} = 2^{2x-2} \to x + 1 = 2x - 2 \to x = 3$

6) $\mathbf{\ln x = -1}$

$e^{-1} = x$ نحوله لمعادلة أسية

$x = \frac{1}{e}$

7) $\mathbf{2^{3x} = 64}$

8) $\mathbf{36^y = 6}$

9) $\mathbf{4^{x^2-9} = 1}$

10) $\mathbf{3^{x-2} = 9^{x+8}}$

11) $\mathbf{\ln e^x = 1}$

رابعًا: حل المعادلات الأسية باستخدام خاصية (المساواة اللوغاريتمية)

- في المعادلات الأسية التي لا يمكن كتابة طرفي المعادلة في صورة أساسين مثل $5 = 3^x$ ← هنا نقوم نأخذ لوغاريتم للطرفين سواء لوغاريتم (اعتيادي أو طبيعي) ونستخدم ← **خاصية المساواة اللوغاريتمية.**

مفهوم أساسي خاصية المساواة اللوغاريتمية

إذا كان $b > 0$، حيث: $b \neq 1, x > 0, y > 0$، فإنَّ:

$\log_b x = \log_b y$ إذا وفقط إذا $x = y$

اذا كان الأساس هو e هنا يفضل اخذ لوغاريتم طبيعي للطرفين ln

هنا نقوم بحل المعادلات الأسية التي لا يمكن توحيد الأساس فيها للجهتين بأخذ لوغاريتم للطرفين ثم استخدام قوانين اللوغاريتمات لجعل المجهول في جهة واللوغاريتمات في جهة أخرى وإيجاد الناتج بالآلة الحاسبة.

حل المعادلات الأسية الآتية، مُقربًا إجابتي إلى أقرب منزلتين عشريتين:

1) $2^x = 13$

$2^x = 13$ المعادلة الأصلية

$\log 2^x = \log 13$ نأخذ اللوغاريتم الاعتيادي لكلا الطرفين

$x \log 2 = \log 13$ قانون القوّة في اللوغاريتمات — إلى هنا بدون آلة حاسبة

$x = \frac{\log 13}{\log 2}$ بقسمة طرفي المعادلة على $\log 2$ — هنا علامة كاملة

$x \approx 3.7$ باستخدام الآلة الحاسبة

حل المعادلة هو: $x \approx 3.7$

اتعلّم

يمكنني حل الفرع 1 من المثال بأخذ $\log_2$ لطرفي المعادلة، فيكون الناتج:

$x = \log_2 13$

---

2) $5e^{3x} = 125$

$5e^{3x} = 125$ المعادلة الأصلية

$e^{3x} = 125$ بالقسمة على 5

$\ln e^{3x} = \ln 25$ نأخذ اللوغاريتم الاعتيادي لكلا الطرفين

$3x = \ln 25$ $\log_b b^x = x$

$x = \frac{\ln 25}{3}$ بقسمة طرفي المعادلة على3

$x \approx 1.07$ باستخدام الآلة الحاسبة

حل المعادلة هو: $x \approx 1.07$

هنا أخذ للطرفين لوغاريتم طبيعي (ln) لأن الأساس e ونعلم أن $\ln e = 1$ أسهل.

تدريبات (المساواة اللوغاريتمية)

3) $2^{x+4} - 5^{3x}$

$2^{x+4} - 5^{3x}$ المعادلة الأصلية

$\log 2^{x+4} = \log 5^{3x}$ نأخذ اللوغاريتم الاعتيادي لكلا الطرفين

$(x+4)\log 2 = 3x\log 5$ قانون القوّة في اللوغاريتمات

$x\log 2 + 4\log 2 = 3x\log 5$ خاصية التوزيع

$x\log 2 - 3x\log 5 = -4\log 2$ بإعادة ترتيب المعادلة

$x(\log 2 - 3x\log 5) = -4\log 2$ بإخراج x عاملًا مشتركًا

$x = \frac{-4\log 2}{\log 2 - 3\log 5}$ بقسمة طرفي المعادلة على $\log 2 - 3\log 5$ العلامة كاملة هنا

$x \approx 0.67$ باستخدام الآلة الحاسبة

حل المعادلة هو: $x \approx 0.67$

---

4) $\boxed{9^x + 3^x - 30 = 0}$

$9^x + 3^x - 30 = 0$ المعادلة الأصلية

$(3^x)^2 + 3^x - 30 = 0$ $(3^x)^2 + 3^x - 30 = 0$

$u^x + u - 30 = 0$ بافتراض أنّ $3^x = u$

$(u+6)(u-5) = 0$ بالتحليل

$u = -6$ or $u = 5$ خاصية الضرب الصفري

$3^x = -6$ $3^x = 5$ باستبدال 3^x بـ u

بما أن 3^x موجبة لأي قيمة x ، فإنه لا يوجد حل للمعادلة: $\cancel{3^x = -6}$ ، ويكتفى بحل المعادلة: $3^x = 5$.

لاحظ هنا لا يمكن أن يكون ناتج المعادلة الأسية (سالب) أو (صفر) لذا تُهمل.

$\log 3^x = \log 5$ نأخذ اللوغاريتم الاعتيادي لكلا الطرفين

$x\log 3 = \log 5$ قانون القوّة في اللوغاريتمات

$x = \frac{\log 5}{\log 3}$ بقسمة طرفي المعادلة على $\log 2$ إلى هنا بدون حاسبة

$x \approx 1.46$ باستخدام الآلة الحاسبة

إذن، حل المعادلة هو: $x \approx 0.46$

تدريبات حل المعادلات الأسية (المساواة اللوغاريتمية)

حل المعادلات الأسية الآتية، مُقربًا إجابتي إلى أقرب 4 منازل عشرية:

a) $7^x = 9$

b) $2e^{5x} = 64$

c) $21^{x-1} = 3^{7x+1}$

d) $7^{2x+1} = 2^{x-4}$

e) $100e^{0.08t} = 2500$

f) $4^x + 2^x - 12 = 0$

تدريبات ضع دائرة (متنوع)

1) حل المعادلة $\ln e^{2x} = 2$ هو:

a) 1 b) 0 c) e d) -1

2) قيمة $\log(100) \leftarrow$ هو:

a) 10 b) 2 c) 3 d) -3

3) إذا كان $e^{x^3} = 1$ فإن قيمة x هي:

a) 1 b) 0 c) 2 d) 3

4) حل المعادلة $9^x = 27^{(2x-4)}$ فإن قيمة x هي:

a) -3 b) 2 c) 3 d) 6

5) قيمة $\log 12$ تساوي:

a) $\log 3 + \log 4$ b) $3\log 4$

c) $\log 3 \times \log 4$ d) $2\log 6$

6) قيمة $\log(0.01)^2$ تساوي:

a) 4 b) -2 c) -4 d) 2

7) قيمة $\log_6 10$ تكافئ:

a) $\frac{\log 6}{\log 10}$ b) $\frac{1}{\log 6}$

c) $\log 6$ d) $\log_6 10$

8) إذا كان $\log_5 3 = K$ فإن قيمة $\log_5 9$ بدلالة K هو:

a) $3K$ b) K^2 c) $2K$ d) $9K$

9) قيمة $\log 25 + \log 4$ تساوي:

a) 2 b) 3 c) 1 d) 10

10) حل المعادلة $4(3)^x = 20$ بدون استخدام الحاسبة هي:

a) $x = \frac{\log 5}{\log 3}$ b) $x = \frac{\log 3}{\log 20}$

c) $x = \frac{\log 4}{\log 3}$ d) $x = \frac{\log 20}{\log 3}$

11) حل المعادلة $3^x = 8$ دون استخدام الحاسبة هي:

a) $\log 8$ b) $\log_8 3$

c) $\log_3 8$ d) $\log 3$

12) يكتب التعبير $\log_a 9 - 2\log_a 3 + \log_a 2$ على صورة لوغاريتم واحد:

a) $\log_a 6$ b) $\log_a 2$

c) $\log_a a9$ d) $2\log_a 3$

13) إذا كان $y = 10^x$ فإن $f^{-1}(x)$ هو:

a) $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$ b) $y = \log_x 10$

c) $y = \log x$ d) $x = \log y$

مسائل حياتية وعملية

1) نمو سكاني: قُدر عدد سكان العالم بنحو 6.5 مليار نسمة عام 2006م. ويمثل الاقتران $P(t) = 6.5(1.014)^t$ عدد سكان العالم (بالمليار نسمة) بعد t عامًا.

a) منذ عام 2006م. بعد كم سنة من عام 2006م سيبلغ عدد سكان العالم 13 مليار نسمة؟

$P(t) = 6.5(1.014)^t$ الاقتران الأصلي

$13 = 6.5(1.014)^t$ بتعويض $P(t) = 13$

$2 = (1.014)^t$ بقسمة طرفي المعادلة على 6.5

$\ln 2 = \ln(1.014)^t$ بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لكلا الطرفين

$\ln 2 = t \ln 1.014$ قانون القوّة في اللوغاريتمات

$t = \frac{\ln 2}{\ln 1.014}$ بحل المعادلة لـ t علامة كاملة هنا

$t \approx 50$ باستعمال الآلة الحاسبة

سيبلغ عدد سكان العالم 13 مليار نسمة بعد 50 سنة تقريبًا من عام 2006م.

b) اعتمادًا على المعطيات الواردة في المثال السابق، بعد كم سنة من عام 2006م سيبلغ عدد سكان العالم (19.5) نسمة.

2) كوالا: تناقصت أعداد حيوان الكوالا في إحدى الغابات وفق الاقتران $N = 800e^{-0.078t}$ حيث N العدد المتبقي من هذا الحيوان في الغابة بعد t سنة. بعد كم سنة يصبح في الغابة **80** حيوانًا من الكوالا؟

3) أودعت سميرة مبلغ P في حساب بنكي، بنسبة ربح مركب مستمر مقدارها 5%، علمًا بأن $\ln 2 \approx 0.7$

$\ln 3 \approx 1.1$

إرشاد: صيغة جملة المبلغ لربح المركب المستمر هي: $\boldsymbol{A = Pe^{rt}}$

a) بعد كم سنة تصبح جملة المبلغ مثلي المبلغ الأصلي

مثلي المبلغ $A = 2P$

$2P = Pe^{0.05t}$

نقسم على P ← $2 = e^{0.05t}$

نأخذ ln للطرفين ← $\ln 2 = \ln e^{0.05t}$

$0.7 = 0.05t$

$t = \frac{0.7}{0.05} = 14$ سنة

b) بعد كم سنة تصبح جملة المبلغ ثلاثة أمثال المبلغ الأصلي

4) يُمثل الاقتران: $\boldsymbol{A(t) = 10e^{-0.0862t}}$ كتلة اليود (بالغرام) المُتبقّية من عينة كتلتها 10 g بعد t يومًا من بدء التفاعل.

بعد كم يومًا سيظل من العينة 0.5 g؟

5) حرارة: $\boldsymbol{T = 27 + 219e^{-0.032t}}$ درجة حرارة معدن (بالسيليسوس $°C$) بعد t دقيقة من بدء تبريده. متى تصبح درجة حرارة المعدن $\boldsymbol{127\ C°}$؟

6) **أرانب**: توصلت دراسة إلى أن عدد الأرانب في محمية طبيعية يتزايد وفق الاقتران: $\boldsymbol{N(t)=\frac{2000}{1+3e^{-0.05t}}}$، حيث N عدد الأرانب في المحمية بعد t سنة:

a) أجد عدد الأرانب في المحمية عند بدء الدراسة

$$N(0)=\frac{2000}{1+3e^{-0.05(0)}}$$

$$N(0)=\frac{2000}{1+3(e)^{0}}$$

$$N(0)=\frac{2000}{4}=500$$

b) بعد كم سنة يصبح عدد الأرانب في المحمية (1000) أرنب

7) **أسماك**: يُمثل الاقتران: $\boldsymbol{P(t)=200e^{x}}$ عدد أسماك السلمون P في نهر بعد t سنة من بدء دراسة معينة عليها:

a) أجد عدد أسماك السلمون في النهر عند بدء الدراسة.

b) بعد كم سنة يصبح عدد أسماك السلمون في النهر 4000 سمكة؟

مهارات عليا

1) **تبرير:** أجد قيمة كل من h, k إذا وقعت النقطة $(-2, k)$، والنقطة $(h, 100)$ على منحنى الاقتران: $f(x) = e^{0.5x+3}$ ، مُبررًا إجابتي.

$(-2, k)$

$f(-2) = e^{0.5(-2)+3}$

$k = e^{-1+3}$

$k = e^{2}$ آلة حاسبة

$k = 7.389$

(h, 100)

$100 = e^{0.5x+3}$

$\ln 100 = \ln e^{0.5x+3}$ نأخذ ln

$\ln 100 = 0.5h + 3$

$0.5h = \ln(100) - 3$

$h = \frac{\ln(100)-3}{0.5}$ آلة حاسبة

$h = 3.2103$

2) **تحدٍّ:** حل المعادلة: $3^{x} + \frac{4}{3^{x}} = 5$ ← الإجابة $x = 1.2618$ $x = 0$

3) يتزايد عدد سكان احدى المدن حسب العلاقة $P_2 = P_1 e^{at}$ حيث P_2 عدد السكان بعد (t) سنة، (P_1: عدد السكان الحالي (a): نسبة الزيادة السنوية في عدد السكان) فإذا كانت نسبة الزيادة السنوية في عدد السكان (3%) احسب بعد سنة **يتضاعف** عدد سكان هذه المدينة←

يتضاعف معناها ← $P_2 = 2P_1$

$\rightarrow P_2 = P_1 e^{at}$

$\rightarrow 2P_1 = P_1 (e)^{0.03t}$ → نقسم الطرفين على P_1

$\rightarrow 2 = e^{0.03t}$ → نأخذ ln للطرفين

$\rightarrow \ln 2 = \ln e^{0.03t}$ → $\ln 2 = 0.03t$

$t = \frac{0.69}{0.03} = 23$ سنة

4) استثمر شخص مبلغ (2000) دينار ف شركة بنسبة **ربح مركب** تبلغ (6%) وتضاف سنويًا فبلغت جملة المبلغ بعد (t) سنة (3000) دينار جد عدد السنوات (t) إذا علمت أن $\log 1.06 = 0.03$ ، $\log 1.5 = 0.18$.

إرشاد: صيغة الربح المركب $A = P\left(1 + \frac{3}{8}\right)^{nt}$

المعطيات

$P = 2000, \quad r = 0.06$

$A = 3000, N = \frac{12}{12} = 1$

$t = ??$

$3000 = 2000\left(1 + \frac{0.06}{1}\right)^{(1)(t)}$

$1.5 = (1.06)^{t}$ بالقسمة على (2000)

$\log 1.5 = t \log(1.06)$ لوغاريتم للطرفين

$t = \frac{(\log 1.5)}{(\log 1.6)} = \frac{0.18}{0.03} = 6$ سنوات

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 خط التقارب الأفقي للاقتران: $f(x) = 4(3^x)$ هو:

a) $y = 4$ b) $y = 3$

c) $y = 1$ d) $y = 0$

2 حَلُّ المعادلة: $\ln e^x = 1$ هو:

a) 0 b) $\frac{1}{e}$

c) 1 d) e

3 قيمة $\log(0.1)^2$ هي:

a) -2 b) -1

c) 1 d) 2

4 أحد الآتية يُكافِئ المقدار:

$\log_a 27 - \log_a 9 + \log_a 3$:

a) $\log_a 3$ b) $\log_a 6$

c) $\log_a 9$ d) $\log_a 27$

5 أحد الآتية يُكافِئ المقدار: $\log_a \frac{ax^5}{y^3}$:

a) $5 \log_a x - 3 \log_a y + 1$

b) $a \log_a x^5 - \log_a y^3$

c) $5a \log_a x - 3 \log_a y$

d) $1 - 5 \log_a x - 3 \log_a y$

6 حَلُّ المعادلة: $2^{x+1} = 4^{x-1}$ هو:

a) 2 b) 3

c) 4 d) 8

7 قيمة $\log 10$ هي:

a) $2 \log 5$ b) 1

c) $\log 5 \times \log 2$ d) 0

8 إذا كان: $e^{x^2} = 1$، فإنَّ قيمة x هي:

a) 0 b) 1

c) 2 d) 4

9 الاقترانات اللوغاريتمية التي في صورة:

$f(x) = \log_b x$، حيث: b عدد حقيقي،

و $b > 0$، $b \neq 1$، تمرُّ جميع منحنياتها بالنقطة:

a) $(1, 1)$ b) $(1, 0)$

c) $(0, 1)$ d) $(0, 0)$

إذا كان: $\log_5 4 = k$، فأكتب قيمة كلٍّ ممّا يأتي بدلالة k:

10 $\log_5 16$

11 $\log_5 256$

أُمثِّل كل اقتران ممّا يأتي بيانيًّا، ثم أُحدِّد مجاله ومداه:

12 $f(x) = 6^x$

13 $g(x) = (0.4)^x$

14 $h(x) = \log_7 x$

15 $p(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

أَحُلُّ المعادلات الأُسِّية الآتية، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب 4 منازل عشرية:

16 $8^x = 2$

17 $-3e^{4x+1} = -96$

18 $11^{2x+3} = 5^x$

19 $49^x + 7^x - 72 = 0$

20 استثمر سليمان مبلغ 2500 JD في شركة صناعية، بنسبة ربح مُركَّب تبلغ 4.2%، وتضاف شهريًّا. أجد جُمْلة المبلغ بعد 15 سنة.

21 أودع سعيد مبلغ 800 JD في حساب بنكي، بنسبة ربح مُركَّب مستمر مقدارها 4.5%. أجد جُمْلة المبلغ بعد 5 سنوات.

22 فيروس: انتشر فيروس في شبكة حواسيب وَفق الاقتران: $v(t) = 30e^{0.1t}$، حيث v عدد أجهزة الحاسوب المصابة، وt الزمن بالدقائق. أجد الزمن اللازم لإصابة 10000 جهاز حاسوب بالفيروس.

يُمثِّل الاقتران: $N(t) = 100e^{0.045t}$ عدد الخلايا البكتيرية في عيِّنة مخبرية بعد t يومًا:

23 أجد العدد الأصلي للخلايا البكتيرية في العيِّنة.

24 أجد عدد الخلايا البكتيرية في العيِّنة بعد 5 أيام.

25 بعد كم يومًا يصبح عدد الخلايا البكتيرية في العيِّنة 1400 خلية؟

26 بعد كم يومًا يصبح عدد الخلايا البكتيرية في العيِّنة ضعف العدد الأصلي؟

يقاس الضغط الجوي بوحدة تُسمّى هيكتوباسكال (hPa)، ويبلغ هذا الضغط عند سطح البحر 1000 hPa، ويتناقص بنسبة 12% لكل كيلومتر فوق سطح البحر:

27 أكتب اقتران الاضمحلال الأُسِّي للضغط الجوي عند ارتفاع h كيلومترًا عن سطح البحر.

28 عند أيِّ ارتفاع تساوي قيمة الضغط الجوي نصف قيمة الضغط الجوي عند سطح البحر؟

29 إعلانات: يُمثِّل الاقتران: $S(x) = 400 + 250 \log x$ مبيعات شركة (بآلاف الدنانير) من مُنتَج جديد، حيث x المبلغ (بآلاف الدنانير) الذي تُنفِقه الشركة على إعلانات المُنتَج، و$x \geq 1$. وتعني القيمة: $S(1) = 400$ أنَّ إنفاق 1000 JD على الإعلانات يُحقِّق إيرادات قيمتها 400000 JD من بيع المُنتَج. أجد $S(10)$، مُفسِّرًا معنى الناتج.

انتهت الوحدة الأولى

بالتوفيق لكم جميعا أحبتي