# الرياضيات

## الصف الثاني عشر- الفرع العلمي

### الفصل الدراسي الثاني

12


فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيسًا)

هبه ماهر التميمي　　أ.د. محمد صبح صبابحه　　يوسف سليمان جرادات



الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237　06-5376266　P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor　feedback@nccd.gov.jo　www.nccd.gov.jo

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan
- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan



الطبعة الأولى (التجريبية)

1443 هـ / 2022 م

# المقدمة

انطلاقًا من إيمان المملكة الأردنية الهاشـمية الراسخ بأهمية تنمية قدرات الإنسان الأردني، وتسليحه بالعلم والمعرفة؛ سـعى المركز الوطني لتطوير المناهج، بالتعاون مع وزارة التربية والتعليم، إلى تحديث المناهج الدراسية وتطويرها، لتكون مُعينًا للطلبة على الارتقاء بمستواهم المعرفي والمهاري، ومجاراة الأقران في الدول المتقدمة. ولمّا كان مبحث الرياضيات من أهم المباحث الدراسـية التي تُنمّي لدى الطلبة مهارات التفكير وحلِّ المشكلات، فقد أَوْلى المركز مناهجه عناية كبيرةً، وأَعَدَّها وَفق أفضل الطرائق المُتَّبَعة عالميًّا على أيدي خبرات أردنية؛ لضمان انسـجامها مع القِيَم الوطنية الراسخة، وتلبيتها لحاجات الطلبة.

روعي في إعداد كتب الرياضيات للمرحلة الثانوية تضمينها أكثر الموضوعات الرياضية أهميةً واستخدامًا في التطبيقات العلمية المختلفة؛ بُغْيَةَ إعداد الطلبة للدراسـة الجامعية إعدادًا جيِّدًا يتواءم مع مناهج الدول المتقدمة. وكذلك حُرِص على تقديم هذه الموضوعات بطريقة بنائية مُتدرِّجة تتيح للطلبة فرصة تعلُّمها بعمق من دون عناء أو جهد كبيرين.

روعي أيضًا تقديـم الموضوعات بطريقة مُنظَّمة، وجاذبـة، ومُدعَّمة بتمثيلات بيانية، ومُزوَّدة بإرشـادات تُعين الطلبة على مواصلة تعلُّمهم بسلاسـة من دون تعثُّر؛ فهي تُذكِّرهم بالخبرات التعليمية التي اكتسـبوها سابقًا وتساعدهم على ربط الموضوعات الجديدة بعضها ببعض ربطًا وثيقًا، إضافةً إلى صلة كثير من أمثلتها ومسائلها بسياقات حياتية تُحفِّز الطلبة على تعلُّم الرياضيات بشغف، وتجعله ذا معنى.

ولأنَّ كثرة تدرُّب الطلبة على حلِّ المسـائل نهجٌ ناجعٌ في ترسـيخ المفاهيم الرياضية لديهم وتعزيز طلاقتهم الإجرائية؛ فقد تضمَّن كتابا الطالب والتمارين عددًا كافيًا من التدريبات؛ بهدف توثيق علاقة الطلبة بالكتاب المدرسـي، بوصفه مرجعًا موثوقًا ورصينًا يغنيهم عن البحث عن أيَّة مراجع أو مصادر إضافية، ويُحقِّق العدالة في التعلُّم.

ونحن إذ نُقدِّم هذا الكتاب، نُؤمِّل أنْ ينال إعجاب طلبتنا وأعضاء الهيئات التدريسية والتعليمية، ويجعل تعليم الرياضيات وتعلُّمها أكثر متعةً وسهولةً، ونَعِدُ بأنْ نستمرَّ في تطويره في ضوء ما يصلنا من ملاحظات سديدة.

**المركز الوطني لتطوير المناهج**

# قائمة المحتويات

# قائمة المحتويات

الوحدة 4

# التكامل
# Integration

## ما أهمية هذه الوحدة؟

التكامل عملية عكســية للتفاضل؛ لذا يُستعمَل في كثير من التطبيقات العلمية والحياتية التي تتضمَّن قِيَمًا مُتغيِّرةً مع الزمن. يُستعمَل التكامل أيضًا لحساب المساحات المحصورة بين المنحنيــات، والحجــوم الناتجة مــن دوران المناطق المُحدَّدة بمنحنيات، فضلًا عن بعض الحسابات المالية مثل التكلفة الحدِّية، وبعض الحسابات المُتعلِّقة بالمجتمعات الحيوية.

## تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ إيجاد التكامل المحدود والتكامل غير المحدود لاقترانات القوَّة.
- ✓ إيجاد المساحة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور $x$.
- ✓ إيجاد الحجوم الناتجة من دوران منحنى اقتران حول المحور $x$.

## سأتعلَّم في هذه الوحدة:

- إيجاد تكاملات تتضمَّن اقترانات أُسِّية، ومثلثية، ولوغاريتمية طبيعية ومُتشعِّبة.
- إيجاد تكاملات باستعمال التعويض، والكسور الجزئية، والأجزاء.
- إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي اقترانين، وحجم المُجسَّم الناتج من دورانها حول المحور $x$.
- حلّ معادلات تفاضلية.

أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحات (6–8) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

# تكامل اقترانات خاصة
# Integration of Special Functions

**فكرة الدرس** إيجاد تكاملات تتضمَّن اقترانات أُسِّية، ومثلثية، ولوغاريتمية طبيعية ومُتشعِّبة.

**المصطلحات** الإزاحة.

**مسألة اليوم** يُمثِّل الاقتران $P(t)$ عدد الخلايا البكتيرية بعد $t$ يومًا من بَدْء دراستها في مجتمع بكتيري. إذا كان عدد هذه الخلايا عند بَدْء الدراسة هو 200000 خلية، فأجد عددها في المجتمع البكتيري بعد 12 يومًا من بَدْء الدراسة، علمًا بأنَّها تتغيَّر بمُعدَّل: $P'(t) = 200e^{0.1t} + 150e^{-0.03t}$.

## تكامل الاقترانات الأُسِّية

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ التكامل هو عملية عكسية للاشتقاق، وأنَّ $\int f(x)dx$ يُسمّى التكامل غير المحدود للاقتران $f(x)$، كما في المُخطَّط الآتي الذي يُبيِّن عناصر هذا النوع من التكامل.

مُتغيِّر التكامل — ثابت التكامل

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

المُكامَل — اقتران أصلي للاقتران $f(x)$

أمّا $\int_a^b f(x)dx$ فيُسمّى التكامل المحدود للاقتران $f(x)$، حيث $a$ الحدُّ السفلي للتكامل، و $b$ الحدُّ العلوي للتكامل.

يُمكِن إيجاد قيمة $\int_a^b f(x)dx$ للاقتران المتصل $f(x)$ على النحو الآتي:

حدود التكامل من $a$ إلى $b$. — أستعمل هذا الرمز بعد الانتهاء من عملية التكامل.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$

$$= F(b) - F(a)$$

قيمة الاقتران الأصلي عند الحدِّ العلوي. — قيمة الاقتران الأصلي عند الحدِّ السفلي.

**أتذكَّر**

إذا كان $F(x)$ اقترانًا أصليًّا للاقتران $f(x)$، فإنَّ: $F'(x) = f(x)$؛ أيْ إنَّه يُمكِن التحقُّق صحة الحلِّ بإيجاد مشتقة نتيجة التكامل. وفي هذه الحالة، يجب أنْ تكون المشتقة مساوية للمُكامَل.

بما أنَّ التكامل والاشتقاق عمليتان عكسيتان، فإنَّ ذلك يساعد على إيجاد صيغ مباشرة لتكامل اقترانات ناتجة من اشتقاق اقترانات مشهورة بصورة مباشرة، أو باستعمال قاعدة السلسلة، مثل الاقترانات الأُسِّية.

## مفهوم أساسي

### صيغ تكاملات اقترانات أُسّية

إذا كانت $k, b, a$ أعدادًا حقيقيةً، و $a \neq 0$، و $k > 0$، و $k \neq 1$، و $e$ العدد النيبيري، فإنَّ:

$$\int e^x\, dx = e^x + C \qquad \int e^{ax+b}\, dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$$

$$\int k^x\, dx = \frac{k^x}{\ln k} + C \qquad \int k^{ax+b}\, dx = \frac{k^{ax+b}}{a \ln k} + C$$

**أتذكَّر**

- $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
- $\frac{d}{dx}(e^{ax+b}) = ae^{ax+b}$
- $\frac{d}{dx}(k^x) = k^x \times \ln k$
- $\frac{d}{dx}(k^{ax+b}) = k^{ax+b} \times \ln k \times a$

حيث $k > 0$، و $k \neq 1$.

## مثال 1

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

**1** $\int 2e^{4x+3}\, dx$

$\int 2e^{4x+3}\, dx = 2 \times \frac{1}{4} e^{4x+3} + C$ تكامل الاقتران الأُسّي الطبيعي المضروب في ثابت

$= \frac{1}{2} e^{4x+3} + C$ بالتبسيط

**2** $\int_0^2 (6e^{-3x} + x^3)\, dx$

$\int_0^2 (6e^{-3x} + x^3)dx = \left(\frac{6}{-3} e^{-3x} + \frac{1}{4} x^4\right)\Big|_0^2$ تكامل الاقتران الأُسّي الطبيعي المضروب في ثابت، واقتران القوَّة

$= \left(\frac{6}{-3} e^{-3(2)} + \frac{1}{4}(2)^4\right) - \left(\frac{6}{-3} e^{-3(0)} + \frac{1}{4}(0)^4\right)$ بالتعويض

$= -2e^{-6} + 6$ بالتبسيط

**3** $\int \sqrt{e^{x+1}}\, dx$

$\int \sqrt{e^{x+1}}\, dx = \int (e^{x+1})^{1/2}\, dx$ بكتابة المُكامَل في صورة أُسّية

$= \int e^{(x+1)/2}\, dx$ باستعمال قوانين الأسس

$= 2e^{(x+1)/2} + C$ تكامل الاقتران الأُسّي الطبيعي

**أتذكَّر**

- $\int kf(x)dx = k \int f(x)\, dx$

حيث $k$ ثابت.

- $\int x^n\, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C,\ n \neq -1$

**أتذكَّر**

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين متصلين على الفترة $[a, b]$، فإنَّ:

$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx$

تنطبق هذه القاعدة أيضًا على التكاملات غير المحدودة.

4 $\int (5^x + 7)\, dx$

$$\int (5^x + 7)\, dx = \frac{5^x}{\ln 5} + 7x + C$$ تكامل الاقتران الأُسّي، وتكامل الثابت

**أتذكَّر**

يحتوي ناتج التكامل غير المحدود على الثابت $C$؛ لأنَّ مشتقة الثابت صفر. أمّا التكامل المحدود فلا يحتوي على الثابت $C$؛ لأنّه يُحذَف عند تعويض الحدِّ العلوي والحدِّ السفلي.

### أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int (5x^2 - 3e^{7x})\, dx$

b) $\int_0^{\ln 3} 8e^{4x}\, dx$

c) $\int \sqrt{e^{1-x}}\, dx$

d) $\int (3^x + 2\sqrt{x})\, dx$

## تكامل الاقترانات المثلثية

تعلَّمْتُ سابقًا إيجاد مشتقات الاقترانات المثلثية الست، وهذا يعني أنَّه يُمكِن إيجاد تكاملات الاقترانات المثلثية الناتجة من مشتقات تلك الاقترانات الست بصورة مباشرة.

**أتعلَّم**

إذا كان: $f(x) = \cos x$، فإنَّ: $f'(x) = -\sin x$، وهذا يعني أنَّ:

$\int (-\sin x)\, dx = \cos x + C$

ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$\int (\sin x)\, dx = -\cos x + C$

علمًا بأنَّه يُمكِن إيجاد بقية صيغ تكاملات الاقترانات المثلثية بالطريقة نفسها.

**مفهوم أساسي** **صيغ تكاملات اقترانات مثلثية (1)**

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C \qquad \int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

$$\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C \qquad \int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$$

$$\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + C \qquad \int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$$

أمّا الاقترانات المثلثية التي تكون زواياها في صورة: $ax + b$، حيث: $a \neq 0$، فيُمكِن إيجاد تكاملاتها على النحو الآتي:

## مفهوم أساسي

**صيغ تكاملات اقترانات مثلثية (2)**

إذا كان $b, a$ عددين حقيقيين، و $a \neq 0$، فإنَّ:

$$\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$$

$$\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$$

$$\int \sec^2(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b)+C$$

$$\int \csc^2(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b)+C$$

$$\int \sec(ax+b)\tan(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sec(ax+b)+C$$

$$\int \csc(ax+b)\cot(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\csc(ax+b)+C$$

**أتذكَّر**

جميع الاقترانات المُكاملة في الصندوق المجاور نتجت من اشتقاق الاقترانات الأصلية، باستعمال قواعد اشتقاق الاقترانات المثلثية، وقاعدة السلسلة.

### مثال 2

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

**1** $\int 2\sin(4x+3)\,dx$

$$\int 2\sin(4x+3)\,dx = -2\times\frac{1}{4}\cos(4x+3)+C$$ تكامل $\sin(ax+b)$ المضروب في ثابت

$$= -\frac{1}{2}\cos(4x+3)+C$$ بالتبسيط

**أتعلَّم**

يُمكِن التحقُّق من صحة الحلِّ بإيجاد مشتقة نتيجة التكامل، ومقارنتها بالاقتران المُكامَل.

**2** $\int (3\cos x+\sqrt[3]{x})\,dx$

$$\int (3\cos x+\sqrt[3]{x})\,dx = \int (3\cos x+x^{1/3})\,dx$$ بكتابة الجذر في صورة أُسّية

$$= 3\sin x+\frac{3}{4}x^{4/3}+C$$ تكامل $\cos x$ المضروب في ثابت، وتكامل اقتران القوَّة

$$= 3\sin x+\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+C$$ بتحويل القوَّة النسبية إلى جذر

3 $\int_0^{\pi/12} \sec^2(3x)\, dx$

تكامل $\sec^2(ax+b)$

$$\int_0^{\pi/12} \sec^2(3x)\, dx = \left(\frac{1}{3}\tan 3x\right)\Big|_0^{\pi/12}$$

بالتعويض

$$= \left(\frac{1}{3}\tan 3\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) - \left(\frac{1}{3}\tan 3(0)\right)$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{3}$$

**أتذكَّر**

لا يَلزم إضافة ثابت التكامل عند إيجاد ناتج التكامل المحدود.

### أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int \cos(3x - \pi)dx$

b) $\int (\csc^2(5x) + e^{2x})\, dx$

c) $\int_0^{\pi/3} (\sin 2x - \cos 4x)\, dx$

## المتطابقات المثلثية والتكامل

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّه يُمكِن إعادة كتابة المقادير المثلثية بصورة مكافئة باستعمال المتطابقات المثلثية، وهذا يساعد على إيجاد تكاملات بعض الاقترانات المثلثية التي لا يُمكِن إيجادها مباشرة، مثل: اقترانات الجيب، وجيب التمام، والظلّ، وظلّ التمام المرفوعة إلى أُسٍّ، أو الاقترانات المثلثية التي تكون في صورة حاصل ضرب اقتراني جيب، أو اقتراني جيب تمام، أو اقتران جيب مضروب في اقتران جيب تمام، وغير ذلك من الاقترانات المثلثية.

**أتعلَّم**

لا يُمكِنني إيجاد تكامل اقتران مثلثي مرفوع إلى أُسٍّ فردي باستعمال المتطابقات فقط، وإنَّما أحتاج إلى طرائق أُخرى سأتعلَّمها في الدرس التالي.

### مثال 3

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int \tan^2 2x\, dx$

متطابقات فيثاغورس

$$\int \tan^2 2x\, dx = \int (\sec^2 2x - 1)\, dx$$

تكامل $\sec^2(ax+b)$، وتكامل الثابت

$$= \frac{1}{2}\tan 2x - x + C$$

**2** $\int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\, dx$$ متطابقات تقليص القوّة

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi}$$ تكامل $\cos(ax+b)$، وتكامل الثابت

$$= \left(\frac{1}{2}\left(\pi - \frac{1}{2}\sin 2(\pi)\right)\right) - \left(\frac{1}{2}\left(0 - \frac{1}{2}\sin 2(0)\right)\right)$$ بالتعويض

$$= \frac{1}{2}\pi$$ بالتبسيط

**3** $\int \sin 4x \cos 5x\, dx$

$$\int \sin 4x \cos 5x\, dx = \int \frac{1}{2}\left(\sin(4x-5x) + \sin(4x+5x)\right)dx$$ متطابقات تحويل الضرب إلى جمع

$$= \int \frac{1}{2}\left(-\sin(x) + \sin(9x)\right)dx$$ بالتبسيط

$$= \frac{1}{2}\left(\cos(x) - \frac{1}{9}\cos(9x)\right) + C$$ تكامل $\sin(ax+b)$ المضروب في ثابت

**4** $\int \frac{dx}{1 - \cos x}$

$$\int \frac{dx}{1-\cos x} = \int \left(\frac{1}{1-\cos x} \times \frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right) dx$$ بضرب البسط والمقام في مُرافِق $1-\cos x$، وهو $1+\cos x$

$$= \int \frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x}\, dx$$ بالتبسيط

$$= \int \frac{1+\cos x}{\sin^2 x}\, dx$$ متطابقات فيثاغورس

$$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{\cos x}{\sin^2 x}\right) dx$$ بتوزيع المقام على البسط

$$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin x} \times \frac{\cos x}{\sin x}\right) dx$$ بتوزيع المقام على البسط

$$= \int (\csc^2 x + \csc x \cot x)\, dx$$ متطابقة المقلوب، والمتطابقات النسبية

$$= -\cot x - \csc x + C$$ تكامل $\csc^2 x$، وتكامل $\csc x \cot x$

**أتذكّر**

بما أنّه لا توجد قاعدة لإيجاد تكامل الضرب، فإنّه يتعيّن تبسيط المُكامَل إلى حدود جبرية منفصلة باستعمال المتطابقات.

**أتذكّر**

متطابقات الزاوية السالبة:

- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(-x) = \cos x$

**أتذكّر**

تعلّمْتُ سابقًا أنّه يُمكِن إعادة كتابة المقادير المثلثية بصورة لا تحوي كسرًا إذا كان مقامها في صورة: $1 \pm u$، وذلك باستعمال الضرب في المُرافِق. وتُعزى أهمية هذا الإجراء في التكامل إلى عدم وجود قاعدة لإيجاد تكامل القسمة مباشرة.

### أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int \cos^4 x \, dx$ b) $\int_0^{\pi/6} \sin 3x \sin x \, dx$ c) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

## تكاملات ينتج منها اقتران لوغاريتمي طبيعي

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ: $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$، وهذا يعني أنَّ: $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$.

وبما أنَّ $\ln x$ مُعرَّف فقط عندما $x > 0$، فإنَّ:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C \quad , \quad x > 0 \quad ......(1)$$

ولكنَّ $\ln(-x)$ مُعرَّف عندما $x < 0$.

وباستعمال قاعدة السلسلة، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}\left(\ln(-x)\right) = \frac{1}{-x} \times -1 = \frac{1}{x}$$

وهذا يعني أنَّ:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + C \quad , \quad x < 0 \quad ......(2)$$

وبدمج النتيجتين (1) و (2)، فإنَّه يُمكِن التوصُّل إلى القاعدة الآتية:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad , \quad x \neq 0$$

يُمكِن استعمال هذه القاعدة لإيجاد تكاملات مجموعة أوسع من الاقترانات، مثل الاقترانات التــي تُكتَب في صورة: $\frac{1}{ax+b}$، أو صورة: $k\frac{f'(x)}{f(x)}$؛ أيِ الاقترانـات التي يُمكِن كتابتها في صورة يكون فيها البسط أحد مضاعفات مشتقة المقام، وذلك بملاحظة أنَّ:

$$\frac{d}{dx}(\ln|f(x)|) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

**معلومة**

ابتكـر إسـحق نيوتـن (1642 - 1726م) وجوتفريد لايبنتـس (1646 - 1716م) التفاضـل والتكامـل؛ كلٌّ على حِدَة، لكنَّ الأوَّل برهن نتائجه هندسـيًّا، فـي حين استعمل الثاني طرائق جبرية ورمزية لبرهنة نتائجه.

### مفهوم أساسي

**تكاملات ينتج منها اقتران لوغاريتمي طبيعي**

إذا كان $b, a$ عددين حقيقيين، و$a \neq 0$، وكان $f(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، فإنَّ:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad , \quad x \neq 0$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C \quad , \quad x \neq -\frac{b}{a}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C, f(x) \neq 0$$

## مثال 4

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int \left(2e^x + \frac{3}{x}\right) dx$

$\int \left(2e^x + \frac{3}{x}\right) dx = 2e^x + 3\ln|x| + C$

تكامل $e^x$ المضروب في ثابت، وتكامل $\frac{1}{x}$ المضروب في ثابت

2 $\int \frac{1}{4x-1} dx$

$\int \frac{1}{4x-1} dx = \frac{1}{4}\ln|4x-1| + C$

تكامل $\frac{1}{ax+b}$

3 $\int \frac{2x^5-4}{x} dx$

$\int \frac{2x^5-4}{x} dx = \int \left(\frac{2x^5}{x} - \frac{4}{x}\right) dx$

بقسمة كل حدٍّ في البسط على المقام

$= \int \left(2x^4 - \frac{4}{x}\right) dx$

بالتبسيط

$= \frac{2}{5}x^5 - 4\ln|x| + C$

تكامل اقتران القوّة المضروب في ثابت، وتكامل $\frac{1}{x}$ المضروب في ثابت

4 $\int \frac{2x}{x^2-1} dx$

$\int \frac{2x}{x^2-1} dx = \ln|x^2-1| + C$

تكامل $\frac{f'(x)}{f(x)}$

5 $\int \frac{6x}{x^2+9} dx$

$\int \frac{6x}{x^2+9} dx = 3\int \frac{2x}{x^2+9} dx$

بإعادة كتابة الاقتران في صورة: $k\frac{f'(x)}{f(x)}$

$= 3\ln|x^2+9| + C$

تكامل $\frac{f'(x)}{f(x)}$

$= 3\ln(x^2+9) + C$

$|x^2+9| = x^2+9$

### أتذكَّر

بما أنَّه لا توجد قاعدة لتكامل القسمة، فإنَّه يتعيَّن تبسيط المُكامَل إلى حدود جبرية منفصلة.

### أتعلَّم

ألاحِظ أنَّ البسط $(2x)$ هو مشتقة المقام: $\frac{d}{dx}(x^2-1) = 2x$.

### أتعلَّم

بما أنَّ البسط $(6x)$ هو أحد مضاعفات مشتقة المقام: $\left(\frac{d}{dx}(x^2+9) = 2x\right)$، فإنَّني أُعيد كتابة $\frac{6x}{x^2+9}$ في صورة: $k\frac{f'(x)}{f(x)}$.

6 $\int \frac{\cos x}{3+2\sin x}\,dx$

$$\int \frac{\cos x}{3+2\sin x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2\times\cos x}{3+2\sin x}\,dx$$ بالضرب في 2، والقسمة على 2

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2\cos x}{3+2\sin x}\,dx$$ بالتبسيط

$$= \frac{1}{2}\ln|3+2\sin x| + C$$ تكامل $\frac{f'(x)}{f(x)}$

$$= \frac{1}{2}\ln(3+2\sin x) + C$$ $|3+2\sin x| = 3+2\sin x$

7 $\int \tan x\,dx$

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$ المتطابقات النسبية

$$= \frac{1}{-1}\int \frac{-1\times\sin x}{\cos x}\,dx$$ بالضرب في $-1$، والقسمة على $-1$

$$= -\ln|\cos x| + C$$ تكامل $\frac{f'(x)}{f(x)}$

8 $\int \sec x\,dx$

$$\int \sec x\,dx = \int \sec x \times \frac{\sec x+\tan x}{\sec x+\tan x}\,dx$$ بالضرب في $\frac{\sec x+\tan x}{\sec x+\tan x}$

$$= \int \frac{\sec^2 x+\sec x\tan x}{\sec x+\tan x}\,dx$$ باستعمال خاصية التوزيع

$$= -\ln|\sec x+\tan x| + C$$ تكامل $\frac{f'(x)}{f(x)}$

**أتحقق من فهمي** أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int \left(\sin x - \frac{5}{x}\right)dx$ b) $\int \frac{5}{3x+2}\,dx$ c) $\int \frac{x^2-7x+2}{x^2}\,dx$

d) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x}\,dx$ e) $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\,dx$ f) $\int \cot x\,dx$

g) $\int \frac{e^x}{e^x+7}\,dx$ h) $\int \csc x\,dx$

يتطلّب إيجاد تكاملات بعض الاقترانات النسبية أحيانًا إعادة كتابة المُكامَل بصورة أُخرى باستعمال القسمة، في حال كانت درجة البسط أعلى من (أو تساوي) درجة المقام. وقد يَنتج من صورة الاقتران الجديدة تكاملٌ يَنتج منه اقتران لوغاريتمي طبيعي.

**أُفكِّر**

ما مُسوِّغ عملية الضرب في 2، وعملية القسمة على 2؟

**أُفكِّر**

لماذا؟

$|3+2\sin x|=3+2\sin x$

**أُفكِّر**

هل يُمكِن كتابة هذه النتيجة في صورة أُخرى؟

**أتذكَّر**

الاقترانات النسبية هي اقترانات يُمكِن كتابتها في صورة نسبة بين كثيري حدود: $\frac{f(x)}{g(x)}$، حيث: $g(x) \neq 0$.

**أتذكَّر**

إذا كان $\frac{f(x)}{g(x)}$ اقترانًا نسبيًّا فيه درجة $f(x)$ أكبر من أو تساوي درجة $g(x)$، وكان ناتج القسمة $q(x)$، وباقي القسمة $r(x)$، فإنَّ: $\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$.

**أتذكَّر**

يُمكِنني أيضًا استعمال القسمة الطويلة بقسمة البسط على المقام.

### مثال 5

أجد: $\int \frac{x^3+x}{x-1}\,dx$.

بما أنَّ المُكامَل اقتران نسبي، درجة البسط فيه أعلى من درجة المقام، فإنَّني سأُعيد كتابته بصورة أُخرى باستعمال القسمة.

**الخطوة 1:** أَقسِم البسط على المقام.

| $\times$ | $x^2$ | $x$ | $2$ | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $x^3$ | $x^2$ | $2x$ | $2$ |
| $-1$ | $-x^2$ | $-x$ | $-2$ | |

**الخطوة 2:** أُعيد كتابة المُكامَل باستعمال نتيجة القسمة.

$$\int \frac{x^3+x}{x-1}\,dx = \int \left(x^2 + x + 2 + \frac{2}{x-1}\right) dx \qquad \frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 2\ln|x-1| + C$$

تكامل اقتران القوَّة، وتكامل $\frac{1}{ax+b}$ المضروب في ثابت

**أتحقَّق من فهمي**

أجد: $\int \frac{x^2+x+1}{x+1}\,dx$.

## تكاملات الاقترانات المُتشعِّبة

تعلَّمْتُ سابقًا بعض قواعد التكامل المحدود، مثل قاعدة تجزئة التكامل. فإذا كان $f(x)$ اقترانًا متصلًا على الفترة $[a, b]$، فإنَّ:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

يُمكِن استعمال هذه القاعدة لإيجاد التكامل المحدود لبعض الاقترانات، التي من أهمها الاقترانات المُتشعِّبة، في حال احتوت فترة التكامل على قواعد مختلفة للاقتران. ومن ثَمَّ، أُجزِّئ التكامل عند نقاط التشعُّب، ثم أجد تكامل كل قاعدة على فترتها الجزئية.

**أتذكَّر**

عند تطبيق قاعدة تجزئة التكامل، لا يُشترَط أنْ يكون $a < c < b$.

مثال 6

1 إذا كان: $f(x)=\begin{cases}12 & ,x<2\\ 3x^2 & ,x\geq 2\end{cases}$، فأجد قيمة: $\int_1^4 f(x)\,dx$.

قاعدة تجزئة التكامل
$$\int_1^4 f(x)\,dx=\int_1^2 12\,dx+\int_2^4 3x^2\,dx$$

تكامل الثابت، وتكامل اقتران القوّة
$$=12x\Big|_1^2+x^3\Big|_2^4$$

بالتعويض
$$=12(2-1)+\left((4)^3-(2)^3\right)$$

بالتبسيط
$$=68$$

**أتعلَّم**

بما أنَّ العدد 2 هو نقطة تشعُّب الاقتران، فإنّني أُجزِّئ التكامل عند هذه النقطة.

2 إذا كان: $f(x)=|x|$، فأجد قيمة: $\int_{-2}^{6} f(x)\,dx$.

**الخطوة 1:** أُعيد تعريف اقتران القيمة المُطلَقة.

$$f(x)=|x|=\begin{cases}-x & ,x<0\\ x & ,x\geq 0\end{cases}$$

**الخطوة 2:** أجد قيمة التكامل المحدود.

قاعدة تجزئة التكامل
$$\int_{-2}^{6} f(x)\,dx=\int_{-2}^{0}-x\,dx+\int_{0}^{6}x\,dx$$

تكامل اقتران القوّة
$$=-\frac{1}{2}x^2\Big|_{-2}^{0}+\frac{1}{2}x^2\Big|_0^6$$

بالتعويض
$$=-\frac{1}{2}\left((0)^2-(-2)^2\right)+\frac{1}{2}\left(6^2-0^2\right)$$

بالتبسيط
$$=20$$

**أتعلَّم**

يُطلَق على إعادة كتابة اقتران القيمة المُطلَقة في صورة اقتران مُتشعِّب إعادة تعريف اقتران القيمة المُطلَقة، ويكون ذلك بدراسة إشارة المقدار داخل القيمة المُطلَقة.

3 إذا كان: $f(x)=|4-x^2|$، فأجد قيمة: $\int_0^3 f(x)\,dx$.

**الخطوة 1:** أُعيد تعريف اقتران القيمة المُطلَقة.

$$f(x)=\left|4-x^2\right|=\begin{cases}x^2-4 & ,x\leq -2\\ 4-x^2 & ,-2<x<2\\ x^2-4 & ,x\geq 2\end{cases}$$

**الخطوة 2:** أجد قيمة التكامل المحدود.

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^2 (4 - x^2)\,dx + \int_2^3 (x^2 - 4)\,dx$$ قاعدة تجزئة التكامل

$$= (4x - \frac{1}{3}x^3)\Big|_0^2 + (\frac{1}{3}x^3 - 4x)\Big|_2^3$$ تكامل الثابت، وتكامل اقتران القوَّة

$$= \left(4(2) - \frac{1}{3}(2)^3\right) - \left(4(0) - \frac{1}{3}(0)^3\right) + \left(\frac{1}{3}(3)^3 - 4(3)\right) - \left(\frac{1}{3}(2)^3 - 4(2)\right)$$ بالتعويض

$$= \frac{23}{3}$$ بالتبسيط

### أتحقَّق من فهمي

a) إذا كان: $f(x) = \begin{cases} 1+x & , x < 1 \\ 2x & , x \geq 1 \end{cases}$، فأجد قيمة: $\int_{-1}^{3} f(x)dx$.

b) إذا كان: $f(x) = |1 - x|$، فأجد قيمة: $\int_{-2}^{2} f(x)dx$.

c) إذا كان: $f(x) = |x^2 - 1|$، فأجد قيمة: $\int_{-4}^{0} f(x)dx$.

**أتعلَّم**

عند إيجاد التكامل المحدود لاقتران مُتشعِّب، فإنَّه لا يُشترَط أنْ يكون الاقتران متصلًا عند نقاط التشعُّب. والمُهِم هو أنْ تكون قاعدة الاقتران متصلة على كل فترة جزئية من التكامل.

### تطبيقات التكامل: الشرط الأوَّلي

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ الشرط الأوَّلي هو نقطة تُحقِّق الاقتران الأصلي، ويُمكِن بتعويضها إيجاد قيمة ثابت التكامل $C$، وأنَّه يُمكِن بها إيجاد الاقتران الأصلي الوحيد الذي يُحقِّق شرط المسألة، علمًا بأنَّ الشرط الأوَّلي يُستعمَل كثيرًا لتحديد اقترانات تُنمذِج مواقف علمية وحياتية.

### مثال 7 : من الحياة

تلوُّث: يُعالَج التلوُّث في بحيرة باستعمال مضاد للبكتيريا.

إذا كان عدد الخلايا البكتيرية الضارَّة في البحيرة يتغيَّر بمُعدَّل: $N'(t) = -\frac{2000t}{1+t^2}$، حيث $N(t)$ عدد الخلايا البكتيرية لكل ملّيلتر من الماء، بعد $t$ يومًا من استعمال المضاد، فأجد $N(t)$، علمًا بأنَّ العدد الابتدائي للخلايا هو 5000 خلية لكل ملّيلتر.

**الخطوة 1:** أجد تكامل الاقتران: $N'(t)$.

$$N(t) = \int -\frac{2000t}{1+t^2}\, dt \qquad N(t) = \int N'(t)dt$$

$$= -1000 \int \frac{2t}{1+t^2}\, dt \qquad \text{بالضرب في 2، والقسمة على 2}$$

$$= -1000 \ln|1+t^2| + C \qquad \text{تكامل } \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$= -1000 \ln(1+t^2) + C \qquad |1+t^2| = 1+t^2$$

**الخطوة 2:** أجد ثابت التكامل $C$.

$$N(t) = -1000 \ln(1+t^2) + C \qquad \text{قاعدة الاقتران}$$

$$5000 = -1000 \ln(1+(0)^2) + C \qquad \text{بتعويض } t=0, N(0)=5000$$

$$5000 = C \qquad \text{بالتبسيط}$$

إذن، اقتران عدد الخلايا البكتيرية لكل مِلّيلتر من الماء بعد $t$ يومًا من استعمال المضاد هو:

$$N(t) = -1000 \ln(1+t^2) + 5000.$$

### أتحقَّق من فهمي

**تلوُّث:** تسرَّب نفط من ناقلة بحرية، مُكوِّنًا بقعة دائرية الشكل على سطح الماء، نصف قُطْرها $R(t)$ قدمًا بعد $t$ دقيقة من بَدْء التسرُّب. إذا كان نصف قُطْر الدائرة يزداد بمُعدَّل: $R'(t) = \frac{21}{0.07t+5}$، فأجد $R(t)$، علمًا بأنَّ $R=0$ عندما $t=0$.

### تطبيقات التكامل: الحركة في مسار مستقيم

من التطبيقات المُهِمَّة على الشرط الأوَّلي، إيجاد موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم إذا عُلِم اقتران السرعة المتجهة، وعُلِم شرط أوَّلي عن موقع الجسم.

يُطلَق على التغيُّر في موقع الجسم اسم **الإزاحة** (displacement). فإذا كان $s(t)$ موقع جسم عند الزمن $t$، فإنَّ الإزاحة على الفترة الزمنية $[t_1, t_2]$ هي: $s(t_2) - s(t_1)$، وقد تكون قيمتها موجبةً، أو سالبةً، أو صفرًا، تبعًا لاتجاه حركة الجسم.

يُستعمَل التكامل المحدود لإيجاد إزاحة جسم، عُلِمت سرعته المتجهة، على النحو الآتي:

**مفهوم أساسي** **الإزاحة**

إذا تحرَّك جسم في مسار مستقيم وَفق اقتران الموقع $s(t)$، فإنَّ سرعته المتجهة هي: $v(t) = s'(t)$، وإزاحته في الفترة الزمنية $[t_1, t_2]$ هي:

$$s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt \, .$$

أمّا إذا كان المطلوب إيجاد المسافة الكلية التي قطعها جسم خلال فترة زمنية فيجب تحديد الفترات الزمنية الجزئية التي تكون عندها $v(t) \leq 0$ (يتحرَّك الجسم إلى اليسار)، وتحديد الفترات الزمنية الجزئية التي تكون عندها $v(t) \geq 0$ (يتحرَّك الجسم إلى اليمين). وفي كلتا الحالتين، تُحسَب المسافة بإيجاد تكامل اقتران السرعة $|v(t)|$ على النحو الآتي:

**أتعلَّم**

المسافة هي طول المسار الذي يقطعه الجسم بصرف النظر عن الاتجاه، وقيمتها أكبر من (أو تساوي) الصفر. أمّا الإزاحة فهي التغيُّر في الموقع.


**مفهوم أساسي** **المسافة الكلية المقطوعة**

إذا تحرَّك جسم في مسار مستقيم وَفق اقتران الموقع $s(t)$، فإنَّ سرعته المتجهة هي: $v(t) = s'(t)$، والمسافة الكلية التي قطعها الجسم في الفترة الزمنية $[t_1, t_2]$ هي:

$$\int_{t_1}^{t_2} |v(t)| \, dt$$

**مثال 8**

**يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = \sin t$، حيث $t$ الزمن بالثواني، و $v$ سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية:**

**1** **إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقع الجُسَيْم بعد $\frac{\pi}{3}$ ثانية من بَدْء الحركة.**

بما أنَّ اقتران الموقع هو اقتران أصلي لاقتران السرعة المتجهة، فإنَّه يُمكِن إيجاد موقع الجُسَيْم بعد $t$ ثانية عن طريق التكامل. وبما أنَّ المطلوب هو إيجاد موقع الجُسَيْم بعد $\frac{\pi}{3}$ ثانية من بَدْء الحركة، فإنَّه يتعيَّن إيجاد تكامل: $v(t) = \sin t$.

**أتذكَّر**

اقتران الموقع هو اقتران أصلي لاقتران السرعة، واقتران السرعة هو اقتران أصلي لاقتران التسارع.

**الخطوة 1:** أجد اقتران الموقع.

بإيجاد تكامل اقتران السرعة المتجهة $s(t) = \int v(t)\, dt$

بتعويض $v(t) = \sin t$ $\quad = \int \sin t\, dt$

تكامل $\sin t$ $\quad = -\cos t + C_1$

**الخطوة 2:** أجد قيمة ثابت التكامل $C_1$.

بما أنَّ الموقع الابتدائي للجُسَيْم هو نقطة الأصل، فإنَّ $s(0) = 0$، وهذا يُعَدُّ شرطًا أوَّليًّا لإيجاد قيمة ثابت التكامل $C_1$:

اقتران الموقع $s(t) = -\cos t + C_1$

بتعويض $t = 0, s(0) = 0$ $\quad 0 = -\cos(0) + C_1$

بحلِّ المعادلة $C_1 = 1$

إذن، اقتران الموقع بعد $t$ ثانية من بَدْء الحركة هو: $s(t) = -\cos t + 1$.

**الخطوة 3:** أجد موقع الجُسَيْم بعد $\frac{\pi}{3}$ ثانية من بَدْء الحركة.

اقتران الموقع $s(t) = -\cos t + 1$

بتعويض $t = \frac{\pi}{3}$ $\quad s\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1$

بالتبسيط $\quad = \frac{1}{2}$

إذن، موقع الجُسَيْم بعد $\frac{\pi}{3}$ ثانية من بَدْء الحركة هو $\frac{1}{2}$ m

**أتعلَّم**

القيمة الموجبة للإزاحة تعني أنَّ الموقع النهائي للجُسَيْم يقع في الجهة الموجبة بالنسبة إلى الموقع الابتدائي، والقيمة السالبة للإزاحة تعني أنَّ الموقع النهائي للجُسَيْم يقع في الجهة السالبة بالنسبة إلى الموقع الابتدائي. أمّا الصفر فيعني عدم وجود إزاحة.

**2** **أجد إزاحة الجُسَيْم في الفترة $[0, 3\pi]$.**

صيغة الإزاحة $s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt$

بتعويض $v(t) = \sin t, t_1 = 0, t_2 = 3\pi$ $\quad s(3\pi) - s(0) = \int_0^{3\pi} \sin t\, dt$

تكامل $\sin t$ $\quad = -\cos t \Big|_0^{3\pi}$

بالتعويض $\quad = -(\cos(3\pi) - \cos(0))$

بالتبسيط $\quad = 2$

إذن، إزاحة الجُسَيْم هي 2 m

**3** **أجد المسافة الكلية التي قطعها الجُسَيْم في الفترة $[0, 3\pi]$.**

**الخطوة 1:** أدرس إشارة السرعة المتجهة.

أجد أصفار اقتران السرعة المتجهة بمساواة هذا الاقتران بالصفر:

$$v(t) = \sin t$$ اقتران السرعة المتجهة

$$\sin t = 0$$ بمساواة اقتران السرعة المتجهة بالصفر

$$t = 0 \quad t = \pi \quad t = 2\pi \quad t = 3\pi$$ بحلِّ المعادلة لـ $t$ في الفترة $[0, 3\pi]$

أدرس إشارة اقتران السرعة المتجهة حول أصفاره في الفترة المعطاة.

إشارة $v(t)$: +++++ (من $0$ إلى $\pi$)، ----- (من $\pi$ إلى $2\pi$)، +++++ (من $2\pi$ إلى $3\pi$)

$t$: $0$، $\pi$، $2\pi$، $3\pi$

**الخطوة 2:** أُكامِل اقتران السرعة على الفترة $[0, 3\pi]$.

تكامل اقتران السرعة

$$\int_0^{3\pi} |v(t)|dt = \int_0^{\pi} v(t)dt + \int_{\pi}^{2\pi} (-v(t))dt + \int_{2\pi}^{3\pi} v(t)dt$$

بتعويض $v(t) = \sin t$

$$= \int_0^{\pi} \sin t\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin t)dt + \int_{2\pi}^{3\pi} \sin t\,dt$$

تكامل $\sin t$

$$= (-\cos t)\Big|_0^{\pi} + \cos t\,\Big|_{\pi}^{2\pi} + (-\cos t)\Big|_{2\pi}^{3\pi}$$

بالتبسيط

$$= 2 + 2 + 2 = 6$$

إذن، المسافة الكلية التي قطعها الجُسَيْم في الفترة $[0, 3\pi]$ هي $6$ m.

**أتذكَّر**

أُعيد تعريف اقتران السرعة وَفقًا لإشارة السرعة المتجهة.

## أتحقَّق من فهمي

**يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = 3\cos t$، حيث $t$ الزمن بالثواني، و$v$ سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية:**

a) إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقع الجُسَيْم بعد $\frac{\pi}{6}$ ثانية من بَدْء الحركة.

b) أجد إزاحة الجُسَيْم في الفترة $[0, 2\pi]$.

c) أجد المسافة الكلية التي قطعها الجُسَيْم في الفترة $[0, 2\pi]$.

## أتدرّب وأحُلّ المسائل

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int (e^{2x-3} - \sqrt{x})\,dx$

2) $\int \left(e^{0.5x} - \frac{3}{e^{0.5x}}\right) dx$

3) $\int (4\sin 5x - 5\cos 4x)\,dx$

4) $\int \left(3\sec x \tan x - \frac{2}{5x}\right) dx$

5) $\int \left(\sqrt{e^x} - \frac{1}{\sqrt{e^x}}\right)^2 dx$

6) $\int (\sin(5-3x) + 2 + 4x^2)\,dx$

7) $\int (e^x + 1)^2\,dx$

8) $\int (e^{4-x} + \sin(4-x) + \cos(4-x))\,dx$

9) $\int \frac{x^4 - 6}{2x}\,dx$

10) $\int \left(3\csc^2(3x+2) + \frac{5}{x}\right) dx$

11) $\int \frac{e^x + 1}{e^x}\,dx$

12) $\int \frac{e^x}{e^x + 4}\,dx$

13) $\int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x + 4}\,dx$

14) $\int \frac{dx}{5 - \frac{x}{3}}$

15) $\int \frac{1}{1 - \sin x}\,dx$

16) $\int \sec^2 x\,(1 + e^x \cos^2 x)\,dx$

17) $\int \left(\frac{2}{x} - 2^x\right) dx$

18) $\int \sin 3x \cos 2x\,dx$

19) $\int \frac{2x+3}{3x^2 + 9x - 1}\,dx$

20) $\int \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}\,dx$

21) $\int \left(\frac{1 + \cos x}{\sin^2 x} + (\sin^2 x \csc x)\right) dx$

22) $\int (\sec x + \tan x)^2\,dx$

23) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$

24) $\int \frac{x^2}{x^3 - 3}\,dx$

25) $\int (9\cos^2 x - \sin^2 x - 6\sin x \cos x)\,dx$

26) $\int (\cos^4 x - \sin^4 x)\,dx$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

27 $\int_0^{\pi} 2\cos\frac{1}{2}x\,dx$

28 $\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx$

29 $\int_{\pi/6}^{\pi/3} 3\tan^2 x\,dx$

30 $\int_1^{e} \frac{8x}{x^2+1}\,dx$

31 $\int_0^{\pi/6} \sin 3x\cos x\,dx$

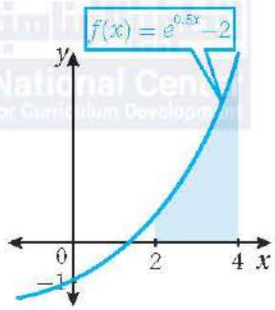
32 $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cot^2 x}{1+\cot^2 x}\,dx$

33 $\int_0^{3} (x-5^x)\,dx$

34 $\int_0^{4} |x^2-4x+3|\,dx$

35 $\int_1^{4} (3-|x-3|)\,dx$

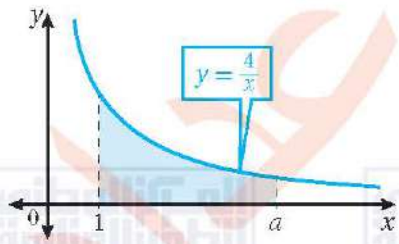
36 إذا كان: $f(x)=\begin{cases} x^2+4 & ,x<0 \\ 4-x & ,x\geq 0 \end{cases}$، فأجد قيمة: $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$




37 أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة بين المحور $x$ ومنحنى الاقتران: $f(x)=e^{0.5x}-2$ المُمثَّل في الشكل المجاور.

38 إذا كان: $\int_a^{3a} \frac{2x+1}{x}\,dx=\ln 12$، فأجد قيمة الثابت $a$، حيث: $a>0$.

39 أُثبِت أنَّ: $\int_0^{a} \frac{x}{x^2+a^2}\,dx=\ln\sqrt{2}$، حيث: $a\neq 0$.




40 يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x)=\frac{4}{x}$. إذا كانت مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$، والمحور $x$، والمستقيمين: $x=1$، و $x=a$، هي 10 وحدات مربعة، فأجد قيمة الثابت $a$.

41 إذا كان: $f(x)=\int \cos\left(\frac{1}{2}x+\pi\right)dx$، وكان: $f(\pi)=3$، فأجد $f(0)$.

42 إذا كان: $y=\int \sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)dx$، وكان: $y=1$ عندما $x=\frac{\pi}{4}$، فأُثبِت أنَّه يُمكِن كتابة $y$ في صورة: $y=\frac{1+\sin 2x}{2}$.

43 يُمثِّل الاقتران: $\frac{dy}{dx} = e^{2x} - 2e^{-x}$ ميل المماس لمنحنى الاقتران $y$. أجد قاعدة الاقتران $y$ إذا علمْتُ أنَّ منحناه يمرُّ بالنقطة $(0, 1)$.

44 إذا كان: $\int_{\pi/9}^{\pi} (9 + \sin 3x)\, dx = a\pi + b$، فأجد قيمة الثابتين النسبيين: $a$، و $b$.

45 يُمثِّل الاقتران: $f'(x) = \cos^2 x$ ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$. أجد قاعدة الاقتران $f$ إذا علمْتُ أنَّ منحناه يمرُّ بنقطة الأصل.

**يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = e^{-2t}$، حيث $t$ الزمن بالثواني، و $v$ سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَيْم هو 3 m، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:**

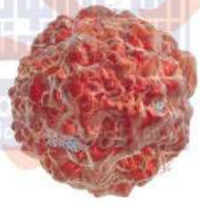
46 موقع الجُسَيْم بعد $t$ ثانية.

47 موقع الجُسَيْم بعد 100 ثانية.

**بيئة: في دراسة تناولت أحد أنواع الحيوانات المُهدَّدة بالانقراض في غابة، تَبيَّن أنَّ عدد حيوانات هذا النوع $P(t)$ يتغيَّر بمُعدَّل: $P'(t) = -0.51e^{-0.03t}$، حيث $t$ الزمن بالسنوات بعد بَدْء الدراسة:**

48 أجد قاعدة الاقتران $P(t)$ عند أيِّ زمن $t$، علمًا بأنَّ عدد حيوانات هذا النوع عند بَدْء الدراسة هو 500 حيوان.

49 أجد عدد الحيوانات بعد 10 سنوات من بَدْء الدراسة، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب عدد صحيح.



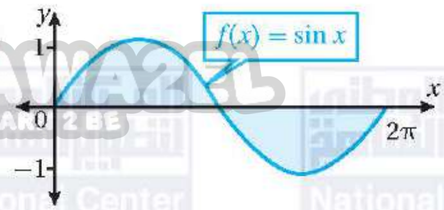
**طب: في تجربة لدواء جديد أُعطِي لمريض لديه ورم حميد، حجمه $30\ cm^3$، تَبيَّن أنَّ حجم الورم بعد $t$ يومًا من بَدْء التجربة يتغيَّر بمُعدَّل: $P'(t) = 0.15 - 0.9e^{0.006t}$ مَقيسًا بوحدة $(cm^3/day)$:**

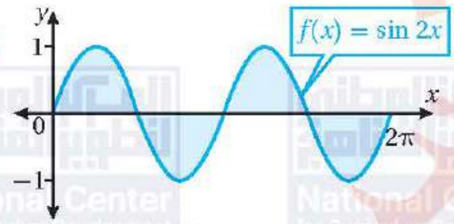
50 أجد قاعدة حجم الورم بعد $t$ يومًا من بَدْء التجربة.

51 أجد حجم الورم بعد 10 أيام من بَدْء التجربة.

## مهارات التفكير العليا

تبرير: أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلين البيانيين الآتيين، مُبرِّرًا إجابتي:

52 


53 


تحدٍّ: أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

54 $\displaystyle\int \frac{\sec x}{\sin x - \cos x}\,dx$

55 $\displaystyle\int \frac{\cot x}{2 + \sin x}\,dx$

56 $\displaystyle\int \frac{1}{x \ln x^3}\,dx$

57 تبرير: إذا كان: $\displaystyle\int_1^a \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x+3}\right) dx = 0.5 \ln 5$، فأجد قيمة الثابت $a$، حيث: $a > 0$.

58 تبرير: أُثبِت بطريقتين مختلفتين أنَّ: $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin x \sin 3x\,dx = \int_0^{\pi/4} \cos x \cos 3x\,dx - 0$.

59 تبرير: إذا كان: $\displaystyle\int_{\pi/4k}^{\pi/3k} (1 - \pi \sin kx)\,dx = \pi(7 - 6\sqrt{2})$، فأجد قيمة الثابت $k$، مُبرِّرًا إجابتي.

تحدٍّ: يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران:

$$v(t) = \begin{cases} 2t + 4 & , 0 \le t \le 6 \\ 20 - (t-8)^2 & , 6 < t \le 10 \end{cases}$$

حيث $t$ الزمن بالثواني، و$v$ سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

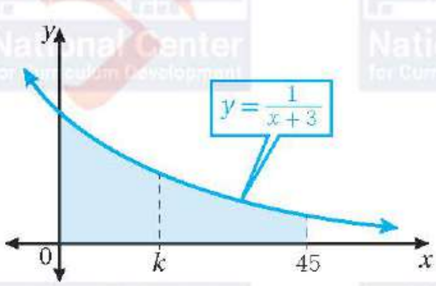
60 موقع الجُسَيْم بعد 5 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

61 موقع الجُسَيْم بعد 9 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

إرشاد: بما أنَّ اقتران الموقع هو اقتران متصل دائمًا، فإنَّ الموقع النهائي للجُسَيْم في الفترة الأولى هو الموقع الابتدائي للجُسَيْم في الفترة الثانية.

62 تحدٍّ: يُبيِّن الشكل المجاور المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $y = \frac{1}{x+3}$، والمحور $x$، والمستقيمين: $x = 0, x = 45$.

أجد قيمة $k$ التي تقسم المنطقة المُظلَّلة إلى منطقتين متساويتين في المساحة.



الدرس 2

# التكامل بالتعويض
# Integration by Substitution

**فكرة الدرس** إيجاد تكاملات باستعمال طريقة التعويض.

**المصطلحات** التكامل بالتعويض.

**مسألة اليوم** يُمثِّل الاقتران $G(t)$ الكتلة الحيوية لمجتمع أسماك في بحيرة بعد $t$ سنة من بَدْء دراستها، حيث $G$ مَقيسة بالكيلوغرام. إذا كان مُعدَّل تغيُّر الكتلة الحيوية للأسماك هو $G'(t) = \frac{60000e^{-0.6t}}{(1+5e^{-0.6t})^2}$ مَقيسًا بوحدة (kg/year)، وكانت الكتلة الحيوية للأسماك عند بَدْء الدراسة هي 25000 kg، فأجد الكتلة الحيوية المُتوقَّعة للأسماك بعد 20 سنة من بَدْء الدراسة.

## التكامل بالتعويض

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّه يُمكِن استعمال التكامل لإيجاد اقتران أصلي للاقتران المُكامَل، وذلك بالبحث عن اقتران مشتقته تعطي الاقتران المُكامَل. ولكنْ، لا يُمكِن إيجاد اقتران أصلي لبعض التكاملات مباشرة، مثل: $\int 2x\sqrt{x^2+6}\, dx$؛ لذا نلجأ إلى طرائق أُخرى للتكامل، منها طريقة **التكامل بالتعويض** (integration by substitution)، التي تتضمَّن استعمال مُتغيِّر جديد بدلًا من مُتغيِّر التكامل.

**أتذكَّر**

لا توجد قاعدة لتكامل الضرب، أو تكامل القسمة.

يُمكِن إيجاد: $\int 2x\sqrt{x^2+6}\, dx$ باستعمال مُتغيِّر جديد، وليكن $u$، بدلًا من المُتغيِّر $x$، باتِّباع الخطوات الآتية:

**الخطوة 1:** أفترض أنَّ $u$ هو المقدار أسفل الجذر التربيعي؛ أيْ إنَّ: $u = x^2 + 6$.

**الخطوة 2:** أجد مشتقة $u$، وهي: $\frac{du}{dx} = 2x$.

**الخطوة 3:** أحُلُّ المعادلة لـ $dx$: $dx = \frac{du}{2x}$.

**الخطوة 4:** أستعمل المُتغيِّر $u$ بدلًا من المُتغيِّر $x$ في التكامل.

**أتعلَّم**

عند استعمال التعويض لحلِّ التكامل، فإنَّ التكامل الجديد يجب أنْ يكون كله بدلالة المُتغيِّر الجديد.

$$\int 2x\sqrt{x^2+6}\,dx = \int 2x\sqrt{u} \times \frac{du}{2x}$$ بتعويض $u = x^2+6,\ dx = \frac{du}{2x}$

$$= \int \sqrt{u}\,du$$ بالتبسيط

$$= \int u^{1/2}\,du$$ الصورة الأُسِّية

$$= \frac{2}{3}u^{3/2} + C$$ تكامل اقترانات القوَّة

$$= \frac{2}{3}(x^2+6)^{3/2} + C$$ بتعويض $u = x^2+6$

أُلاحِظ من التكامل: $\int 2x\sqrt{x^2+6}\ dx$ أنَّ $(2x)$ هو مشتقة $(x^2+6)$. وبوجه عام، يُمكِن حلُّ أيِّ تكامل بطريقة التعويض إذا أمكن كتابته في صورة: $\int f(g(x))\, g'(x)\, dx$.

**أتعلَّم**

يُمكِنني التحقُّق من صحة إجابتي بإيجاد مشتقة الاقتران الأصلي باستعمال قاعدة السلسلة، ومقارنة الناتج بالاقتران المُكامَل:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{3}(x^2+6)^{3/2}+C\right)$$
$$= \frac{2}{3}\times\frac{3}{2}(x^2+6)^{1/2}\times 2x$$
$$= 2x\sqrt{x^2+6}$$

## مفهوم أساسي: التكامل بالتعويض للتكاملات غير المحدودة

إذا كان: $u = g(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، ومداه الفترة $I$، وكان $f$ اقترانًا متصلًا على $I$، فإنَّ:

$$\int f(g(x))\, g'(x)dx = \int f(u)\, du$$

**أتعلَّم**

بوجه عام، إذا احتوى المُكامَل على اقتران ومشتقته، فإنَّه يُمكِن حلُّ التكامل بتعويض الاقتران.

يُمكِن تلخيص خطوات حلِّ التكامل بالتعويض على النحو الآتي:

## مُلخَّص المفهوم: خطوات حلِّ التكامل بالتعويض

**الخطوة 1:** أُحدِّد التعويض $u$ الذي يُمكِن به تبسيط المُكامَل.

**الخطوة 2:** أُعبِّر عن المُكامَل بدلالة $u$ و $du$، وأحذف مُتغيِّر التكامل الأصلي ومشتقته حذفًا كاملًا، ثم أكتب المُكامَل الجديد في أبسط صورة.

**الخطوة 3:** أجد التكامل الجديد.

**الخطوة 4:** أُعبِّر عن الاقتران الأصلي الذي أوجدته في الخطوة السابقة باستعمال المُتغيِّر الأصلي عن طريق التعويض.

## مثال 1

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

**1** $\int 6x^2 (2x^3 - 3)^4 \, dx$

أفترض أنَّ: $u = 2x^3 - 3$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = 6x^2 \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{6x^2}$$

$$\int 6x^2 (2x^3 - 3)^4 \, dx = \int 6x^2 (u)^4 \times \frac{du}{6x^2}$$ بتعويض $u = 2x^3 - 3,\ dx = \frac{du}{6x^2}$

$$= \int u^4 \, du$$ بالتبسيط

$$= \frac{1}{5} u^5 + C$$ تكامل اقتران القوَّة

$$= \frac{1}{5} (2x^3 - 3)^5 + C$$ بتعويض $u = 2x^3 - 3$

**2** $\int \sin x \, e^{\cos x} \, dx$

أفترض أنَّ: $u = \cos x$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = -\sin x \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$\int \sin x \, e^{\cos x} \, dx = \int \sin x \, e^u \times \frac{du}{-\sin x}$$ بتعويض $u = \cos x,\ dx = \frac{du}{-\sin x}$

$$= \int -e^u \, du$$ بالتبسيط

$$= -e^u + C$$ تكامل الاقتران الأُسّي الطبيعي المضروب في ثابت

$$= -e^{\cos x} + C$$ بتعويض $u = \cos x$

**3** $\int \frac{\ln x}{x} \, dx$

أفترض أنَّ: $u = \ln x$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad dx = x \, du$$

### أتعلَّم

لا أنسى عكس عملية التعويض بعد إجراء التكامل.

### أتذكَّر

يُمكِنني التحقُّق من صحة إجابتي بإيجاد مشتقة نتيجة التكامل، ومقارنتها بالاقتران المُكامَل.

بإعادة كتابة المُكامَل $\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \frac{1}{x} \times \ln x\,dx$

بتعويض $u = \ln x,\ dx = x\,du$ $= \int \frac{1}{x} \times u \times x\,du$

بالتبسيط $= \int u\,du$

تكامل اقتران القوّة $= \frac{1}{2} u^2 + C$

بتعويض $u = \ln x$ $= \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C$

**أتعلّم**

كتابة المُكامَل بصورة أخرى تُسهِّل عملية التعويض.

4 $\int x^3 \cos (x^4 - 5)\,dx$

أفترض أنَّ: $u = x^4 - 5$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = 4x^3 \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{4x^3}$$

بتعويض $u = x^4 - 5,\ dx = \frac{du}{4x^3}$ $\int x^3 \cos (x^4 - 5)\,dx = \int x^3 \cos (u) \times \frac{du}{4x^3}$

بالتبسيط $= \int \frac{1}{4} \cos u\,du$

تكامل $\cos u$ المضروب في ثابت $= \frac{1}{4} \sin u + C$

بتعويض $u = x^4 - 5$ $= \frac{1}{4} \sin (x^4 - 5) + C$

5 $\int \sin^3 2x \cos 2x\,dx$

أفترض أنَّ: $u = \sin 2x$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = 2 \cos 2x \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{2 \cos 2x}$$

بتعويض $u = \sin 2x,\ dx = \frac{du}{2 \cos 2x}$ $\int \sin^3 2x \cos 2x\,dx = \int u^3 \cos 2x \times \frac{du}{2 \cos 2x}$

بالتبسيط $= \int \frac{1}{2} u^3\,du$

تكامل اقتران القوّة المضروب في ثابت $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} u^4 + C$

بتعويض $u = \sin 2x$، والتبسيط $= \frac{1}{8} \sin^4 2x + C$

**أتذكّر**

$\sin^3 2x = (\sin 2x)^3$

**أُفكِّر**

هل يُمكِن حلُّ التكامل في الفرع 5 من المثال باستعمال التعويض: $u = \cos 2x$؟ أُبرِّر إجابتي.

6) $\int \frac{5^{1/x}}{x^2}\, dx$

أفترض أنَّ: $u = \frac{1}{x}$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad dx = -x^2\, du$$

$$\int \frac{5^{1/x}}{x^2}\, dx = \int \frac{5^u}{x^2} \times -x^2\, du$$ بتعويض $u = \frac{1}{x}$ , $dx = -x^2\, du$

$$= \int -5^u\, du$$ بالتبسيط

$$= -\frac{5^u}{\ln 5} + C$$ تكامل الاقتران الأُسّي المضروب في ثابت

$$= -\frac{5^{1/x}}{\ln 5} + C$$ بتعويض $u = \frac{1}{x}$

### أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int 4x^2 \sqrt{x^3 - 5}\, dx$

b) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\, e^{\sqrt{x}}\, dx$

c) $\int \frac{(\ln x)^3}{x}\, dx$

d) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\, dx$

e) $\int \cos^4 5x \sin 5x\, dx$

f) $\int x\, 2^{x^2}\, dx$

**أتعلَّم**

لا يقتصر استعمال التكامل بالتعويض على التكاملات التي تحوي اقترانًا ومشتقته.

من المُلاحَظ أنَّ مشتقة $u$ في الأمثلة السابقة موجودة بصورة مباشرة في المُكامَل، إلّا أنَّ استعمال التكامل بالتعويض لا يقتصر على هذه الحالة؛ إذ يُمكِن استعمال التعويض لتبسيط المُكامَل وكتابته كاملًا باستعمال المُتغيِّر الجديد في بعض الحالات.

### مثال 2

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int x\sqrt{2x+5}\, dx$

أفترض أنَّ: $u = 2x + 5$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = 2 \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{2}$$

بكتابة $x$ بدلالة $u$ $\quad u = 2x + 5 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(u-5)$

بتعويض $u = 2x+5,\ dx = \frac{du}{2}$ $\quad \int x\sqrt{2x+5}\,dx = \int x \times u^{1/2} \times \frac{du}{2}$

بتعويض $x = \frac{1}{2}(u-5)$ $\quad = \int \frac{1}{2}(u-5)\,u^{1/2} \times \frac{du}{2}$

بالتبسيط $\quad = \frac{1}{4}\int (u^{3/2} - 5u^{1/2})\,du$

تكامل اقتران القوَّة $\quad = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{10}{3}u^{3/2}\right) + C$

بتعويض $u = 2x+5$ $\quad = \frac{1}{10}(2x+5)^{5/2} - \frac{5}{6}(2x+5)^{3/2} + C$

الصورة الجذرية $\quad = \frac{1}{10}\sqrt{(2x+5)^5} - \frac{5}{6}\sqrt{(2x+5)^3} + C$

**2** $\int x^5(1+x^2)^3\,dx$

أفترض أنَّ: $u = 1 + x^2$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

بكتابة $x^2$ بدلالة $u$ $\quad u = 1 + x^2 \Rightarrow x^2 = u - 1$

بتعويض $u = 1+x^2,\ dx = \frac{du}{2x}$ $\quad \int x^5(1+x^2)^3\,dx = \int x^5 \times u^3 \times \frac{du}{2x}$

بالتبسيط $\quad = \frac{1}{2}\int x^4 \times u^3\,du$

بتعويض $x^2 = u - 1$ $\quad = \frac{1}{2}\int (u-1)^2 \times u^3\,du$

بالتبسيط $\quad = \frac{1}{2}\int (u^2 - 2u + 1) \times u^3\,du$

خاصية التوزيع $\quad = \frac{1}{2}\int (u^5 - 2u^4 + u^3)\,du$

تكامل اقتران القوَّة $\quad = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}u^6 - \frac{2}{5}u^5 + \frac{1}{4}u^4\right) + C$

بتعويض $u = 1 + x^2$، والتبسيط $\quad = \frac{1}{12}(1+x^2)^6 - \frac{1}{5}(1+x^2)^5 + \frac{1}{8}(1+x^2)^4 + C$

### أتعلَّم

ألاحِظ أنَّ مشتقة $u$ هي ثابت (2)، وهذا يعني أنَّ المُتغيِّر $x$ لا يُمكِن حذفه بالتبسيط مباشرة، وإنَّما يتطلَّب تنفيذ إجراءات أُخرى؛ ما يدلُّ على وجوب كتابة $x$ بدلالة $u$.

### أتعلَّم

ألاحِظ أنَّ مشتقة $u$ هي $(2x)$، وهذا يعني أنَّ المُتغيِّر $x$ لا يُمكِن حذفه بالتبسيط المباشر، وإنَّما يتطلَّب تنفيذ إجراءات أُخرى؛ ما يدلُّ على وجوب كتابة $x^2$ بدلالة $u$.

### أُفكِّر

هل يُمكِن حلُّ التكامل في الفرع 2 من المثال بطريقة أُخرى؟ أُبرِّر إجابتي.

3 $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx$

أفترض أنَّ: $u = e^x + 1$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = e^x \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{e^x}$$

بكتابة $e^x$ بدلالة $u$ — $u = e^x + 1 \Rightarrow e^x = u - 1$

بتعويض $u = e^x+1,\ dx = \frac{du}{e^x}$ — $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx = \int \frac{e^{2x}}{u} \times \frac{du}{e^x}$

بالتبسيط — $= \int \frac{e^x}{u}\,du$

بتعويض $e^x = u - 1$ — $= \int \frac{u-1}{u}\,du$

بتوزيع المقام على كل حدٍّ في البسط — $= \int \left(1 - \frac{1}{u}\right) du$

تكامل الثابت، وتكامل $\frac{1}{x}$ — $= u - \ln|u| + C$

بتعويض $u = e^x + 1$ — $= (e^x + 1) - \ln|e^x + 1| + C$

أتذكَّر

$e^{2x} = (e^x)^2$

أُفكِّر

هل يُمكِن حلُّ الفرع 3 من المثال بطريقة أُخرى؟ أُبرِّر إجابتي.

### أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int \frac{x}{\sqrt{1+2x}}\,dx$ b) $\int x^7 (x^4 - 8)^3\,dx$ c) $\int \frac{e^{3x}}{(1-e^x)^2}\,dx$

## التكامل بالتعويض لتكاملات تحوي المقدار $\sqrt[n]{ax+b}$

يُمكِن استعمال التكامل بالتعويض عند وجود المقدار $\sqrt[n]{ax+b}$ في بعض التكاملات، وذلك بافتراض أنَّ: $u = \sqrt[n]{ax+b}$؛ بُغْيَةَ التخلُّص من الجذر.

### مثال 3

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

1 $\int \frac{dx}{x - \sqrt{x}}$

أفترض أنَّ: $u = \sqrt{x}$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

بتربيع طرفي المعادلة — $u = \sqrt{x} \Rightarrow u^2 = x$

$$2u\frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = 2u\,du$$

أُفكِّر

عند اشتقاق $u^2 = x$، فإنَّني أُطبِّق قواعد الاشتقاق الضمني.

$$\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}} = \int \frac{2u}{u^2-u}\,du$$ بتعويض $u=\sqrt{x}$, $u^2 = x$, $dx = 2u\,du$

$$= \int \frac{2}{u-1}\,du$$ بالتبسيط

$$= 2\ln|u-1| + C$$ تكامل $\frac{1}{ax+b}$

$$= 2\ln|\sqrt{x}-1| + C$$ بتعويض $u=\sqrt{x}$

**أُفكِّر**

هل يُمكِن حلُّ الفرع 1 من المثال بإخراج $\sqrt{x}$ عاملًا مشتركًا من المقام، ثم التعويض؟ أُبرِّر إجابتي.

**2** $\int x\sqrt[5]{(x+1)^2}\,dx$

أفترض أنَّ: $u=\sqrt[5]{x+1}$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$u=\sqrt[5]{x+1} \Rightarrow u^5 = x+1$$ برفع طرفي المعادلة إلى القوَّة 5

$$5u^4\frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = 5u^4\,du$$

$$\int x\sqrt[5]{(x+1)^2}\,dx = \int (u^5-1)\,u^2 \times 5u^4\,du$$ بتعويض $u=\sqrt[5]{x+1}$, $x=u^5-1$, $dx=5u^4\,du$

**أتذكَّر**

$\sqrt[5]{(x+1)^2} = \left(\sqrt[5]{(x+1)}\right)^2$

$$= 5\int (u^{11}-u^6)\,du$$ خاصية التوزيع

$$= 5\left(\frac{1}{12}u^{12} - \frac{1}{7}u^7\right) + C$$ تكامل اقتران القوَّة

$$= \frac{5}{12}\sqrt[5]{(x+1)^{12}} - \frac{5}{7}\sqrt[5]{(x+1)^7} + C$$ بتعويض $u=\sqrt[5]{x+1}$، والتبسيط

**أُفكِّر**

هل يُمكِن حلُّ الفرع 2 من المثال بطريقة أُخرى؟ أُبرِّر إجابتي.

**أتحقَّق من فهمي**

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}$

b) $\int x\sqrt[3]{(1-x)^2}\,dx$

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ الشرط الأوَّلي هو نقطة تُحقِّق الاقتران الأصلي، ويُمكِن بتعويضها إيجاد قيمة ثابت التكامل $C$، وأنَّه يُمكِن بها إيجاد الاقتران الأصلي الوحيد الذي يُحقِّق شرط المسألة.

## مثال 4 : من الحياة

زراعة: يُمثِّل الاقتران $V(t)$ سعر دونم أرض زراعية بالدينار بعد $t$ سنة من الآن. إذا كان: $V'(t) = \frac{0.4t^3}{\sqrt{0.2t^4 + 8000}}$ هو مُعدَّل تغيُّر سعر دونم الأرض، فأجد $V(t)$، علمًا بأنَّ سعر دونم الأرض الآن هو JD 5000.

**الخطوة 1:** أجد تكامل الاقتران: $V'(t)$.

$$V(t) = \int \frac{0.4t^3}{\sqrt{0.2t^4 + 8000}}\, dt \qquad V(t) = \int V'(t)\, dt$$

أفترض أنَّ: $u = 0.2t^4 + 8000$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dt} = 0.8t^3 \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{du}{0.8t^3}$$

$$V(t) = \int \frac{0.4t^3}{\sqrt{0.2t^4 + 8000}}\, dt = \int \frac{0.4t^3}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{0.8t^3}$$ بتعويض $u = 0.2t^4 + 8000,\ dt = \frac{du}{0.8t^3}$

$$= \frac{1}{2} \int u^{-1/2}\, du$$ بالتبسيط، والصورة الأُسِّية

$$= u^{1/2} + C$$ تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت

$$= \sqrt{u} + C$$ الصورة الجذرية

$$= \sqrt{0.2t^4 + 8000} + C$$ بتعويض $u = 0.2t^4 + 8000$

**الخطوة 2:** أجد ثابت التكامل $C$.

$$V(t) = \sqrt{0.2t^4 + 8000} + C$$ قاعدة الاقتران

$$5000 = \sqrt{0.2(0)^4 + 8000} + C$$ بتعويض $t = 0,\ V(0) = 5000$

$$5000 = 40\sqrt{5} + C$$ بالتبسيط

$$C = 5000 - 40\sqrt{5}$$ بحلِّ المعادلة

إذن، اقتران سعر دونم الأرض بعد $t$ سنة من الآن هو:

$$V(t) = \sqrt{0.2t^4 + 8000} + 5000 - 40\sqrt{5}.$$

### معلومة

تُستعمَل تقنية النانو لاستصلاح الأراضي الصحراوية وجعلها صالحة للزراعة، وذلك بزيادة درجة تشبُّع التربة ومحتواها من الرطوبة، وزيادة تماسكها.

### أُفكِّر

هل يُمكِن حلُّ المثال بطريقة أُخرى؟ أُبرِّر إجابتي.

**أتحقق من فهمي**

أسعار: يُمثِّل الاقتران $p(x)$ سعر قطعة (بالدينار) تُستعمَل في أجهزة الحاسوب، حيث $x$ عدد القطـع المَبيعة منها بالمئات. إذا كان: $p'(x) = \frac{-135\,x}{\sqrt{9+x^2}}$ هو مُعدَّل تغيُّر سـعر هذه القطعة، فأجد $p(x)$، علمًا بأنَّ سـعر القطعة الواحدة هـو 30 JD عندما يكون عدد القطع المَبيعة منها 400 قطعة.

**أتعلَّم**

العدد 400 في المسـألة يعني أنَّ $x = 4$.

## التكامل بالتعويض لاقترانات تتضمَّن اقتراني الجيب وجيب التمام المرفوعين إلى أسٍّ فردي

تعلَّمْتُ في الدرس السـابق إيجـاد تكامل اقتراني الجيب وجيب التمـام المرفوعين إلى أُسٍّ زوجي باستعمال متطابقات تقليص القوَّة، وتعلَّمْتُ أيضًا إيجاد تكامل الاقترانات المثلثية التي تكون في صورة حاصل ضرب اقتراني جيب، أو اقتراني جيب تمام، أو اقتران جيب في اقتران جيب تمام.

أمّـا بالنسـبة إلى التكامـلات التي تحـوي اقتراني جيب وجيـب تمام مرفوعيـن إلى أُسٍّ فردي فيُمكِن اسـتعمال التعويـض لإيجادها، إضافةً إلى اسـتعمال المتطابقة المثلثية الآتية: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

**مثال 5**

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

1) $\int \cos^3 x \, dx$

$$\int \cos^3 x \, dx = \int \cos^2 x \cos x \, dx$$ بتحليل $\cos^3 x$ إلى $\cos^2 x \cos x$

$$= \int (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx$$ متطابقات فيثاغورس

أفترض أنَّ: $u = \sin x$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = \cos x \implies dx = \frac{du}{\cos x}$$

**أتعلَّم**

إنَّ تحليـل $\cos^3 x$، واسـتعمال متطابقـة فيثاغـورس، يُسـهِّلان عملية التعويض، وظهور التكامل في الصورة الآتية: $\int f(g(x))\, g'(x) dx$.

إذن:

$$\int \cos^3 x\,dx = \int (1-\sin^2 x)\cos x\ dx$$

$$= \int (1-u^2)\cos x \times \frac{du}{\cos x}$$ بتعويض $u = \sin x,\ dx = \frac{du}{\cos x}$

$$= \int (1-u^2)\,du$$ بالتبسيط

$$= u - \frac{1}{3}u^3 + C$$ تكامل اقتران القوَّة

$$= \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$$ بتعويض $u = \sin x$

**2** $\int \cos^4 x \sin^3 x\ dx$

أفترض أنَّ: $u = \cos x$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$$

إذن:

$$\int \cos^4 x \sin^3 x\ dx = \int u^4 \sin^3 x \times \frac{du}{-\sin x}$$ بتعويض $u = \cos x,\ dx = \frac{du}{-\sin x}$

$$= -\int u^4 \sin^2 x\,du$$ بالتبسيط

$$= -\int u^4(1-\cos^2 x)\,du$$ متطابقات فيثاغورس

$$= -\int u^4(1-u^2)\,du$$ بالتعويض

$$= -\int (u^4-u^6)\,du$$ بالتبسيط

$$= -\left(\frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{7}u^7\right) + C$$ تكامل اقتران القوَّة

$$= -\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x + C$$ بتعويض $u = \cos x$

**أتعلَّم**

يُمكِن البَدْء بالتعويض، ثم استعمال متطابقة فيثاغورس.

**أُفكِّر**

هل يُمكِن حلُّ الفرع 2 من المثال بتحويل $\cos^2 x$ إلى $1-\sin^2 x$؟ أُبرِّر إجابتي.

### أتحقّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int \sin^3 x\ dx$ b) $\int \cos^5 x\ \sin^2 x\ dx$

### أتعلّم

- إذا كان أُسُّ كلٍّ من الجيب وجيب التمام زوجيًّا، فأستعمل متطابقات تقليص القوّة لحلّ التكامل.
- إذا كان أحد الاقترانين مرفوعًا لأُسٍّ فردي، فأُعوِّض الاقتران الآخر.
- إذا كان كلا الاقترانين مرفوعًا لأُسٍّ فردي، فأُعوِّض الاقتران الذي أُسّه أكبر.

## التكامل بالتعويض لاقترانات تتضمّن الظلّ، أو ظلّ التمام، أو القاطع، أو قاطع التمام

يُمكِن استعمال التكامل بالتعويض لإيجاد تكاملات تحوي اقتران الظلّ، أو اقتران ظلّ التمام، أو القاطع، أو قاطع التمام، وتكون جميعها مرفوعة إلى أُسٍّ صحيح موجب، إضافةً إلى استعمال المتطابقتين المثلثيتين: $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$، و $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$.

### مثال 6

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int \tan^3 x\, dx$

$$\int \tan^3 x\, dx = \int \tan^2 x \tan x\, dx$$ بتحليل $\tan^3 x$ إلى $\tan^2 x \tan x$

$$= \int (\sec^2 x - 1) \tan x\, dx$$ متطابقات فيثاغورس

$$= \int (\sec^2 x \tan x - \tan x)\, dx$$ خاصية التوزيع

$$= \int \sec^2 x \tan x\, dx - \int \tan x\, dx$$ تكامل الفرق

للتكامل الأوّل، أفترض أنَّ: $u = \tan x$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = \sec^2 x \implies dx = \frac{du}{\sec^2 x}$$

### أتعلّم

إنَّ تحليل $\tan^3 x$، واستعمال متطابقة فيثاغورس، يُسهِّلان عملية التعويض، وظهور التكامل في الصورة الآتية: $\int f(g(x))\, g'(x) dx$.

إذن:

$$\int \tan^3 x\,dx = \int \sec^2 x \tan x\,dx - \int \tan x\,dx$$

$$= \int \sec^2 x \times u \times \frac{du}{\sec^2 x} - \int \tan x\,dx$$ بتعويض $u = \tan x,\ dx = \frac{du}{\sec^2 x}$

$$= \int u\,du - \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$ بالتبسيط

$$= \frac{1}{2}u^2 + \ln|\cos x| + C$$ تكامل اقتران القوّة، وتكامل $\frac{f'(x)}{f(x)}$

$$= \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C$$ بتعويض $u = \tan x$

**2** $\int \cot^4 x\,dx$

$$\int \cot^4 x\,dx = \int \cot^2 x\,\cot^2 x\,dx$$ بتحليل $\cot^4 x$ إلى $\cot^2 x\ \cot^2$

$$= \int \cot^2 x\,(\csc^2 x - 1)\,dx$$ متطابقات فيثاغورس

$$= \int (\cot^2 x\,\csc^2 x - \cot^2 x)\,dx$$ خاصية التوزيع

$$= \int \cot^2 x\,\csc^2 x\,dx - \int \cot^2 x\,dx$$ تكامل الفرق

للتكامل الأوّل، أفترض أنَّ: $u = \cot x$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = -\csc^2 x \implies dx = \frac{du}{-\csc^2 x}$$

إذن:

$$\int \cot^4 x\,dx = \int \cot^2 x\,\csc^2 x\,dx - \int \cot^2 x\,dx$$

$$= \int u^2 \times \csc^2 x \times \frac{du}{-\csc^2 x} - \int (\csc^2 x - 1)\,dx$$ بتعويض $u = \cot x$، $dx = \frac{du}{-\csc^2 x}$

$$= -\int u^2 \times du - \int (\csc^2 x - 1)\,dx$$ بالتبسيط

$$= -\frac{1}{3}u^3 + \cot x + x + C$$ تكامل اقتران القوّة، وتكامل $\csc^2 x$

$$= -\frac{1}{3}\cot^3 x + \cot x + x + C$$ بتعويض $u = \cot x$

**أتعلَّم**

لحلِّ: $\int \tan^n x\,dx$ إذا كانت $n \geq 0$ فردية، أستعمل التعويض $u = \tan x$ دائمًا.

**أتعلَّم**

لحلِّ التكامل: $\int \cot^n x\,dx$، إذا كانت $n \geq 4$، حيث $n$ عدد زوجي، أكتب التكامل في الصورة الآتية:

$$\int \cot^n x\,dx = \int \cot^{n-2} x(\csc^2 x - 1)\,dx$$

**أخطاء شائعة**

يُخطِئ بعض الطلبة في أثناء الحلِّ، وذلك بعدم توزيع الإشارة السالبة التي تسبق الاقتران: $\int (\csc^2 x - 1)\,dx$ على كل حدٍّ من حدود الاقتران الأصلي الناتج.

3 $\int \sec^4 x \tan^3 x \, dx$

أفترض أنَّ: $u = \tan x$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$$

إذن:

$$\int \sec^4 x \tan^3 x \, dx = \int \sec^4 x \times u^3 \times \frac{du}{\sec^2 x}$$ بتعويض $u = \tan x, dx = \frac{du}{\sec^2 x}$

$$= \int \sec^2 x \times u^3 \, du$$ بالتبسيط

$$= \int (1 + \tan^2 x) \, u^3 \, du$$ متطابقات فيثاغورس

$$= \int (1 + u^2) u^3 \, du$$ بالتبسيط

$$= \int (u^3 + u^5) \, du$$ خاصية التوزيع

$$= \frac{1}{4} u^4 + \frac{1}{6} u^6 + C$$ تكامل اقتران القوَّة

$$= \frac{1}{4} \tan^4 x + \frac{1}{6} \tan^6 x + C$$ بتعويض $u = \tan x$

**أفكِّر**

هل يُمكِن حلُّ الفرع 3 من المثال بافتراض أنَّ: $u = \sec x$؟ أُبرِّر إجابتي.

### أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int \tan^4 x \, dx$ b) $\int \cot^5 x \, dx$ c) $\int \sec^4 x \tan^6 x \, dx$

## التكامل بالتعويض للتكاملات المحدودة

توجد طريقتان لإيجاد قيمة تكامل محدود بالتعويض، هما: إيجاد التكامل أوَّلًا بدلالة المُتغيِّر الأصلي، ثم تعويض حدود التكامل، أو تغيير حدود التكامل عند تغيير مُتغيِّر التكامل، وهذه الطريقة هي أكثر تفضيلًا.

## مفهوم أساسي

**التكامل بالتعويض للتكاملات المحدودة**

إذا كان $g'$ متصلًا على $[a, b]$، وكان $f$ متصلًا على مدى $u = g(x)$، فإنَّ:

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(x)}^{g(b)} f(u)\, du$$

### مثال 7

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int_0^{\pi/2} \cos x \sqrt{1 + \sin x}\, dx$

- أفترض أنَّ: $u = 1 + \sin x$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

- أُغيِّر حدود التكامل:

| الحدُّ العلوي | الحدُّ السفلي |
|---|---|
| $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1 + \sin \frac{\pi}{2} = 2$ | $x = 0 \Rightarrow u = 1 + \sin(0) = 1$ |

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \sqrt{1 + \sin x}\, dx = \int_1^2 \cos x \sqrt{u}\, \frac{du}{\cos x}$$ بتعويض $u = 1 + \sin x$, $dx = \frac{du}{\cos x}$

$$= \int_1^2 \sqrt{u}\, du$$ بالتبسيط

$$= \int_1^2 u^{1/2}\, du$$ الصورة الأُسِّية

$$= \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_1^2$$ تكامل اقتران القوَّة

$$= \frac{2}{3} \sqrt{u^3} \Big|_1^2$$ الصورة الجذرية

$$= \frac{2}{3} \left(\sqrt{2^3} - \sqrt{1^3}\right)$$ بالتعويض

$$= \frac{2}{3} \left(\sqrt{8} - 1\right)$$ بالتبسيط

**2** $\int_{1}^{25} \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\, dx$

- أفترض أنَّ: $u = \sqrt{2x-1}$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

بتربيع طرفي المعادلة $\quad u = \sqrt{2x-1} \Rightarrow u^2 = 2x - 1$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}(u^2 + 1)$$

$$2u\frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = u\, du$$

- أُغيِّر حدود التكامل:

| الحدُّ العلوي | الحدُّ السفلي |
|---|---|
| $x = 25 \Rightarrow u = \sqrt{2(25)-1} = 7$ | $x = 1 \Rightarrow u = \sqrt{2(1)-1} = 1$ |

بتعويض $\sqrt{2x-1} = u$, $x = \frac{1}{2}(u^2+1), dx = udu$

$$\int_{1}^{25} \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\, dx = \int_{1}^{7} \frac{1}{2} \times \frac{u^2+1}{u} \times u\, du$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{2}\int_{1}^{7} (u^2 + 1)\, du$$

تكامل اقتران القوَّة

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}u^3 + u\right)\Big|_{1}^{7}$$

بالتعويض

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{3}(7)^3 + 7\right) - \left(\frac{1}{3}(1)^3 + 1\right)\right)$$

بالتبسيط

$$= 60$$

**أتحقَّق من فهمي**

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int_{0}^{2} x(x+1)^3\, dx$

b) $\int_{0}^{\pi/3} \sec x \tan x \sqrt{\sec x + 2}\, dx$

**أفكِّر**

هل يُمكِن حلُّ الفرع 2 من المثال بطريقة أُخرى؟ أُبرِّر إجابتي.

**أتعلَّم**

لا يجوز أن تحتوي فترة حدود التكامل على أي صفر من أصفار المقام.

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int x^2 (2x^3+5)^4\, dx$

2 $\int x^2 \sqrt{x+3}\, dx$

3 $\int x(x+2)^3\, dx$

4 $\int \frac{x}{\sqrt{x+4}}\, dx$

5 $\int \sin x \cos 2x\, dx$

6 $\int \frac{e^{3x}}{e^x+1}\, dx$

7 $\int \sec^4 x\, dx$

8 $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\, dx$

9 $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\, dx$

10 $\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^2 x}\, dx$

11 $\int \frac{2e^x - 2e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2}\, dx$

12 $\int \frac{-x}{(x+1)\sqrt{x+1}}\, dx$

13 $\int x \sqrt[3]{x+10}\, dx$

14 $\int \left(\sec^2 \frac{x}{2} \tan^7 \frac{x}{2}\right) dx$

15 $\int \frac{\sec^3 x + e^{\sin x}}{\sec x}\, dx$

16 $\int (1+\sqrt[3]{\sin x}) \cos^3 x\, dx$

17 $\int \sin x \sec^5 x\, dx$

18 $\int \frac{\sin x + \tan x}{\cos^3 x}\, dx$

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

19 $\int_0^{\pi/4} \sin x \sqrt{1-\cos^2 2x}\, dx$

20 $\int_0^{\pi/2} x \sin x^2\, dx$

21 $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$

22 $\int_0^{\pi/3} \sec^2 x \tan^5 x\, dx$

23 $\int_0^2 (x-1)e^{(x-1)^2}\, dx$

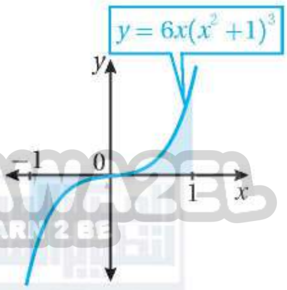
24 $\int_1^4 \frac{\sqrt{2+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

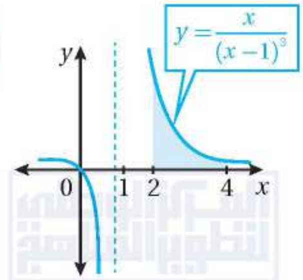
25 $\int_0^1 \frac{10\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x^3})^2}\, dx$

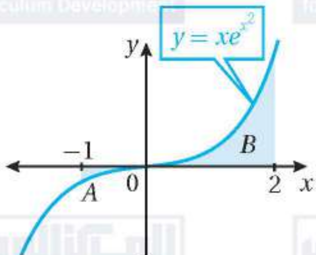
26 $\int_0^{\pi/6} 2^{\cos x} \sin x\, dx$

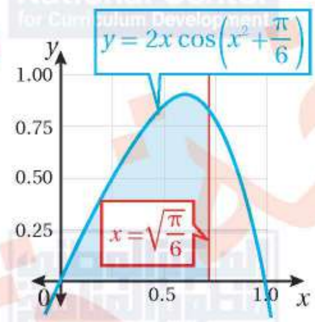
27 $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc^2 x \cot^5 x\, dx$

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلات البيانية الآتية:

28



29



30


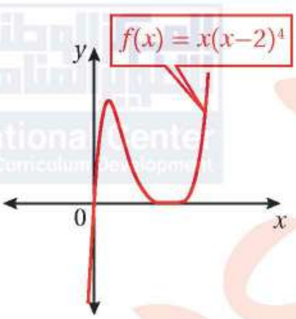

31



في كلٍّ ممّا يأتي المشـــتقة الأولى للاقتران $f(x)$ ونقطة يمرُّ بها منحنى $y = f(x)$. أســـتعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

32 $f'(x) = 2x(4x^2-10)^2\ ;\ (2, 10)$

33 $f'(x) = x^2\, e^{-0.2x^3}\ ;\ (0, \frac{3}{2})$

يُبيِّن الشكل المجاور جزءًا من منحنى الاقتران: $f(x) = x(x-2)^4$:




34 أجد إحداثيي نقطة تماس الاقتران مع المحور $x$.

35 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ والمحور $x$.

36 يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = \sin \omega t \cos^2 \omega t$، حيث $t$ الزمن بالثواني، و$v$ سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية، و$\omega$ ثابت إذا انطلق الجُسَيْم من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد $t$ ثانية.

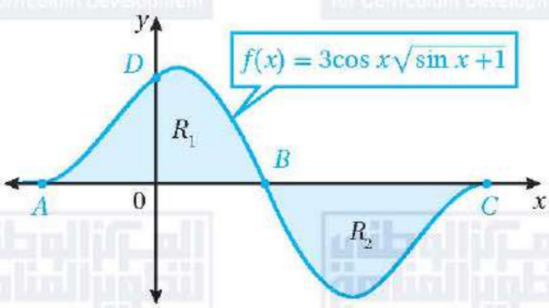
37 طــب: يُمثِّل الاقتران $C(t)$ تركيز دواء في الدم بعد $t$ دقيقة من حقنه في جسـم مريض، حيث $C$ مَقيسـة بالملّيغرام لكل سنتيمتر مُكعَّب ($mg/cm^3$). إذا كان تركيز الدواء لحظة حقنه في جسم المريض $0.5\ mg/cm^3$، وأخذ يتغيَّر بمُعدَّل $C'(t) = \frac{-0.01e^{-0.01t}}{(1+e^{-0.01t})^2}$، فأجد $C(t)$.

38 أجد قيمة $\int_{\ln 3}^{\ln 4} \frac{e^{4x}}{e^x - 2}\, dx$، ثم أكتب الإجابة بالصيغة الآتية: $\frac{a}{b} + c \ln d$، حيث: $a$، و$b$، و$c$، و$d$ ثوابت صحيحة.

39 إذا كان: $f'(x) = \tan x$، وكان: $f(3) = 5$، فأُثبِت أنَّ: $f(x) = \ln \left| \frac{\cos 3}{\cos x} \right| + 5$.

## مهارات التفكير العليا

تبرير: إذا كان الشكل المجاور يُمثِّل منحنى الاقتران: $f(x) = 3\cos x\sqrt{\sin x + 1}$، فأُجيب عن الأسئلة الآتية تباعًا:




40 أجد إحداثيي كلٍّ من النقاط: $A$، و$B$، و$C$، و$D$.

41 أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة.

42 أُبيِّن أنَّ للمنطقة $R_1$ والمنطقة $R_2$ المساحة نفسها.

43 تحدٍّ: أجد قيمة: $\int_1^{16} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}\, dx$.

44 تبرير: إذا كان $f$ اقترانًا متصلًا، فأُثبِت أنَّ: $\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\, dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\, dx$.

45 تبرير: إذا كان $a$ و$b$ عددين حقيقيين موجبين، فأُثبِت أنَّ: $\int_0^1 x^b (1-x)^a\, dx = \int_0^1 x^a (1-x)^b\, dx$.

تحدٍّ: أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

48 $\int \sin 2x\,(1+\sin x)^3\, dx$

47 $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx$

46 $\int \frac{dx}{x \ln x\,(\ln(\ln x))}$

الدرس 3

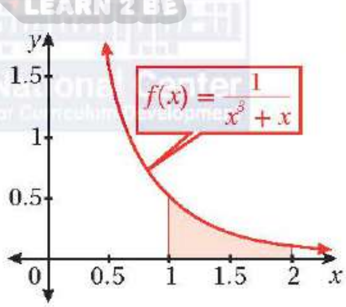
# التكامل بالكسور الجزئية
# Integration by Partial Fractions

**فكرة الدرس** إيجاد تكاملات باستعمال طريقة الكسور الجزئية.

**المصطلحات** التكامل بالكسور الجزئية.

**مسألة اليوم** يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{1}{x^3 + x}$.

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة منه.




## التكامل بالكسور الجزئية

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ الاقترانات النسبية هي اقترانات يُمكِن كتابتها في صورة نسبة بين كثيري حدود، مثل: $\frac{f(x)}{g(x)}$، حيث: $g(x) \neq 0$، ومن أمثلتها:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2-1} \quad , \quad g(x) = \frac{x^5 + 2x^3 - x}{x^2 - 4x + 8} \quad , \quad h(x) = \frac{1}{x^2 - 3x - 4}$$

تعلَّمْتُ أيضًا تجزئة المقادير النسبية؛ وهي عملية تُفْضي إلى كتابة المقدار النسبي في صورة مجموع مقادير نسبية أبسط، كلٌّ منها في صورة: $\frac{P(x)}{Q(x)}$، حيث $P$ و $Q$ كثيرا حدود لا توجد بينهما عوامل مشتركة، ودرجة $P$ أقل من درجة $Q$، وكلٌّ منهما يُسمّى كسرًا جزئيًّا.

كسر جزئي    كسر جزئي

$$\frac{x+14}{(x-4)(x+2)} = \frac{3}{x-4} + \frac{-2}{x+2}$$

تجزئة المقدار النسبي

**أتعلَّم**

تقوم طريقة التكامل بالكسور الجزئية على تحويل الاقتران النسبي إلى مجموع اقترانات نسبية أبسط.

يُمكِن استعمال تجزئة المقادير النسبية لإيجاد تكامل اقترانات نسبية بطريقة تُسمّى **التكامل بالكسور الجزئية** (integration by partial fractions).

وبما أنَّ عملية تجزئة المقادير النسبية تعتمد على عوامل المقام، فإنَّه توجد حالات للتكامل بالكسور الجزئية بناءً على نوع عوامل المقام، مثل الحالات الثلاث الآتية التي سأتعلَّمها في هذا الدرس:

- عوامل المقام كثيرات حدود خطية مختلفة.
- عوامل المقام كثيرات حدود خطية، أحدها مُكرَّر.
- عوامل المقام كثيرات حدود، أحدها تربيعي غير قابل للتحليل (مُميِّزه سالب)، وغير مُكرَّر.

### التكامل بالكسور الجزئية: عوامل المقام كثيرات حدود خطية مختلفة

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّه إذا كانت جميع عوامل كثير الحدود في مقام المقدار النسبي خطية ومختلفة، وكانت درجة البسط أقل من درجة المقام، ولا توجد بينهما عوامل مشتركة، فإنَّ كُلًّا منها يُقابِل كسرًا جزئيًّا، بسطه ثابت، ومقامه عامل خطي في صورة:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1 x + b_1} + \frac{A_2}{a_2 x + b_2} + \frac{A_3}{a_3 x + b_3} + \cdots + \frac{A_n}{a_n x + b_n}$$

أُلاحِظ أنَّ تكامل كلٍّ من الكسور الجزئية الناتجة هو اقتران لوغاريتمي طبيعي.

**أتذكَّر**

تبدأ عملية كتابة الاقتران النسبي في صورة حاصل جمع كسور جزئية عندما تكون درجة البسط أقل من درجة المقام.

**مثال 1**

أجد: $\int \frac{x-5}{x^2-x-2}\, dx$.

**الخطوة 1:** أُجزِّئ المقدار النسبي.

$$\frac{x-5}{x^2-x-2} = \frac{x-5}{(x+1)(x-2)}$$ بتحليل المقام

$$\frac{x-5}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$ بكتابة كسرين جزئيين مقاماهما العاملان الخطيان

$$x - 5 = A(x-2) + B(x+1)$$ بضرب طرفي المعادلة في (م. م. أ) لمقامي الكسرين الجزئيين

بتعويض $x = -1$

$$(-1)-5 = A((-1)-2) + B((-1)+1) \Rightarrow A = 2$$

بتعويض $x = 2$

$$(2)-5 = A((2)-2) + B((2)+1) \Rightarrow B = -1$$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار: $\frac{x-5}{x^2-x-2}$ في الصورة الآتية:

$$\frac{x-5}{x^2-x-2} = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-2}$$

**الخطوة 2:** أجد التكامل.

التكامل بالكسور الجزئية

$$\int \frac{x-5}{x^2-x-2}\,dx = \int \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-2}\right) dx$$

تكامل $\frac{1}{ax+b}$ المضروب في ثابت

$$= 2\ln|x+1| - \ln|x-2| + C$$

بالتبسيط

$$= \ln\left|\frac{(x+1)^2}{x-2}\right| + C$$

**أتذكَّر**

يُمكِن إيجاد قيمة كلٍّ من $A$ و $B$ بتعويض قِيَم مُحدَّدة للمُتغيِّر $x$، حيث إنَّ اختيار تعويض $x = -1$ يؤدّي إلى حذف المُتغيِّر $B$، وقَصْر المعادلة على مجهول واحد، هو $A$، واختيار تعويض $x = 2$ يؤدّي إلى حذف المُتغيِّر $A$، وقَصْر المعادلة على مجهول واحد، هو $B$ ما يجعل إيجاد قيمة كلٍّ من $A$ و $B$ أسهل.

### أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int \frac{x-7}{x^2-x-6}\,dx$

b) $\int \frac{3x-1}{x^2-1}\,dx$

### التكامل بالكسور الجزئية: عوامل المقام كثيرات حدود خطية، أحدها مُكرَّر

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّه إذا كان التحليل الكامل لمقام مقدار نسبي يحوي عاملًا خطيًّا مُكرَّرًا $n$ من المَرّات، فإنَّ هذا العامل يُقابِل $n$ من الكسور الجزئية التي تكون في صورة:

$$\frac{A_1}{(ax+b)^1} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \cdots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

أُلاحِظ أنَّ جميع الكسور الناتجة تُفْضي إلى اقتران تكامله اقتران لوغاريتمي طبيعي، أو تكامل: $(ax+b)^{-n}$، المضروب في ثابت.

مثال 2

أجد: $\int \frac{3x^2+2}{x^3-2x^2+x}\,dx$.

**الخطوة 1:** أُجزِّئ المقدار النسبي.

بتحليل المقام

$$\frac{3x^2+2}{x^3-2x^2+x} = \frac{3x^2+2}{x(x-1)^2}$$

بكتابة الكسور الجزئية

$$\frac{3x^2+2}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

بضرب طرفي المعادلة في (م. م. أ) لمقامات الكسور الجزئية

$$3x^2+2 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$$

بتعويض $x=0$

$$3(0)^2+2 = A(0-1)^2 + B(0)(0-1) + C(0) \Rightarrow A = 2$$

بتعويض $x=1$

$$3(1)^2+2 = A(1-1)^2 + B(1)(1-1) + C(1) \Rightarrow C = 5$$

بتعويض $x=-1$, $A=2, C=5$

$$3(-1)^2+2 = (2)((-1)-1)^2 + B(-1)((-1)-1)+(5)((-1)) \Rightarrow B = 1$$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار: $\frac{3x^2+2}{x^3-2x^2+x}$ في الصورة الآتية:

$$\frac{3x^2+2}{x^3-2x^2+x} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^2}$$

**أتذكَّر**

لإيجاد قيمة $B$، لا أُعوِّض: $x=0$، أو: $x=1$ في المعادلة؛ لأنَّ ذلك سيحذف قيمة $B$ المطلوب إيجادها، وإنَّما أُعوِّض أيَّ عدد حقيقي آخر، مثل: 2، و3، و $-1$.

**الخطوة 2:** أجد التكامل.

التكامل بالكسور الجزئية

$$\int \frac{3x^2+2}{x^3-2x^2+x}\,dx = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^2}\right) dx$$

تعريف الأُسِّ السالب

$$= \int \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} + 5(x-1)^{-2}\right) dx$$

تكامل $\frac{1}{ax+b}$ المضروب في ثابت، وتكامل $(ax+b)^n$

$$= 2\ln|x| + \ln|x-1| - 5(x-1)^{-1} + C$$

تعريف الأُسِّ السالب

$$= 2\ln|x| + \ln|x-1| - \frac{5}{(x-1)} + C$$

**أتذكَّر**

لأيِّ عدد حقيقي: $a \neq 0$، فإنَّ: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

**أتحقَّق من فهمي**

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int \frac{x+4}{(2x-1)(x-1)^2}\, dx$

b) $\int \frac{x^2-2x-4}{x^3-4x^2+4x}\, dx$

## التكامل بالكسور الجزئية: عوامل المقام كثيرات حدود، أحدها تربيعي غير قابل للتحليل، وغير مُكرَّر

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ تحليل مقام المقدار النسبي قد يحوي عاملًا تربيعيًّا غير مُكرَّر، ولا يُمكِن تحليله (مُميِّزه سالب). وفي هذه الحالة، ينتج من العامل التربيعي كسر جزئي، بسطه كثير حدود خطي في صورة: $Ax + B$، ومقامه العامل التربيعي نفسه.

**مثال 3**

أجد: $\int \frac{5x^2-4x+2}{(x-1)(x^2+2)}\, dx$.

**الخطوة 1:** أُجزِّئ المقدار النسبي.

بكتابة الكسور الجزئية

$$\frac{5x^2-4x+2}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

بضرب طرفي المعادلة في (م. م. أ) لمقامات الكسرين الجزئيين

$$5x^2-4x+2 = A(x^2+2) + (Bx+C)(x-1)$$

بتعويض $x = 1$

$$5(1)^2 - 4(1) + 2 = A((1)^2+2) + (B(1)+C)(1-1) \Longrightarrow A = 1$$

بتعويض $x = 0, A = 1$

$$5(0)^2 - 4(0) + 2 = (1)((0)^2+2) + (B(0)+C)(0-1) \Longrightarrow C = 0$$

بتعويض $x = 2, A = 1, C = 0$

$$5(2)^2 - 4(2) + 2 = (1)((2)^2+2) + (B(2)+0)(2-1) \Longrightarrow B = 4$$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار: $\frac{5x^2-4x+2}{(x-1)(x^2+2)}$ في الصورة الآتية:

$$\frac{5x^2-4x+2}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{1}{x-1} + \frac{4x}{x^2+2}$$

**الخطوة 2:** أجد التكامل.

التكامل بالكسور الجزئية

$$\int \frac{5x^2-4x+2}{(x-1)(x^2+2)}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-1}+\frac{4x}{x^2+2}\right) dx$$

تكامل $\frac{1}{ax+b}$، وتكامل $\frac{f'(x)}{f(x)}$

$$= \ln|x-1| + 2\ln|x^2+2| + C$$

### أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int \frac{3x+4}{(x-3)(x^2+4)}\,dx$

b) $\int \frac{7x^2-x+1}{x^3+1}\,dx$

## التكامل بالكسور الجزئية: درجة كثير الحدود في البسط مساوية لدرجة كثير الحدود في المقام، أو أكبر منها

تعلَّمْتُ في الأمثلة السابقة إيجاد تكاملات لاقترانات نسبية مختلفة في صورة: $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$، بحيث لا توجد عوامل مشتركة بين $P(x)$ و $Q(x)$، ودرجة $P(x)$ أقل من درجة $Q(x)$. ولكنْ، إذا كانت درجة $P(x)$ مساوية لدرجة $Q(x)$، أو أكبر منها، فإنَّه يَلزم تبسيط الاقتران النسبي بقسمة $P$ على $Q$، ثم إيجاد التكامل بالكسور الجزئية إذا لزم.

**أتذكَّر**

إذا كان $\frac{f(x)}{g(x)}$ اقترانًا نسبيًّا فيه درجة $f(x)$ أكبر من أو تساوي درجة $g(x)$، وكان ناتج القسمة $q(x)$، وباقي القسمة $r(x)$، فإنَّ: $\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$.

### مثال 4

أجد: $\int \frac{3x^4-1}{x^2-1}\,dx$.

**الخطوة 1:** أَقسِم البسط على المقام.

$$\begin{array}{r|l}
 & 3x^2+3 \\
x^2-1 & 3x^4 \qquad -1 \\
(-) & 3x^4 - 3x^2 \\
 & 3x^2 \quad -1 \\
(-) & 3x^2 \quad -3 \\
 & +2
\end{array}$$

إذن:

$$\int \frac{3x^4-1}{x^2-1}\,dx = \int \left(3x^2+3+\frac{2}{x^2-1}\right) dx$$

**الخطوة 2:** أُجزِّئ المقدار النسبي.

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$$ بكتابة الكسور الجزئية

$$2 = A(x+1)+B(x-1)$$ بضرب طرفي المعادلة في (م. م. أ) لمقامات الكسرين الجزئيين

$$2 = A(1+1)+B(1-1) \Rightarrow A = 1$$ بتعويض $x = 1$

$$2 = A(-1+1)+B(-1-1) \Rightarrow B = -1$$ بتعويض $x = -1$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار: $\frac{2}{x^2-1}$ في الصورة الآتية:

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$$

**الخطوة 3:** أجد التكامل.

$$\int \frac{3x^4-1}{x^2-1}\,dx = \int \left(3x^2+3+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right) dx$$ التكامل بالكسور الجزئية

$$= x^3+3x+\ln|x-1|-\ln|x+1|+C$$ تكامل $\frac{1}{ax+b}$ المضروب في ثابت، وتكامل اقتران القوَّة

**أتحقَّق من فهمي**

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int \frac{4x^3-5}{2x^2-x-1}\,dx$

b) $\int \frac{x^2+x-1}{x^2-x}\,dx$

## التكامل بالكسور الجزئية لتكاملات محدودة

يُمكِن إيجاد تكاملات محدودة بالكسور الجزئية، وذلك بإجراء التكامل أوَّلًا، ثم التعويض في حدود التكامل.

## مثال 5

أجد: $\int_0^2 \frac{x-2}{x^2+5x+4}\,dx$.

**الخطوة 1:** أُجزِّئ المقدار النسبي.

بتحليل المقام

$$\frac{x-2}{x^2+5x+4} = \frac{x-2}{(x+1)(x+4)}$$

بكتابة كسرين جزئيين مقاماهما العاملان الخطيان

$$\frac{x-2}{(x+1)(x+4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+4}$$

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) لمقامي الكسرين الجزئيين

$$x-2 = A(x+4) + B(x+1)$$

بتعويض $x=-1$

$$(-1)-2 = A((-1)+4)+B((-1)+1) \Rightarrow A=-1$$

بتعويض $x=-4$

$$(-4)-2 = A((-4)+4)+B((-4)+1) \Rightarrow B=2$$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار: $\frac{x-2}{x^2+5x+4}$ في الصورة الآتية:

$$\frac{x-2}{x^2+5x+4} = \frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x+4}$$

**الخطوة 2:** أجد التكامل.

التكامل بالكسور الجزئية

$$\int_0^2 \frac{x-2}{x^2+5x+4}\,dx = \int_0^2 \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x+4}\right) dx$$

تكامل $\frac{1}{ax+b}$، المضروب في ثابت

$$= (-\ln|x+1| + 2\ln|x+4|)\Big|_0^2$$

بالتعويض

$$= (-\ln|2+1| + 2\ln|2+4|)-(-\ln|0+1|+2\ln|0+4|)$$

بالتبسيط

$$= \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

**أتذكَّر**

أستعمل قانوني ضرب اللوغاريتمات وقسمتها لتبسيط الناتج.

### أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int_3^4 \frac{2x^3+x^2-2x-4}{x^2-4}\,dx$

b) $\int_5^6 \frac{3x-10}{x^2-7x+12}\,dx$

## التكامل بالكسور الجزئية، والتكامل بالتعويض

تعلَّمْتُ في الدرس السابق أنَّه يُمكِن استعمال التعويض لحلِّ تكاملات يصعب حلُّها في صورتها الأصلية. والآن سأتعلَّم كيف أنَّ عملية التعويض في بعض التكاملات قد تُفْضي إلى اقتران نسبي يُمكِن حلُّه باستعمال الكسور الجزئية.

**أتعلَّم**

لا يُمكِن البَدْء بالكسور الجزئية لحلِّ التكامل المجاور؛ لأنَّ الاقتران المُكامَل ليس اقترانًا نسبيًّا.

**مثال 6**

**أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:**

1) $\int \frac{e^x}{e^{2x}-e^x}\, dx$

**الخطوة 1:** أُعوِّض.

أفترض أنَّ: $u = e^x$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = e^x \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x} \Rightarrow dx = \frac{du}{u}$$

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}-e^x}\, dx = \int \frac{u}{u^2-u} \times \frac{du}{u}$$ بتعويض $u = e^x,\ dx = \frac{du}{u}$

$$= \int \frac{1}{u^2-u}\, du$$ بالتبسيط

**الخطوة 2:** أُجزِّئ المقدار النسبي.

$$\frac{1}{u^2-u} = \frac{1}{u(u-1)}$$ بتحليل المقام

$$\frac{1}{u(u-1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-1}$$ بكتابة كسرين جزئيين مقاماهما العاملان الخطيان

$$1 = A(u-1) + Bu$$ بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) لمقامي الكسرين الجزئيين

$$1 = A(0-1) + B(0) \Rightarrow A = -1$$ بتعويض $u = 0$

$$1 = A(1-1) + B(1) \Rightarrow B = 1$$ بتعويض $u = 1$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار: $\frac{1}{u^2-u}$ في الصورة الآتية:

$$\frac{1}{u^2-u} = \frac{-1}{u} + \frac{1}{u-1}$$

**الخطوة 3:** أجد التكامل.

$$\int \frac{1}{u^2-u}\,du = \int \left(\frac{-1}{u} + \frac{1}{u-1}\right) du$$ التكامل بالكسور الجزئية

$$= -\ln|u| + \ln|u-1| + C$$ تكامل $\frac{1}{ax+b}$، المضروب في ثابت

$$= -\ln|e^x| + \ln|e^x-1| + C$$ بتعويض $e^x = u$

$$= -x + \ln|e^x-1| + C$$ بالتبسيط

**2** $\int \frac{\sqrt{x}}{x-16}\,dx$

**الخطوة 1:** أُعوِّض.

أفترض أنَّ: $u=\sqrt{x}$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$u=\sqrt{x} \Rightarrow u^2 = x$$ بتربيع طرفي المعادلة

$$2u\frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = 2u\,du$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x-16}\,dx = \int \frac{u}{u^2-16}\,2u\,du$$ بتعويض $u=\sqrt{x},\ dx = 2u\,du$

$$= 2\int \frac{u^2}{u^2-16}\,du$$ بالتبسيط

**الخطوة 2:** أَقسِم البسط على المقام.

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline u^2-16 & u^2 \\ (-1) & u^2-16 \\ \hline & 16 \end{array}$$

إذن:

$$2\int \frac{u^2}{u^2-16}\,du = 2\int \left(1 + \frac{16}{u^2-16}\right) du$$

**الخطوة 3:** أُجزِّئ المقدار النسبي.

$$\frac{16}{u^2-16} = \frac{16}{(u+4)(u-4)}$$ بتحليل المقام

$$\frac{16}{(u+4)(u-4)} = \frac{A}{u+4} + \frac{B}{u-4}$$ بكتابة كسرين جزئيين مقاماهما العاملان الخطيان

**أُفكِّر**

هل يُمكِن حلُّ الفرع 1 من المثال 6 بطريقة أخرى؟ أُبرِّر إجابتي.

**أتذكَّر**

إذا كانت درجة البسط مساوية لدرجة المقام أو أكبر منها، فإنَّه يَلزم تجهيز الاقتران النسبي بقسمة البسط على المقام، ثم إيجاد التكامل بالكسور الجزئية إذا لزم.

$$16 = A(u-4) + B(u+4)$$ بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) لمقامي الكسرين الجزئيين

$$16 = A(-4-4)+B(-4+4) \Rightarrow A = -2$$ بتعويض $u = -4$

$$16 = A(4-4)+B(4+4) \Rightarrow B = 2$$ بتعويض $u = 4$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار: $\frac{16}{u^2-16}$ في الصورة الآتية:

$$\frac{16}{u^2-16} = \frac{-2}{u+4} + \frac{2}{u-4}$$

**الخطوة 4:** أجد التكامل.

$$2\int \left(1+\frac{16}{u^2-16}\right) du = 2\int \left(1+\frac{-2}{u+4}+\frac{2}{u-4}\right) du$$ التكامل بالكسور الجزئية

$$= 2u - 4\ln|u+4| + 4\ln|u-4| + C$$ تكامل $\frac{1}{ax+b}$، المضروب في ثابت

$$= 2\sqrt{x} - 4\ln|\sqrt{x}+4| + 4\ln|\sqrt{x}-4| + C$$ بتعويض $\sqrt{x} = u$

### أتحقق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x - 1}\, dx$

b) $\int \frac{e^x}{(e^x-1)(e^x+4)}\, dx$

## أتدرّب وأحُلّ المسائل

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int \frac{x-10}{x(x+5)}\, dx$

2) $\int \frac{2}{1-x^2}\, dx$

3) $\int \frac{4}{(x-2)(x-4)}\, dx$

4) $\int \frac{3x+4}{x^2+x}\, dx$

5) $\int \frac{x^2}{x^2-4}\, dx$

6) $\int \frac{3x-6}{x^2+x-2}\, dx$

7 $\int \frac{4x+10}{4x^2-4x-3}\,dx$

8 $\int \frac{2x^2+9x-11}{x^3+2x^2-5x-6}\,dx$

9 $\int \frac{4x}{x^2-2x-3}\,dx$

10 $\int \frac{8x^2-19x+1}{(2x+1)(x-2)^2}\,dx$

11 $\int \frac{9x^2-3x+2}{9x^2-4}\,dx$

12 $\int \frac{x^3+2x^2+2}{x^2+x}\,dx$

13 $\int \frac{x^2+x+2}{3-2x-x^2}\,dx$

14 $\int \frac{2x-4}{(x^2+4)(x+2)}\,dx$

15 $\int \frac{x^3-4x^2-2}{x^3+x^2}\,dx$

16 $\int \frac{3-x}{2-5x-12x^2}\,dx$

17 $\int \frac{x^3+6x-2}{x^4+6x^2}\,dx$

18 $\int \frac{5x-2}{(x-2)^2}\,dx$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

19 $\int_2^4 \frac{6+3x-x^2}{x^3+2x^2}\,dx$

20 $\int_{-1/3}^{1/3} \frac{9x^2+4}{9x^2-4}\,dx$

21 $\int_0^1 \frac{17-5x}{(2x+3)(2-x)^2}\,dx$

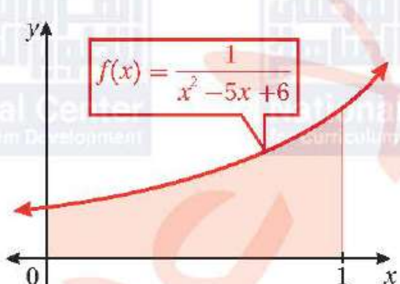
22 $\int_1^4 \frac{4}{16x^2+8x-3}\,dx$

23 $\int_3^4 \frac{5x+5}{x^2+x-6}\,dx$

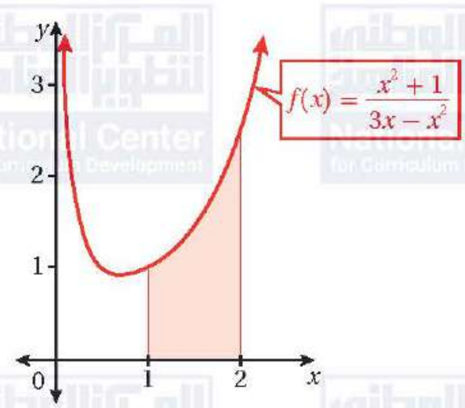
24 $\int_3^4 \frac{4}{x^3-4x^2+4x}\,dx$

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلين البيانيين الآتيين:

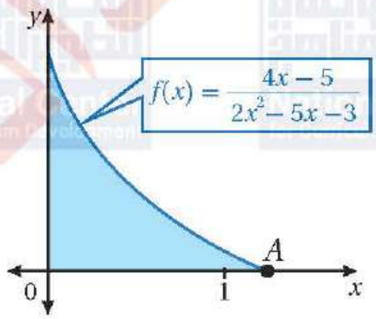
25




26




يُبيِّن الشكل المجاور جزءًا من منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{4x-5}{2x^2-5x-3}$




27 أجد إحداثيي النقطة $A$.

28 أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة.

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

29 $\int \frac{\sin x}{\cos x + \cos^2 x}\, dx$

30 $\int \frac{1}{x^2 + x\sqrt{x}}\, dx$

31 $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 3e^x + 2}\, dx$

32 $\int \frac{\cos x}{\sin x(\sin^2 x - 4)}\, dx$

## مهارات التفكير العليا

تبرير: أحُلُّ السؤالين الآتيين تباعًا:

33 أجد: $\int \frac{dx}{1+e^x}$ بطريقتين مختلفتين، إحداهما الكسور الجزئية، مُبرِّرًا إجابتي.

34 أجد: $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{1+e^x}\, dx$.

35 تبرير: أُثبِت أنَّ: $\int_4^9 \frac{5x^2 - 8x + 1}{2x(x-1)^2}\, dx = \ln\left(\frac{32}{3}\right) - \frac{5}{24}$.

36 تبرير: أُثبِت أنَّ: $\int_9^{16} \frac{2\sqrt{x}}{x-4}\, dx = 4\left(1 + \ln\left(\frac{5}{3}\right)\right)$.

37 تبرير: أُثبِت أنَّ: $\int_0^1 \frac{4x^2 + 9x + 4}{2x^2 + 5x + 3}\, dx = 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{5}{12}$.

تحدٍّ: أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

38 $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x}\, dx$

39 $\int \frac{x}{16x^4 - 1}\, dx$

40 $\int \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}\, dx$

إرشاد للسؤال 40: ما المضاعف المشترك الأصغر لدليلي الجذرين؟

الدرس 4

# التكامل بالأجزاء
# Integration by Parts

**فكرة الدرس** إيجاد تكاملات باستعمال طريقة الأجزاء.

**المصطلحات** التكامل بالأجزاء، طريقة الجدول.

**مسألة اليوم** يُمثِّل الاقتران: $S'(t) = 350 \ln (t+1)$ مُعدَّل تغيُّر المبيعات الشهرية لكرة قدم جديدة، حيث $t$ عدد الأشهر منذ طرح الكرة في الأسواق، و $S(t)$ عدد الكرات المَبيعة شهريًّا. أجد $S(t)$، علمًا بأنَّ $S(0) = 0$.

## التكامل بالأجزاء

تعلَّمْتُ سابقًا استعمال طريقتي التكامل بالتعويض، والكسور الجزئية، إلّا أنّه لا يُمكِن استعمال أيٍّ من هاتين الطريقتين لإيجاد التكاملات الآتية:

$$\int x \sin x \, dx \ , \qquad \int e^x \cos x \, dx \ , \qquad \int x^2 \ln x \, dx$$

أُلاحِظ أنَّ المُكامَل في التكاملات السابقة هو ناتج ضرب اقترانين مختلفين، يُمكِن إيجاد تكامل كلٍّ منهما على حِدَة، إلّا أنّه لا توجد قاعدة لإيجاد تكامل ضربهما بصورة مباشرة.

يُمكِن الاستفادة من قاعدة مشتقة الضرب في إيجاد طريقة لتكامل هذا النوع من الاقترانات على النحو الآتي:

إذا كان $u$ و $v$ اقترانين قابلين للاشتقاق بالنسبة إلى $x$، فإنَّ مشتقة ضربهما هي:

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

وبمُكامَلة طرفي المعادلة بالنسبة إلى $x$، تنتج المعادلة الآتية:

$$uv = \int u\frac{dv}{dx}\,dx + \int v\frac{du}{dx}\,dx \qquad \text{بمُكامَلة طرفي المعادلة}$$

$$\int u\frac{dv}{dx}\,dx = uv - \int v\frac{du}{dx}\,dx \qquad \text{بإعادة ترتيب المعادلة}$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \qquad \text{بالتبسيط}$$

**أتذكَّر**

لا يُمكِن توزيع التكامل على الضرب؛ أيْ لا يُمكِن إيجاد تكامل كل اقتران بصورة منفصلة، وضرب النتيجتين.

يُمكِن استعمال الصيغة الآتية: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ لإيجاد تكامل حاصل ضرب اقترانين، في ما يُعرَف بطريقة **التكامل بالأجزاء** (integration by parts).

**مفهوم أساسي** — التكامل بالأجزاء

إذا كان $u$ و $v$ اقترانين قابلين للاشتقاق، فإنَّ:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

يُمكِن تلخيص خطوات إيجاد التكامل بالأجزاء على النحو الآتي:

**مفهوم أساسي** — التكامل بالأجزاء

لإيجاد التكامل $\int f(x)\,dx$ بالأجزاء، أتَّبع الخطوات الأربع الآتية:

**الخطوة 1:** أختار الاقترانين: $u$ و $v$، بحيث $f(x)\,dx = u\,dv$، مراعيًا عند اختيار $u$ أنْ تكون $du$ أبسط من $u$، وأنْ يكون سهلًا إيجادُ تكامل $dv$.

**الخطوة 2:** أُنظِّم خطوات إيجاد $du$ و $v$ كما يأتي:

$$u \qquad\qquad dv$$

$$du \qquad\qquad v = \int dv$$

**الخطوة 3:** أُكمِل التكامل بإيجاد $\int v\,du$.

$$\int f(x)\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

**الخطوة 4:** أُضيف ثابت التكامل $C$ بعد إنهاء التكامل.

**أتعلَّم**

بوجه عام، لا توجد قاعدة ثابتة للحالات التي يُستعمَل فيها التكامل بالأجزاء، إلّا أنّني سأتعلَّم في هذه الأمثلة معظم الحالات التي تُستعمَل فيها هذه الطريقة.

**مثال 1**

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int x\cos x\,dx$

أفترض أنَّ: $u = x$، وأنَّ: $dv = \cos x\,dx$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$u = x \qquad\qquad dv = \cos x\,dx$$

$$du = dx \qquad\qquad v = \int \cos x\,dx = \sin x$$

**أتعلَّم**

تحتوي $dv$ دائمًا على $dx$ من التكامل الأصلي.

إذن:

صيغة التكامل بالأجزاء
$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

بالتعويض
$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx$$

تكامل $\sin x$
$$= x\sin x + \cos x + C$$

2 $\int \ln x\,dx$

أفترض أنَّ: $u = \ln x$، وأنَّ: $dv = dx$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = \int dx = x$$

إذن:

صيغة التكامل بالأجزاء
$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

بالتعويض
$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x \times \frac{1}{x}\,dx$$

بالتبسيط
$$= x\ln x - \int dx$$

تكامل 1
$$= x\ln x - x + C$$

3 $\int x(2x+7)^5\,dx$

أفترض أنَّ: $u = x$، وأنَّ: $dv = (2x+7)^5\,dx$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$u = x \qquad dv = (2x+7)^5\,dx$$

$$du = dx \qquad v = \int (2x+7)^5\,dx = \frac{1}{12}(2x+7)^6$$

إذن:

صيغة التكامل بالأجزاء
$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

بالتعويض
$$\int x(2x+7)^5\,dx = \frac{1}{12}x(2x+7)^6 - \int \frac{1}{12}(2x+7)^6\,dx$$

تكامل $(ax+b)^n$، المضروب في ثابت، والتبسيط
$$= \frac{1}{12}x(2x+7)^6 - \frac{1}{168}(2x+7)^7 + C$$

**أُفكِّر**

هل اختيار $u = \cos x$ و $dv = xdx$ يجعل التكامل أسهل أم أكثر تعقيدًا؟ أُبرِّر إجابتي.

**أتعلَّم**

إذا كان ناتج تطبيق صيغة التكامل بالأجزاء يحوي تكاملًا أكثر تعقيدًا من التكامل الأصلي، فإنَّني أبحث عن اختيار آخر لـ $u$ و $dv$.

**أُفكِّر**

هل يُمكِن حلُّ الفرع 3 من المثال بطريقة أُخرى؟

4 $\int x\,e^{3-x}\,dx$

أفترض أنَّ: $u = x$، وأنَّ: $dv = e^{3-x}$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$u = x \qquad dv = e^{3-x}\,dx$$

$$du = dx \qquad v = \int e^{3-x}\,dx = -e^{3-x}$$

إذن:

صيغة التكامل بالأجزاء $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

بالتعويض $\int x\,e^{3-x}\,dx = -x\,e^{3-x} - \int -e^{3-x}\,dx$

تكامل الاقتران الأُسّي الطبيعي $= -x\,e^{3-x} - e^{3-x} + C$

### أتعلَّم

إذا كان $g(x)$ اقترانًا خطيًّا، وكان $f(x)$ كثير حدود، فأستعمل التكامل بالأجزاء في كلٍّ من الحالات الآتية:

- $\int f(x)\,e^{g(x)}\,dx$
- $\int f(x)\,\sin(g(x))\,dx$
- $\int f(x)\,\cos(g(x))\,dx$

### أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int x \sin x\,dx$

b) $\int x^2 \ln x\,dx$

c) $\int 2x\sqrt{7-3x}\,dx$

d) $\int 3x\,e^{4x}\,dx$

### أفكِّر

ماذا يحدث لو أضفنا ثابت التكامل عند إجراء التكامل $\int dv = v$؟ أُبرِّر إجابتي.

## تكرار التكامل بالأجزاء

يتطلَّب إيجاد بعض التكاملات استعمال التكامل بالأجزاء أكثر من مرَّة كما في المثال الآتي.

### مثال 2

أجد: $\int x^2\,e^{2x}\,dx$.

أفترض أنَّ: $u = x^2$، وأنَّ: $dv = e^{2x}\,dx$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$u = x^2 \qquad dv = e^{2x}\,dx$$

$$du = 2x\,dx \qquad v = \int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}$$

إذن:

صيغة التكامل بالأجزاء $$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

بالتعويض $$\int x^2 e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} \times 2x\,dx$$

بالتبسيط $$= \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \int x e^{2x}\,dx \;\ldots (1)$$

لإيجاد التكامل: $\int x e^{2x}\,dx$، أستعمل التكامل بالأجزاء مرَّة أُخرى.

أفترض أنَّ: $u = x$، وأنَّ: $dv = e^{2x}\,dx$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$u = x \qquad dv = e^{2x}\,dx$$

$$du = dx \qquad v = \int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}$$

صيغة التكامل بالأجزاء $$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

بالتعويض $$\int x e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}x e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x}\,dx$$

تكامل الاقتران الأُسّي الطبيعي $$= \frac{1}{2}x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C \ldots (2)$$

بتعويض المعادلة (2) في المعادلة (1)، يصبح التكامل الأصلي في الصورة الآتية:

بالتعويض $$\int x^2 e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \left(\frac{1}{2}x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x}\right) + C$$

بالتبسيط $$= \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \frac{1}{2}x e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

**أتعلَّم**

أُلاحِظ أنَّ التكامل: $\int x e^{2x}\,dx$ هو أبسط من التكامل الأصلي، لكنَّه يتطلَّب استعمال طريقة التكامل بالأجزاء مرَّة أُخرى.

**أتعلَّم**

إنَّ تبديل الفرض عند استعمال التكامل بالأجزاء مرَّة أُخرى يجعل التكامل أكثر تعقيدًا؛ لذا من المُهِمّ اختيار $u = x$ و $dv = e^{2x}\,dx$ في هذا المثال.

**أتعلَّم**

عند استعمال ثابت التكامل، أكتب $C$ للدلالة على أيِّ ثابت؛ سواء كان $C$، أو $-C$.

### أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int x^2 \sin x\,dx$

b) $\int x^3 e^{4x}\,dx$

## التكاملات الدورية

إذا نتج من تكرار التكامل بالأجزاء تكاملٌ مُطابِق للتكامل الأصلي، فإن التكامل يكون دوريًا. ويُمكِن عندئذ إيجاده جبريًا بطريقة مُشابِهة لحلّ المعادلات.

### مثال 3

أجد: $\int e^x \cos x \, dx$.

أفترض أنَّ: $u = e^x$، وأنَّ: $dv = \cos x \, dx$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$u = e^x \qquad dv = \cos x \, dx$$

$$du = e^x \, dx \qquad v = \int \cos x \, dx = \sin x$$

إذن:

صيغة التكامل بالأجزاء
$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

بالتعويض
$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx \ldots (1)$$

لإيجاد التكامل: $\int e^x \sin x$، أستعمل التكامل بالأجزاء مَرَّة أُخرى.

أفترض أنَّ: $u = e^x$، و $dv = \sin x \, dx$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$u = e^x \qquad dv = \sin x \, dx$$

$$du = e^x \, dx \qquad v = \int \sin x \, dx = -\cos x$$

صيغة التكامل بالأجزاء
$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

بالتعويض
$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x - \int -e^x \cos x \, dx$$

بالتبسيط
$$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx \ldots (2)$$

**أتعلّم**

يظلُّ $e^x$ و $\cos x$ على حالهما من دون تبسيط بعد عملية الاشتقاق؛ لذا يُمكِن اختيار أيٍّ منهما ليكون $u$.

**أُفكِّر**

ما تأثير تبديل الفرض عند استعمال التكامل بالأجزاء مَرَّة أُخرى؟

بتعويض المعادلة (2) في المعادلة (1)، يصبح التكامل الأصلي في الصورة الآتية:

بالتعويض
$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x\ dx\right)$$

بالتبسيط
$$= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\ dx$$

بإضافة $\int e^x \cos x\ dx$ إلى طرفي المعادلة
$$2\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x + e^x \cos x + C$$

بقسمة طرفي المعادلة على 2
$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{1}{2} e^x \sin x + \frac{1}{2} e^x \cos x + C$$

**أتعلَّم**

إنَّ: $\int f(x)dx - \int f(x)dx = C$، وليس صفرًا.

### أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int \frac{\sin x}{e^x} dx$

b) $\int \sec^3 x\, dx$

## تكرار التكامل بالأجزاء باستعمال طريقة الجدول

تعلَّمْتُ في مثال سابق أنَّه يُمكِن إيجاد تكامل في صورة: $\int f(x)g(x)\ dx$، وذلك بتكرار استعمال التكامل بالأجزاء إذا أمكن اشتقاق $f$ بصورة مُتكرِّرة حتى يصبح 0، ومُكامَلة $g(x)$ على نحوٍ مُتكرِّر بسهولة. ولكنْ، إذا تطلَّب الأمر تكرار التكامل بالأجزاء مرّات عديدة، فإنَّ ذلك يجعل إيجاد الناتج عملية مُعقَّدة، تتطلَّب إجراء كثير من الخطوات. وفي هذه الحالة، يُمكِن استعمال **طريقة الجدول** (tabular integration) لتنظيم خطوات الحلِّ.

**أتعلَّم**

يُمكِن استعمال طريقة الجدول لإيجاد التكاملات التي صورها:

- $\int f(x) \sin ax\, dx$
- $\int f(x) \cos ax\, dx$
- $\int f(x)\,(ax+b)^n\, dx$
- $\int f(x)\, e^{ax}\ dx$

حيث: $f(x)$ كثير حدود، و $a \neq 0$، و $n \neq -1$.

### مثال 4

أجد: $\int x^3 \sin x \, dx$.

أفترض أنَّ: $f(x) = x^3$، وأنَّ: $g(x) = \sin x$، ثم أتَّبع الخطوتين الآتيتين:

**الخطوة 1:** أُنشِئ جدولًا للمشتقات والتكاملات المُتكرِّرة.

| اشتقاق $f(x)$ بصورة مُتكرِّرة | إشارة الضرب | تكامل $g(x)$ بصورة مُتكرِّرة |
|---|---|---|
| $x^3$ | $(+)$ | $\sin x$ |
| $3x^2$ | $(-)$ | $-\cos x$ |
| $6x$ | $(+)$ | $-\sin x$ |
| $6$ | $(-)$ | $\cos x$ |
| $0$ | | $\sin x$ |

أستمرُّ في الاشتقاق حتى تصبح المشتقة صفرًا.

**الخطوة 2:** أجمع نواتج ضرب الاقترانات المرتبطة بأسهم.

لحلِّ التكامل، أجمع نواتج ضرب الاقترانات المرتبطة بالأسهم، وَفقًا لإشارة العملية المُحدَّدة فوق كل سهم، كما يأتي:

$$\int x^3 \sin x \, dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + C$$

**أتحقَّق من فهمي**

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int x^4 \cos 4x \; dx$

b) $\int x^5 e^x \; dx$

**أفكِّر**

لماذا تتغيَّر الإشارة بصورة دورية في طريقة الجدول؟ أُبرِّر إجابتي، مستعينًا بحلِّ المثال 2.

**أتعلَّم**

ينتج الثابت $C$ من التكامل: $\int 0 \, dx$ الذي يظهر من السطر الأخير من الجدول.

يُمكِن نمذجة كثير من المواقف الحياتية والعلمية باستعمال اقترانات عديدة. وعند إيجاد التكامل لهذه الاقترانات تنتج قِيَم أو علاقات مُهِمَّة في تلك المواقف الحياتية والعلمية، ولكنَّ إجراء التكامل لبعض هذه الاقترانات يتطلَّب استعمال التكامل بالأجزاء.

## مثال 5 : من الحياة

**الربح الحدِّي:** يُمثِّل الاقتران: $P'(x) = 1000x^2 e^{-0.2x}$ الربح الحدِّي (بالدينار) لكل مُكيِّف يباع في إحدى الشركات المُتخصِّصة بالتكييف، حيث $x$ عدد المُكيِّفات المَبيعة، و $P(x)$ مقدار الربح بالدينار عند بيع $x$ مُكيِّفًا. أجد اقتران الربح $P(x)$، علمًا بأنَّ $P(0) = -2000$.

**أتذكَّر**

الربح الحدِّي هو مشتقة اقتران الربح.

**الخطوة 1:** أجد تكامل الاقتران: $P'(x)$.

$$P(x) = \int 1000x^2 e^{-0.2x}\, dx \qquad P(x) = \int P'(x)\, dx$$

أُلاحِظ أنَّه يُمكِن إيجاد التكامل بالأجزاء باستعمال طريقة الجدول؛ لذا أُنشِئ جدولًا للمشتقات والتكاملات المُتكرِّرة.

| اشتقاق $f(x)$ بصورة مُتكرِّرة | إشارة الضرب | تكامل $g(x)$ بصورة مُتكرِّرة |
|---|---|---|
| $1000x^2$ | $(+)$ | $e^{-0.2x}$ |
| $2000x$ | $(-)$ | $-5e^{-0.2x}$ |
| $2000$ | $(+)$ | $25e^{-0.2x}$ |
| $0$ | | $-125e^{-0.2x}$ |

لحلِّ التكامل، أجمع نواتج ضرب الاقترانات المرتبطة بالأسهم، وَفقًا لإشارة العملية المُحدَّدة فوق كل سهم، كما يأتي:

$$P(x) = \int 1000x^2 e^{-0.2x}\, dx = -5000x^2 e^{-0.2x} - 50000x\, e^{-0.2x} - 250000e^{-0.2x} + C$$

**الخطوة 2:** أجد ثابت التكامل $C$.

لإيجاد ثابت التكامل $C$، أستعمل الشرط الأوَّلي المعطى في المسألة، وهو: $P(0) = -2000$.

$$P(x) = -5000x^2 e^{-0.2x} - 50000x\, e^{-0.2x} - 250000e^{-0.2x} + C$$ قاعدة الاقتران

$$-2000 = -5000(0)^2 e^{-0.2(0)} - 50000(0)\, e^{-0.2(0)} - 250000e^{-0.2(0)} + C$$ بتعويض $x = 0$, $P(0) = -2000$

$$C = 248000$$ بحلِّ المعادلة

إذن، اقتران الربح هو:

$$P(x) = -5000x^2 e^{-0.2x} - 50000x\, e^{-0.2x} - 250000e^{-0.2x} + 248000$$

**أتحقق من فهمي**

**التكلفة الحدِّية:** يُمثِّل الاقتران: $C'(x) = (0.1x + 1)e^{0.03x}$ التكلفة الحدِّية لكل قطعة (بالدينار) تُنتَج في إحدى الشركات، حيث $x$ عدد القطع المُنتَجة، و $C(x)$ تكلفة إنتاج $x$ قطعة بالدينار. أجد اقتران التكلفة $C(x)$، علمًا بأنَّ $C(10) = 200$.

**أتذكَّر**

تُمثِّل التكلفة الحدِّية مشتقة اقتران التكلفة، وترتبط بالتكاليف التي تتغيَّر بتغيُّر مستويات الإنتاج، خلافًا للتكلفة الثابتة التي لا تتغيَّر بتغيُّر مستويات الإنتاج.

## التكامل بالأجزاء لتكاملات محدودة

يُمكِن إيجاد تكاملات محدودة باستخدام طريقة الأجزاء، وذلك بإجراء التكامل أوَّلًا، ثم التعويض في حدود التكامل باستعمال الصيغة الآتية:

$$\int_a^b u\,dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

**مثال 6**

أجد: $\int_1^2 x^3 \ln x\, dx$.

أفترض أنَّ: $u = \ln x$، وأنَّ: $dv = x^3\, dx$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$u = \ln x \qquad dv = x^3\, dx$$

$$du = \frac{1}{x}\, dx \qquad v = \int dx = \frac{1}{4} x^4$$

إذن:

$$\int_a^b u\,dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$ صيغة التكامل المحدود بالأجزاء

$$\int_1^2 x^3 \ln x\, dx = \frac{1}{4}x^4 \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{4}x^4 \times \frac{1}{x}\, dx$$ بالتعويض

$$= \frac{1}{4}x^4 \ln x \Big|_1^2 - \frac{1}{4}\int_1^2 x^3\, dx$$ بالتبسيط

$$= \frac{1}{4}x^4 \ln x \Big|_1^2 - \frac{1}{16}x^4 \Big|_1^2$$ تكامل اقتران القوَّة

$$= (4 \ln 2 - \frac{1}{4}\ln 1) - \frac{1}{16}(2^4 - 1^4)$$ بالتعويض

$$= 4 \ln 2 - \frac{15}{16}$$ بالتبسيط

**أُفكِّر**

لماذا يجب اشتقاق $\ln x$ بدلًا من مكاملتها؟ أُبرِّر إجابتي.

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\, dx$

b) $\int_0^1 x e^{-2x}\, dx$

## التكامل بالأجزاء، والتكامل بالتعويض

تعلَّمْتُ سابقًا استعمال التعويض لحلِّ تكاملات يصعب حلُّها بصورة مباشرة. والآن سأتعلَّم كيف أحُلُّ بعض التكاملات باستعمال طريقة التعويض وطريقة الأجزاء معًا.

### مثال 7

أجد الاقتران: $\int e^{\sqrt{x}}\, dx$.

**الخطوة 1:** أُعوِّض.

أفترض أنَّ: $a = \sqrt{x}$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{da}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dx = 2\sqrt{x}\, da \Rightarrow dx = 2a\, da$$

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = \int e^a \times 2a\, da$$ بتعويض $a = \sqrt{x}$, $dx = 2a\, da$

$$= \int 2a\, e^a\, da$$ بإعادة الترتيب

**الخطوة 2:** أجد ناتج التكامل بالأجزاء.

أفترض أنَّ: $u = 2a$، وأنَّ: $dv = e^a\, da$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$u = 2a$ $\qquad dv = e^a\, da$

$du = 2da$ $\qquad v = \int e^a\, da = e^a$

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$ صيغة التكامل بالأجزاء

$$\int 2a\, e^a\, da = 2ae^a - \int 2\, e^a\, da$$ بالتعويض

$$= 2ae^a - 2\, e^a + C$$ تكامل $e^a$ المضروب في ثابت

$$= 2\sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}} - 2\, e^{\sqrt{x}} + C$$ بتعويض $\sqrt{x} = a$

**أتعلَّم**

أستعمل الرمز $a$ للتعويض؛ بُغْيَةَ التفريق بينه وبين الرمز $u$ المُستعمَل في صيغة التكامل بالأجزاء.

**أتعلَّم**

بوجه عام، إذا كان أُسُّ الاقتران الأُسِّي غير خطي أو زاوية الاقتران المثلثي غير خطية، فإنَّني أبدأ بتعويضها.

### أتحقق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int (x^3 + x^5) \sin x^2 \, dx$

b) $\int x^5 e^{x^2} \, dx$

أُلاحِظ من الأمثلة السابقة أنَّ إيجاد التكامل بالأجزاء يعتمد على تحديد الاقتران المراد اشتقاقه لتبسيط التكامل. ويُبيِّن الجدول الآتي تكاملات مختلفة يُمكِن حلُّها بطريقة الأجزاء، والاختيار الأفضل لـ $u$.

### مُلخَّص المفهوم

**التكامل بطريقة الأجزاء، واختيار $u$**

| أمثلة | اختيار $u$ | الاقترانان المضروبان |
|---|---|---|
| $x \cos x$<br>$x^2 \sin x$ | $x^n$ | $x^n$، حيث $n$ عدد صحيح موجب، مضروبًا في اقتران مثلثي. |
| $xe^x$<br>$x^3 e^{-x}$ | $x^n$ | $x^n$، حيث $n$ عدد صحيح موجب، مضروبًا في اقتران أُسّي طبيعي. |
| $x \ln x$<br>$x^{2/3} \ln x$ | الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي | $x^n$، حيث $n$ عدد حقيقي، مضروبًا في اقتران لوغاريتمي طبيعي. |
| $e^x \cos x$<br>$e^{-x} \sin x$ | أيٌّ منهما | اقتران أُسّي طبيعي، مضروبًا في اقتران مثلثي. |

### أتدرّب وأحُلُّ المسائل

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1. $\int (x+1) \cos x \, dx$
2. $\int xe^{x/2} \, dx$
3. $\int (2x^2 - 1) e^{-x} \, dx$
4. $\int \ln \sqrt{x} \, dx$
5. $\int x \sin x \cos x \, dx$
6. $\int x \sec x \tan x \, dx$

7 $\int \frac{x}{\sin^2 x}\, dx$

8 $\int \frac{\ln x}{x^3}\, dx$

9 $\int 2x^2 \sec^2 x \tan x\, dx$

10 $\int (x-2)\sqrt{8-x}\, dx$

11 $\int x^3 \cos 2x\, dx$

12 $\int \frac{x}{6^x}\, dx$

13 $\int e^{-x} \sin 2x\, dx$

14 $\int \cos x \ln \sin x\, dx$

15 $\int e^x \ln(1+e^x)\, dx$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

16 $\int_0^{\pi/2} e^x \cos x\, dx$

17 $\int_1^e \ln x^2\, dx$

18 $\int_1^2 \ln(xe^x)\, dx$

19 $\int_{\pi/12}^{\pi/9} x \sec^2 3x\, dx$

20 $\int_1^e x^4 \ln x\, dx$

21 $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x\, dx$

22 $\int_0^1 x(e^{-2x} + e^{-x})\, dx$

23 $\int_0^1 \frac{xe^x}{(1+x)^2}\, dx$

24 $\int_0^1 x\, 3^x\, dx$

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

25 $\int x^3 e^{x^2}\, dx$

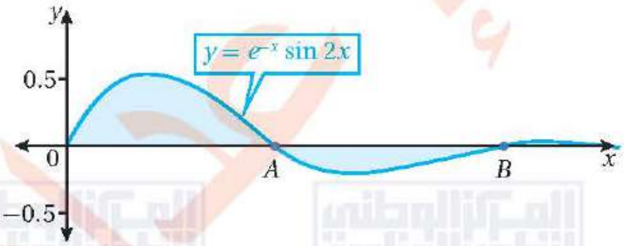
26 $\int \cos(\ln x)\, dx$

27 $\int x^3 \sin x^2\, dx$

28 $\int e^{\cos x} \sin 2x\, dx$

29 $\int \sin\sqrt{x}\, dx$

30 $\int \frac{x^3 e^{x^2}}{(x^2+1)^2}\, dx$




إذا كان الشكل المجاور يُمثِّل منحنى الاقتران: $f(x) = e^{-x} \sin 2x$، حيث: $x \geq 0$، فأُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

31 أجد إحداثيي كلٍّ من النقطة $A$، والنقطة $B$.

32 أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة.

33 يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = t\, e^{-t/2}$، حيث $t$ الزمن بالثواني، و $v$ سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم الحركة من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد $t$ ثانية.

في كلٍّ ممّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ ونقطة يمرُّ بها منحنى $y = f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

34) $f'(x) = (x+2)\sin x\,;\,(0, 2)$

35) $f'(x) = 2xe^{-x}\,;\,(0, 3)$

36) دورة تدريبية: تقدَّمت طالبة جامعية لدورة تدريبية مُتقدِّمة في الطباعة. إذا كان عدد الكلمات التي تطبعها الطالبة في الدقيقة يزداد بمُعدَّل: $N'(t) = (t+6)e^{-0.25t}$، حيث $N(t)$ عدد الكلمات التي تطبعها الطالبة في الدقيقة بعد $t$ أسبوعًا من التحاقها بالدورة، فأجد $N(t)$، علمًا بأنَّ الطالبة كانت تطبع 40 كلمة في الدقيقة عند بَدْء الدورة.

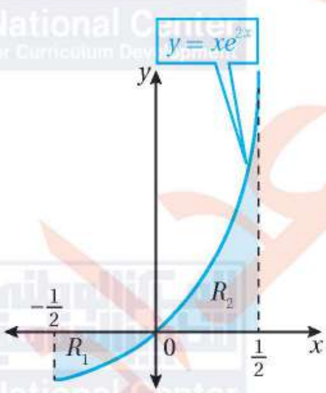
## مهارات التفكير العليا

37) تبرير: أُثبِت أنَّ: $\int_{1/2}^{3} x^2 \ln 2x \; dx = 9\ln 6 - \frac{215}{72}$

38) تبرير: أُثبِت أنَّ: $\int_{0}^{\pi/4} x \sin 5x \sin 3x \; dx = \frac{\pi - 2}{16}$.

39) تبرير: إذا كان: $\int_{0}^{a} xe^{x/2} \; dx = 6$، فأُثبِت أنَّ $a$ يُحقِّق المعادلة: $x = 2 + e^{-x/2}$.

40) تبرير: أجد: $\int (\ln x)^2 \; dx$ بطريقتين مختلفتين، مُبرِّرًا إجابتي.




تبرير: إذا كان الشكل المجاور يُمثِّل منحنى الاقتران: $y = x\,e^{2x}$، حيث: $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

41) أجد مساحة كلٍّ من المنطقة $R_1$، والمنطقة $R_2$.

42) أُثبِت أنَّ مساحة المنطقة $R_1$ إلى مساحة المنطقة $R_2$ تساوي $e$ :$(e-2)$.

تحدٍّ: أستعمل التكامل بالأجزاء لإثبات كلٍّ ممّا يأتي، حيث: $n$ عدد صحيح موجب، و $a \neq 0$:

43) $\int x^n \ln x \, dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}(-1 + (n+1)\ln x) + C$

44) $\int x^n e^{ax} \, dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1} e^{ax} \, dx$

الدرس 5

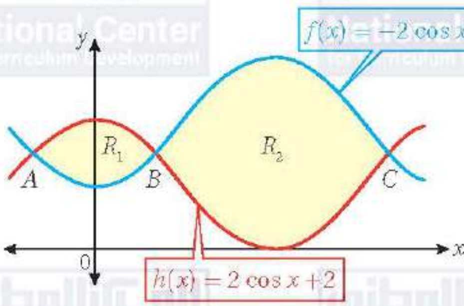
# المساحات والحجوم
# Areas and Volumes

**فكرة الدرس**

- إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي اقترانين.
- إيجاد حجم المُجسَّم الدوراني.

**مسألة اليوم**

مُعتمِدًا الشكل المجاور الذي يُبيِّن منحنيي الاقترانين: $f(x) = -2\cos x + 4$، و $h(x) = 2\cos x + 2$:

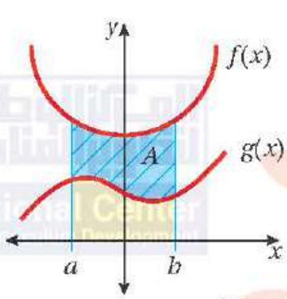



1 أجد إحداثيي كلٍّ من النقاط: $A$، و$B$، و$C$.

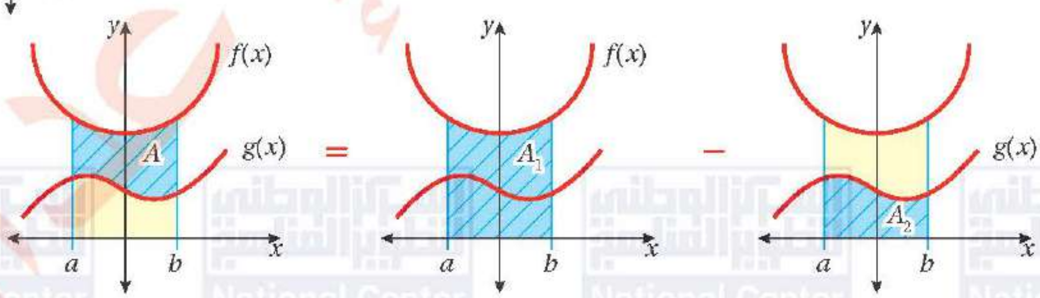
2 أجد مساحة كلٍّ من المنطقة $R_1$، والمنطقة $R_2$.

## مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي اقترانين

تعلَّمْتُ سابقًا إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران والمحور $x$. والآن سأتعلَّم إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين.




إذا أردْتُ إيجاد مساحة المنطقة $A$ المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x)$، و$g(x)$، والمستقيمين: $x = a$، و $x = b$ كما في الشكل المجاور، فإنَّني أطرح المساحة التي أسفل المنحنى السفلي $(A_2)$ من المساحة التي أسفل المنحنى العلوي $(A_1)$.




بوجه عام، فإنَّ:

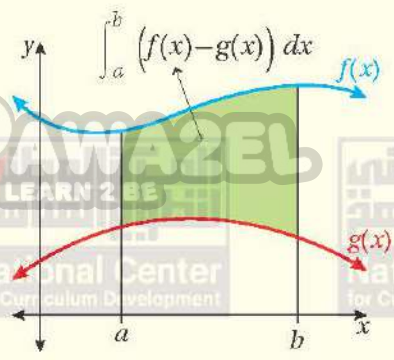
$$A = \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{A_1} - \underbrace{\int_a^b g(x)\,dx}_{A_2}$$

$$= \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$$

## مفهوم أساسي
### مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي اقترانين

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين متصلين على الفترة $[a, b]$، وكان $f(x) \geq g(x)$، فإنَّ مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x)$، و $g(x)$، والمستقيمين: $x = a$، و $x = b$، هي:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\ dx$$




**أتعلَّم**

يُمكِن إيجاد المساحة المحصورة بين منحنيي اقترانين في فترة ما من دون تحديد العلوي والسفلي منهما في تلك الفترة، باستعمال الصيغة الآتية:

$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$

عند إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي اقترانين، والمستقيمين: $x = a$، و $x = b$، يجب تحديد الإحداثي $x$ لنقاط تقاطع منحنيي الاقترانين في الفترة $[a, b]$ (إنْ وُجِدت)؛ لأنَّ وجود نقاط تقاطع بين منحنيي الاقترانين قد يتطلَّب تجزئة التكامل.

### مثال 1

**1** أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = e^x$، و $g(x) = x$، والمستقيمين: $x = 0$، و $x = 2$.

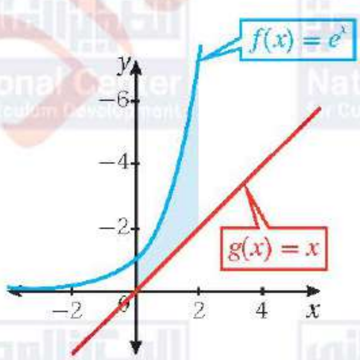
**الخطوة 1:** أجد الإحداثي $x$ لنقاط تقاطع منحنيي الاقترانين في الفترة المعطاة (إنْ وُجِدت).

لإيجاد الإحداثي $x$ لنقاط تقاطع منحنيي الاقترانين في الفترة $[0, 2]$، أُساوي أوَّلًا قاعدتي الاقترانين، ثم أحُلُّ المعادلة الناتجة:

$f(x) = g(x)$    بمساواة الاقترانين

$e^x = x$    بتعويض $f(x) = e^x, g(x) = x$

بما أنَّ $e^x \neq x$، فإنَّ منحنيي الاقترانين لا يتقاطعان كما في الشكل المجاور.



**الخطوة 2:** أجد المساحة عن طريق التكامل.

بما أنَّ منحنى الاقتران $f(x)$ هو العلوي، ومنحنى الاقتران $g(x)$ هو السفلي كما في الشكل المجاور، فإنَّه يُمكِن إيجاد مساحة المنطقة المطلوبة كالآتي:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\ dx$$ صيغة المساحة المحصورة بين منحنيي اقترانين

$$= \int_0^2 (e^x - x)\ dx$$ بتعويض $f(x) = e^x, g(x) = x$

$$= (e^x - \frac{1}{2}x^2) \Big|_0^2$$ تكامل $e^x$، وتكامل اقتران القوَّة

$$= \left(e^2 - \frac{1}{2}(2)^2\right) - \left(e^0 - \frac{1}{2}(0)^2\right)$$ بالتعويض

$$= e^2 - 3$$ بالتبسيط

إذن، المساحة هي: $e^2 - 3$ وحدة مربعة.

**2** أجد المساحة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = \cos x$، و $g(x) = \sin x$، والمستقيمين: $x = 0$، و $x = \frac{\pi}{2}$.

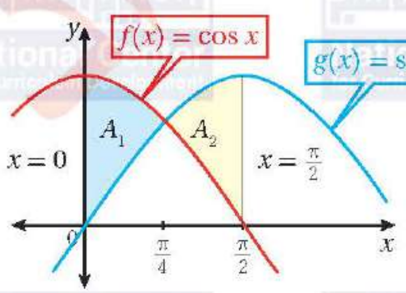
**الخطوة 1:** أجد الإحداثي $x$ لنقاط تقاطع منحنيي الاقترانين في الفترة المعطاة (إنْ وُجِدت).

لإيجاد الإحداثي $x$ لنقاط تقاطع منحنيي الاقترانين في الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$، أُساوي أوَّلًا قاعدتي الاقترانين، ثم أَحُلُّ المعادلة الناتجة:

$$f(x) = g(x)$$ بمساواة الاقترانين

$$\cos x = \sin x$$ بتعويض $f(x) = \cos x, g(x) = \sin x$

$$x = \frac{\pi}{4}$$ بحلِّ المعادلة لـ $x$ في الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$




إذن، الإحداثي $x$ لنقاط تقاطع منحنيي الاقترانين: $f(x)$، و $g(x)$ في الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$، هو: $x = \frac{\pi}{4}$، كما في الشكل المجاور.

**أتعلَّم**

يُمكِن تحديد الاقتران العلوي والاقتران السفلي في فترة لا يتقاطع فيها المنحنيان دون تمثيلهما بيانيًّا عن طريق تعويض إحدى قِيَم المُتغيِّر $x$ في تلك الفترة في كلا الاقترانين، ومقارنة صورتيهما.

**الخطوة 2:** أجد المساحة عن طريق التكامل.

يُبيِّن الشــكل المجاور أنَّ منحنى الاقتران $f(x)$ هو العلوي، وأنَّ منحنى الاقتران $g(x)$ هو السفلي في الفترة $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$، ويُبيِّن أيضًا أنَّ منحنى الاقتران $g(x)$ هو العلوي، وأنَّ منحنى الاقتران $f(x)$ هو السفلي في الفترة $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

ومن ثَمَّ، فإنَّ مساحة المنطقة المطلوبة هي مجموع مساحة كلٍّ من المنطقة $A_1$، والمنطقة $A_2$:

$$A = A_1 + A_2$$ مساحة المنطقة المطلوبة

$$= \int_0^{\pi/4} (f(x)-g(x))\, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (g(x)-f(x))\, dx$$ صيغة المساحة المحصورة بين منحنيي اقترانين

$$= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin x - \cos x)\, dx$$ بتعويض $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$

$$= (\sin x + \cos x)\Big|_0^{\pi/4} + (-\cos x - \sin x)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}$$ تكامل $\cos x$، وتكامل $\sin x$

$$= \left(\left(\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\right)-(\sin 0+\cos 0)\right)+\left(\left(-\cos\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}\right)-\left(-\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)$$ بالتعويض

$$= 2\sqrt{2} - 2$$ بالتبسيط

إذن، المساحة هي: $2\sqrt{2} - 2$ وحدة مربعة.

**أتحقَّق من فهمي**

a) أجد مســاحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = \sqrt{x}$، و $g(x) = x^2 + 1$، والمســتقيمين: $x = 0$، و $x = 3$.

b) أجد المســاحة المحصورة بين منحنيي الاقترانيــن: $f(x) = \sin x$، و $g(x) = 2-\sin x$، والمســتقيمين: $x = 0$، و $x = \pi$.

أُلاحِظ أنَّ المنطقة المطلوب إيجاد مســاحتها بين المنحنيين في المثال السابق محدودة بمستقيمين معطيين، هما: $x = a$، و $x = b$. ولكنْ، إذا كانت هذه المنطقة محصورة فقط بين منحنيين متقاطعين من دون تحديد مُســبَق للحدود، فإنَّ حدود التكامل ستكون ضمن قِيَم $x$ التي يتقاطع عندها المنحنيان.

## مثال 2

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = \frac{1}{2}x^3$، و $g(x) = 4x - x^2$،
في الربع الأوَّل من المستوى الإحداثي.

**الخطوة 1:** أجد الإحداثي $x$ لنقاط تقاطع منحنيي الاقترانين.

لإيجاد الإحداثي $x$ لنقاط تقاطع منحنيي الاقترانين، أُساوي أوَّلًا قاعدتي الاقترانين، ثم أَحُلُّ المعادلة الناتجة:

$$f(x) = g(x)$$ بمساواة الاقترانين

$$\frac{1}{2}x^3 = 4x - x^2$$ بتعويض $f(x) = \frac{1}{2}x^3, g(x) = 4x - x^2$

$$x^3 = 8x - 2x^2$$ بالضرب في 2

$$x^3 + 2x^2 - 8x = 0$$ بإعادة ترتيب المعادلة

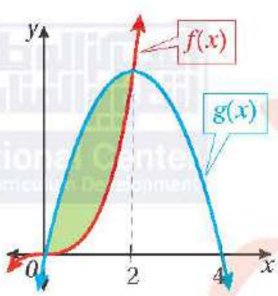
$$x(x^2 + 2x - 8) = 0$$ بإخراج $x$ عاملًا مشتركًا

$$x(x-2)(x+4) = 0$$ بالتحليل

$$x = 0 \quad \text{or} \quad x - 2 = 0 \quad \text{or} \quad x + 4 = 0$$ خاصية الضرب الصفري

$$x = 0 \qquad x = 2 \qquad x = -4$$ بحلِّ كل معادلة

بما أنَّ المساحة المطلوبة تقع في الربع الأوَّل من المستوى الإحداثي، فإنَّ الإحداثي $x$ لنقاط تقاطع منحنيي الاقترانين في الربع الأوَّل هو: $x = 0$، و $x = 2$، كما في الشكل المجاور.




**الخطوة 2:** أجد المساحة عن طريق التكامل.

بما أنَّ منحنى الاقتران $f(x)$ هو السفلي، ومنحنى الاقتران $g(x)$ هو العلوي كما في الشكل المجاور، فإنَّه يُمكِن إيجاد مساحة المنطقة المطلوبة كالآتي:

$$A = \int_a^b (g(x) - f(x))\, dx$$ صيغة المساحة المحصورة بين منحنيي اقترانين

$$= \int_0^2 \left((4x - x^2) - \frac{1}{2}x^3\right) dx$$ بتعويض $f(x) = \frac{1}{2}x^3, g(x) = 4x - x^2$

$$= \left(2x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{8}x^4\right)\Big|_0^2$$ تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت

### أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّ حدود التكامل لم تُذكَر في المسألة؛ لذا يجب إيجاد نقاط التقاطع؛ فهي تُمثِّل حدود التكامل.

### أتذكَّر

منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ هو تضيُّق رأسي لمنحنى الاقتران الرئيس: $f(x) = x^3$.

$= (8 - \frac{8}{3} - 2) - 0$ بالتعويض

$= \frac{10}{3}$ بالتبسيط

إذن، المساحة هي: $\frac{10}{3}$ وحدة مربعة.

**أتحقَّق من فهمي**

**أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = x^2$، و $g(x) = x + 2$.**

## التكامل، ومنحنى السرعة المتجهة - الزمن

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ الإزاحة هي التغيُّر في موقع الجسم؛ فإذا كان $s(t)$ موقع جسم عند الزمن $t$، فإنَّ الإزاحة على الفترة الزمنية $[t_1, t_2]$ هي: $s(t_2) - s(t_1)$.

تعلَّمْتُ أيضًا أنَّه يُمكِن استعمال التكامل المحدود لإيجاد إزاحة جسم عُلِمت سرعته المتجهة كالآتي:

$$s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\ dt$$

أمّا المسافة الكلية التي يقطعها الجسم فيُمكِن إيجادها كما يأتي:

$$\int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\ dt$$

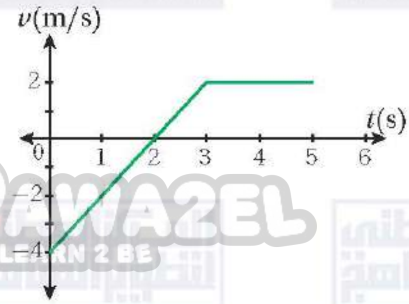
إذا عُلِم منحنى السرعة المتجهة – الزمن لجسم يتحرَّك في مسار مستقيم، فإنَّ التكامل يُستعمَل لإيجاد إزاحة هذا الجسم؛ ذلك أنَّ الإزاحة تساوي تكامل اقتران السرعة المتجهة؛ لذا يَلزم الانتباه إلى أنَّ المساحة الواقعة أسفل المحور $x$ والمحصورة بين منحنى السرعة المتجهة– الزمن والمحور $x$ تُعبِّر عن قيمة سالبة للتكامل، وأنَّ المساحة الواقعة فوق المحور $x$ والمحصورة بين منحنى السرعة المتجهة– الزمن والمحور $x$ تُعبِّر عن قيمة موجبة للتكامل.

أمّا المسافة الكلية التي يقطعها الجسم فيُمكِن إيجادها بإيجاد المساحة المحصورة بين منحنى السرعة المتجهة – الزمن والمحور $x$؛ لأنَّها تكامل القيمة المُطلَقة لاقتران السرعة المتجهة.

**أتذكَّر**

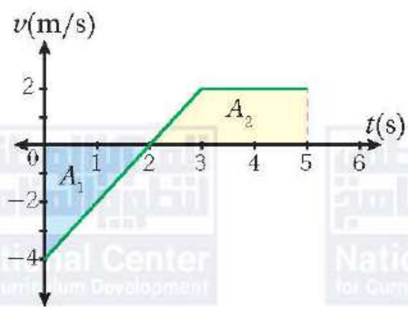
قد تكون قيمة الإزاحة موجبةً، أو سالبةً، أو صفرًا، تبعًا لاتجاه حركة الجسم. أمّا المسافة فهي طول المسار الذي يقطعه الجسم بصرف النظر عن الاتجاه.

## مثال 3




يُبيِّن الشكل المجاور منحنى السرعة المتجهة – الزمن لجُسَيْم يتحرَّك على المحور $x$ في الفترة الزمنية $[0, 5]$. إذا بدأ الجُسَيْم الحركة من $x = 2$ عندما $t = 0$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

**1** إزاحة الجُسَيْم في الفترة الزمنية المعطاة.




**الخطوة 1:** أجد المساحة بين منحنى السرعة المتجهة – الزمن والمحور $x$.

لإيجاد المساحة بين منحنى السرعة المتجهة – الزمن والمحور $x$، أُقسِّم المساحة الكلية إلى جزأين؛ الأوّل: مساحة المثلث $A_1$، والثاني: مساحة شبه المُنحرِف $A_2$.

- مساحة المثلث $A_1$:

$$A_1 = \frac{1}{2} bh \qquad \text{صيغة مساحة المثلث}$$

$$= \frac{1}{2}(2)(4) = 4 \qquad \text{بتعويض } b = 2, h = 4$$

إذن، مساحة المثلث $A_1$ هي: $4 \text{ m}^2$

- مساحة شبه المُنحرِف $A_2$:

$$A_2 = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)\, h \qquad \text{صيغة مساحة شبه المُنحرِف}$$

$$= \frac{1}{2}(3 + 2) \times 2 = 5 \qquad \text{بتعويض } b_1 = 3, b_2 = 2, h = 2$$

إذن، مساحة شبه المُنحرِف $A_2$ هي: $5 \text{ m}^2$

**أتعلَّم**

يُمكِن تقسيم المنطقة إلى مساحات أصغر.

**أفكر**

هل يمكن إيجاد الإزاحة بطريقة أخرى؟ أُبرِّر إجابتي.

**الخطوة 2:** أجد الإزاحة.

صيغة الإزاحة
$$s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\ dt$$

بتعويض $t_1 = 0, t_2 = 5$
$$s(5) - s(0) = \int_{0}^{5} v(t)\ dt$$

بتجزئة التكامل
$$s(5) - s(0) = \int_{0}^{2} v(t)\ dt + \int_{2}^{5} v(t)\ dt$$

بالتعويض
$$= -4 + 5 = 1$$

إذن، إزاحة الجُسَيْم في الفترة [0, 5] هي 1 m إلى اليمين.

**2** **المسافة التي قطعها الجُسَيْم في الفترة الزمنية المعطاة.**

تكامل اقتران السرعة
$$\int_{0}^{5} |v(t)|\ dt = A_1 + A_2$$

بتعويض $A_1 = 4, A_2 = 5$
$$= 4 + 5 = 9$$

إذن، المسافة التي قطعها الجُسَيْم في الفترة [0, 5] هي: 9 m

**3** **الموقع النهائي للجُسَيْم.**

صيغة الإزاحة
$$s(5) - s(0) = \int_{0}^{5} v(t)\ dt$$

بتعويض $s(0) = 2, \int_{0}^{5} v(t)\ dt = 1$
$$s(5) - 2 = 1$$

بالتعويض
$$s(5) = 3$$

إذن، الموقع النهائي للجُسَيْم هو: 3 m

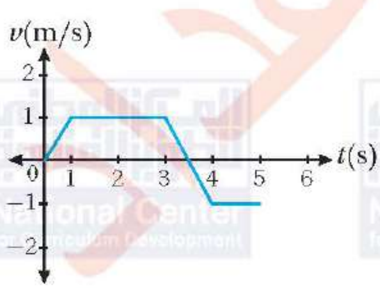
**أتعلَّم**

تشير قيمة التكامل السالبة إلى أنَّ المساحة بين منحنى الاقتران والمحور $x$ تقع أسفل المحور $x$.

**أتذكَّر**

اقتران السرعة هو $|v(t)|$.

**أتحقق من فهمي**




**يُبيِّن الشكل المجاور منحنى السرعة المتجهة – الزمن لجُسَيْم يتحرَّك على المحور $x$ في الفترة الزمنية [0, 5]. إذا بدأ الجُسَيْم الحركة من $x = 3$ عندما $t = 0$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:**

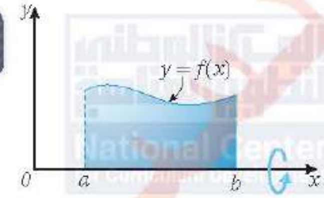
a) إزاحة الجُسَيْم في الفترة الزمنية المعطاة.

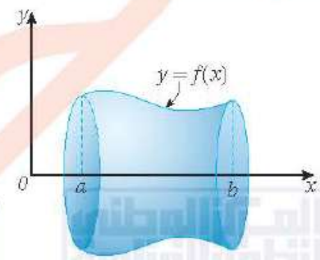
b) المسافة التي قطعها الجُسَيْم في الفترة الزمنية المعطاة.

c) الموقع النهائي للجُسَيْم.

## الحجوم الدورانية

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ الشكل الناتج من دوران منطقة ما دورة كاملة حول المحور $x$ يُسمّى المُجسَّم الدوراني، وأنَّه يمكن إيجاد حجم هذا المُجسَّم عن طريق التكامل.




### مراجعة المفهوم — حجوم المُجسَّمات الدورانية

حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة التي تنحصر بين منحنى $y = f(x)$، والمحور $x$، وتقع بين $x = a$، و $x = b$، حيث: $a < b$ حول المحور $x$، هو:

$$V = \int_a^b \pi y^2 \, dx \qquad \text{or} \qquad V = \int_a^b \pi (f(x))^2 \, dx$$

### مثال 6

**أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = e^x$، والمحور $x$، من $x = -1$ إلى $x = 2$ حول المحور $x$.**

$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 \, dx$$ صيغة حجم المُجسَّم الناتج من الدوران حول المحور $x$

$$= \int_{-1}^2 \pi (e^x)^2 \, dx$$ بتعويض $f(x) = e^x, a = -1, b = 2$

$$= \int_{-1}^2 \pi e^{2x} \, dx$$ بالتبسيط

$$= \frac{\pi}{2} e^{2x} \Big|_{-1}^{2}$$ تكامل الاقتران الأُسّي الطبيعي المضروب في ثابت

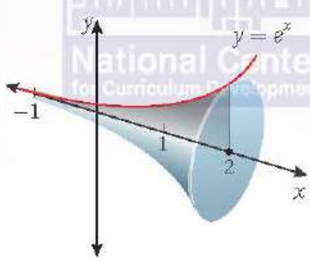
$$= \frac{\pi}{2} (e^{2(2)} - e^{2(-1)})$$ بالتعويض

$$= \frac{\pi}{2} (e^4 - e^{-2})$$ بالتبسيط

إذن، حجم المُجسَّم الناتج من دوران هذه المنطقة هو: $\frac{\pi}{2}(e^4 - e^{-2})$ وحدة مُكعَّبة.

#### الدعم البياني

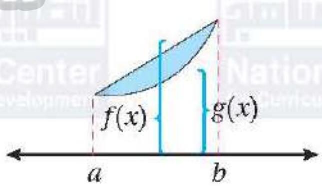
يُبيِّن الشكل أدناه المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = e^x$، والمحور $x$، والمستقيمين: $x = -1$، و $x = 2$ حول المحور $x$.

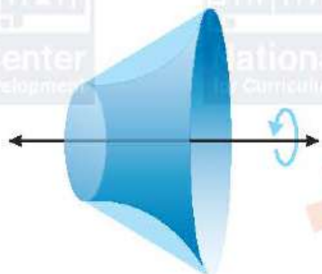



#### أتحقَّق من فهمي

**أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{1}{x}$، والمحور $x$، والمستقيمين: $x = 1$، و $x = 4$ حول المحور $x$.**

تعلّمْتُ في المثال السابق إيجاد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران، والمحور $x$، والمستقيمين: $x = a, x = b$ حول المحور $x$. والآن سأتعلَّم كيف أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران منطقة محصورة بين منحنيي اقترانين، والمستقيمين: $x = a$، و $x = b$ حول المحور $x$، عن طريق طرح حجم المُجسَّم الدوراني الداخلي من حجم المُجسَّم الدوراني الخارجي كما في الشكل الآتي:



**أتعلَّم**

ألاحِظ أنَّ المُجسَّم الناتج من الدوران مُفرَّغ من الداخل.

## مفهوم أساسي: حجم المُجسَّم الدوراني الناتج من دوران منحنيي اقترانين

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانيين متصلين على الفترة $[a, b]$، وكان منحنى $f(x)$ أبعد من منحنى $g(x)$ عن المحور $x$، وكان كلا المنحنيين في الجهة نفسها من المحور $x$، فإنَّ حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة التي تنحصر بين منحنيي الاقترانين: $f(x)$، و $g(x)$، وتقع بين $x = a$، و $x = b$، حيث: $a < b$ حول المحور $x$، هو:

$$V = \int_a^b \pi \left( (f(x))^2 - (g(x))^2 \right) \, dx$$

**أتعلَّم**

يُشترَط لتطبيق معادلة المُجسَّم الدوراني الناتج من دوران منطقة محصورة بين منحنيي اقترانين أنْ يكون كلا المنحنيين في الجهة نفسها بالنسبة إلى المحور $x$.

أمّا إذا كان أحد الاقترانين فوق المحور $x$ والآخر أسفله، فإنَّ يَلزم لإيجاد الحجم الناتج توافرُ تفاصيل أُخرى لن تُذكَر في هذا الكتاب.

### مثال 7

**أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = x$، و $g(x) = x^3$، في الربع الأوَّل من المستوى الإحداثي حول المحور $x$.**

**الخطوة 1:** أجد الإحداثي $x$ لنقاط تقاطع منحنيي الاقترانين.

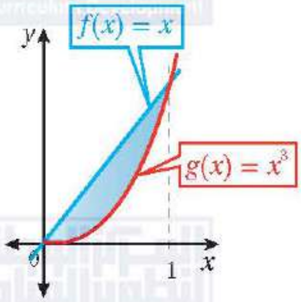
لإيجاد الإحداثي $x$ لنقاط تقاطع منحنيي الاقترانين، أُساوي أوَّلًا قاعدتي الاقترانين، ثم أَحُلُّ المعادلة الناتجة:

$f(x) = g(x)$ بمساواة الاقترانين

$x = x^3$ بتعويض $f(x) = x, g(x) = x^3$

| | |
|---|---|
| بطرح $x^3$ من طرفي المعادلة | $x - x^3 = 0$ |
| بإخراج $x$ عاملًا مشتركًا | $x(1 - x^2) = 0$ |
| بالتحليل | $x(1 - x)(1 + x) = 0$ |
| خاصية الضرب الصفري | $x = 0 \quad \text{or} \quad 1 - x = 0 \quad \text{or} \quad 1 + x = 0$ |
| بحلِّ كل المعادلة لـ $x$ | $x = 0 \qquad x = 1 \qquad x = -1$ |

بما أنَّ المنطقة المطلوبة تقع في الربع الأوَّل من المستوى الإحداثي، فإنَّ الإحداثي $x$ لنقاط تقاطع منحنيي الاقترانين في الربع الأوَّل، هو: $x = 0$، و $x = 1$، كما في الشكل المجاور.




**الخطوة 2:** أجد حجم المُجسَّم الدوراني عن طريق التكامل.

بما أنَّ منحنى الاقتران $f(x)$ هو الأبعد عن المحور $x$ من منحنى الاقتران $g(x)$ كما في الشكل السابق، فإنَّه يُمكِن إيجاد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المطلوبة كالآتي:

صيغة حجم المُجسَّم الناتج من الدوران حول المحور $x$

$$V = \int_a^b \pi \left( (f(x))^2 - (g(x))^2 \right) \, dx$$

بتعويض $a = 0, b = 1,$ $f(x) = x, g(x) = x^3$

$$= \int_0^1 \pi \left( (x)^2 - (x^3)^2 \right) \, dx$$

بالتبسيط

$$= \pi \int_0^1 (x^2 - x^6) \, dx$$

تكامل اقتران القوَّة

$$= \pi \left( \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{7} x^7 \right) \Big|_0^1$$

بالتعويض

$$= \pi \left( \left( \frac{1}{3}(1)^3 - \frac{1}{7}(1)^7 \right) - \left( \frac{1}{3}(0)^3 - \frac{1}{7}(0)^7 \right) \right)$$

بالتبسيط

$$= \frac{4\pi}{21}$$

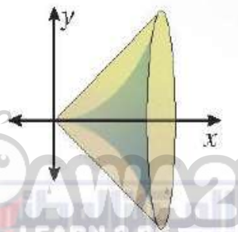
إذن، حجم المُجسَّم الناتج من دوران هذه المنطقة هو: $\frac{4\pi}{21}$ وحدة مُكعَّبة.

**أتعلَّم**

أُلاحِظ من التمثيل البياني أنَّ منحنى $f(x)$ أبعد من منحنى $g(x)$ عن المحور $x$.

**الدعم البياني**

يُبيِّن الشكل المجاور المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x$، و $g(x) = x^3$، في الربع الأوَّل من المستوى الإحداثي حول المحور $x$.

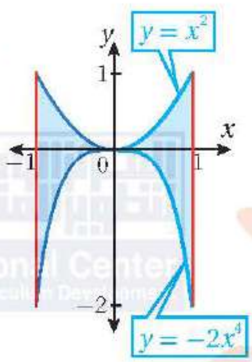


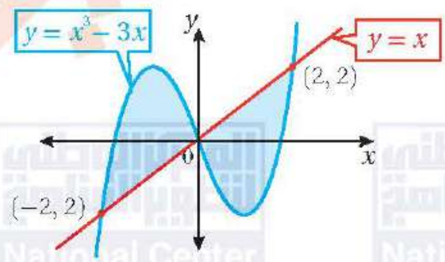

**أتحقَّق من فهمي**

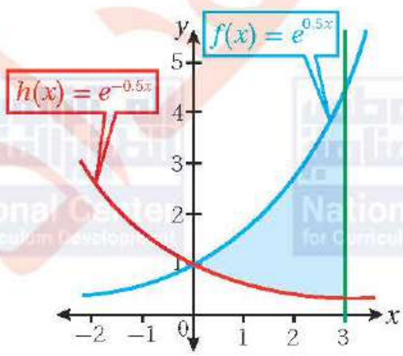
أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = \sqrt{x}$، و $g(x) = x^2$ حول المحور $x$.

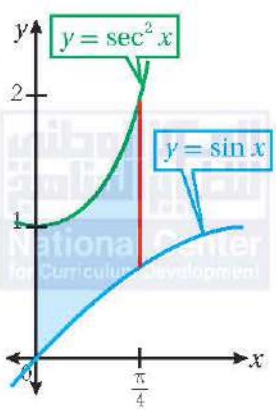
## أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلات البيانية الآتية:

1) 


2) 


3) 


4) 

5 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 6$، و $g(x) = 2x^2$.

6 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = 4^x$، و $g(x) = 3^x$، والمستقيم $x = 1$ في الربع الأوَّل.

7 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = e^x$، و $g(x) = \cos x$، والمستقيم $x = \frac{\pi}{2}$، في الربع الأوَّل.

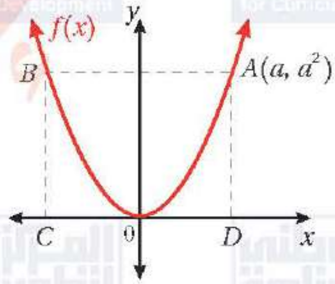
8 أجد المساحة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = |x|$، و $g(x) = x^4$.

9 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$، و $g(x) = -x^2 + 2x$.

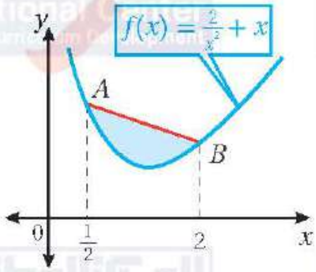
10 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = e^x$، و $g(x) = x^2$، والمستقيمين: $x = 0$، و $x = 1$.

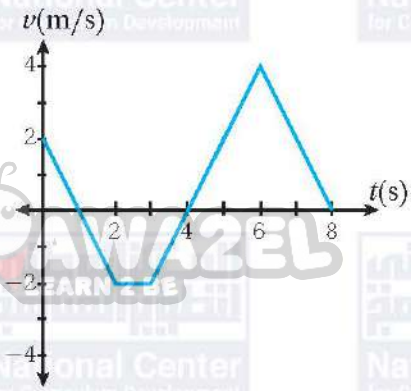
11 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = \frac{1}{2}x^2$، و $h(x) = 4\sqrt{x}$.

12 يُبيِّن الشكل التالي منحنى الاقتران: $f(x) = x^2$. إذا كان إحداثيا النقطة $A$ هما $A(a, a^2)$، فأُثبِت أنَّ مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ والمستقيم $AB$ تساوي ثلثي مساحة المستطيل $ABCD$.




13 يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{2}{x^2} + x$. إذا كان الإحداثي $x$ لكلٍّ من النقطة $A$ والنقطة $B$ هو $\frac{1}{2}$ و 2 على الترتيب، فأجد مساحة المنطقة المحصورة بين المستقيم $AB$ ومنحنى الاقتران $f(x)$.



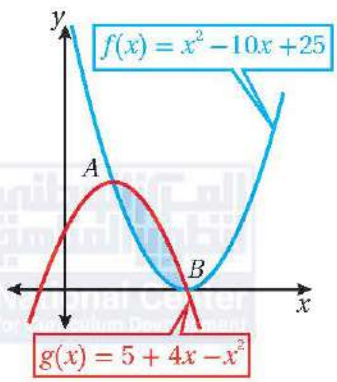



يُبيِّن الشكل المجاور منحنى السرعة المتجهة – الزمن لجُسَيْم يتحرَّك على المحور $x$ في الفترة الزمنية $[0, 8]$. إذا بدأ الجُسَيْم الحركة من $x = 5$ عندما $t = 0$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

14 إزاحة الجُسَيْم في الفترة الزمنية المعطاة.

15 المسافة التي قطعها الجُسَيْم في الفترة الزمنية المعطاة.

16 الموقع النهائي للجُسَيْم.




يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: $f(x) = x^2 - 10x + 25$، و $g(x) = 5 + 4x - x^2$. مُعتمِدًا هذا الشكل، أُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

17 أجد إحداثيي كلٍّ من النقطة $A$، والنقطة $B$.

18 أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المُظلَّلة حول المحور $x$.

19 أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = \sqrt{\sin x}$ في الفترة $[0, \pi]$، والمحور $x$، حول المحور $x$.

20 أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = \sqrt{x}$، و $g(x) = x^3$ حول المحور $x$.

21 أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 1 + \sec x$، في الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ والمستقيم $y = 3$ حول المحور $x$.

## مهارات التفكير العليا

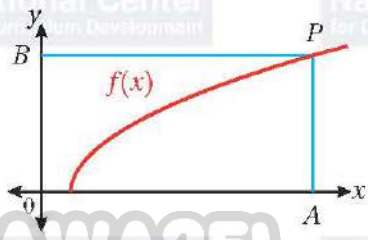
تبرير: أُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

22 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $y = x^2$، و $y = x^{1/2}$.

23 أجد المساحة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $y = x^3$، و $y = x^{1/3}$.

24 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $y = x^n$، و $y = x^{1/n}$، حيث $n$ عدد صحيح أكبر من أو يساوي 2، مُبرِّرًا إجابتي.

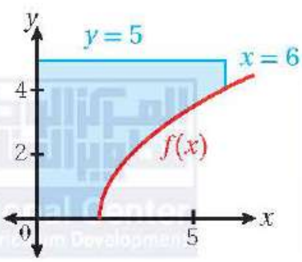
تبرير: يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = \sqrt{2x-2}$، حيث: $x \geq 1$.



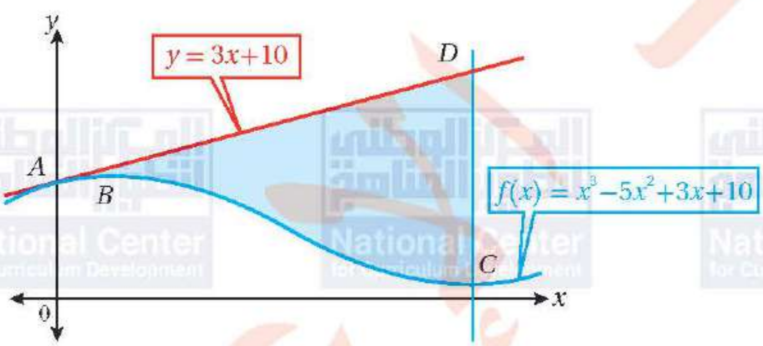

إذا كانت النقطة $P(9, 4)$ تقع على منحنى الاقتران $f(x)$، حيث $\overline{PA}$ يوازي المحور $y$، و $\overline{PB}$ يوازي المحور $x$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

25 مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$، والمستقيم $y = 4$، والمحورين الإحداثيين.

26 مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$، والمستقيم $x = 9$، والمحور $x$.




27 تبرير: يُبيِّن الشكل المجاور المنطقة المحصورة بين المحورين الإحداثيين في الربع الأوَّل، ومنحنى الاقتران: $f(x) = 2\sqrt{x-2}$، والمستقيمين: $x = 6$، و $y = 5$. أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة حول المحور $x$، مُبرِّرًا إجابتي.

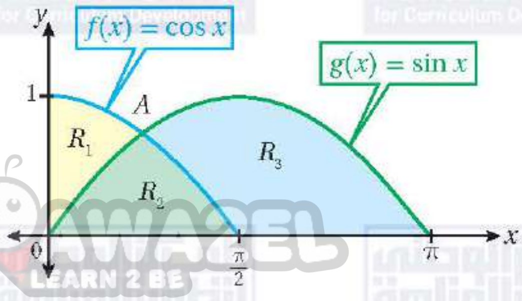



تبرير: يُبيِّن الشكل المجاور منحنى كلٍّ من الاقتران: $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 10$، والمستقيم: $y = 3x+10$. إذا مَرَّ المستقيم ومنحنى الاقتران بالنقطة $A$ الواقعة على المحور $y$، وكان للاقتران $f(x)$ قيمة عظمى محلية عند النقطة $B$، وقيمة صغرى محلية عند النقطة $C$، وقطع الخطُّ الموازي للمحور $y$ والمارُّ بالنقطة $C$ المستقيمَ: $y = 3x + 10$ في النقطة $D$، فأُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

28 أجد إحداثيات كلٍّ من النقطة $B$، والنقطة $C$.

29 أُثبِت أنَّ $\overline{AD}$ مماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة $A$، مُبرِّرًا إجابتي.

30 أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة، مُبرِّرًا إجابتي.

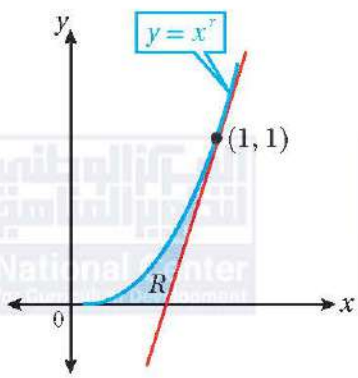



تبرير: يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: $f(x) = \cos x$، و $h(x) = \sin x$. مُعتمِدًا هذا الشكل، أُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

31 أجد إحداثيي النقطة $A$.

32 أجد مساحة كلٍّ من المناطق: $R_1, R_2, R_3$.

33 أُثبِت أنَّ مساحة المنطقة $R_1$ إلى مساحة المنطقة $R_2$ تساوي: $\sqrt{2} : 2$.




تحدٍّ: يُبيِّن الشكل المجاور المنطقة $R$ المحصورة بين منحنى الاقتران: $y = x^r$، حيث: $r \geq 1$، والمحور $x$، ومماس منحنى الاقتران عند النقطة $(1, 1)$:

34 أُثبِت أنَّ مماس منحنى الاقتران يقطع المحور $x$ عند النقطة $\left(\frac{r-1}{r}, 0\right)$.

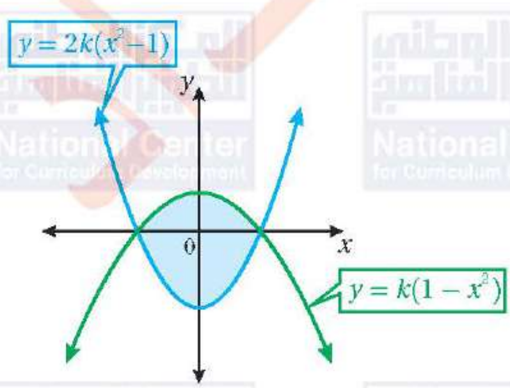
35 أستعمل النتيجة من الفرع السابق لإثبات أنَّ مساحة المنطقة $R$ هي $\frac{r-1}{2r(r+1)}$ وحدة مربعة.

36 أجد قيمة الثابت $r$ التي تجعل مساحة المنطقة $R$ أكبر ما يُمكِن.

تحدٍّ: إذا كان العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - 4x + 6$ عند النقطة $(1, 3)$ يقطع منحنى الاقتران مَرَّة أُخرى عند النقطة $P$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

37 إحداثيات النقطة $P$.

38 مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ والعمودي على المماس، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب 3 منازل عشرية.




39 تبرير: المنطقة المُظلَّلة في الشكل المجاور محصورة بين قطعين مكافئين، يقطع كلٌّ منهما المحور $x$ عندما $x = -1$، و $x = 1$. إذا كانت معادلتا القطعين هما: $y = 2k(x^2 - 1)$، و $y = k(1 - x^2)$، وكانت مساحة المنطقة المُظلَّلة هي 8 وحدات مربعة، فأجد قيمة الثابت $k$.

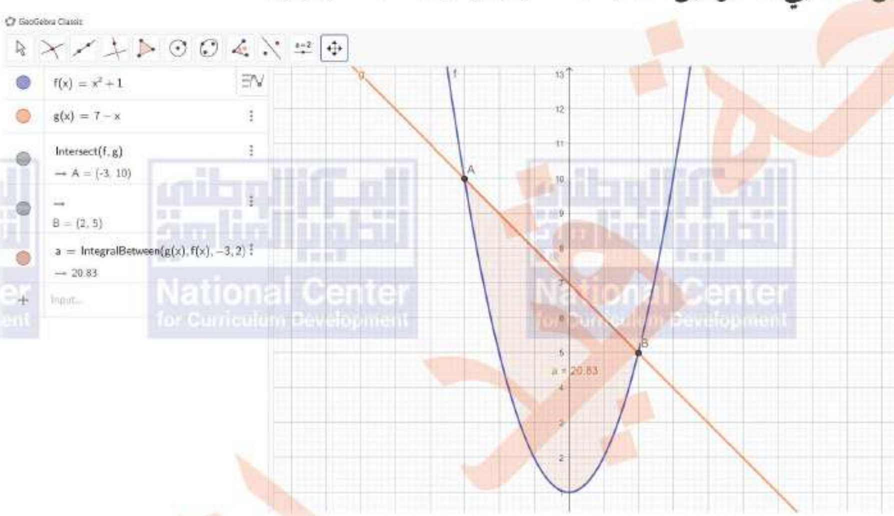
# تطبيقات التكامل: المساحة
# Applications of integration: Area

أستعمل برمجية جيوجبرا لإيجاد المساحة المحصورة بين منحنيي اقترانين بوصفه تكاملًا محدودًا، مراعيًا تحويل إشارة الناتج السالبة إلى موجبة إذا وقعت المنطقة أسفل المحور $x$.

**مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين:**

**نشاط**

أجد مساحة المنطقة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = x^2 + 1$، و $g(x) = 7 - x$.




1 أكتب الاقتران: $f(x) = x^2 + 1$ في شريط الإدخال، ثم أضغط على زِرِّ الإدخال Enter، ثم أكتب الاقتران: $g(x) = 7 - x$، ثم أضغط على زِرِّ الإدخال Enter.

2 أجد نقــاط التقاطع بين منحنيي الاقترانين، وذلك باختيار أيقونة Intersect، ثم نقــر منحنيي الاقترانين تباعاً، فيظهر إحداثيا نقطتي التقاطع في شريط الإدخال: $(A(-3, 10), B(2, 5))$.

3 أكتب في شريط الإدخال الصيغة الآتية: Integral Between (g(x)), f(x), -3, 2) .

أُلاحِظ أنَّ الاقتران العلوي أُدخِل أولًا، تلاه إدخال الاقتران السفلي، ثم الإحداثي $x$ لكلٍّ من نقطتي التقاطع.

4 أُلاحِظ تظليل المنطقة المطلوبة، وظهور قيمة التكامل على الشكل، ومنه فإن المساحة تساوي 20.83 وحدة مربعة.

**أتدرَّب**

1 أجد مساحة المنطقة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 + 4$، والمحور $x$، والمستقيمين: $x = -1$ و $x = 2$ .

2 أجد مساحة المنطقة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = \sqrt{x}$، و $g(x) = \frac{1}{2}x$.

الدرس 6

# المعادلات التفاضلية
# Differential Equations

**فكرة الدرس** حلُّ المعادلات التفاضلية.

**المصطلحات** المعادلة التفاضلية.

**مسألة اليوم** تتغيَّر درجة حرارة سائل كيميائي بارد، بعد وضعه في غرفة دافئة، بمُعدَّل يُمكِن نمذجته بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dC}{dt} = 2(20 - C)$، حيث $C$ درجة حرارة السائل بمقياس سيلسيوس، و $t$ الزمن بالساعات:

1) أحُلُّ المعادلة التفاضلية لإيجاد درجة حرارة السائل بعد $t$ ساعة، علمًا بأنَّ درجة حرارته عند وضعه في الغرفة هي $5°C$.

2) بعد كم ساعة تصبح درجة حرارة السائل $18°C$؟

## المعادلات التفاضلية

**المعادلة التفاضلية** (differential equation) هي معادلة جبرية تحوي مشتقة أو أكثر لاقتران ما، وقد تحوي الاقتران نفسه، ومن أمثلتها:

$$\frac{dy}{dx} = 2x^3 + 5 \quad , \quad \frac{dP}{dt} = kP \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} - 7y = \frac{1}{x}$$

يُعَدُّ الاقتران: $y = f(x)$ حلًّا للمعادلة التفاضلية إذا تحقَّقت المعادلة عند تعويض $f(x)$ ومشتقاته فيها.

**أتعلَّم**

المعادلة التي تُكتَب في صورة: $\frac{dy}{dx} = g(x)$ هي أبسط أنواع المعادلات التفاضلية؛ أيْ إنَّه يُمكِن التعبير عن مشتقة $y$ صراحةً بدلالة المُتغيِّر $x$.

**مثال 1**

أُحدِّد إذا كان الاقتران المعطى حلًّا للمعادلة التفاضلية: $y' + y = 0$ في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $y = e^{-x}$

**الخطوة 1:** أجد المشتقات اللازمة.

$y = e^{-x}$ الاقتران المعطى

$y' = -e^{-x}$ مشتقة الاقتران الأُسّي الطبيعي

**الخطوة 2:** أعوّض في المعادلة التفاضلية.

| | |
|---|---|
| المعادلة التفاضلية | $y' + y = 0$ |
| بتعويض $y = e^{-x}, y' = -e^{-x}$ | $e^{-x} + -e^{-x} \stackrel{?}{=} 0$ |
| بالتبسيط | $0 = 0$ ✓ |

إذن، الاقتران: $y = e^{-x}$ هو حلٌّ للمعادلة التفاضلية.

**2** $y = 2\cos x$

**الخطوة 1:** أجد المشتقات اللازمة.

| | |
|---|---|
| الاقتران المعطى | $y = 2\cos x$ |
| مشتقة اقتران جيب التمام المضروب في ثابت | $y' = -2\sin x$ |

**الخطوة 2:** أعوّض في المعادلة التفاضلية.

| | |
|---|---|
| المعادلة التفاضلية | $y' + y = 0$ |
| بتعويض $y = 2\cos x, y' = -2\sin x$ | $2\cos x + -2\sin x \stackrel{?}{=} 0$ |
| بالتبسيط | $2\cos x - 2\sin x \neq 0$ ✗ |

إذن، الاقتران: $y = 2\cos x$ ليس حلًّا للمعادلة التفاضلية.

**أتعلَّم**

إنَّ $2\cos x - 2\sin x = 0$ لبعض قيم $x$ وليس لجميع القيم، لذا فإنَّ الاقتران $y = 2\cos x$ ليس حلًّا للمعادلة التفاضلية.

**أتحقَّق من فهمي**

أُحدِّد إذا كان الاقتران المعطى حلًّا للمعادلة التفاضلية: $y'' - 4y' + 3y = 0$ في كلٍّ ممّا يأتي:

a) $y = 4e^{x} + 5e^{3x}$

b) $y = \sin x$

### الحلُّ العام والحلُّ الخاص للمعادلة التفاضلية

يُمكِـن حلُّ المعادلة التفاضلية عن طريق التكامل. فمثلًا، تُحَلُّ المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = 5x$ على النحو الآتي:

$$\frac{dy}{dx} = 5x$$ المعادلة التفاضلية

$$\int \frac{dy}{dx}\, dx = \int 5x\ dx$$ بمُكامَلة الطرفين بالنسبة إلى المُتغيِّر $x$

$$\int dy = \int 5x\ dx$$ بالتبسيط

$$y = \frac{5}{2}x^2 + C$$ بإيجاد التكامل

أُلاحِظ أنَّ حلَّ المعادلة التفاضلية: $y' = 5x$ يتضمَّن ثابت التكامل $C$؛ لذا يُسـمّى **الحلَّ العام** (general solution) للمعادلـة التفاضلية؛ ذلك أنَّ قيمة الثابت $C$ تعطي جميع حلول هذه المعادلـة. أمّا **الحلُّ الخاص** (particular solution) للمعادلـة التفاضلية فيُقصَد به الحلُّ الذي يُحقِّق شرطًا أوَّليًا معلومًا يُمكِن عن طريقه تحديد قيمة الثابت $C$.

**مثال 2**

**أجـد الحلَّ العام للمعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = e^x - 6x^2$، ثم أجد الحلَّ الخاص لها الذي يُحقِّق النقطة $(1, 0)$.**

**الخطوة 1:** أجد الحلَّ العام للمعادلة التفاضلية.

$$\frac{dy}{dx} = e^x - 6x^2$$ المعادلة التفاضلية المعطاة

$$\int \frac{dy}{dx}\, dx = \int (e^x - 6x^2)\ dx$$ بمُكامَلة الطرفين بالنسبة إلى المُتغيِّر $x$

$$\int dy = \int (e^x - 6x^2)\ dx$$ بالتبسيط

$$y = e^x - 2x^3 + C$$ بإيجاد التكامل

إذن، الحلُّ العام للمعادلة التفاضلية هو: $y = e^x - 2x^3 + C$.

**أتعلَّم**

كل قيمة للثابت $C$ تعطي حـلًّا خاصًّـا للمعادلـة التفاضليـة، وإحدى هذه القِيَم تعطي الاقتران الذي يُحقِّـق الشـرط الأوَّلي المعطى.

**الخطوة 2:** أجد الحلَّ الخاص للمعادلة التفاضلية الذي يُحقِّق الشرط الأوَّلي.

لإيجاد الحلِّ الخاص لهذه المعادلة، أُعوِّض النقطة $(1, 0)$ في الحلِّ العام:

$$y = e^x - 2x^3 + C$$ الحلُّ العام للمعادلة التفاضلية

$$0 = e^1 - 2(1)^3 + C$$ بتعويض $x = 1, y = 0$

$$C = 2 - e$$ بحلِّ المعادلة لـ $C$

إذن، الحلُّ الخاص للمعادلة التفاضلية الذي يُحقِّق النقطة $(1, 0)$ هو: $y = e^x - 2x^3 + 2 - e$.

### أتحقَّق من فهمي

أجد الحلَّ العام للمعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = 5\sec^2 x - \frac{3}{2}\sqrt{x}$، ثم أجد الحلَّ الخاص لها الذي يُحقِّق النقطة $(0, 7)$.

## حلُّ المعادلات التفاضلية بفصل المُتغيِّرات

تعلَّمْتُ في المثال السابق حلَّ معادلات تفاضلية في صورة: $\frac{dy}{dx} = g(x)$، عن طريق إيجاد التكامل لطرفي المعادلة مباشرة. ولكنَّ ذلك لا ينطبق على جميع المعادلات التفاضلية؛ فبعضها يحتوي على المُتغيِّرين $x$ و$y$ معًا في أحد طرفي المعادلة. وفي هذه الحالة، فإنَّ الحلَّ يتطلَّب أوَّلًا فصل $dx$ عن $dy$، وذلك بكتابة $dx$ في أحد طرفي المعادلة، وكتابة $dy$ في الطرف الآخر، ثم نقل جميع الحدود التي تحوي المُتغيِّر $x$ إلى طرف المعادلة الذي يحوي $dx$، ونقل جميع الحدود التي تحوي المُتغيِّر $y$ إلى طرف المعادلة الذي يحوي $dy$، ثم إيجاد التكامل لكلٍّ من طرفي المعادلة.

تُعرَف الطريقة السابقة لحلِّ المعادلات التفاضلية بطريقة **فصل المُتغيِّرات** (separation of variables)، ويُطلَق على المعادلة التفاضلية التي يُمكِن فصل مُتغيِّراتها اسم **المعادلة القابلة للفصل** (separable equation)، وهي معادلة تُكتَب في الصورة الآتية:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

**أتعلَّم**

المعادلة التفاضلية القابلة للفصل هي من أبسط المعادلات التفاضلية.

### مثال 3

أحُلُّ كُلًّا من المعادلات التفاضلية الآتية:

1) $\frac{dy}{dx} = -xy^2$

| | |
|---|---|
| $\frac{dy}{dx} = -xy^2$ | المعادلة التفاضلية المعطاة |
| $dy = -xy^2\ dx$ | بضرب طرفي المعادلة في $dx$ |
| $-\frac{dy}{y^2} = x\ dx$ | بقسمة طرفي المعادلة على $-y^2$ |
| $\int -\frac{1}{y^2}\ dy = \int x\ dx$ | بمُكامَلة طرفي المعادلة التفاضلية |
| $\int -y^{-2}\ dy = \int x\ dx$ | تعريف الأسس |
| $y^{-1} = \frac{1}{2}x^2 + C$ | بإيجاد التكامل |
| $\frac{1}{y} = \frac{1}{2}x^2 + C$ | تعريف الأُسِّ السالب |

2) $\frac{dy}{dx} = x + xy$

| | |
|---|---|
| $\frac{dy}{dx} = x + xy$ | المعادلة التفاضلية المعطاة |
| $dy = (x + xy)\ dx$ | بضرب طرفي المعادلة في $dx$ |
| $dy = x(1 + y)\ dx$ | بإخراج $x$ عاملًا مشتركًا |
| $\frac{dy}{1+y} = x\ dx$ | بقسمة طرفي المعادلة على $y+1$ |
| $\int \frac{dy}{1+y} = \int x\ dx$ | بمُكامَلة طرفي المعادلة التفاضلية |
| $\ln\lvert 1+y\rvert = \frac{1}{2}x^2 + C$ | بإيجاد التكامل |

**أتعلَّم**

إذا لم يُحدَّد في السؤال شرط أوَّلي للمعادلة التفاضلية، فهذا يعني أنَّ الحلَّ المطلوب هو الحلُّ العام.

**أتعلَّم**

يختلف الإجراء الجبري اللازم لفصل المُتغيِّر $x$ عن المُتغيِّر $y$ بحسب المعادلة التفاضلية. فمثلًا، يتطلَّب الحلُّ في الفرع 2 من المثال إخراج $x$ عاملًا مشتركًا.

3 $\frac{dy}{dx} = \frac{8x^3}{4y - \sin y}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8x^3}{4y - \sin y}$$ المعادلة التفاضلية المعطاة

$$(4y - \sin y)\ dy = 8x^3\ dx$$ بفصل المُتغيِّرات بالضرب التبادلي

$$\int (4y - \sin y)\ dy = \int 8x^3\ dx$$ بمُكامَلة طرفي المعادلة التفاضلية

$$2y^2 + \cos y = 2x^4 + C$$ بإيجاد التكامل

4 $(1 + x^3)\frac{dy}{dx} = x^2 \tan y$

$$(1 + x^3)\frac{dy}{dx} = x^2 \tan y$$ المعادلة التفاضلية المعطاة

$$\frac{1}{\tan y}\ dy = \frac{x^2}{1 + x^3}\ dx$$ بفصل المُتغيِّرات

$$\int \frac{1}{\tan y}\ dy = \int \frac{x^2}{1 + x^3}\ dx$$ بمُكامَلة طرفي المعادلة التفاضلية

$$\int \frac{\cos y}{\sin y}\ dy = \int \frac{x^2}{1 + x^3}\ dx$$ $\frac{1}{\tan y} = \cot y = \frac{\cos y}{\sin y}$

$$\int \frac{\cos y}{\sin y}\ dy = \frac{1}{3}\int \frac{3 \times x^2}{1 + x^3}\ dx$$ بالضرب في 3 والقسمة على 3

$$\ln|\sin y| = \frac{1}{3}\ln|1 + x^3| + C$$ بإيجاد التكامل

### أتحقَّق من فهمي

أَحُلُّ كُلًّا من المعادلات التفاضلية الآتية:

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y^4}$

b) $\frac{dy}{dx} = 2x - xe^y$

c) $\frac{dy}{dx} = \frac{x \sin x}{y}$

d) $\sin^2 x \frac{dy}{dx} = y^2 \cos^2 x$

تعلّمْتُ في المثال السابق إيجاد الحلّ العام لمعادلات قابلة للفصل. والآن سأتعلّم إيجاد الحلّ الخاص لهذا النوع من المعادلات.

**مثال 4**

**أجد الحلَّ الخاص الذي يُحقِّق الشرط الأوَّلي المعطى لكل معادلة تفاضلية ممّا يأتي:**

**1** $\frac{dy}{dx} = \sin x \sec y, \; y(0) = 0$

**الخطوة 1:** أجد الحلَّ العام للمعادلة التفاضلية.

$$\frac{dy}{dx} = \sin x \sec y$$ المعادلة التفاضلية المعطاة

$$\frac{1}{\sec y}\, dy = \sin x \; dx$$ بفصل المُتغيِّرات

$$\cos y \; dy = \sin x \; dx$$ $\frac{1}{\sec y} = \cos y$

$$\int \cos y \; dy = \int \sin x \; dx$$ بمُكامَلة طرفي المعادلة التفاضلية

$$\sin y = -\cos x + C$$ بإيجاد التكامل

إذن، الحلُّ العام للمعادلة التفاضلية هو: $\sin y = -\cos x + C$.

**الخطوة 2:** أجد الحلَّ الخاص للمعادلة التفاضلية الذي يُحقِّق الشرط الأوَّلي $y(0) = 0$.

لإيجاد الحلِّ الخاص لهذه المعادلة، أُعوِّض $x = 0$ و $y = 0$ في الحلِّ العام:

$$\sin y = -\cos x + C$$ الحلُّ العام للمعادلة التفاضلية

$$\sin (0) = -\cos (0) + C$$ بتعويض $x = 0, y = 0$

$$C = 1$$ بحلِّ المعادلة لـ $C$

إذن، الحلُّ الخاص للمعادلة التفاضلية الذي يُحقِّق الشرط الأوَّلي $y(0) = 0$ هو: $\sin y = -\cos x + 1$.

**أتذكَّر**

لإيجاد الحلِّ الخاص، أجد الحلَّ العام الذي يحوي $C$، ثم أجد $C$ الذي يُحقِّق شرط المعادلة المعطى.

2 $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}, y(0) = 2$

**الخطوة 1:** أجد الحلَّ العام للمعادلة التفاضلية.

المعادلة التفاضلية المعطاة $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$

قسمة القوى $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^y}$

بفصل المُتغيِّرات $e^y\, dy = e^x\, dx$

بمُكاملة طرفي المعادلة التفاضلية $\int e^y\, dy = \int e^x\, dx$

بإيجاد التكامل $e^y = e^x + C$

إذن، الحلُّ العام للمعادلة التفاضلية هو: $e^y = e^x + C$.

**الخطوة 2:** أجد الحلَّ الخاص للمعادلة التفاضلية الذي يُحقِّق الشرط الأوَّلي $y(0) = 2$.

لإيجاد الحلِّ الخاص لهذه المعادلة، أُعوِّض $x = 0$ و $y = 2$ في الحلِّ العام:

الحلُّ العام للمعادلة التفاضلية $e^y = e^x + C$

بتعويض $x = 0, y = 2$ $e^2 = e^0 + C$

بحلِّ المعادلة لـ $C$ $C = e^2 - 1$

إذن، الحلُّ الخاص للمعادلة التفاضلية الذي يُحقِّق الشرط الأوَّلي $y(0) = 2$ هو: $e^y = e^x + e^2 - 1$.

**أتحقَّق من فهمي**

**أجد الحلَّ الخاص الذي يُحقِّق الشرط الأوَّلي المعطى لكل معادلة تفاضلية ممّا يأتي:**

a) $\frac{dy}{dx} = xy^2 e^{2x}, y(0) = 1$

b) $\frac{dy}{dx} = y \cos x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

## المعادلات التفاضلية، والحركة في مسار مستقيم

تعلَّمْتُ سابقًا كيف أجد موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم إذا عُلِم اقتران السرعة المتجهة لهذا الجسم. ولكنْ، في بعض الحالات، تعطى السرعة المتجهة للجسم بمعادلة تفاضلية، عندئذٍ يَلزم حلُّ المعادلة التفاضلية لإيجاد موقع الجسم في لحظة مُعيَّنة.

### مثال 5

**يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالمعادلة التفاضلية: $\frac{ds}{dt} = -s^2 \ln(t+1)$، حيث $t$ الزمن بالثواني، و $s$ موقع الجُسَيْم بالأمتار. أجد موقع الجُسَيْم بعد 3 ثوانٍ من بَدْء الحركة، علمًا بأنَّ $s(0) = 0.5$.**

**الخطوة 1:** أجد الحلَّ العام للمعادلة التفاضلية.

$$\frac{ds}{dt} = -s^2 \ln(t+1)$$ المعادلة التفاضلية المعطاة

$$\frac{-1}{s^2}\, ds = \ln(t+1)\, dt$$ بفصل المُتغيِّرات

$$\int \frac{-1}{s^2}\, ds = \int \ln(t+1)\, dt$$ بمُكامَلة طرفي المعادلة التفاضلية

$$\int -s^{-2}\, ds = \int \ln(t+1)\, dt$$ تعريف الأس السالب

$$\frac{1}{s} = (t+1)\ln(t+1) - t + C$$ بإيجاد التكامل

إذن، الحلُّ العام للمعادلة التفاضلية هو: $\frac{1}{s} = (t+1)\ln(t+1) - t + C$.

**الخطوة 2:** أجد الحلَّ الخاص للمعادلة التفاضلية الذي يُحقِّق الشرط الأوَّلي $s(0) = 0.5$.

لإيجاد الحلِّ الخاص لهذه المعادلة، أُعوِّض $t = 0$ و $s = 0.5$ في الحلِّ العام:

$$\frac{1}{s} = (t+1)\ln(t+1) - t + C$$ الحلُّ العام للمعادلة التفاضلية

$$\frac{1}{0.5} = (0+1)\ln(0+1) - 0 + C$$ بتعويض $t = 0, s = 0.5$

$$C = 2$$ بحلِّ المعادلة لـ $C$

**أتذكَّر**

الشرط $s(0) = 0.5$ يعني أنَّ الجسم بدأ حركته على بُعْد $0.5$ m في الجهة الموجبة من نقطة الأصل.

**أتذكَّر**

لإيجاد $\int \ln(t+1)\, dt$، أستعمل التكامل بالأجزاء.

إذن، الحلُّ الخاص للمعادلة التفاضلية الذي يُحقِّق الشرط الأوَّلي $s(0) = 0.5$ هو: $\frac{1}{s} = (t+1) \ln (t+1) - t + 2$، وهو يُمثِّل اقتران الموقع للجسم المُتحرِّك.

**الخطوة 3:** أجد موقع الجُسَيْم المطلوب.

بتعويض $t = 3$ في الحلِّ الخاص للمعادلة $\quad \frac{1}{s} = (3+1) \ln (3+1) - 3 + 2$

باستعمال الآلة الحاسبة $\quad s \approx 0.22$

إذن، موقع الجُسَيْم بعد 3 ثوانٍ من بَدْء الحركة هو: $0.22\ m$

**أتحقَّق من فهمي**

**يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالمعادلة التفاضلية: $\frac{ds}{dt} = st\sqrt{t+1}$، حيث $t$ الزمن بالثواني، و $s$ موقع الجُسَيْم بالأمتار. أجد موقع الجُسَيْم بعد 3 ثوانٍ من بَدْء الحركة، علمًا بأنَّ $s(0) = 1$.**

للمعادلات التفاضلية كثير من التطبيقات الحياتية؛ فهي تُستعمَل لنمذجة الظواهر التي تحوي قِيَمًا مُتغيِّرةً، مثل: تكاثر المجتمعات الحيوية، وانتشار الأمراض، والسلوك الاقتصادي.

## مثال 6 : من الحياة

**أمراض:** انتشر مرض الحصبة في إحدى المدارس بمُعدَّل يُمكِن نمذجته بالمعادلة التفاضلية: $\frac{ds}{dt} = \frac{s(1050 - s)}{5000}$، حيث $s$ عدد الطلبة المصابين بعد $t$ يومًا من اكتشاف المرض:

**معلومة**

الأعراض الأوَّلية للإصابة بمرض الحصبة شبيهة بأعراض مرض الإنفلونزا. وبعد بضعة أيام، تظهر بقع حمراء على وجه المريض ويديه وساعديه، ثمَّ تمتد هذه البقع لتصل منطقة الجذع.

1) **أحُلُّ المعادلة التفاضلية لإيجاد عدد الطلبة المصابين بعد $t$ يومًا، علمًا بأنَّ عدد الطلبة المصابين عند اكتشاف المرض هو 50 طالبًا.**

**الخطوة 1:** أجد الحلَّ العام للمعادلة التفاضلية.

المعادلة التفاضلية المعطاة $\quad \frac{ds}{dt} = \frac{s(1050 - s)}{5000}$

بفصل المُتغيِّرات $\quad \frac{1}{s(1050 - s)}\, ds = \frac{1}{5000}\, dt$

بمُكامَلة طرفي المعادلة التفاضلية $\int \frac{1}{s(1050-s)}\,ds = \int \frac{1}{5000}\,dt$

التكامل بالكسور الجزئية $\int \left(\frac{1}{1050s} + \frac{1}{1050\,(1050-s)}\right) ds = \int \frac{1}{5000}\,dt$

بإخراج $\frac{1}{1050}$ عاملًا مشتركًا $\frac{1}{1050}\int \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{1050-s}\right) ds = \int \frac{1}{5000}\,dt$

بضرب طرفي المعادلة في 1050 $\int \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{1050-s}\right) ds = \int \frac{1050}{5000}\,dt$

بإيجاد التكامل $\ln|s| - \ln|1050-s| = 0.21t + C$

قانون القسمة في اللوغاريتمات $\ln\left|\frac{s}{1050-s}\right| = 0.21t + C$

إذن، الحلُّ العام للمعادلة التفاضلية هو: $\ln\left|\frac{s}{1050-s}\right| = 0.21t + C$.

**الخطوة 2:** أجد الحلَّ الخاص للمعادلة التفاضلية الذي يُحقِّق الشرط الأوَّلي.

لإيجاد الحلِّ الخاص لهذه المعادلة، أُعوِّض $t = 0$، و $s = 50$ في الحلِّ العام:

الحلُّ العام للمعادلة التفاضلية $\ln\left|\frac{s}{1050-s}\right| = 0.21t + C$

بتعويض $t = 0, s = 50$ $\ln\left|\frac{50}{1050-50}\right| = 0.21(0) + C$

بحلِّ المعادلة لـ $C$ $C \approx -3$

إذن، يُمكِن نمذجة عدد الطلبة المصابين بالمرض بعد $t$ يومًا بالعلاقة الآتية: $\ln\left|\frac{s}{1050-s}\right| = 0.21t - 3$.

**2** **بعد كم يومًا يصبح عدد الطلبة المصابين 350 طالبًا؟**

الحلُّ الخاص للمعادلة التفاضلية $\ln\left|\frac{s}{1050-s}\right| = 0.21t - 3$

بتعويض $s = 350$ $\ln\left|\frac{350}{1050-350}\right| = 0.21t - 3$

بحلِّ المعادلة لـ $t$ $t \approx 11$

إذن، يصبح عدد الطلبة المصابين 350 طالبًا بعد 11 يومًا تقريبًا من اكتشاف المرض.

**أتذكَّر**

أُجزِّئ المقدار النسبي: $\frac{1}{s(1050-s)}$ لإيجاد التكامل.

**أتعلَّم**

يساعد ضرب طرفي المعادلة في 1050 على تبسيط المعادلة، ويُعَدُّ هذا الإجراء اختياريًا في الحلِّ.

### أتحقَّق من فهمي

**غزلان:** يُمكِن نمذجة مُعدَّل تغيُّر عدد الغزلان في إحدى الغابات بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dP}{dt} = \frac{1}{20000} P(1000 - P)$، حيث $P$ عدد الغزلان في الغابة بعد $t$ سنة من بَدْء دراسة عليها:

a) أحُلُّ المعادلة التفاضلية لإيجاد عدد الغزلان في الغابة بعد $t$ سنة من بَدْء الدراسة، علمًا بأنَّ عددها عند بَدْء الدراسة هو 2500 غزال.

b) بعد كم سنةً يصبح عدد الغزلان في الغابة 1800 غزال؟

### أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أُحدِّد إذا كان الاقتران المعطى حلًّا للمعادلة التفاضلية في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $y = \sqrt{x}\,;\ xy' - y = 0$

2) $y = x \ln x - 5x + 7;\ y'' - \frac{1}{x} = 0$

3) $y = \tan x\,;\ y' + y^2 = 1$

4) $y = e^x + 3xe^x\,;\ y'' - 2y' + y = 0$

أحُلُّ كُلًّا من المعادلات التفاضلية الآتية:

5) $\frac{dy}{dx} = 3x\sqrt{y}$

6) $\frac{dy}{dx} + \frac{3x}{y^2} = 0$

7) $\frac{dy}{dx} = \cos x \sin y$

8) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{(x^2+1)^2}$

9) $\frac{dy}{dx} = xe^{x+y}$

10) $e^{-1/x}\,\frac{dy}{dx} = x^{-2}y^2$

11) $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x-3}$

12) $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 \sin^2 y}{x^3+2}$

13) $\frac{dy}{dx} = y^3 \ln x$

14) $\frac{dy}{dx} = 2x^3(y^2 - 1)$

15) $y\frac{dy}{dx} = \sin^3 x\ \cos^2 x$

16) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{xy}$

17) $\frac{dy}{dx} = y \ln\sqrt{x}$

18) $(2x+1)(x+2)\frac{dy}{dx} = -3(y-2)$

أجد الحلَّ الخاص الذي يُحقِّق الشرط الأوَّلي المعطى لكلٍّ من المعادلات التفاضلية الآتية:

19 $\frac{dy}{dx} = y^2 \sqrt{4-x}\,; y(1) = 2$

20 $\frac{dy}{dx} = \frac{2\sin^2 x}{y}\,; y(0) = 1$

21 $\frac{dy}{dx} = 2\cos^2 x \cos^2 y\,; y(0) = \frac{\pi}{4}$

22 $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x\, e^{\sin x}}{e^y}\,; y(\pi) = 0$

23 $\frac{dy}{dx} = \frac{8x-18}{(3x-8)(x-2)}\,; y(3) = 8$

24 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy}\,; y(e) = 1$

25 تتحرَّك سيّارة في مسار مستقيم، ويعطى تسارعها بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dv}{dt} = 10 - 0.5v$، حيث $t$ الزمن بالثواني، و$v$ سرعتها المتجهة بالمتر لكل ثانية. أجد السرعة المتجهة للسيّارة بعد $t$ ثانية من بَدْء حركتها، علمًا بأنَّ السيّارة تحرَّكت من وضع السكون.

26 ذئاب: يُمكِن نمذجة مُعدَّل تغيُّر عدد الذئاب في إحدى الغابات بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dN}{dt} = 260 - 0.4N$، حيث $N$ عدد الذئاب في الغابة بعد $t$ سنة من بَدْء دراسة عليها. أجد عدد الذئاب في الغابة بعد 3 سنوات من بَدْء الدراسة، علمًا بأنَّ عددها عند بَدْء الدراسة هو 300 ذئب.

**كرة: تنكمش كرة، ويتغيَّر نصف قُطْرها بمُعدَّل يُمكِن نمذجته بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dr}{dt} = -0.0075r^2$، حيث $r$ طول نصف قُطْر الكرة بالسنتيمتر، و$t$ الزمن بالثواني بعد بَدْء انكماش الكرة:**

27 أحُلُّ المعادلة التفاضلية لإيجاد طول نصف قُطْر الكرة بعد $t$ ثانية، علمًا بأنَّ طول نصف الكرة الابتدائي هو 20 cm.

28 بعد كم ثانيةً يصبح طول نصف قُطْر الكرة 10 cm؟

**حشرات: يتغيَّر عدد الحشرات في مجتمع للحشرات بمُعدَّل يُمكِن نمذجته بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dn}{dt} = 0.2n(0.2 - \cos t)$، حيث $n$ عدد الحشرات، و$t$ الزمن بالأسابيع بعد بَدْء ملاحظة الحشرات:**

29 أحُلُّ المعادلة التفاضلية لإيجاد عدد الحشرات في هذا المجتمع بعد $t$ أسبوعًا، علمًا بأنَّ عددها الابتدائي هو 400 حشرة.

30 أجد عدد الحشرات في هذا المجتمع بعد 3 أسابيع.

31 تُمثِّل المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = y\cos x$ ميل المماس لمنحنى علاقة ما. أجد قاعدة هذه العلاقة إذا علمْتُ أنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة $(0, 1)$.

32 تُمثِّل المعادلة التفاضلية: $x(x+1)\frac{dy}{dx} = y$ ميل المماس لمنحنى علاقة ما. أجد قاعدة هذه العلاقة إذا علمْتُ أنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة $(1, 3)$.

## مهارات التفكير العليا

تحدٍّ: أحُلُّ كُلًّا من المعادلات التفاضلية الآتية:

33 $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^2} - xy - \frac{1}{y^2} + y$

34 $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2y-1} - \frac{2x}{3y-2}$

35 $\frac{dy}{dx} = 1 + \tan^2 x + \tan^2 y + \tan^2 x \tan^2 y$

تبرير: يُمكِن نمذجة مُعدَّل تحلُّل مادة مُشِعَّة بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dx}{dt} = -\lambda x$، حيث $x$ الكتلة المتبقية من المادة المُشِعَّة بالملّيغرام بعد $t$ يومًا، و $\lambda > 0$:

36 أُثبِت أنَّه يُمكِن كتابة الحلِّ العام للمعادلة التفاضلية في صورة: $x = ae^{-\lambda t}$، حيث $a$ ثابت، مُبرِّرًا إجابتي.

37 إذا كان عمر النصف للمادة المُشِعَّة هو الوقت اللازم لتحلُّل نصف هذه المادة، و $a$ كتلة المادة الابتدائية، فأُثبِت أنَّ عمر النصف للمادة المُشِعَّة هو $\frac{\ln 2}{\lambda}$، مُبرِّرًا إجابتي.

تبرير: تُمثِّل المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{3y}$ ميل المماس لمنحنى علاقة ما:

38 أجد قيمة $n$ التي تجعل العلاقة: $x^2 + ny^2 = a$ حلًّا للمعادلة التفاضلية المعطاة، حيث $a$ ثابت اختياري، مُبرِّرًا إجابتي.

39 أجد إحداثيي نقاط تقاطع منحنى العلاقة مع المحور $x$ إذا علمْتُ أنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة $(5, 4)$، مُبرِّرًا إجابتي.

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 قيمة: $\int_0^2 e^{2x}\, dx$ هي:

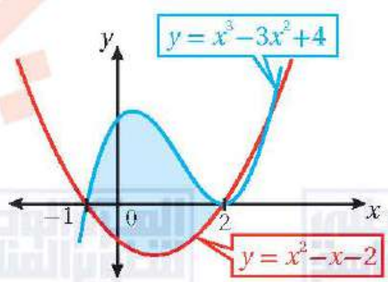
a) $e^4 - 1$ b) $e^4 - 2$

c) $2e^4 - 2$ d) $\frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}$

2 قيمة: $\int_{-4}^{4} (4 - |x|)\, dx$ هي:

a) 0 b) 4 c) 16 d) 8

3 يُبيِّن الشكل الآتي المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $y = x^3 - 3x^2 + 4$، و $y = x^2 - x - 2$، في الفترة $[-1, 2]$. التكامل المحدود الذي يُمكِن عن طريقه إيجاد مساحة المنطقة المُظلَّلة هو:




a) $\int_{-1}^{2} (x^3 - 4x^2 + x + 6)\, dx$

b) $\int_{-1}^{2} (-x^3 + 4x^2 - x - 6)\, dx$

c) $\int_{-1}^{2} (x^3 - 4x^2 - x + 2)\, dx$

d) $\int_{-1}^{2} (x^3 - 2x^2 - x + 2)\, dx$

4 حُلّ المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = 2xy$ الذي تُحقِّقه النقطة $(0, 1)$ هو:

a) $y = e^{x^2}$ b) $y = x^2 y$

c) $y = x^2 y + 1$ d) $y = \frac{x^2 y^2}{2 + 1}$

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

5 $\int \frac{1}{\sqrt{e^x}}\, dx$

6 $\int \left(\tan 2x + e^{3x} - \frac{1}{x}\right) dx$

7 $\int \csc^2 x\,(1 + \tan^2 x)\, dx$

8 $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 5}\, dx$

9 $\int \frac{2x^2 + 7x - 3}{x - 2}\, dx$

10 $\int \sec^2 (2x - 1)\, dx$

11 $\int \cot (5x + 1)\, dx$

12 $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x\, dx$

13 $\int_0^{\pi} \cos^2 0.5x\, dx$

14 $\int_0^2 |x^3 - 1|\, dx$

15 $\int_0^{\pi/4} (\sec^2 x + \cos 4x)\, dx$

16 $\int_0^{\pi/3} \left(\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 1 + \cos 2x\right) dx$

17 $\int_0^{\pi/8} \sin 2x \cos 2x\, dx$

18 $\int \frac{4}{x^2 - 4}\, dx$

19 $\int \frac{x + 7}{x^2 - x - 6}\, dx$

20 $\int \frac{x - 1}{x^2 - 2x - 8}\, dx$

21 $\int \frac{x^2 + 3}{x^3 + x}\, dx$

22 $\int \frac{1}{x^2 (1 - x)}\, dx$

23 $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x - 3 \cos x}\, dx$

24 $\int \frac{\sqrt{x}}{x - 4}\, dx$

25 $\int \sec^2 x \tan x \sqrt{1+\tan x}\ dx$

26 $\int \frac{x}{\sqrt[3]{4-3x}}\ dx$

27 $\int \frac{(\ln x)^6}{x}\ dx$

28 $\int (x+1)^2 \sqrt{x-2}\ dx$

29 $\int x \csc^2 x\ dx$

30 $\int (x^2 - 5x)\ e^x\ dx$

31 $\int x \sin 2x\ dx$

**أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:**

32 $\int_0^1 t 3^{t^2}\ dt$

33 $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \cot^3 x\ dx$

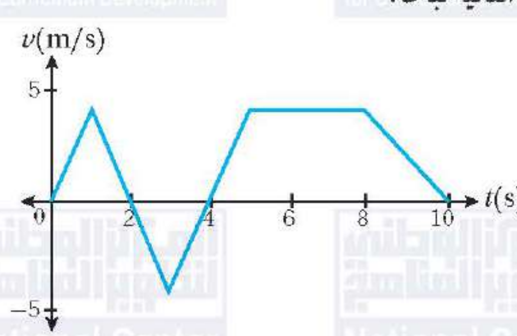
34 $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{4+3\sin x}}\ dx$

35 $\int_{-1}^{0} \frac{x^2 - x}{x^2+x-2}\ dx$

36 $\int_1^2 \frac{32x^2+4}{16x^2-1}\ dx$

37 $\int_{1/2}^{e/2} x \ln 2x\ dx$

**يُبيِّن الشكل الآتي منحنى السرعة المتجهة – الزمن لجُسَيْم يتحرَّك على المحور $x$ في الفترة الزمنية $[0, 10]$. إذا بدأ الجُسَيْم الحركة من $x = 0$ عندما $t = 0$، فأُجيب عن الأسئلة الثلاثة التالية تباعًا:**




38 أجد إزاحة الجُسَيْم في الفترة الزمنية المعطاة.

39 أجد المسافة التي قطعها الجُسَيْم في الفترة الزمنية المعطاة.

40 أجد الموقع النهائي للجُسَيْم.

41 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = \sqrt{x}$، و $g(x) = x^2$.

42 أجد المساحة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = x^3$، و $g(x) = x$.

43 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = -x$، و $g(x) = x^2 + 2$، والمستقيمين: $x = -2$، و $x = 2$.

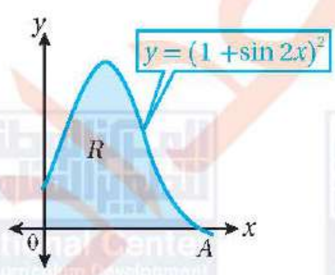
44 أُثبِت أنَّ: $\int_2^5 \frac{x^2}{x^2-1}\ dx = 3 + \frac{1}{2}\ln 2$.

**يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = \frac{t}{9} - \frac{1}{\sqrt{t+6}}$، حيث $t$ الزمن بالثواني، و $v$ سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية:**

45 أجد إزاحة الجُسَيْم في الفترة $[1, 10]$.

46 أجد المسافة الكلية التي قطعها الجُسَيْم في الفترة $[1, 10]$.

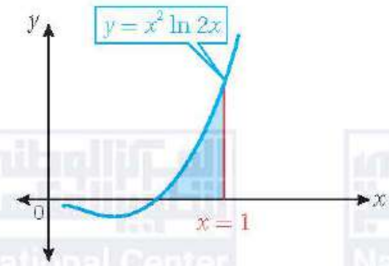
**يُمثِّل الشكل المجاور منحنى الاقتران: $y = (1 + \sin 2x)^2$، حيث: $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$:**

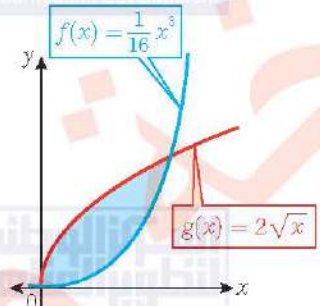



47 أجد إحداثيي النقطة $A$.

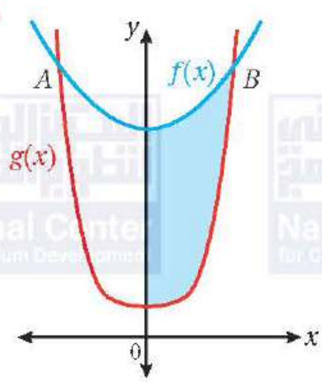
48 أجد مساحة المنطقة $R$.

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلين البيانيين الآتيين:

49



50



يُبيِّن الشكل الآتي منحنيي الاقترانين: $f(x) = x^2 + 14$، و $g(x) = x^4 + 2$:




51 إذا كان منحنيا الاقترانين يتقاطعان في النقطة $A$ والنقطة $B$، فأجد إحداثيي نقطتي التقاطع.

52 أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المُظلَّلة حول المحور $x$.

53 أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = \sqrt{x\, e^{-x}}$، والمحور $x$، والمستقيمين: $x = 1$، و $x = 2$ حول المحور $x$.

أحُلُّ كُلًّا من المعادلات التفاضلية الآتية:

54 $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y}}{x}$

55 $\frac{dy}{dx} = xe^x \sec y$

56 $3y^2 \frac{dy}{dx} = 8x$

57 $x\frac{dy}{dx} = 3x\sqrt{y} + 4\sqrt{y}$

أجد الحلَّ الخاص الذي يُحقِّق الشرط الأوَّلي المعطى لكل معادلة تفاضلية ممّا يأتي:

58 $\frac{dy}{dx} + 4y = 8\,;\, y(0) = 3$

59 $\frac{dy}{dx} = \frac{5e^y}{(2x+1)(x-2)}\,;\, y(-3) = 0$

أسماك: يتغيَّر عدد الأسماك في إحدى البحيرات بمُعدَّل يُمكِن نمذجته بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dx}{dt} = 0.2x$، حيث $x$ عدد الأسماك، و $t$ الزمن بالسنوات منذ هذه السنة:

60 أحُلُّ المعادلة التفاضلية لإيجاد عدد الأسماك في البحيرة بعد $t$ سنة، علمًا بأنَّ عددها هذه السنة هو 300 سمكة.

61 أجد عدد الأسماك في البحيرة بعد 5 سنوات.

62 تجارة: يُمثِّل الاقتران $p(x)$ سعر القطعة الواحدة (بالدينار) من مُنتَج مُعيَّن، حيث $x$ عدد القطع المَبيعة من المُنتَج بالمئات. إذا كان: $p'(x) = \frac{-300\,x}{\sqrt{(9+x^2)^3}}$ هو مُعدَّل التغيُّر في سعر القطعة الواحدة من المُنتَج، فأجد $p(x)$، علمًا بأنَّ سعر القطعة الواحدة هو 75 JD عندما يكون عدد القطع المَبيعة منها 400 قطعة.

# الوحدة 5

# المتجهات
# Vectors

## ما أهمية هذه الوحدة؟

تُستعمَل المتجهات في كثير من مجالات العلوم والهندسة، مثل تمثيل الإزاحة والسرعة والتسارع والقوَّة، وتُستعمَل أيضًا في عديد من الابتكارات الحديثة، مثل السيّارات ذاتية القيادة التي تتعرَّف إلى الأجسام التي حولها على الطريق بحسّاساتها الدقيقة التي يعتمد عملها على المتجهات.

## تعلَّمْتُ سابقًا:

- المتجهات، وكيفية تمثيلها في المستوى الإحداثي.
- جمع المتجهات، وطرحها، وضربها القياسي.
- التفسير الهندسي للمتجهات، وبعض التطبيقات الحياتية والعلمية عليها.
- الضرب القياسي للمتجهات، وإيجاد قياس الزاوية بين متجهين في المستوى الإحداثي.

## سأتعلَّم في هذه الوحدة:

- تعيين النقاط والمتجهات في الفضاء.
- التعبير عن المتجهات جبريًّا، وإجراء العمليات عليها في الفضاء.
- إيجاد معادلة متجهة للمستقيم في الفضاء.
- الضرب القياسي، وإيجاد قياس الزاوية بين متجهين في الفضاء.

أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحات (21–19) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

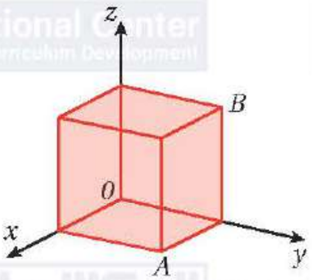
الدرس 1

# المتجهات في الفضاء
# Vectors in Space

**فكرة الدرس** تمثيل المتجه في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد، والتعبير عنه بالصورة الإحداثية، أو بدلالة متجهات الوحدة الأساسية.

**المصطلحات** الثُّمُن، متجه الموقع، متجه الإزاحة، متجه الوحدة.

**مسألة اليوم** يُمثِّل الشكل المجاور مُكعَّبًا طول ضلعه 5 cm، ما إحداثيات كلٍّ من الرأس $A$، والرأس $B$؟



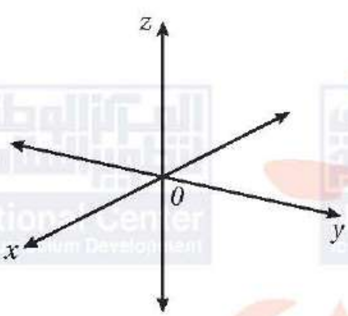

### نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد

تعلَّمْتُ سابقًا كيف أُحدِّد موقع نقطة في المستوى الإحداثي باستعمال المحور $x$ والمحور $y$ المُتعامِدين، وزوجًا من الإحداثيات في صورة $(x, y)$، إلّا أنَّ المستوى الإحداثي ليس كافيًا لتحديد موقع نقطة ما في الفضاء.

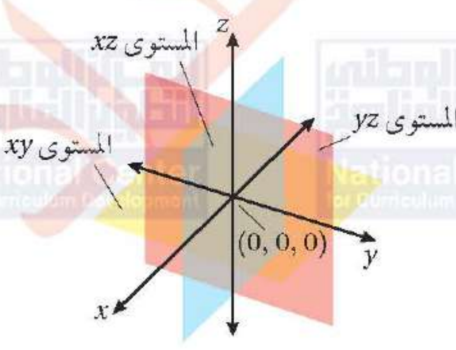
**لغة الرياضيات**

ينتج من إضافة المحور $z$ ما يُسمّى نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد.

يُمكِن تحديد موقع نقطة في الفضاء بإضافة محور ثالث عمودي إلى كلٍّ من المحور $x$ والمحور $y$، يُسمّى المحور $z$، عندئذٍ يُحدِّد الثلاثي المُرتَّب $(x, y, z)$ موقع النقطة في الفضاء.

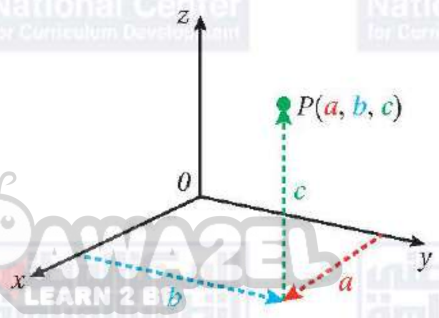



ينتج من إضافة المحور $z$ ثلاثة مستويات، هي: المستوى $xy$، والمستوى $xz$، والمستوى $yz$. وتُقسِّم هذه المستويات الفضاء إلى 8 أقسام، يُسمّى كلٌّ منها **الثُّمُن** (octant).




**أتعلَّم**

يُشبِه الثُّمُن الأوَّل جزءًا من غرفة بين حائطين متقاطعين وأرضية الغرفة.




لتحديد موقع النقطة $P(a, b, c)$ في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد، أُعيِّن النقطة $(a, b)$ في المستوى $xy$ أوّلًا، ثم أتحرَّك إلى الأعلى أو إلى الأسفل بموازاة المحور $z$، تبعًا لقيمة الإحداثي $z$ وإشارته.

**أتعلَّم**

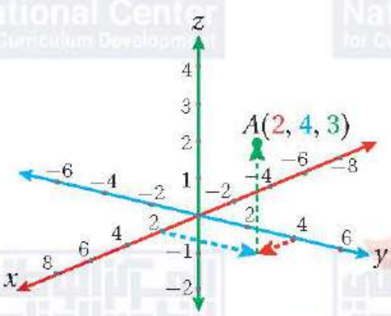
يُطلَق على نقطة تقاطع المحاور الإحداثية الثلاثة اسم نقطة الأصل، وهي: $O(0, 0, 0)$.

يُستعمَل الورق المُنقَّط متساوي القياس لتعيين النقاط في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد بدقَّة؛ لأنَّ أطوال الوحدات على المحاور الثلاثة تظهر فيه متساوية.

## مثال 1

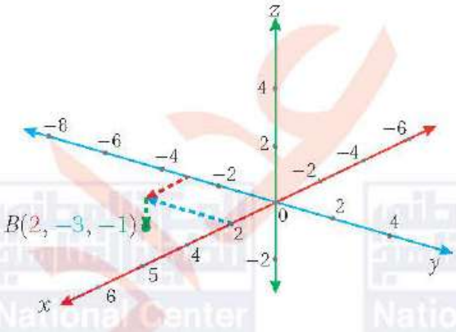
أُعيِّن كل نقطة ممّا يأتي في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد:

**1** $A(2, 4, 3)$




أُعيِّن الزوج $(2, 4)$ في المستوى $xy$، ثم أتحرَّك إلى الأعلى بمقدار 3 وحدات بموازاة المحور $z$، ثم أُعيِّن النقطة $A(2, 4, 3)$ كما في الشكل المجاور.

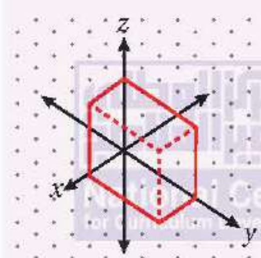
**2** $B(2, -3, -1)$




أُعيِّن الزوج المُرتَّب $(2, -3)$ في المستوى $xy$، ثم أتحرَّك إلى الأسفل بمقدار وحدة واحدة بموازاة المحور $z$، ثم أُعيِّن النقطة $B(2, -3, -1)$ كما في الشكل المجاور.

**أتعلَّم**

يُمكِن التحقُّق من صحة الحلِّ بإكمال رسم متوازي المستطيلات، وملاحظة ارتفاعه على المحور $z$.




### أتحقَّق من فهمي

أُعيِّن كُلًّا من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد:

a) $(-3, 2, 4)$ b) $(1, 0, -4)$ c) $(5, -4, -2)$ d) $(-4, -2, 3)$

**إرشاد**

أستعمل الورق المُنقَّط متساوي القياس الموجود في كتاب التمارين.

## المسافة بين نقطتين، وإحداثيات نقطة المنتصف في الفضاء

إنَّ عملية حساب المسافة بين نقطتين في الفضاء، وإيجاد إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء، تُشبِه حساب المسافة بين نقطتين، وإيجاد إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي.

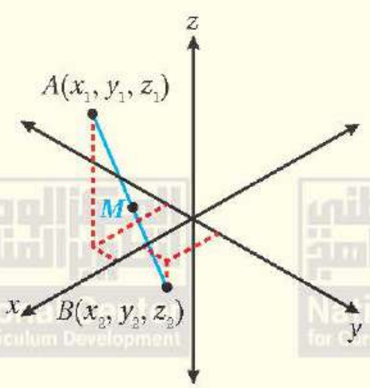
### مفهوم أساسي: المسافة بين نقطتين، وإحداثيات نقطة المنتصف في الفضاء

إذا كانت: $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$، فإنَّ المسافة بين النقطتين $A$ و $B$ تعطى بالصيغة:

$$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

وإحداثيات نقطة منتصف $\overline{AB}$ هي:

$$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$




**رموز رياضية**

يُستعمَل الرمز $M$ للدلالة على منتصف القطعة المستقيمة؛ وهو الحرف الأوَّل من الكلمة الإنجليزية (midpoint).

### مثال 2

إذا كانت: $A(-4, 7, -2), B(6, 1, -4)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1 المسافة بين $A$ و $B$.

صيغة المسافة بين نقطتين

$$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

بالتعويض: $(x_1, y_1, z_1) = (-4, 7, -2)$, $(x_2, y_2, z_2) = (6, 1, -4)$

$$= \sqrt{(6-(-4))^2 + (1-7)^2 + (-4-(-2))^2}$$

بالتبسيط

$$= 2\sqrt{35}$$

إذن، المسافة بين $A$ و $B$ هي: $2\sqrt{35}$ وحدة.

**أتذكَّر**

إذا كانت $A$، و $B$ نقطتين في المستوى أو في الفضاء، فإنَّ الرمز $AB$ يدلُّ على المسافة بين هاتين النقطتين، في حين يدلُّ الرمز $\overline{AB}$ على القطعة المستقيمة الواصلة بين هاتين النقطتين.

2 إحداثيات نقطة منتصف $\overline{AB}$.

صيغة إحداثيات نقطة المنتصف

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

بالتعويض: $(x_1, y_1, z_1) = (-4, 7, -2)$, $(x_2, y_2, z_2) = (6, 1, -4)$

$$M = \left(\frac{-4+6}{2}, \frac{7+1}{2}, \frac{-2+(-4)}{2}\right)$$

بالتبسيط

$$M = (1, 4, -3)$$

نقطة منتصف $\overline{AB}$ هي: $(1, 4, -3)$.

**أتحقَّق من فهمي**

إذا كانت: $M(5,-3, 6)$, $N(2, 1, -6)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

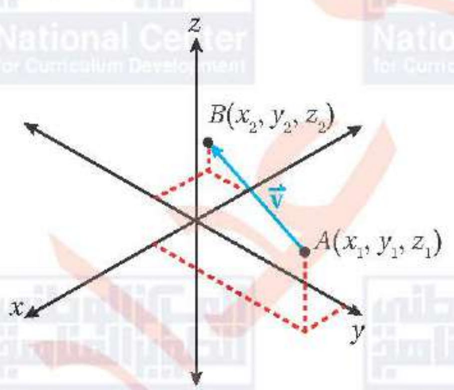
a) المسافة بين $M$ و $N$.

b) إحداثيات نقطة منتصف $\overline{MN}$.

## المتجهات في الفضاء

إنَّ الكمّيات المتجهة (مثل: الإزاحة، والسرعة المتجهة) لا تقتصر على المستوى $xy$؛ لذا لا بُدَّ من التوسُّع في مفهوم المتجهات ليشمل الفضاء.

تُمثَّل المتجهات في الفضاء بطريقة مُشابِهة لتمثيلها في المستوى الإحداثي. فالمتجه $\vec{\mathbf{v}}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1, z_1)$، ونقطة نهايته $B(x_2, y_2, z_2)$، يُمثَّل في الفضاء بسهم، بدايته $A$، ونهايته $B$ كما في الشكل المجاور، ويُرمَز إليه بالرمز $\overrightarrow{AB}$، أو الرمز $\vec{\mathbf{v}}$.




يُمكِن كتابة المتجه بالصورة الإحداثية عن طريق طرح إحداثيات نقطة البداية من إحداثيات نقطة النهاية كما يأتي:

$$\vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

**رموز رياضية**

يُرمَز إلى المتجه بحرفين كبيرين فوقهما سهم، أو بحرف صغير غامق فوقه سهم.

**أتعلَّم**

تسمى $v_1, v_2, v_3$ إحداثيات المتجه $\vec{\mathbf{v}}$ ويعبر كل منها عن مقدار الإزاحة بالنسبة إلى المحور $x$، أو المحور $y$، أو المحور $z$.

يُمكِن حســاب مقدار المتجه (طول المتجه) في الفضاء بطريقة مُشابِهة لحسابه في المستوى الإحداثي.

## مفهوم أساسي — مقدار المتجه في الفضاء

إذا كانت: $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ نقطتا بداية المتجه $\overrightarrow{AB}$، ونهايته، فإنَّ:

$$|\vec{\mathbf{v}}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

وإذا كان: $\vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{AB} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$، فإنَّ:

$$|\vec{\mathbf{v}}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

**أتذكَّر**

يُرمَز إلى مقــدار المتجه $\overrightarrow{AB}$ بالرمز $|\overrightarrow{AB}|$.

### مثال 3

إذا كان: $A(-3, 6, 1), B(4, 5, -2)$، فأكتــب المتجــه $\overrightarrow{AB}$ بالصــورة الإحداثية، ثم أجد مقداره.

$\overrightarrow{AB} = \langle x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\rangle$ الصورة الإحداثية للمتجه

$= \langle 4-(-3), 5-6, -2-1\rangle$ بالتعويض: $(x_1, y_1, z_1) = (-3, 6, 1)$, $(x_2, y_2, z_2) = (4, 5, -2)$

$= \langle 7,-1,-3\rangle$ بالتبسيط

إذن، $\overrightarrow{AB} = \langle 7, -1, -3\rangle$.

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$ صيغة مقدار المتجه

$= \sqrt{7^2 + (-1)^2 + (-3)^2}$ بالتعويض: $v_1 = 7, v_2 = -1, v_3 = -3$

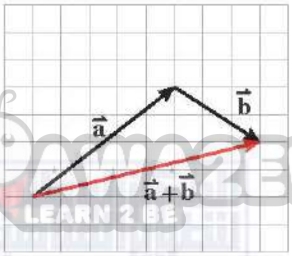
$= \sqrt{59}$ بالتبسيط

إذن، مقدار $\overrightarrow{AB}$ هو: $\sqrt{59}$ وحدة.

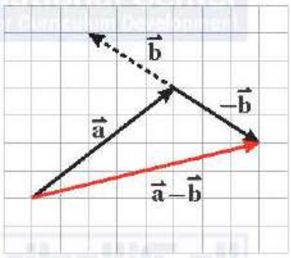
**أتحقَّق من فهمي**

إذا كان: $A(-1, 5, 3), B(-5, 3, -2)$، فأكتــب المتجــه $\overrightarrow{AB}$ بالصورة الإحداثية، ثم أجد مقداره.

### جمع المتجهات وطرحها وضربها في عدد حقيقي هندسيًّا




تعلَّمْتُ سابقًا أنَّه لجمع المتجه $\vec{a}$ والمتجه $\vec{b}$ هندسيًّا باستعمال قاعدة المثلث، فإنَّني أرسم أوّلاً المتجه $\vec{a}$، ثم أرسم المتجه $\vec{b}$ بحيث تكون نقطة بدايته هي نقطة نهاية المتجه $\vec{a}$، ثم أَصِل بين نقطة بداية المتجه $\vec{a}$ ونقطة نهاية المتجه $\vec{b}$، فينتج المتجه $\vec{a}+\vec{b}$ والذي يسمى أيضًا المحصلة.



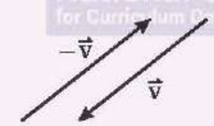

تعلَّمْتُ أيضًا أنَّه لإيجاد $\vec{a}-\vec{b}$ ، فإنَّني أجمع المتجه $\vec{a}$ مع معكوس المتجه $\vec{b}$؛ أيْ:

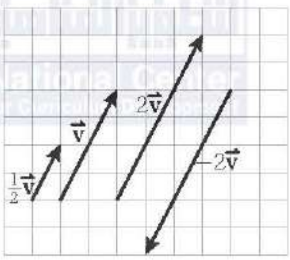
$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

ومن ثَمَّ، يُمكِن إيجاد ناتج طرح $\vec{a}-\vec{b}$ هندسيًّا بطريقة مُشابِهة لعملية الجمع كما في الشكل المجاور.

**أتذكَّر**

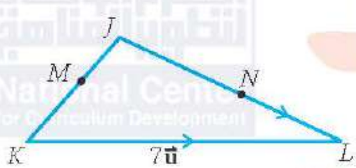
معكوس المتجه $\vec{v}$ هو متجه له نفس مقدار المتجه $\vec{v}$، لكنَّه يكون في اتجاه مُعاكِس له، ويُرمَز إليه بالرمز $-\vec{v}$ .




يُمكِن تمثيل ضرب المتجه $\vec{v}$ في العدد الحقيقي $k$ برسم متجه موازٍ لـ $\vec{v}$، وطوله $|k|$ مَرَّة طول $\vec{v}$، وله الاتجاه نفسه إذا كان $k>0$، وله عكس اتجاه $\vec{v}$ إذا كان $k<0$ كما في الشكل المجاور.

**مثال 4**




في المثلث $JKL$، إذا كانت $M$ نقطة منتصف $\overline{JK}$، وكانت: $JN:NL=3:2$، وكانت: $\overrightarrow{KL}=7\vec{u}$ وكانت: $\overrightarrow{NL}=4\vec{b}$، فأكتب $\overrightarrow{JM}$ بدلالة $\vec{u}$ و $\vec{b}$.

$\overrightarrow{JN}=\frac{3}{2}\times\overrightarrow{NL}$ — تعريف التناسب

$\overrightarrow{JN}=\frac{3}{2}\times 4\vec{b}=6\vec{b}$ — بتعويض $\overrightarrow{NL}=4\vec{b}$

$\overrightarrow{JK}=\overrightarrow{JL}+(-\overrightarrow{LK})$ — قاعدة المثلث لجمع المتجهات

$=6\vec{b}+4\vec{b}-7\vec{u}$ — بالتعويض

$=10\vec{b}-7\vec{u}$ — بالتبسيط

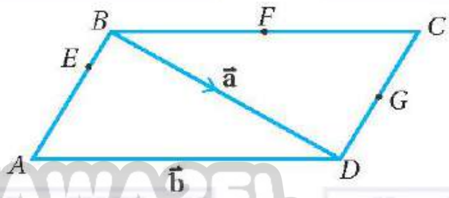
$\overrightarrow{JM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{JK}$ — $M$ منتصف $\overrightarrow{JK}$

$=\frac{1}{2}(10\vec{b}-7\vec{u})$ — بالتعويض

إذن، $\overrightarrow{JM}=5\vec{b}-3.5\vec{u}$.

### أتحقَّق من فهمي

في متوازي الأضلاع $ABCD$ المجاور، إذا كانت $F$ نقطة منتصف $\overline{BC}$، و $G$ نقطة منتصف $\overline{DC}$، وكانت: $\overrightarrow{BD} = \vec{a}$ وكانت: $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$، وكانت: $AE = 3EB$، فأكتب كُلاً ممّا يأتي بدلالة $\vec{a}$ و $\vec{b}$.




a) $\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{EB}$

c) $\overrightarrow{EF}$

**أتعلَّم**

لإيجاد حاصل طرح $\vec{a} - \vec{b}$، يُرسَم $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بَدْءًا بالنقطة نفسها، عندئذٍ يكون $\vec{a} - \vec{b}$ هو المتجه الذي يبدأ بنقطة نهاية $\vec{b}$، وينتهي بنقطة نهاية $\vec{a}$.

## جمع المتجهات وطرحها وضربها في عدد حقيقي جبريًا

يُمكِن تطبيق عمليات الجمع والطرح والضرب في عدد حقيقي على المتجهات في الفضاء كما هو حال المتجهات في المستوى الإحداثي.

### مفهوم أساسي: جمع المتجهات وطرحها وضربها في عدد حقيقي

إذا كان: $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, $\vec{w} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$، متجهين في الفضاء، وكان $c$ عددًا حقيقيًا، فإنَّ:

$$\vec{v} + \vec{w} = \langle (v_1 + w_1), (v_2 + w_2), (v_3 + w_3) \rangle$$

$$\vec{v} - \vec{w} = \langle (v_1 - w_1), (v_2 - w_2), (v_3 - w_3) \rangle$$

$$c\vec{v} = \langle cv_1, cv_2, cv_3 \rangle$$

### مثال 5

إذا كان: $\vec{a} = \langle 4, 7, -3 \rangle$, $\vec{b} = \langle 9, -2, -5 \rangle$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

**1** $2\vec{a} + 3\vec{b}$

$2\vec{a} + 3\vec{b} = 2\langle 4, 7, -3 \rangle + 3\langle 9, -2, -5 \rangle$ بالتعويض

$= \langle 8, 14, -6 \rangle + \langle 27, -6, -15 \rangle$ ضرب المتجه في عدد حقيقي

$= \langle 35, 8, -21 \rangle$ بجمع المتجهين

**2** $4\vec{a} - 2\vec{b}$

$4\vec{a} - 2\vec{b} = 4\langle 4, 7, -3 \rangle - 2\langle 9, -2, -5 \rangle$ بالتعويض

$= \langle 16, 28, -12 \rangle + \langle -18, 4, 10 \rangle$ ضرب المتجه في عدد حقيقي

$= \langle -2, 32, -2 \rangle$ بجمع المتجهين

**أتعلَّم**

تُحقِّق عملية جمع المتجهات خاصيتي التبديل والتجميع؛ أيْ إنَّ:

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

### أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $\vec{\mathbf{u}} = \langle 4, 5, -3\rangle, \vec{\mathbf{v}} = \langle 3, 0, -5\rangle, \vec{\mathbf{w}} = \langle 9, -2, -5\rangle$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) $3\vec{\mathbf{v}} - 4\vec{\mathbf{u}}$

b) $3\vec{\mathbf{u}} + 5\vec{\mathbf{v}} - 2\vec{\mathbf{w}}$

## تساوي المتجهات

يتساوى متجهان إذا كان لهما الاتجاه والمقدار نفساهما، عندئذٍ تكون لهما الصورة الإحداثية نفسها؛ أيْ إنَّ إحداثياتهما المُتناظِرة تكون متساوية.

### أتعلَّم

قد يتساوى المتجهان $\vec{\mathbf{v}}$ و $\vec{\mathbf{w}}$ بالرغم من اختلاف موقعيهما في حال تساوي الاتجاه والمقدار لكلٍّ منهما كما في الشكل أدناه.


وفي هذه الحالة، ينطبق المتجهان على بعضهما إذا رُسِما بَدْءًا بالنقطة نفسها.

### مفهوم أساسي — المتجهان المتساويان

إذا كان: $\vec{\mathbf{v}} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle, \vec{\mathbf{w}} = \langle w_1, w_2, w_3\rangle$، فإنَّ:

$\vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{v}}$ إذا وفقط إذا كان: $v_1 = w_1, v_2 = w_2, v_3 = w_3$.

### مثال 6

إذا كان: $\vec{\mathbf{v}} = \langle 4-b, 10, c\rangle, \vec{\mathbf{u}} = \langle 2, 3a-2, 9\rangle$، وكان: $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{u}}$، فأجد قيمة كلٍّ من: $a$، و $b$، و $c$.

بما أنَّ المتجهين متساويان، فإنَّ إحداثياتهما المُتناظِرة متساوية؛ أيْ إنَّ:

| | | | |
|---|---|---|---|
| بمساواة الإحداثيات المُتناظِرة | $c = 9$ | $4 - b = 2$ | $10 = 3a-2$ |
| بإعادة ترتيب كل معادلة | | $4 - 2 = b$ | $12 = 3a$ |
| بحلِّ كل معادلة | | $2 = b$ | $4 = a$ |

إذن، $a = 4, b = 2, c = 9$.

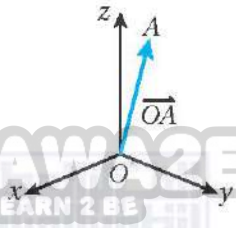
### أتعلَّم

في المثال المجاور، تُعبِّر الرموز: $a, b, c$ عن أعداد حقيقية، ولا تُعبِّر عن متجهات.

### أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $\vec{\mathbf{v}} = \langle 3q+8, 0, 3r\rangle, \vec{\mathbf{u}} = \langle 20, 2p-5, -12\rangle$، وكان: $\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{v}}$، فأجد قيمة كلٍّ من: $p$، و $q$، و $r$.

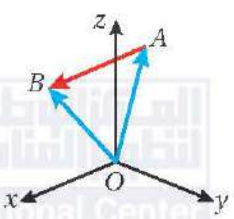
## متجها الموقع والإزاحة




يُطلَق على المتجه الذي يبدأ بنقطة الأصل، وينتهي بالنقطة $A(x_1, y_1, z_1)$، اسم **متجه الموقع** (position vector) للنقطة $A$، ويُستعمَل الرمز $\overrightarrow{OA}$ للدلالة على متجه موقع النقطة $A$.

أمّا الصورة الإحداثية لهذا المتجه فهي:

$$\overrightarrow{OA} = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle - \langle 0, 0, 0 \rangle$$
$$= \langle x_1, y_1, z_1 \rangle$$




في الشكل المجاور، يظهر باللون الأزرق متجه الموقع لكلٍّ من النقطة $A$، والنقطة $B$، وهما: $\overrightarrow{OB}$، و $\overrightarrow{OA}$، ويظهر باللون الأحمر المتجه $\overrightarrow{AB}$ الذي يُمثِّل **متجه الإزاحة** (displacement vector) من النقطة $A$ إلى النقطة $B$.

أُلاحِظ أنَّ $\overrightarrow{AB}$ هو ناتج طرح متجه الموقع للنقطة $A$ من متجه الموقع للنقطة $B$ وَفق قاعدة المثلث لجمع المتجهات، أي أنّ:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

يُمثِّل مقدار متجه الإزاحة $\overrightarrow{AB}$ المسافة بين النقطة $A$ والنقطة $B$، وهذه المسافة هي قيمة عددية غير متجهة.

### لغة الرياضيات

سُمِّي متجه الموقع بهذا الاسم لأنَّه يُحدِّد موقع النقطة $A$ بالنسبة إلى نقطة الأصل.

### أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّ كُلًّا من الموقع والإزاحة هو كمية متجهة، وأنَّ المسافة هي قيمة عددية غير متجهة.

### مثال 7

إذا كانت: $A(-11, 2, 21)$، $B(3, -5, 7)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

**1** متجه موقع كلٍّ من النقطة $A$، والنقطة $B$.

متجه موقع النقطة $A$ هو: $\overrightarrow{OA} = \langle -11, 2, 21 \rangle$.

متجه موقع النقطة $B$ هو: $\overrightarrow{OB} = \langle 3, -5, 7 \rangle$.

### أتعلَّم

يُرمَز أيضًا إلى متجه الموقع للنقطة $A$ بالرمز $\mathbf{a}$، إضافةً إلى الرمز $\overrightarrow{OA}$.

**2** **متجه الإزاحة من النقطة $A$ إلى النقطة $B$.**

يُمكِن إيجاد متجه الإزاحة $\overrightarrow{AB}$ بطرح متجه الموقع للنقطة $A$ من متجه الموقع للنقطة $B$:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$= \langle 3, -5, 7\rangle - \langle -11, 2, 21\rangle$$

$$= \langle 14, -7, -14\rangle$$

**3** **المسافة بين النقطة $A$، والنقطة $B$.**

المسافة بين النقطة $A$ والنقطة $B$ هي مقدار متجه الإزاحة $\overrightarrow{AB}$ :

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{v_1^{\,2} + v_2^{\,2} + v_3^{\,2}}$$ صيغة مقدار المتجه

$$= \sqrt{(14)^2 + (-7)^2 + (-14)^2}$$ $\overrightarrow{AB} = \langle 14, -7, -14\rangle$

$$= \sqrt{441} = 21$$ بالتبسيط

إذن، المسافة بين $A$ و $B$ هي: 21 وحدة طول.

**أتحقَّق من فهمي**

**إذا كانت: $A(-2, 8, 13), B(5, -7, -9), C(0, 1, -14)$ نقاطًا في الفضاء، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:**

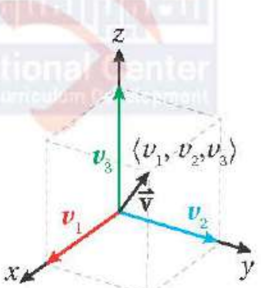
a) متجه موقع كلٍّ من النقاط: $A$، و$B$، و$C$.

b) متجه الإزاحة من النقطة $B$ إلى النقطة $C$.

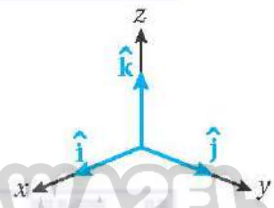
c) المسافة بين النقطة $A$ والنقطة $C$.

### متجهات الوحدة الأساسية: $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$

إذا كانت نقطة بداية المتجه $\vec{v}$ هي نقطة الأصل، ونقطة نهايته هي $(v_1, v_2, v_3)$ كما في الشكل المجاور، فإنَّه يُمكِن التعبير عن ذلك بالصورة الإحداثية: $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$.



يُطلَق على المتجه الذي مقداره وحدة واحدة اسم **متجه الوحدة** (unit vector). وتُعَدُّ متجهات الوحدة في الاتجاه الموجب للمحاور الإحداثية الثلاثة أهم متجهات الوحدة، وأكثرها استخدامًا؛ لذا تُسمّى **متجهات الوحدة الأساسية**، ويشار إلى كلٍّ منها برمز خاص؛ إذ يُرمَز إلى متجه الوحدة في اتجاه محور $x$ الموجب بالرمز $\hat{\mathbf{i}}$، وصورته الإحداثية هي: $\hat{\mathbf{i}} = \langle 1, 0, 0 \rangle$، ويُرمَز إلى متجه الوحدة في اتجاه محور $y$ الموجب بالرمز $\hat{\mathbf{j}}$، وصورته الإحداثية هي: $\hat{\mathbf{j}} = \langle 0, 1, 0 \rangle$، ويُرمَز إلى متجه الوحدة في اتجاه محور $z$ الموجب بالرمز $\hat{\mathbf{k}}$، وصورته الإحداثية هي: $\hat{\mathbf{k}} = \langle 0, 0, 1 \rangle$.




**أتعلّم**

يُستعمَل الرمز $\hat{\mathbf{i}}$ للدلالة على متجه الوحدة في اتجاه $x$ الموجب، ويُقرَأ: i hat.

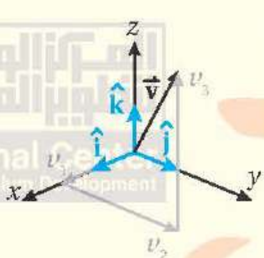
يُمكِن كتابة أيِّ متجه بدلالة متجهات الوحدة: $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ كما هو مبين أدناه.

## مفهوم أساسي

### كتابة المتجه بدلالة متجهات الوحدة الأساسية

يُمكِن كتابة المتجه: $\vec{\mathbf{v}} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية كما يأتي:

$$\vec{\mathbf{v}} = v_1\hat{\mathbf{i}} + v_2\hat{\mathbf{j}} + v_3\hat{\mathbf{k}}$$




**أتعلّم**

ألاحِظ في الشكل أنَّ $\vec{\mathbf{v}}$ هو مُحصِّلة (ناتج جمع) ثلاثة متجهات، هي: $v_1\hat{\mathbf{i}}, v_2\hat{\mathbf{j}}, v_3\hat{\mathbf{k}}$.

### مثال 8

1 أكتب المتجه: $\vec{\mathbf{u}} = \langle 5, -3, 6 \rangle$ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية.

$\vec{\mathbf{u}} = 5\hat{\mathbf{i}} + (-3)\hat{\mathbf{j}} + 6\hat{\mathbf{k}}$ كتابة $\vec{\mathbf{u}}$ بدلالة $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$

$= 5\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 6\hat{\mathbf{k}}$ بالتبسيط

**2** إذا كان: $\vec{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{v}} = 4\hat{\mathbf{i}} + 7\hat{\mathbf{k}}$، فأكتب المتجه: $2\vec{\mathbf{u}} + 3\vec{\mathbf{v}}$ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية.

$$2\vec{\mathbf{u}} + 3\vec{\mathbf{v}} = 2(\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}}) + 3(4\hat{\mathbf{i}} + 7\hat{\mathbf{k}})$$ بتعويض المتجه $\vec{\mathbf{u}}$ والمتجه $\vec{\mathbf{v}}$

$$= 2\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} - 6\hat{\mathbf{k}} + 12\hat{\mathbf{i}} + 21\hat{\mathbf{k}}$$ خاصية التوزيع

$$= 14\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} + 15\hat{\mathbf{k}}$$ بالتبسيط

**أتعلَّم**

عند كتابة المتجهات بدلالة متجهات الوحدة الأساسية، فإنَّها تُجمَع وتُطرَح بإجراء العمليات الحسابية العادية، ومعاملة $\hat{\mathbf{i}}$، و $\hat{\mathbf{j}}$، و $\hat{\mathbf{k}}$ معاملة المُتغيِّرات.

### أتحقَّق من فهمي

أكتب كُلًّا من المتجهات الآتية بدلالة متجهات الوحدة الأساسية:

a) $\vec{\mathbf{g}} = \langle 9, 0, -4\rangle$

b) $\overrightarrow{AB} : A(2, -1, 4), B(7, 6, -2)$

c) $4\vec{\mathbf{m}} - 5\vec{\mathbf{f}} : \vec{\mathbf{m}} = -2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 4\hat{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{f}} = 3\hat{\mathbf{i}} - 5\hat{\mathbf{j}} + 6\hat{\mathbf{k}}$

## إيجاد متجه وحدة في اتجاه أيِّ متجه

إذا كان $c$ عددًا حقيقيًّا، فإنَّ: $|c\vec{\mathbf{v}}| = |c||\vec{\mathbf{v}}|$. ولذا، فإنَّ:

$$\left|\frac{\vec{\mathbf{v}}}{|\vec{\mathbf{v}}|}\right| = \frac{1}{|\vec{\mathbf{v}}|} \times |\vec{\mathbf{v}}| = 1$$

ولذلك يُمكِن إيجاد متجه وحدة في اتجاه أيِّ متجه، وذلك بقسمة ذلك المتجه على مقداره، فيصبح مقدار المتجه الناتج وحدة واحدة.

**أتعلَّم**

يُمكِن كتابة $\frac{1}{|\vec{\mathbf{v}}|}$، في حين أنَّه لا يُمكِن كتابة $\frac{1}{\vec{\mathbf{v}}}$

### مثال 9

إذا كان: $A(3, 4, -7), B(-5, 16, 2)$، فأجد متجه وحدة في اتجاه $\overrightarrow{AB}$.

**الخطوة 1:** أكتب $\overrightarrow{AB}$ بالصورة الإحداثية.

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\rangle$$ الصورة الإحداثية للمتجه

$$= \langle -5-3, 16-4, 2-(-7)\rangle$$ $(x_1, y_1, z_1) = (3, 4, -7)$, $(x_2, y_2, z_2) = (-5, 16, 2)$

$$= \langle -8, 12, 9\rangle$$ بالتبسيط

**الخطوة 2:** أجد مقدار $\overrightarrow{AB}$ .

صيغة مقدار المتجه
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{u_1^{\,2} + u_2^{\,2} + u_3^{\,2}}$$

$\overrightarrow{AB} = \langle -8, 12, 9 \rangle$
$$= \sqrt{(-8)^2 + (12)^2 + (9)^2}$$

بالتبسيط
$$= \sqrt{289} = 17$$

**الخطوة 3:** أستعمل الصورة الإحداثية ومقدار المتجه لإيجاد متجه الوحدة $\vec{\mathbf{u}}$ في اتجاه $\overrightarrow{AB}$ .

$$\vec{\mathbf{u}} = \frac{1}{17}\langle -8, 12, 9 \rangle = \left\langle \frac{-8}{17}, \frac{12}{17}, \frac{9}{17} \right\rangle$$

### رموز رياضية

توجد صور مختلفة للتعبير عن المتجه $\vec{\mathbf{a}}$، مثل: $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$، و $a_1\,\hat{\mathbf{i}} + a_2\,\hat{\mathbf{j}} + a_3\,\hat{\mathbf{k}}$، و $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$.

### أتحقّق من فهمي

أجد متجه وحدة في اتجاه كل متجه ممّا يأتي:

a) $\vec{\mathbf{u}} = \langle 4, -3, 5 \rangle$

b) $\vec{\mathbf{v}} = 8\,\hat{\mathbf{i}} + 15\,\hat{\mathbf{j}} - 17\,\hat{\mathbf{k}}$

c) $\overrightarrow{AB}: A(-1, 4, 6), B(3, 3, 8)$

## أتدرّب وأحُلّ المسائل

أُعيِّن كُلًّا من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد:

1 $(4, 5, 3)$

2 $(-2, 3, -5)$

3 $(4, 0, -3)$

**ملحوظة:** أستعمل الورق المُنقَّط متساوي القياس الموجود في كتاب التمارين.

أجد الطول وإحداثيات نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة التي أُعطي طرفاها في كلٍّ ممّا يأتي:

4 $(3, -2, 8), (5, 4, 2)$

5 $(-2, 7, 0), (2, -5, 3)$

6 $(12, 8, -5), (-3, 6, 7)$

7 $(-5, -8, 4), (3, 2, -6)$

أُمثّل كُلًّا من المتجهات الآتية بيانيًا في الفضاء:

9 $\vec{\mathbf{m}} = \langle 2, -3, -4 \rangle$

8 $\vec{\mathbf{v}} = \langle -3, -4, 5 \rangle$

11 $\vec{\mathbf{e}} = -5\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}$

10 $\vec{\mathbf{p}} = \langle -3, 5, -2 \rangle$

13 $\overrightarrow{GH}: G(1, -3, 5), H(0, 4, -2)$

12 $\overrightarrow{AB}: A(4, 1, 1), B(-3, 6, 3)$

ملحوظة: أستعمل الورق المُنقّط متساوي القياس الموجود في كتاب التمارين.

أجد الصورة الإحداثية والمقدار للمتجه $\overrightarrow{AB}$ الذي أُعطِيت نقطة بدايته ونقطة نهايته في كلٍّ ممّا يأتي:

15 $A(-8, 5, 7), B(6, 3, 2)$

14 $A(4, 6, 9), B(-3, 2, 5)$

17 $A(24, -8, 10), B(10, 6, 3)$

16 $A(12, -5, 4), B(4, 1, -1)$

18 إذا كان $OAB$ مثلثًا، فيه: $\overrightarrow{OA} = \vec{\mathbf{a}}$، و $\overrightarrow{AB} = \vec{\mathbf{b}}$، والنقطة $C$ هي منتصف $\overrightarrow{AB}$، فأكتب المتجه $\overrightarrow{OC}$ بدلالة $\vec{\mathbf{a}}$ و $\vec{\mathbf{b}}$.

إذا كان: $\vec{\mathbf{e}} = \langle -3, 9, -4 \rangle, \vec{\mathbf{f}} = 5\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 7\hat{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{g}} = \langle -1, 8, -5 \rangle$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

20 $\vec{\mathbf{e}} + \vec{\mathbf{f}} - 3\vec{\mathbf{g}}$

19 $3\vec{\mathbf{e}} + 4\vec{\mathbf{f}}$

22 $2\vec{\mathbf{e}} + 7\vec{\mathbf{f}} - 2\vec{\mathbf{g}}$

21 $4\vec{\mathbf{e}} - 2\vec{\mathbf{f}} + 3\vec{\mathbf{g}}$

إذا كانت: $A(-1, 6, 5), B(0, 1, -4), C(2, 1, 1)$ نقاطًا في الفضاء، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

23 متجه موقع كلٍّ من النقاط: $A$، و$B$، و$C$.

24 متجه الإزاحة من النقطة $B$ إلى النقطة $A$.

25 متجه الإزاحة من النقطة $C$ إلى النقطة $B$.

26 المسافة بين النقطة $C$ والنقطة $B$.

أكتب كُلًّا من المتجهات الآتية بدلالة متجهات الوحدة الأساسية:

27 $\vec{\mathbf{g}} = \langle 5, 7, -1\rangle$

28 $\overrightarrow{ST}: S(1, 0, -5), T(2, -2, 0)$

29 $-\vec{\mathbf{a}} + 3\vec{\mathbf{b}} : \vec{\mathbf{a}} = 1\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - 4\hat{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{b}} = 4\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}}$

أجد متجه وحدة في اتجاه كل متجه ممّا يأتي:

30 $-4\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$

31 $143\hat{\mathbf{i}} - 24\hat{\mathbf{j}}$

32 $-72\hat{\mathbf{i}} + 33\hat{\mathbf{j}} + 56\hat{\mathbf{k}}$

33 $\begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ 8 \end{pmatrix}$

34 $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

35 $\vec{\mathbf{n}} = \langle -2, 0, 3\rangle$

36 إذا كان: $\vec{\mathbf{a}} = -3\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} + 12\hat{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{b}} = 7\hat{\mathbf{i}} + 39\hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}$، وكان: $3\vec{\mathbf{a}} + c\vec{\mathbf{b}} = -23\hat{\mathbf{i}} - 66\hat{\mathbf{j}} + 40\hat{\mathbf{k}}$، فأجد قيمة $c$.

37 إذا كان: $\vec{\mathbf{t}} = \begin{pmatrix} 3 \\ v \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{s}} = \begin{pmatrix} 2 \\ w+47 \\ -4 \end{pmatrix}$، وكان: $k\vec{\mathbf{s}} - 4\vec{\mathbf{t}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 31 \\ w \end{pmatrix}$، فأجد قيمة كلٍّ من $v$، و $w$، و $k$.

38 إذا كان: $\vec{\mathbf{m}} = \langle 4, 1, -2\rangle, \vec{\mathbf{n}} = \langle 6, 2, -3\rangle, \vec{\mathbf{p}} = \langle 2, a, -1\rangle, 5\vec{\mathbf{m}} + 2\vec{\mathbf{p}} = 4\vec{\mathbf{n}}$، فما قيمة الثابت $a$؟

39 إذا كان: $\vec{\mathbf{v}} = \langle u-3, u+1, u-2\rangle$، وكان: $|\vec{\mathbf{v}}| = 17$، فما قيمة $u$؟

40 إذا كان متجها الموقع للنقطة $G$ والنقطة $H$ هما: $\vec{\mathbf{g}} = \langle -2, c+1, -8\rangle$، و $\vec{\mathbf{h}} = \langle c-1, -4, c+2\rangle$ على الترتيب، فأجد قيمة $c$، علمًا بأنَّ: $|\overrightarrow{GH}| = 19$، وأنَّ: $c > 0$.

## مهارات التفكير العليا

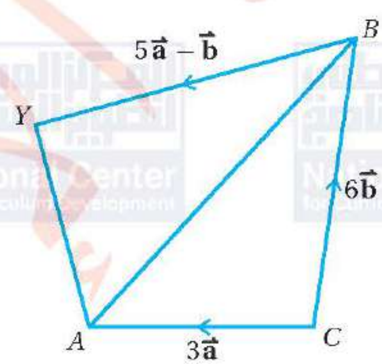
41 أكتشف الخطأ: قالت حنان: "إذا كانت النقطة $A(7, -3, 3)$ تقع على كرة مركزها نقطة الأصل، فإنَّ النقطة $B(2, -8, -1)$ تقع خارج هذه الكرة". في حين قالت هديل: "النقطة $B$ تقع داخل هذه الكرة". أيُّ القولين صحيح، مُبرِّرًا إجابتي؟

42 تبرير: إذا وقعت النقطة $J(-4, 6, -1)$ والنقطة $K(-2, 2, 17)$ على طرفي أحد أقطار كرة، فأُبيِّن أنَّ النقطة $L(2, 10, 3)$ والنقطة $J(4, -2, 7)$ تقعان على سطح تلك الكرة، مُبرِّرًا إجابتي.

43 تبرير: تُمثِّل النقاط: $A(2, 3, -1), B(2, 3, 5), C(8, -3, 5)$ ثلاثةً من رؤوس مُكعَّب خشبي، كل وجهين من أوجهه يوازيان أحد المستويات: $xy, xz, yz$.

أكتب إحداثيات الرؤوس الخمسة الأُخرى، مُبرِّرًا إجابتي.

44 تحدٍّ: في الشكل الآتي، إذا كان: $\overrightarrow{CB} = 6\vec{\mathbf{b}}, \overrightarrow{BY} = 5\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}}, \overrightarrow{CA} = 3\vec{\mathbf{a}}$، وكانت $X$ تقع على $\overline{AB}$، حيث $AX : XB = 1 : 2$، فأُثبِت أنَّ: $\overrightarrow{CX} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CY}$.




تحدٍّ: إذا كانت متجهات الموقع للنقاط: $M, L, N$ هي:

$\vec{\mathbf{m}} = -3\hat{\mathbf{i}} - 6\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{l}} = 4\hat{\mathbf{i}} - 10\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{n}} = 5\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 9\hat{\mathbf{k}}$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

45 أُثبِت أنَّ المثلث $LMN$ قائم الزاوية.

46 أجد مساحة المثلث $LMN$.

إرشاد: أستعمل عكس نظرية فيثاغورس التي تعلَّمْتُها في الصف الثامن.

الدرس 2

# المستقيمات في الفضاء
# Lines in Space

**فكرة الدرس**

- تعرُّف المتجهات المتوازية في الفضاء.
- كتابة معادلة متجهة للمستقيم في الفضاء.
- إيجاد إحداثيات نقطة تقاطع مستقيمين في الفضاء.

**المصطلحات**

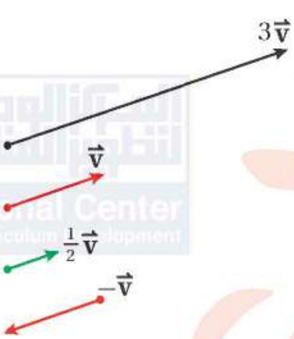
المعادلة المتجهة للمستقيم، المُتغيِّر الوسيط، المستقيمان المتخالفان.

**مسألة اليوم**

أُرسِلت إشارة لاسلكية من موقعٍ إحداثياته: $(-1, 4, 5)$ إلى موقعٍ إحداثياته: $(-11, 9, 15)$. وفي الوقت نفسه، أُرسِلت إشارة من موقعٍ إحداثياته: $(-5, 9, 3)$ إلى موقعٍ إحداثياته: $(2, -5, 17)$. إذا علمْتُ أنَّ الإشارة تسير في خط مستقيم، فهل يتقاطع مسارا الإشارتين؟

## توازي المتجهات

المتجهان المتوازيان هما متجهان لهما الاتجاه نفسه، أو عكسه، وليس شرطًا أنْ يكون لهما المقدار نفسه، وهذا يعني أنَّه يُمكِن كتابة كلٍّ منهما في صورة المتجه الآخر مضروبًا في عدد حقيقي.




**أتذكَّر**

إذا ضُرِب المتجه $\vec{\mathbf{v}}$ في العدد الحقيقي $k$، فإنَّ المتجه $k\vec{\mathbf{v}}$ يأخذ اتجاه $\vec{\mathbf{v}}$ نفسه إذا كان $k > 0$، ويكون عكس اتجاه $\vec{\mathbf{v}}$ إذا كان $k < 0$.

**مفهوم أساسي** — **توازي المتجهات**

إذا كان: $\vec{\mathbf{u}} = \langle u_1, u_2, u_3\rangle, \vec{\mathbf{v}} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$، فإنَّ:

$\vec{\mathbf{u}} \parallel \vec{\mathbf{v}}$ إذا وفقط إذا وُجِد عدد حقيقي $k$، حيث: $k \neq 0$، بحيث يكون:

$$\langle v_1, v_2, v_3\rangle = k\langle u_1, u_2, u_3\rangle$$

مثال 1

إذا كان: $A(-2, 5, -3), B(1, -3, 2), C(3, -14, 8), D(-3, 2, -2)$، فأُحدِّد إنْ كان كل متجهين ممّا يأتي متوازيين أم لا:

1) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$

أكتب كُلاً من $\overrightarrow{AB}$، و $\overrightarrow{CD}$ بالصورة الإحداثية:

$\overrightarrow{AB} = \langle 1-(-2), -3-5, 2-(-3)\rangle$ تعريف الصورة الإحداثية للمتجه

$= \langle 3, -8, 5\rangle$ بالتبسيط

$\overrightarrow{CD} = \langle -3-3, 2-(-14), -2-8\rangle$ تعريف الصورة الإحداثية للمتجه

$= \langle -6, 16, -10\rangle$ بالتبسيط

أُلاحِظ أنَّ: $\langle -6, 16, -10\rangle = -2\langle 3, -8, 5\rangle$؛ ما يعني أنَّ: $\overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{AB}$.

2) $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}$

أكتب كُلاً من $\overrightarrow{AC}$، و $\overrightarrow{BD}$ بالصورة الإحداثية:

$\overrightarrow{AC} = \langle 3-(-2), -14-5, 8-(-3)\rangle$ تعريف الصورة الإحداثية للمتجه

$= \langle 5, -19, 11\rangle$ بالتبسيط

$\overrightarrow{BD} = \langle -3-1, 2-(-3), -2-2\rangle$ تعريف الصورة الإحداثية للمتجه

$= \langle -4, 5, -4\rangle$ بالتبسيط

أُلاحِظ عدم وجود عدد حقيقي أضرِب فيه أحد المتجهين لينتج الآخر؛ أيْ إنَّ: $\overrightarrow{AC} \neq k\overrightarrow{BD}$.

إذن، المتجه $\overrightarrow{AC}$ والمتجه $\overrightarrow{BD}$ غير متوازيين.

**أتحقَّق من فهمي**

إذا كان: $G(7, 5, -11), H(4, 4, -4), K(4, 5, 3), L(7, 7, 3)$، فأُحدِّد إنْ كان كل متجهين ممّا يأتي متوازيين أم لا:

a) $\overrightarrow{GH}, \overrightarrow{KL}$

b) $\overrightarrow{GL}, \overrightarrow{HK}$

**أتعلَّم**

أُلاحِظ أنَّه إذا كان: $\vec{u} = k\vec{v}$، فإنَّ: $\vec{v} = \frac{1}{k}\vec{u}$، حيث: $k \neq 0$.

**أتعلَّم**

إذا كان:

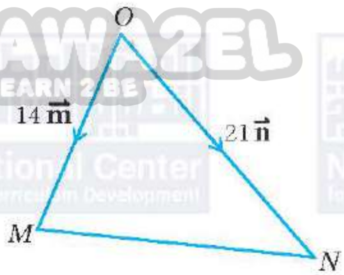
$\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$،

$\vec{u} = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$،

وكان كلٌّ من $v_1, v_2, v_3$ لا يساوي صفرًا، فإنَّ شرط توازي $\vec{v}$ و $\vec{u}$ هو أنْ تكون النسب: $\frac{u_1}{v_1}, \frac{u_2}{v_2}, \frac{u_3}{v_3}$ متساوية.

يُمكِن استعمال تعريف توازي المتجهات لإثبات بعض علاقات التوازي في الأشكال الهندسية.

### مثال 2




في المثلث $OMN$ المجاور، إذا كان: $\overrightarrow{OM} = 14\vec{m}$، $\overrightarrow{ON} = 21\vec{n}$، وكانت النقطة $P$ تقع على $\overline{OM}$، حيث: $OP : PM = 2 : 5$، والنقطة $Q$ تقع على $\overline{ON}$، حيث: $ON = \frac{7}{2}\, OQ$، فأُثبِت أنَّ $\overline{PQ}$ يوازي $\overline{MN}$.

لإثبات توازي القطعتين المستقيمتين $\overline{PQ}$ و $\overline{MN}$، يكفي إثبات أنَّ أحد المتجهين: $\overrightarrow{PQ}$، $\overrightarrow{MN}$ يُمكِن كتابته في صورة المتجه الآخر مضروبًا في عدد حقيقي.

**الخطوة 1:** أكتب $\overrightarrow{MN}$ بدلالة $\vec{m}$ و $\vec{n}$، مُستعمِلًا قاعدة المثلث لجمع المتجهات.

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}$ قاعدة المثلث لجمع المتجهات

$= -14\vec{m} + 21\vec{n}$ بتعويض $\overrightarrow{MO} = -14\vec{m},\ \overrightarrow{ON} = 21\vec{n}$

$= 7(-2\vec{m} + 3\vec{n})$ بإخراج عامل مشترك

**الخطوة 2:** أكتب $\overrightarrow{PQ}$ بدلالة $\vec{m}$ و $\vec{n}$.

أكتب أوَّلًا $\overrightarrow{OP}$ بدلالة $\vec{m}$، وأكتب $\overrightarrow{OQ}$ بدلالة $\vec{n}$، ثم أستعملهما لكتابة $\overrightarrow{PQ}$ بدلالة $\vec{m}$ و $\vec{n}$:

$\overrightarrow{OP} = \frac{2}{7}\overrightarrow{OM}$ معطى

$= \frac{2}{7} \times 14\vec{m}$ بتعويض $\overrightarrow{OM} = 14\vec{m}$

$= 4\vec{m}$ بالتبسيط

$\overrightarrow{ON} = \frac{7}{2}\overrightarrow{OQ}$ معطى

$\overrightarrow{OQ} = \frac{2}{7} \times \overrightarrow{ON}$ بحلّ المعادلة لـ $\overrightarrow{OQ}$

$= \frac{2}{7} \times 21\vec{n}$ بتعويض $\overrightarrow{ON} = 21\vec{n}$

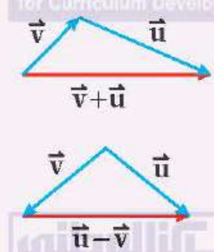
$= 6\vec{n}$ بالتبسيط

إذن، $\overrightarrow{OP} = 4\vec{m},\ \overrightarrow{OQ} = 6\vec{n}$.

**أتعلَّم**

لإثبات توازي قطعتين مستقيمتين بوجه عام، يكفي إثبات توازي متجهين يقعان على هاتين القطعتين المستقيمتين.

**أتذكَّر**



$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ}$ قاعدة المثلث لجمع المتجهات

$= -4\vec{\mathbf{m}} + 6\vec{\mathbf{n}}$ بتعويض $\overrightarrow{OP} = 4\vec{\mathbf{m}}, \overrightarrow{OQ} = 6\vec{\mathbf{n}}$

$= 2(-2\vec{\mathbf{m}} + 3\vec{\mathbf{n}})$ بإخراج عامل مشترك

$= \frac{2}{7}\overrightarrow{MN}$ $-2\vec{\mathbf{m}} + 3\vec{\mathbf{n}} = \frac{1}{7}\overrightarrow{MN}$

بما أنَّ $\overrightarrow{PQ}$ يساوي $\overrightarrow{MN}$ مضروبًا في عدد حقيقي، فإنَّ $\overline{PQ}$ و $\overline{MN}$ متوازيان.

**أخطاء شائعة**

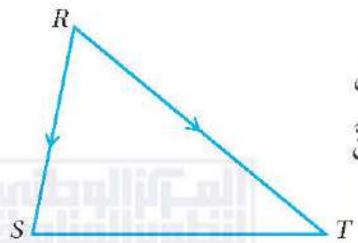
ينتج من المعادلة:

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}}}{|\vec{\mathbf{v}}||\vec{\mathbf{w}}|}\right)$

أنَّ:

$\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = |\vec{\mathbf{v}}||\vec{\mathbf{w}}| \cos\theta$

### أتحقَّق من فهمي



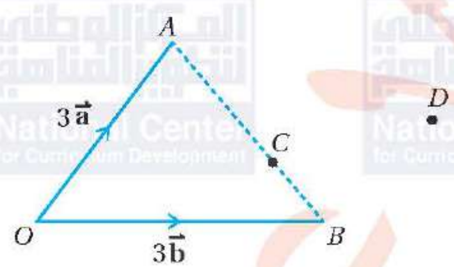

في المثلث $RST$ المجاور، إذا كان: $\overrightarrow{RS} = 4\vec{\mathbf{a}}, \overrightarrow{RT} = 6\vec{\mathbf{b}}$، والنقطة $U$ منتصف $\overline{RS}$، والنقطة $V$ منتصف $\overline{RT}$، فأُثبِت أنَّ $\overrightarrow{UV}$ يوازي $\overrightarrow{ST}$.

**أتعلَّم**

من الصعب تمثيل النقاط بصورة دقيقة في الفضاء عند استعمال المتجهات لتحديد إذا كانت هذه النقاط تقع على استقامة واحدة أم لا؛ لذا تُستعمَل المتجهات بوصفها طريقة جبرية للحلِّ.

لإثبات أنَّ ثلاث نقاط في الفضاء تقع على استقامة واحدة، يكفي إثبات وجود متجهين متوازيين بينهما نقطة مشتركة، وتكون النقاط الثلاث هي نقاط بداية أو نهاية لهذين المتجهين.

### مثال 3




يظهر في الشكل المجاور المثلث $OAB$، والنقطتان: $C$، و $D$.

إذا كان: $\overrightarrow{OA} = 3\vec{\mathbf{a}}, \overrightarrow{OB} = 3\vec{\mathbf{b}}$، وكانت النقطة $C$ تقع على $\overline{AB}$، حيث: $AC = 2CB$،

وكان: $\overrightarrow{BD} = 2\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$، فأُثبِت أنَّ $O$، و $C$، و $D$ تقع على استقامة واحدة.

لإثبات أنَّ $O$، و $C$، و $D$ تقع على استقامة واحدة، يكفي إثبات أنَّ $\overrightarrow{OC} \parallel \overrightarrow{OD}$؛ لأنَّ لهما نقطة البداية نفسها.

**الخطوة 1:** أكتب كُلًّا من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ بدلالة $\vec{\mathbf{a}}$ و $\vec{\mathbf{b}}$.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$ قاعدة المثلث لجمع المتجهات

$= -3\vec{\mathbf{a}} + 3\vec{\mathbf{b}}$ بتعويض $\overrightarrow{AO} = -3\vec{\mathbf{a}}, \overrightarrow{OB} = 3\vec{\mathbf{b}}$

| | |
|---|---|
| معطى | $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ |
| بتعويض $\overrightarrow{AB} = -3\vec{\mathbf{a}} + 3\vec{\mathbf{b}}$ | $= \frac{2}{3} \times (-3\vec{\mathbf{a}} + 3\vec{\mathbf{b}})$ |
| بالتبسيط | $= -2\vec{\mathbf{a}} + 2\vec{\mathbf{b}}$ |

إذن، $\overrightarrow{AB} = -3\vec{\mathbf{a}} + 3\vec{\mathbf{b}}, \overrightarrow{AC} = -2\vec{\mathbf{a}} + 2\vec{\mathbf{b}}$.

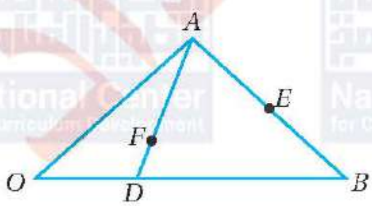
**الخطوة 2:** أكتب $\overrightarrow{OC}$ و $\overrightarrow{OD}$ بدلالة $\vec{\mathbf{a}}$ و $\vec{\mathbf{b}}$.

| | |
|---|---|
| قاعدة المثلث لجمع المتجهات | $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$ |
| بالتعويض: $\overrightarrow{OA} = 3\vec{\mathbf{a}}, \overrightarrow{AC} = -2\vec{\mathbf{a}} + 2\vec{\mathbf{b}}$ | $= 3\vec{\mathbf{a}} + 2\vec{\mathbf{b}} - 2\vec{\mathbf{a}}$ |
| بالتبسيط | $= \vec{\mathbf{a}} + 2\vec{\mathbf{b}}$ |

| | |
|---|---|
| قاعدة المثلث لجمع المتجهات | $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD}$ |
| بالتعويض: $\overrightarrow{OB} = 3\vec{\mathbf{b}}, \overrightarrow{BD} = 2\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$ | $= 3\vec{\mathbf{b}} + 2\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$ |
| بالتبسيط | $= 2\vec{\mathbf{a}} + 4\vec{\mathbf{b}}$ |
| بإخراج عامل مشترك | $= 2(\vec{\mathbf{a}} + 2\vec{\mathbf{b}})$ |
| $\vec{\mathbf{a}} + 2\vec{\mathbf{b}} = \overrightarrow{OC}$ | $= 2\,\overrightarrow{OC}$ |

بما أنَّ $\overrightarrow{OD}$ يساوي $\overrightarrow{OC}$ مضروبًا في عدد حقيقي، فإنَّ $\overrightarrow{OC}$ و $\overrightarrow{OD}$ متوازيان. ومن ثَمَّ، فإنَّ $O$، و $C$، و $D$ تقع على استقامة واحدة.

### أتحقَّق من فهمي




يظهر في الشكل المجاور المثلث $OAB$.

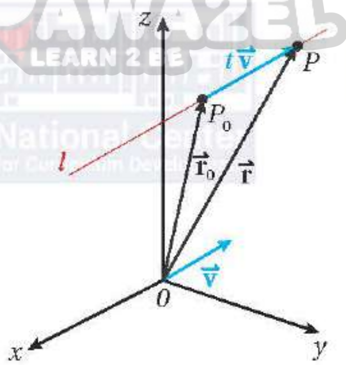
إذا كان: $\overrightarrow{OA} = \vec{\mathbf{a}}, \overrightarrow{OB} = \vec{\mathbf{b}}$، وكانت النقطة $D$ تقع على $\overline{OB}$، والنقطة $E$ منتصف $\overline{AB}$، والنقطة $F$ تقع على $\overline{AD}$، حيث: $\overrightarrow{OF} = \frac{2}{5}(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}})$، فأُثبِت أنَّ $O$، و $F$، و $E$ تقع على استقامة واحدة.

## المعادلة المتجهة للمستقيم

تعلَّمْتُ سابقًا استعمال الميل ومقطع المحور $y$ لكتابة معادلة مستقيم في المستوى الإحداثي. والآن سأتعلَّم كيف أستعمل المتجهات لكتابة معادلة المستقيم في الفضاء.

**أتعلَّم**

لا يُمكِنني استعمال الصيغة: $y = mx + b$ لكتابة معادلة المستقيم في الفضاء.




في الشكل المجاور، يمرُّ المستقيم $l$ بالنقطة المعلومة $P_0$، موازيًا المتجه $\vec{\mathbf{v}}$، ولتكن النقطة $P$ أيَّ نقطة على المستقيم $l$. ومن ثَمَّ، فإنَّ المتجه $\overrightarrow{P_0P}$ يوازي المتجه $\vec{\mathbf{v}}$؛ لذا يُمكِن كتابته في صورة: $\overrightarrow{P_0P} = t\vec{\mathbf{v}}$، حيث $t$ عدد حقيقي.

ووَفقًا لقاعدة المثلث لجمع المتجهات، فإنَّ متجه الموقع للنقطة $P$ يساوي مجموع متجه الموقع للنقطة $P_0$ والمتجه $\overrightarrow{P_0P}$؛ أيْ إنَّ:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P}$$

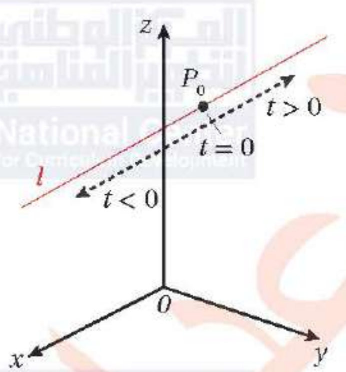
وإذا كان متجه الموقع للنقطة $P$ هو $\vec{\mathbf{r}}$، ومتجه الموقع للنقطة $P_0$ هو $\vec{\mathbf{r}}_0$، فإنَّ:

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_0 + t\vec{\mathbf{v}}$$

يُطلَق على هذه الصيغة اسم **المعادلة المتجهة للمستقيم** (vector equation of a line).

**لغة الرياضيات**

يُسمّى المتجه $\vec{\mathbf{v}}$ اتجاه المستقيم $l$.




يُسمّى المُتغيِّر $t$ في المعادلة السابقة **المُتغيِّر الوسيط** (parameter)، وتُحدِّد كل قيمة من قِيَم $t$ نقطة وحيدة على المستقيم. فمثلًا، $t = 0$ تُحدِّد النقطة $P_0$، وقِيَم $t$ الموجبة تُحدِّد النقاط الواقعة في اتجاه $\vec{\mathbf{v}}$ بَدْءًا بـ $P_0$، وقِيَم $t$ السالبة تُحدِّد النقاط الواقعة عكس اتجاه $\vec{\mathbf{v}}$ بَدْءًا بـ $P_0$.

**أتعلَّم**

إذا كان $\vec{\mathbf{v}}$ اتجاهًا للمستقيم $l$، فإنَّ $k\vec{\mathbf{v}}$، حيث: $k \neq 0$، هو أيضًا اتجاه للمستقيم $l$.

### مفهوم أساسي — المعادلة المتجهة للمستقيم

المعادلة المتجهة للمستقيم $l$ الذي يوازي المتجه $\vec{\mathbf{v}}$، ويمرُّ بنقطة متجه الموقع لها $\vec{\mathbf{r}}_0$، هي:

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_0 + t\vec{\mathbf{v}}$$

## مثال 4

أجد المعادلة المتجهة للمستقيم $l$ الذي يوازي المتجه: $\vec{\mathbf{v}} = \langle -4, 2, 7 \rangle$، ويمرُّ بالنقطة $U(2, -3, 5)$.

متجه موقع النقطة $U$ هو: $\vec{\mathbf{r}}_0 = \langle 2, -3, 5 \rangle$.

صيغة المعادلة المتجهة للمستقيم $\quad \vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_0 + t\,\vec{\mathbf{v}}$

بالتعويض $\vec{\mathbf{r}}_0 = \langle 2, -3, 5 \rangle, \vec{\mathbf{v}} = \langle -4, 2, 7 \rangle$ $\quad \vec{\mathbf{r}} = \langle 2, -3, 5 \rangle + t\langle -4, 2, 7 \rangle$

إذن، المعادلة المتجهة للمستقيم $l$ هي: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 2, -3, 5 \rangle + t\langle -4, 2, 7 \rangle$.

### أتذكَّر

متجه الموقع للنقطة $P(x, y, z)$ هو: $\overrightarrow{OP} = \langle x, y, z \rangle$.


### أتحقَّق من فهمي

أجد المعادلة المتجهة للمستقيم الذي يوازي المتجه: $\vec{\mathbf{v}} = \langle 1, -4, -5 \rangle$، ويمرُّ بالنقطة $U(0, -6, 9)$.

### لغة الرياضيات

يوازي المستقيم $l$ المتجه $\vec{\mathbf{v}}$ إذا كان $\vec{\mathbf{v}}$ اتجاهًا للمستقيم $l$.

يُمكِن تحديد متجه موازٍ لمستقيم يمرُّ بنقطتين معلومتين؛ وهو المتجه الذي يقع على المستقيم، وطرفاه هاتان النقطتان.

إذا عُلِمت نقطتان يمرُّ بهما المستقيم، فيُمكِن عندئذٍ كتابة معادلته المتجهة باتِّباع الخطوتين الآتيتين:

- إيجاد الصورة الإحداثية للمتجه الموازي، الذي طرفاه النقطتان المعلومتان، بصرف النظر عن النقطة التي يبدأ منها المتجه.
- تعويض متجه الموقع لإحدى النقطتين والمتجه الموازي للمستقيم في صيغة المعادلة المتجهة للمستقيم.

### أتذكَّر

تُحدِّد أيُّ نقطتين على المستقيم في المستوى الإحداثي ميل هذا المستقيم. أمّا في الفضاء فإن أي نقطتين على المستقيم تحددان اتجاهه.

## مثال 5

أجد معادلة متجهة للمستقيم $l$ المارِّ بالنقطتين: $P(5, -2, 18)$، و$Q(19, 5, -10)$.

**الخطوة 1:** أجد اتجاه المستقيم $l$، وهو $\overrightarrow{PQ}$.

$$\overrightarrow{PQ} = \langle 19-5, 5-(-2), -10-18 \rangle = \langle 14, 7, -28 \rangle$$

يُمكِن تبسيط هذا المتجه بقسمة إحداثياته جميعها على 7 (العامل المشترك الأكبر)، فيكون متجه اتجاه $l$ هو $\langle 2, 1, -4 \rangle$.

### أتعلَّم

يُفضَّل تبسيط الصورة الإحداثية للمتجه الناتج بالقسمة على العامل المشترك الأكبر لإحداثياته؛ لأنَّ المهم هو الاتجاه، وليس المقدار أو الطول.

**الخطوة 2:** أعوِّض متجه موقع النقطة $P$ واتجاه $l$ في صيغة المعادلة المتجهة.

صيغة المعادلة المتجهة للمستقيم $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_0 + t\vec{\mathbf{v}}$

بالتعويض $\vec{\mathbf{r}}_0 = \langle 5, -2, 18\rangle, \vec{\mathbf{v}} = \langle 2, 1, -4\rangle$ $\quad \vec{\mathbf{r}} = \langle 5, -2, 18\rangle + t\langle 2, 1, -4\rangle$

### أتحقق من فهمي

أجد معادلة متجهة للمستقيم $l$ المارِّ بالنقطتين: $M(3, 7, -9)$، و $N(2, -4, 3)$.

**أتعلَّم**

المعادلة المتجهة للمستقيم لها عِدَّة صور مُتكافِئة، تختلف باختلاف النقطة التي يُعوَّض متجه موقعها في المعادلة. ففي المثال المجاور، يُمكِن تعويض متجه موقع النقطة $Q$، أو أيِّ نقطة أُخرى على المستقيم، مثل نقطة منتصف القطعة $\overline{PQ}$، بدلًا من النقطة $P$.

يُمكِن استعمال المعادلة المتجهة للمستقيم في التحقُّق من وقوع نقطة معلومة عليه أم لا، وإيجاد نقطة وقعت عليه، وعُلِم أحد إحداثياتها.

## مثال 6

المعادلة المتجهة للمستقيم $l$ هي: $\vec{\mathbf{r}} = \langle -2, 9, 1\rangle + t\langle -3, 1, 2\rangle$:

**1** أُبيِّن أنَّ النقطة $(19, 2, -13)$ تقع على المستقيم $l$.

لكي تقع النقطة المعطاة على المستقيم $l$؛ لا بُدَّ من وجود قيمة وحيدة للمُتغيِّر $t$ تُحقِّق المعادلة:

بتعويض $\vec{\mathbf{r}} = \langle 19, 2, -13\rangle$ في معادلة المستقيم $l$ $\quad \langle 19, 2, -13\rangle = \langle -2, 9, 1\rangle + t\langle -3, 1, 2\rangle$

بجمع المتجهين $\quad \langle 19, 2, -13\rangle = \langle -2-3t, 9+t, 1+2t\rangle$

| | | | |
|---|---|---|---|
| تعريف تساوي متجهين | $-13 = 1+2t$ | $2 = 9 + t$ | $19 = -2-3t$ |
| بحلِّ المعادلات الثلاث | $t = -7$ | $t = -7$ | $t = -7$ |

بما أنَّ للمعادلات الثلاث الحلَّ نفسه (قيمة $t$ نفسها)، فإنَّ النقطة $(19, 2, -13)$ تقع على المستقيم $l$؛ لأنَّها تنتج من تعويض $t = -7$ في معادلته المتجهة.

**أتذكَّر**

كل قيمة من قِيَم $t$ تُحدِّد نقطة وحيدة على المستقيم، وكل نقطة على المستقيم تتحدَّد بقيمة مُعيَّنة للمُتغيِّر $t$.

**أتعلَّم**

إذا نتجت من حلِّ المعادلات في هذا المثال قِيَمٌ مختلفة للمُتغيِّر $t$، فإنَّ النقطة لا تقع على المستقيم $l$.

**2** أجد نقطة على المستقيم، إحداثي $z$ لها هو 25.

يُمكِن كتابة معادلة المستقيم $l$ في الصورة الآتية:

$$\vec{\mathbf{r}} = (-2 - 3t)\hat{\mathbf{i}} + (9 + t)\hat{\mathbf{j}} + (1 + 2t)\hat{\mathbf{k}}$$

بما أنَّ قيمة الإحداثي $z$ للنقطة المطلوبة هي 25، فأجد قيمة $t$ التي تُحدِّد هذه النقطة بحلِّ المعادلة الآتية:

بكتابة المعادلة $$1 + 2t = 25$$

بطرح 1 من الطرفين $$2t = 24$$

بقسمة طرفي المعادلة على 2 $$t = 12$$

بتعويض $t = 12$ في معادلة المستقيم $l$، ينتج:

$$\vec{\mathbf{r}} = \langle -2-3(12), 9 + 12, 1+2(12)\rangle$$

$$= \langle -38, 21, 25\rangle$$

إذن، النقطة الواقعة على المستقيم $l$، والإحداثي $z$ لها هو 25، هي: $(-38, 21, 25)$.

**أتعلَّم**

القيمة: $t = 12$ هي قيمة المُتغيِّر $t$ التي ينتج من تعويضها في معادلة المستقيم نقطةٌ الإحداثي $z$ لها هو 25.

### أتحقَّق من فهمي

المعادلة المتجهة للمستقيم $l$ هي: $\vec{\mathbf{r}} = 11\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}} - 6\hat{\mathbf{k}} + t(7\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}})$:

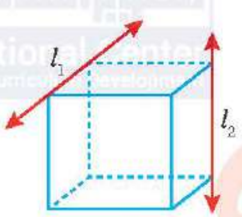
a) أُبيِّن أنَّ النقطة التي متجه الموقع لها هو $(39\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 14\hat{\mathbf{k}})$ تقع على المستقيم $l$.

b) أجد متجه الموقع للنقطة التي تقع على هذا المستقيم، وتُقابِل القيمة: $t = -3$.

c) إذا كانت النقطة $(v, -3v, 5v-1)$ تقع على المستقيم $l$، فما قيمة $v$؟

## المستقيمات المتوازية والمتقاطعة والمتخالفة

يكون المستقيمان في المستوى الإحداثي متوازيين، أو متقاطعين. أمّا في الفضاء فتوجد حالة ثالثة، هي أنْ يكون المستقيمان **متخالفين** (skew)؛ أيْ غير متوازيين، وغير متقاطعين، مثل المستقيمين: $l_1$، و $l_2$ في الشكل المجاور.




إذا عُلِمت معادلتا مستقيمين، فيُمكِن الجزم بتوازيهما إذا كان اتجاه كلٍّ منهما موازيًا للآخر؛ أيْ إنَّ أحدهما ينتج من ضرب الآخر في عدد حقيقي.

**أتذكَّر**

يتوازى المتجهان: $\vec{\mathbf{u}}$، و $\vec{\mathbf{v}}$ إذا كان $\vec{\mathbf{u}} = k\vec{\mathbf{v}}$، حيث $k$ عدد حقيقي، ويُرمَز إلى هذا التوازي بالرمز: $\vec{\mathbf{u}} \parallel \vec{\mathbf{v}}$.

**مفهوم أساسي** — **المستقيمات المتوازية**

إذا كانت معادلة المستقيم $l_1$ هي: $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{b}}$، ومعادلة المستقيم $l_2$ هي: $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{c}} + u\vec{\mathbf{d}}$، فإنَّ: $l_1 \parallel l_2$ إذا وفقط إذا كان $\vec{\mathbf{b}} \parallel \vec{\mathbf{d}}$.

يُمكِن الحكم على تقاطع المستقيمين: $l_1: \vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{a}} + t\vec{\mathbf{b}}$، و $l_2: \vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{c}} + u\vec{\mathbf{d}}$، بمساواة متجهي الموقع $\vec{\mathbf{r}}$ في معادلتيهما، وحلِّ المعادلات الثلاث الناتجة لإيجاد قيمة كلٍّ من المُتغيِّر $t$ والمُتغيِّر $u$. فإذا تحقَّقت المعادلات الثلاث لقيمتي هذين المُتغيِّرين، كان المستقيمان متقاطعين. وإذا كان المستقيمان غير متوازيين وغير متقاطعين، فإنَّهما يكونان متخالفين.

**إرشاد**

إذا جاء في المسألة أكثر من مستقيم، فأستعمل رموزًا مختلفة للوسيط.

**مثال 7**

**إذا كانت المعادلة المتجهة للمستقيم $l_1$ هي: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 3, -3, -6\rangle + t\langle 2, -4, 3\rangle$، والمعادلة المتجهة للمستقيم $l_2$ هي: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 4, 7, 0\rangle + u\langle 1, 2, 3\rangle$، فأُحدِّد إنْ كان $l_1$ و $l_2$ متوازيين، أو متقاطعين، أو متخالفين، ثم أجد إحداثيات نقطة تقاطعهما إذا كانا متقاطعين.**

اتجاه المستقيم $l_1$ هو $\langle 2, -4, 3\rangle$، واتجاه المستقيم $l_2$ هو $\langle 1, 2, 3\rangle$. وبما أنَّ هذين المتجهين غير متوازيين، فإنَّ المستقيمين $l_1$ و $l_2$ غير متوازيين. إذن، أبحث في تقاطع المستقيمين:

**الخطوة 1:** أُساوي قيمتي $\vec{\mathbf{r}}$ في معادلتي المستقيمين: $l_1$، و $l_2$.

$\langle 3, -3, -6\rangle + t\langle 2, -4, 3\rangle = \langle 4, 7, 0\rangle + u\langle 1, 2, 3\rangle$ بمساواة $\vec{\mathbf{r}}$ في معادلتي المستقيمين

$\langle 3+2t, -3-4t, -6+3t\rangle = \langle 4+u, 7+2u, 3u\rangle$ بالتبسيط

**الخطوة 2:** أُساوي الإحداثيات الثلاثة للمتجهين على طرفي المساواة، ثم أَحُلُّ نظام المعادلات الناتج لإيجاد قيمة $t$ وقيمة $u$:

$3 + 2t = 4 + u \ldots\ldots(1)$ بمساواة الإحداثي $x$

$-3 - 4t = 7 + 2u \ldots\ldots(2)$ بمساواة الإحداثي $y$

$-6 + 3t = 3u \ldots\ldots(3)$ بمساواة الإحداثي $z$

$6 + 4t = 8 + 2u$ بضرب المعادلة (1) في 2

$-3 - 4t = 7 + 2u$ المعادلة (2)

$3 = 15 + 4u$ بجمع المعادلتين

$-12 = 4u$ بطرح 15 من طرفي المعادلة

$u = -3$ بقسمة طرفي المعادلة على 4

**أتعلَّم**

يُمكِن النظر إلى المعادلة: $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_0 + t\vec{\mathbf{d}}$ بوصفها حركة جسم في مسار مستقيم، بحيث تُحدِّد المعادلة موقعه في اللحظة $t$. ويُمكِن النظر إلى أيِّ مستقيمين في الفضاء بوصفهما مساري جسمين، يتحرَّك كلٌّ منهما في مسار مستقيم، وزمن خاص به؛ لذا، فإنَّ تقاطع هذين المستقيمين لا يعني بالضرورة اصطدام الجسمين أحدهما بالآخر.

| | |
|---|---|
| بتعويض $u = -3$ في المعادلة (1) | $3 + 2t = 4 - 3$ |
| بالتبسيط | $2t = -2$ |
| بقسمة طرفي المعادلة على 2 | $t = -1$ |

بعد ذلك أُعوِّض قيمة $t$ وقيمة $u$ في المعادلة (3)، ثم أتحقَّق من مساواة الطرفين:

| | |
|---|---|
| بالتعويض $t = -1, u = -3$ | $-6 + 3(-1) \stackrel{?}{=} 3(-3)$ |
| العبارة صحيحة | $-9 = -9$ ✓ |

بما أنَّ قيمة $t$ وقيمة $u$ حقَّقتا المعادلات الثلاث، فإنَّ المستقيمين متقاطعان.

**الخطوة 3:** أجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين.

لإيجاد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين، أستعمل معادلة المستقيم $l_1$ لإيجاد متجه الموقع $\vec{\mathbf{r}}$ لنقطة التقاطع:

| | |
|---|---|
| معادلة المستقيم $l_1$ | $\vec{\mathbf{r}} = \langle 3, -3, -6 \rangle + t\langle 2, -4, 3 \rangle$ |
| بتعويض $t = -1$ | $= \langle 3, -3, -6 \rangle + (-1)\langle 2, -4, 3 \rangle$ |
| بالتبسيط | $= \langle 1, 1, -9 \rangle$ |

إذن، متجه موقع نقطة تقاطع المستقيمين هو: $\langle 1, 1, -9 \rangle$، ونقطة تقاطع المستقيم $l_1$ والمستقيم $l_2$ هي: $(1, 1, -9)$.

### أتحقَّق من فهمي

**إذا كانت معادلة المستقيم $l_1$ هي: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 3, 7, -9 \rangle + t\langle 1, 11, -12 \rangle$، ومعادلة المستقيم $l_2$ هي: $\vec{\mathbf{r}} = \langle -30, -6, 30 \rangle + u\langle 4, -6, 3 \rangle$، فأُحدِّد إذا كان المستقيمان: $l_1$، و $l_2$ متوازيين، أو متقاطعين، أو متخالفين، ثم أجد إحداثيات نقطة تقاطعهما إذا كانا متقاطعين.**

تُستعمَل المعادلات المتجهة في كثير من المواقف الحياتية والعلمية، كما في خطوط الملاحة الجوية.

**أتعلَّم**

بالرغم من أنَّ قيمتي المُتغيِّرين: $t$، و $u$، الناتجتين في الخطوة السابقة، تُحقِّقان المعادلة الأولى والمعادلة الثانية، فإنَّه يجب تعويضهما في المعادلة الثالثة للتأكُّد أنَّهما تُحقِّقانها أيضًا. وإذا لم تتحقَّق المعادلة الثالثة، فإنَّ المستقيمين يكونان متخالفين.

**أتعلَّم**

يُمكِن إيجاد نقطة تقاطع المستقيمين باستعمال معادلة $l_2$، والقيمة $u = -3$.

**مثال 7 : من الحياة**

**عرض جوي: أقلعت طائرة من موقعٍ إحداثياته: $(13, 7, 0)$. وفي الوقت نفسه، أقلعت طائرة ثانية من موقعٍ إحداثياته $(-2, 5, 0)$. وبعد التحليق مدَّة قصيرة في مسارين مستقيمين، أصبحت الطائرة الأولى عند الموقع الذي إحداثياته: $(19, 10, 20)$، وأصبحت الطائرة الثانية عند الموقع الذي إحداثياته: $(-11, 15, 20)$. هل خطّا سير الطائرتين متوازيان، أم متقاطعان، أم متخالفان؟**

**الخطوة 1:** أجد اتجاه خط سير كلٍّ من الطائرتين، ومعادلته المتجهة.

- اتجاه خط سير الطائرة الأولى هو:

$$\langle 19-13, 10-7, 20-0\rangle = \langle 6, 3, 20\rangle$$

إذن، المعادلة المتجهة لخط سير الطائرة الأولى هي:

$$\vec{\mathbf{r}} = \langle 13, 7, 0\rangle + t\langle 6, 3, 20\rangle$$

- اتجاه خط سير الطائرة الثانية هو:

$$\langle -11-(-2), 15-5, 20-0\rangle = \langle -9, 10, 20\rangle$$

إذن، المعادلة المتجهة لخط سير الطائرة الثانية هي:

$$\vec{\mathbf{r}} = \langle -2, 5, 0\rangle + u\langle -9, 10, 20\rangle$$

بما أنَّ اتجاه خط سير الطائرة الأولى لا يوازي اتجاه خط سير الطائرة الثانية، فإنَّ خطَّي سيرهما غير متوازيين. إذن، أبحث في تقاطع خطَّي سيرهما.

**الخطوة 2:** أساوي $\vec{\mathbf{r}}$ من معادلتي خطَّي سير الطائرتين:

$$\langle 13, 7, 0\rangle + t\langle 6, 3, 20\rangle = \langle -2, 5, 0\rangle + u\langle -9, 10, 20\rangle$$

$$\langle 13+6t, 7+3t, 20t\rangle = \langle -2-9u, 5+10u, 20u\rangle$$

**معلومة**

يقيم سلاح الجو الملكي الأردني في المناسبات الوطنية عروضًا جويةً، تُحلِّق فيها أسراب الطائرات المقاتلة في مسارات متوازية أو متخالفة.

**أتذكَّر**

لإيجاد اتجاه أيِّ مستقيم، أجد المتجه الواصل بين أيِّ نقطتين عليه، وذلك بطرح إحداثياتهما المُتناظِرة.

**الخطوة 3:** أُساوي كل إحداثي من الطرف الأيسر مع نظيره في الطرف الأيمن، ثم أَحُلُّ نظام المعادلات الناتج.

بمساواة الإحداثي $x$ $\quad 13 + 6t = -2 - 9u \ldots\ldots\ldots(1)$

بمساواة الإحداثي $y$ $\quad 7 + 3t = 5 + 10u \ldots\ldots\ldots(2)$

بمساواة الإحداثي $z$ $\quad 20t = 20u \ldots\ldots\ldots(3)$

بتبسيط المعادلة (3) $\quad t = u$

بتعويض $t = u$ في (1) $\quad 13 + 6u = -2 - 9u$

بإعادة ترتيب المعادلة $\quad 15 = -15\,u$

بقسمة الطرفين على $-15$ $\quad u = -1$

إذن، $t = u = -1$ تُحقِّقان المعادلتين: (1)، و(3).

أُعوِّض قيمة $t$ وقيمة $u$ في المعادلة (2)، ثم أتحقَّق من مساواة الطرفين:

بتعويض $u = t = -1$ في (2) $\quad 7 + 3(-1) \stackrel{?}{=} 5 + 10(-1)$

عبارة غير صحيحة $\quad 4 = -5$ ✗

بما أنَّ المعادلات الثلاث لم تتحقَّق في آنٍ معًا، فإنَّ خطَّي سير الطائرتين غير متقاطعين، وهما غير متوازيين؛ لأنَّ اتجاهيهما غير متوازيين؛ ما يعني أنَّ خطَّي سيرهما متخالفان.

### أتحقَّق من فهمي

عرض جوي: **أقلعت طائرة من موقعٍ إحداثياته: $(0, 7, 0)$. وفي الوقت نفسه، أقلعت طائرة ثانية من موقعٍ إحداثياته: $(-2, 0, 0)$. وبعد التحليق مدَّة قصيرة في مسارين مستقيمين، أصبحت الطائرة الأولى عند الموقع الذي إحداثياته: $(8, 15, 16)$، وأصبحت الطائرة الثانية عند الموقع الذي إحداثياته: $(22, 24, 48)$. هل خطَّا سير الطائرتين متوازيان، أم متقاطعان، أم متخالفان؟**

**أتذكَّر**

لكل معادلتين متجهتين لمستقيمين في الفضاء، أستعمل مُتغيِّرين مختلفين للتعبير عن الوسيط، مثل: $t$، و$u$، ويُمثِّل كلٌّ منهما الزمن الذي يُحدِّد موقع الجسم المُتحرِّك على المستقيم.

**أتذكَّر**

قيمة $t$ السالبة تعطي نقطة على المستقيم عكس اتجاه $\vec{\mathbf{v}}$ بَدْءًا بالنقطة التي متجه الموقع لها $\vec{\mathbf{r}}_0$.

**أُفكِّر**

إذا كانت مسارات الطائرات في عرض جوي مستقيمة ومتقاطعة، فهل يُؤكِّد ذلك أنَّ الطائرات ستصطدم؟ أُبرِّر إجابتي.

## أتدرّب وأحلّ المسائل

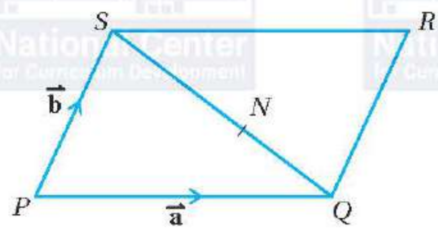
أُحدِّد إذا كان المتجهان متوازيين أم لا في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $\langle 8, 12, 24\rangle, \langle 15, 10, -20\rangle$

2) $\langle 27, -48, -36\rangle, \langle 9, -16, -12\rangle$

3) $\langle -6, -4, 10\rangle, \langle -3, -1, 13\rangle$

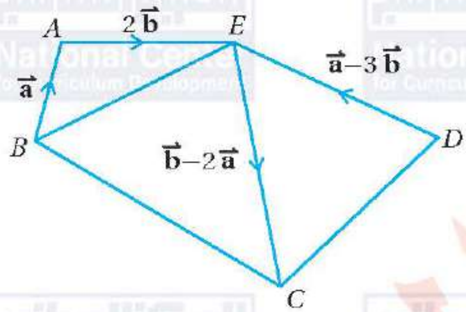
4) $\langle 12, -8, 32\rangle, \langle 21, -14, 56\rangle$




يُمثِّل الشكل المجاور متوازي الأضلاع $PQRS$، الذي تقع فيه النقطة $N$ على $\overline{SQ}$، حيث: $SN : NQ = 3 : 2$، و $\overrightarrow{PQ} = \vec{\mathbf{a}}, \overrightarrow{PS} = \vec{\mathbf{b}}$:

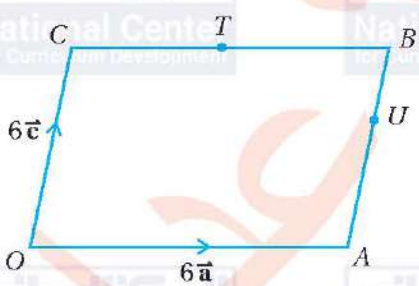
5) أكتب $\overrightarrow{SQ}$ بدلالة $\vec{\mathbf{a}}$ و $\vec{\mathbf{b}}$.

6) أكتب $\overrightarrow{NR}$ بدلالة $\vec{\mathbf{a}}$ و $\vec{\mathbf{b}}$.




7) مُعتمِدًا المعلومات المعطاة في الشكل المجاور، أُثبِت أنَّ $BEDC$ متوازي أضلاع.

(إرشـاد: في متوازي الأضلاع، كل ضلعين متقابلين متوازيان، ولهما الطول نفسه).




8) في متوازي الأضلاع $OABC$ المجاور، $\overrightarrow{OA} = 6\,\vec{\mathbf{a}}, \overrightarrow{OC} = 6\,\vec{\mathbf{c}}$، والنقطة $T$ هي منتصف الضلع $\overline{CB}$، والنقطة $U$ تقسم $\overline{AB}$ بنسبة $1 : 2$. إذا مُدَّ الضلع $\overline{OA}$ على استقامته إلى النقطة $X$، حيث: $OA = AX$، فأُثبِت أنَّ $T$، و $U$، و $X$ تقع على استقامة واحدة.

أجد معادلة متجهة للمستقيم الذي يوازي المتجه $\vec{\mathbf{a}}$، ويمرُّ بنقطة متجه الموقع لها $\vec{\mathbf{b}}$ في كلٍّ ممّا يأتي:

9) $\vec{\mathbf{a}} = -7\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{b}} = 5\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$

10) $\vec{\mathbf{a}} = -3\,\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{b}} = -2\hat{\mathbf{i}} + 8\,\hat{\mathbf{k}}$

11) $\vec{\mathbf{a}} = \langle 4, 3\rangle, \vec{\mathbf{b}} = \langle 9, -2\rangle$

12) $\vec{\mathbf{a}} = \langle 0, -1, 3\rangle, \vec{\mathbf{b}} = \langle 10, 3, -6\rangle$

(إرشاد: تظلُّ المعادلة المتجهة للمستقيم صحيحة في المستوى الإحداثي).

أجد معادلة متجهة للمستقيم المارِّ بالنقطتين في كلٍّ ممّا يأتي:

14) $(11, -6, 9), (1, 4, 29)$

13) $(10, 3, -6), (0, -1, 3)$

16) $(-2, 9, 1), (10, 5, -7)$

15) $(-30, -6, 30), (-26, -12, 23)$

17) أجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين:

$\vec{\mathbf{r}} = \langle -2, 2, -1\rangle + t\langle 1, 2, -1\rangle$، و $\vec{\mathbf{r}} = \langle 4, 4, -7\rangle + u\langle -1, 3, 1\rangle$.

يمرُّ المستقيم $l_1$ بالنقطتين: $E$، و$F$، ويمرُّ المستقيم $l_2$ بالنقطتين: $G$، و$H$. أُحدِّد إذا كان هذان المستقيمان متوازيين، أو متخالفين، أو متقاطعين، ثم أجد إحداثيات نقطة التقاطع إذا كانا متقاطعين في كلٍّ ممّا يأتي:

18) $E(3, -5, -7), F(-11, 9, 14), G(8, -1, -8), H(2, 5, 1)$

19) $E(3, 7, -9), F(2, -4, 3), G(-30, -6, 30), H(-26, -12, 33)$

يمرُّ المستقيم $l$ بالنقطتين: $A(-2, 9, 1)$، و $B(10, 5, -7)$:

20) أكتب معادلة متجهة للمستقيم $l$.

21) أُبيِّن أنَّ النقطة $(19, 2, -13)$ تقع على المستقيم $l$.

22) أجد قيمة $a$ إذا كانت النقطة $(1, a, -1)$ تقع على المستقيم $l$.

23) أجد قيمة كلٍّ من $b$، و $c$ إذا كانت النقطة $(-8, b, c)$ تقع على المستقيم $l$.

24) أجد نقطة تقع على المستقيم $l$، وتقع أيضًا في المستوى $xz$.

25) إذا كان: $\vec{\mathbf{m}} = \langle 1, -2, 3\rangle, \vec{\mathbf{n}} = \langle -5, 4, a\rangle$، وكان المتجه: $3\vec{\mathbf{n}} + b\vec{\mathbf{m}}$ يوازي المتجه: $\langle 5, -3, 3\rangle$، فأجد قيمة كلٍّ من $a$، و $b$.

26) إذا كان: $\vec{\mathbf{v}} = a\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ c \end{pmatrix}$، فأجد قيمة كلٍّ من: $a$، و$b$، و$c$، علمًا بأنَّ اتجاه $\vec{\mathbf{v}}$ في اتجاه محور $y$ الموجب، و $|\vec{\mathbf{v}}| = 34$.

**متجهات الموقع للنقاط: $A$، و$B$، و $C$ الواقعة على مستقيم واحد هي:**

**$\vec{a} = 2\hat{i} + p\,\hat{j} + q\,\hat{k},\ \ \vec{b} = -4\,\hat{i} + 13\,\hat{j} - \hat{k},\ \vec{c} = 14\,\hat{i} + \hat{j} + 5\,\hat{k}$ على الترتيب:**

27 أجد قيمة $p$.

28 أجد قيمة $q$.

29 أجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم المارِّ بالنقطتين: $A$، و$B$ مع المستوى $yz$.

30 أجد طول $\overline{AC}$ في صورة: $a\sqrt{14}$، حيث $a$ عدد صحيح.

31 $A(1, 2)$، و $B(2, 3)$ نقطتان في المستوى الإحداثي. أجد معادلة المستقيم المارِّ بهاتين النقطتين، ثم أجد معادلة متجهة لهذا المستقيم، مُقارِنًا بين المعادلتين.

**إذا كان المستقيم $l_1$ يمرُّ بالنقطة $A(-3, -1, 12)$، والنقطة $B(-2, 0, 11)$، وكان المستقيم $l_2$ يوازي المستقيم $l_1$، ويمرُّ بالنقطة $C(11, 9, 12)$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:**

32 أجد معادلة $l_1$.

33 أجد معادلة $l_2$.

**إذا كانت: $A(-1, -2, 1)$، و$B(-3, 4, -5)$، و $C(0, -2, 4)$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:**

34 أجد إحداثيات النقطة $M$ التي هي نقطة منتصف $\overline{AB}$.

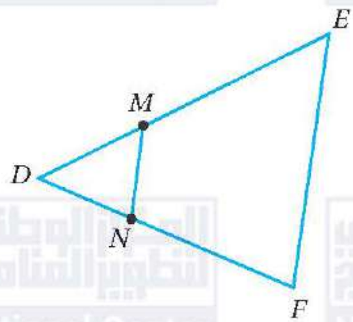
35 إذا وقعت النقطة $N$ على المستقيم $BC$، وكان: $|\overrightarrow{NC}| = |\overrightarrow{BN}|\ 2$، فأجد معادلة متجهة للمستقيم المارِّ بالنقطتين $M$ و $N$.

36 يمرُّ المستقيم $l_1$ بالنقطتين: $P(-5, 2, 4)$، و$Q(-2, 3, -3)$، ويمرُّ المستقيم $l_2$ بالنقطتين: $R(0, -8, -1)$، و $S(12, -23, a)$. إذا كان المستقيم $l_1$ والمستقيم $l_2$ متقاطعين، فما قيمة $a$؟ وما إحداثيات نقطة تقاطعهما؟

37 **أقمار صناعية:** مَرَّ القمر الصناعي $S_1$ بموقعين، هما: $A(30, -75, 90)$، و $B(100, 65, 220)$، ومَرَّ القمر الصناعي $S_2$ بموقعين، هما: $C(-20, 45, 200)$، و$D(120, 85, 160)$.
أُحدِّد العلاقة بين المستقيم $AB$ والمستقيم $CD$ من معادلتيهما.

38 أَحُلُّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

**39** **تحدٍّ:** يمرُّ المستقيم $l_1$ بالنقطة $Q$ التي متجه الموقع لها هو $\vec{\mathbf{q}} = \langle -6, 14, -19 \rangle$، ويمرُّ أيضًا بالنقطة $S$ التي متجه الموقع لها هو $\vec{\mathbf{s}} = \langle -4, 6, -3 \rangle$، ويمرُّ المستقيم $l_2$ بالنقطة $T(1, 9, 9)$، ويوازي المستقيم: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 0, -6, 1 \rangle + t\langle 4,7,4 \rangle$. إذا تقاطع المستقيم $l_1$ والمستقيم $l_2$ في النقطة $U$، فأُثبِت أنَّ المثلث $STU$ متطابق الضلعين.



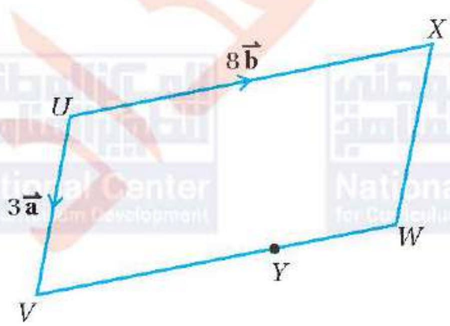
**تبرير:** في الشكل المجاور، $DE = 12\vec{\mathbf{a}}$، و $DF = 8\vec{\mathbf{b}}$، والنقطة $M$ تقسم $\overline{DE}$ بنسبة $1 : 2$، والنقطة $N$ تقسم $\overline{DF}$ بنسبة $1 : 2$

**40** أُثبِت أنَّ: $FEMN$ شبه منحرف.

**41** إذا كانت مساحة المثلث $DEF$ تساوي 72 وحدة مربعة، فأجد مساحة $FEMN$.

**42** **تبرير:** تقع النقطة $C$ على المستقيم الذي يحوي النقطتين: $A(13, -10, 15)$، و $B(22, -22, 9)$. إذا كان بُعْد $C$ عن $B$ مثلي بُعْد $C$ عن $A$، فأجد جميع إحداثيات النقطة $C$ المُمكِنة، مُبرِّرًا إجابتي.

**43** **تحدٍّ:** أجد جميع النقاط على المستقيم: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 3, -2, -6 \rangle + t\langle 1, 2, 3 \rangle$ التي تبعد 29 وحدة عن نقطة الأصل.



**44** **تحدٍّ:** يُمثِّل الشكل المجاور متوازي الأضلاع $UVWX$. إذا كان: $\overline{UX} = 8\vec{\mathbf{b}}$، و $\overline{UV} = 3\vec{\mathbf{a}}$، وكانت النقطة $Y$ تقع بين $V$ و $W$، حيث: $VY = 3YW$، و $Z$ هي نقطة، حيث: $\overline{XZ} = \frac{4}{3}\,\overline{XW}$، فأُثبِت أنَّ $U$، و $Y$، و $Z$ تقع على استقامة واحدة.

الدرس 3

# الضرب القياسي
# Scalar Product

**فكرة الدرس**

- إيجاد الضرب القياسي لمتجهين.
- إيجاد قياس الزاوية بين متجهين أو مستقيمين.

**مسألة اليوم**

أُطلِق صاروخ من النقطة (1 ,2 ,1)، ثم وصل بعد ثانيتين إلى النقطة (21, 13, 9). وفي الوقت نفسه، أُطلِق صاروخ آخر من النقطة (2 ,3− ,4)، ووصل بعد ثانيتين إلى النقطة (18 ,1 ,14). ما قياس الزاوية بين مساري الصاروخين؟

## الضرب القياسي للمتجهات في الفضاء

درسْتُ في الصف العاشر موضوع الضرب القياسي للمتجهات في المستوى الإحداثي؛ وهو عملية جبرية بين متجهين، تنتج منها كمِّية قياسية، ويُرمَز إليها بالرمز: $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}}$، وتُقرَأ: $\vec{\mathbf{v}}$ dot $\vec{\mathbf{w}}$.

إذا كان: $\vec{\mathbf{v}} = \langle v_1, v_2 \rangle$، وكان: $\vec{\mathbf{w}} = \langle w_1, w_2 \rangle$، فإنَّ:

$$\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = v_1 w_1 + v_2 w_2$$

يُمكِن أيضًا إيجاد الضرب القياسي لمتجهين في الفضاء بطريقة مُشابِهة لطريقة إيجاده لمتجهين في المستوى.

**أتعلَّم**

لأيِّ ثلاثة متجهات: $\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}, \vec{\mathbf{u}}$، وأيِّ عدد حقيقي $c$، فإنَّ:

- $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$
- $\vec{\mathbf{u}} \cdot (\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}) = \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{w}}$
- $c(\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}) = (c\vec{\mathbf{u}}) \cdot \vec{\mathbf{v}}$

**مفهوم أساسي**

**الضرب القياسي في الفضاء**

إذا كان: $\vec{\mathbf{v}} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle, \vec{\mathbf{w}} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$، فإنَّ:

$$\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

**مثال 1**

أجد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $\vec{\mathbf{v}} = 5\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} + 8\hat{\mathbf{k}},\ \vec{\mathbf{w}} = 4\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 4\hat{\mathbf{k}}$

$\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$ صيغة الضرب القياسي

$= 5(4) + 4(3) + 8(-4)$ بالتعويض

$= 20 + 12 - 32 = 0$ بالتبسيط

2) $\vec{\mathbf{a}} = \langle 4, -6, 5\rangle,\ \vec{\mathbf{b}} = \langle 3, 7, 2\rangle$

$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ صيغة الضرب القياسي

$= 4(3) + (-6)(7) + 5(2)$ بالتعويض

$= 12 - 42 + 10 = -20$ بالتبسيط

**أتذكَّر**

ناتج الضرب القياسي لمتجهين هو عدد، وليس متجهًا.

### أتحقَّق من فهمي

أجد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كلٍّ ممّا يأتي:

a) $\vec{\mathbf{v}} = \langle 4,8,-3\rangle,\ \vec{\mathbf{w}} = \langle -3,7,2\rangle$

b) $\vec{\mathbf{m}} = -3\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}},\ \vec{\mathbf{n}} = -12\hat{\mathbf{i}} + 6\hat{\mathbf{j}} - 8\hat{\mathbf{k}}$

## الزاوية بين متجهين في الفضاء


لإيجاد قياس الزاوية بين متجهين، فإنَّها تُرسَم بحيث يكون للمتجهين نقطة البداية نفسها كما في الشكل المجاور.

وكما هو الحال بالنسبة إلى المتجهات في المستوى الإحداثي، فإنَّه يُمكِن عن طريق الضرب القياسي إيجاد قياس الزاوية $\theta$ بين المتجهين غير الصفريين: $\vec{\mathbf{v}}$، و $\vec{\mathbf{w}}$ في الفضاء، وذلك باستعمال العلاقة: $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = |\vec{\mathbf{v}}|\,|\vec{\mathbf{w}}| \cos\theta$ التي يُمكِن إعادة كتابتها باستعمال تعريف معكوس جيب تمام الزاوية على النحو الآتي:

**أتعلَّم**

الزاوية بين متجهين هي الزاوية الصغرى المحصورة بينهما عند رسمهما بَدْءًا بالنقطة نفسها؛ أيْ إنَّ: $0 \le \theta \le \pi$.

## قياس الزاوية بين متجهين

### مفهوم أساسي

إذا كان $\vec{\mathbf{v}}$ و $\vec{\mathbf{w}}$ متجهين غير صفريين، فإنَّه يُمكِن إيجاد قياس الزاوية بينهما $\theta$ باستعمال الصيغة الآتية:

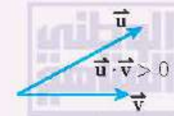
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}}}{|\vec{\mathbf{v}}|\,|\vec{\mathbf{w}}|}\right)$$

### أتعلَّم

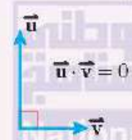
أستنتج ما يأتي من العلاقة المجاورة:

- إذا كان: $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} < 0$، فإنَّ الزاوية بين المتجه $\vec{\mathbf{v}}$ والمتجه $\vec{\mathbf{w}}$ مُنفرِجة.


- إذا كان: $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} > 0$، فإنَّ الزاوية بين المتجه $\vec{\mathbf{v}}$ والمتجه $\vec{\mathbf{w}}$ حادَّة.




- إذا كان: $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = 0$، فإنَّ الزاوية بين المتجه $\vec{\mathbf{v}}$ والمتجه $\vec{\mathbf{w}}$ قائمة؛ أيْ إنَّ هذين المتجهين مُتعامِدان.




### مثال 2

**إذا كان: $\vec{\mathbf{v}} = \langle 5, -2, 1 \rangle$ وكان: $\vec{\mathbf{w}} = \langle -3, 1, 4 \rangle$، فأجد قياس الزاوية $\theta$ بين المتجه $\vec{\mathbf{v}}$ والمتجه $\vec{\mathbf{w}}$ إلى أقرب عُشر درجة.**

**الخطوة 1:** أجد مقدار كلٍّ من المتجه $\vec{\mathbf{v}}$، والمتجه $\vec{\mathbf{w}}$.

$$|\vec{\mathbf{v}}| = \sqrt{5^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{30}$$

$$|\vec{\mathbf{w}}| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{26}$$

**الخطوة 2:** أجد قيمة: $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}}$.

$\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$ صيغة الضرب القياسي

$= 5(-3) + (-2)(1) + 1(4)$ بالتعويض

$= -13$ بالتبسيط

**الخطوة 3:** أُعوِّض القِيَم الناتجة من الخطوتين السابقتين في صيغة قياس الزاوية بين المتجهين.

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}}}{|\vec{\mathbf{v}}|\,|\vec{\mathbf{w}}|}\right)$ صيغة قياس الزاوية بين المتجهين

$= \cos^{-1}\left(\frac{-13}{\sqrt{30} \times \sqrt{26}}\right)$ بالتعويض

$= \cos^{-1}\left(\frac{-13}{\sqrt{780}}\right)$ بالتبسيط

$\approx 117.7^\circ$ باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، قياس الزاوية بين المتجهين هو: $117.7^\circ$ تقريبًا.

### أتحقَّق من فهمي

أجد قيــاس الزاوية $\theta$ بين المتجه $\vec{\mathbf{u}}$ والمتجه $\vec{\mathbf{w}}$ في كل مما يأتي مقرباً الناتج إلى أقرب عُشـر درجة:

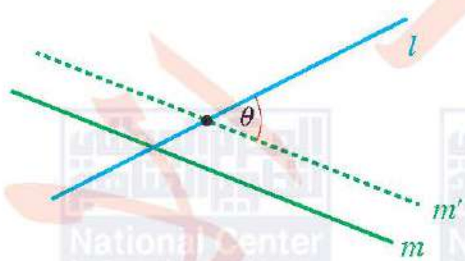
a) $\vec{\mathbf{u}} = -3\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}} - 4\hat{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{w}} = 4\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}}$

b) $\vec{\mathbf{u}} = \langle 2, -10, 6\rangle, \vec{\mathbf{w}} = \langle -3, 15, -9\rangle$

## الزاوية بين مستقيمين في الفضاء

تعلَّمْتُ في الدرس الســابق أنَّ اتجاه المستقيم يُحدِّده أيُّ متجه يوازيه؛ لذا يُمكِن إيجاد قياس الزاوية بين مســتقيمين عن طريق إيجاد الزاوية بين اتجاهيهما باســتعمال الضرب القياسـي للمتجهات.

وكذلك يُمكِن إيجاد الزاوية بين المســتقيمين في الفضاء حتى لو كانا متخالفين. فالمستقيم $l$ والمستقيم $m$ في الشــكل الآتي متخالفان، ولكنْ يُمكِن إيجاد الزاوية بينهما عن طريق إيجاد الزاوية بين اتجاه المستقيم $l$ واتجاه المستقيم $m'$ الذي يُعَدُّ إزاحة للمستقيم $m$.




**أتعلَّم**

إذا تقاطع مســتقيمان غير مُتعامِديــن، فإنَّه ينتج من تقاطعهما زاويتان حادَّتان ومُتقابِلتــان بالــرأس، وزاويتــان مُنفرِجتان ومُتقابِلتــان بالــرأس. ويُمكِــن إيجــاد قيــاس الزاويــة الحــادَّة بينهما بطرح الزاويــة المُنفرِجة من $180°$.

### مثال 3

إذا كانــت معادلة $l_1$ هــي: $\vec{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$، ومعادلة $l_2$ هي: $\vec{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}$،

فأجد قياس الزاوية الحادَّة بين المستقيم $l_1$ والمستقيم $l_2$ إلى أقرب عُشر درجة.

**الخطوة 1:** أُحدِّد اتجاه كلٍّ من المستقيم $l_1$ والمستقيم $l_2$.

اتجاه المستقيم $l_1$ هو: $\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$، واتجاه المستقيم $l_2$ هو: $\vec{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}$.

**الخطوة 2:** أجد قيمة: $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}}$.

$$\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = 8(-4) + 2(9) + (-3)(-1) = -11$$

**أتذكَّر**

بمــا أنَّ $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} < 0$، فإنَّ الزاويــة بيــن المتجه $\vec{\mathbf{v}}$ والمتجه $\vec{\mathbf{w}}$ مُنفرِجة.

**الخطوة 3:** أجد مقدار كلٍّ من المتجه $\vec{\mathbf{v}}$ والمتجه $\vec{\mathbf{w}}$.

$$|\vec{\mathbf{v}}| = \sqrt{8^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{77}$$

$$|\vec{\mathbf{w}}| = \sqrt{(-4)^2 + 9^2 + (-1)^2} = \sqrt{98}$$

**الخطوة 4:** أجد قياس الزاوية بين اتجاهي المستقيمين.

صيغة قياس الزاوية بين متجهين
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}}}{|\vec{\mathbf{v}}|\,|\vec{\mathbf{w}}|}\right)$$

بالتعويض
$$= \cos^{-1}\left(\frac{-11}{\sqrt{77} \times \sqrt{98}}\right)$$

بالتبسيط
$$= \cos^{-1}\left(\frac{-11}{\sqrt{7546}}\right)$$

باستعمال الآلة الحاسبة
$$\approx 97.3^\circ$$

إذن، قياس الزاوية المُنفرِجة بين المستقيم $l_1$ والمستقيم $l_2$ هو: $97.3^\circ$ تقريبًا، وقياس الزاوية الحادَّة بينهما هو: $180^\circ - 97.3^\circ \approx 82.7^\circ$

**أتعلَّم**

ينتج من المعادلة:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}}}{|\vec{\mathbf{v}}||\vec{\mathbf{w}}|}\right)$$

أنَّ:

$$\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = |\vec{\mathbf{v}}||\vec{\mathbf{w}}| \cos\theta$$

### أتحقَّق من فهمي

إذا كانت معادلة $l_1$ هي: $\vec{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$، ومعادلة $l_2$ هي: $\vec{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$، فأجد قياس الزاوية الحادَّة بين المستقيم $l_1$ والمستقيم $l_2$ إلى أقرب درجة.

## إيجاد مساحة المثلث باستعمال المتجهات

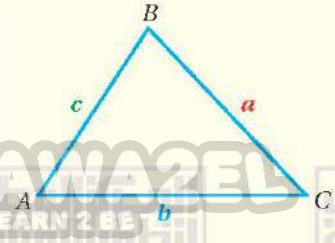
إذا علمْتُ إحداثيات رؤوس مثلث في الفضاء، فيُمكِنني استعمال الضرب القياسي للمتجهات في إيجاد مساحته.

أُحدِّد أوَّلًا متجهين يُمثِّلان ضلعين في المثلث، لهما نقطة البداية نفسها، ثم أجد طولي هذين الضلعين باستعمال صيغة مقدار المتجه، ثم أجد قياس الزاوية بينهما، عندئذٍ يُمكِنني إيجاد مساحة المثلث الذي عُلِم فيه طولا ضلعين، وقياس الزاوية المحصورة بينهما باستعمال قانون الجيب كما تعلَّمْتُ في الصف العاشر.

## مراجعة المفهوم

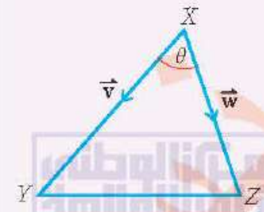
### إيجاد مساحة المثلث باستعمال قانون الجيب

مساحة المثلث $ABC$ تساوي نصف ناتج ضرب طولي أيِّ ضلعين فيه مضروبًا في جيب الزاوية المحصورة بينهما:




$$\text{Area} = \frac{1}{2}\, bc \sin A\,,\ \ \text{Area} = \frac{1}{2}\, ac \sin B\,,\ \ \text{Area} = \frac{1}{2}\, ab \sin C$$

**أتعلّم**




مساحة المثلث $XYZ$ هي:

$$\text{Area} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{XY}|\,|\overrightarrow{XZ}|\sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}|\vec{v}|\,|\vec{w}|\sin\theta$$

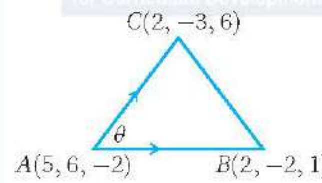
### مثال 4

أجد مساحة المثلث $ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه هي:

$A(5, 6, -2), B(2, -2, 1), C(2, -3, 6)$.

**الخطوة 1:** أُحدِّد متجهين لهما نقطة البداية نفسها.

يُمثِّل المتجه $\overrightarrow{AB}$ والمتجه $\overrightarrow{AC}$ ضلعين في المثلث $ABC$ كما في الشكل المجاور، ويوجد لكلا المتجهين نقطة البداية نفسها. أكتب هذين المتجهين بالصورة الإحداثية على النحو الآتي:




$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\rangle$ الصورة الإحداثية للمتجه

$= \langle 2-5, -2-6, 1-(-2)\rangle$ بالتعويض: $A(5, 6, -2), B(2, -2, 1)$

$= \langle -3, -8, 3\rangle$ بالتبسيط

$\overrightarrow{AC} = \langle 2-5, -3-6, 6-(-2)\rangle$ بالتعويض: $A(5, 6, -2), C(2, -3, 6)$

$= \langle -3, -9, 8\rangle$ بالتبسيط

**الخطوة 2:** أجد مقدار كلٍّ من المتجه $\overrightarrow{AB}$، والمتجه $\overrightarrow{AC}$.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + (-8)^2 + 3^2} = \sqrt{82}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-3)^2 + (-9)^2 + 8^2} = \sqrt{154}$$

**الخطوة 3:** أجد قيمة: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -3(-3) + (-8)(-9) + 3(8) = 105$$

**الخطوة 4:** أجد قيمة $\theta$ التي تُمثِّل قياس الزاوية المحصورة بين المتجه $\overrightarrow{AC}$ والمتجه $\overrightarrow{AB}$.

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|}\right)$$ صيغة قياس الزاوية بين متجهين

$$= \cos^{-1}\left(\frac{105}{\sqrt{82}\times\sqrt{154}}\right)$$ بالتعويض

$$\approx 20.9^\circ$$ باستعمال الآلة الحاسبة

**الخطوة 5:** أجد مساحة المثلث.

$$\text{Area} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}| \times |\overrightarrow{AC}| \sin\theta$$ قانون مساحة المثلث

$$= \frac{1}{2}\sqrt{82}\times\sqrt{154}\sin(20.9^\circ)$$ بالتعويض

$$\approx 20.0$$ باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، مساحة المثلث $ABC$ تساوي 20 وحدة مربعة تقريبًا.

**أُفكِّر**

هل يُمكِن حساب مساحة هذا المثلث بطريقة أخرى؟

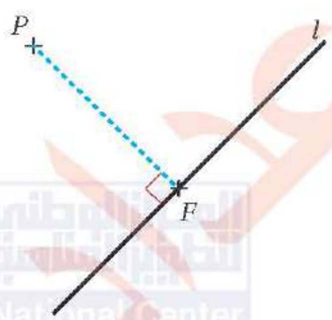
### أتحقَّق من فهمي

أجد مساحة المثلث $EFG$ الذي إحداثيات رؤوسه هي:

$E(2, 1, -1), F(5, 1, 7), G(6, -3, 1)$.

## مسقط العمود على مستقيم من نقطة خارجه

يُبيِّن الشكل المجاور المستقيم $l$، ونقطة لا تقع عليه هي $P$.




عند رسم مستقيم عمودي على $l$، يمرُّ بالنقطة $P$، فإنَّ نقطة تقاطع هذا المستقيم مع $l$ تُسمّى **مسقط العمود** (foot of the perpendicular) من النقطة $P$ على المستقيم $l$، وهي النقطة $F$ في الشكل المجاور.

يُمثِّل طول العمود $\overline{PF}$ البُعْد بين النقطة $P$ والمستقيم $l$. ويُمكِن استعمال حقيقة أنَّ ناتج الضرب القياسي للمتجهين المُتعامِدين يساوي صفرًا؛ لتحديد مسقط العمود من النقطة $P$ على المستقيم $l$ (إحداثيات النقطة $F$).

**أتذكَّر**

البُعْد بين مستقيم ونقطة لا تقع عليه هو طول القطعة المستقيمة العمودية على المستقيم من تلك النقطة، والتي تُمثِّل أقصر مسافة بين النقطة والمستقيم.

يُمكِن اســتعمال فكرة مسقط العمود لإيجاد أقصر مســافة في الفضاء بين أيِّ مستقيم عُلِمت معادلته المتجهة ونقطة لا تقع عليه عُلمت إحداثياتها.

**أتعلَّم**

لإيجاد المسافة بين النقطة $P$ والمستقيم $l$ الذي لا يمرُّ بها، أتَّبع الخطوتين الآتيتين:

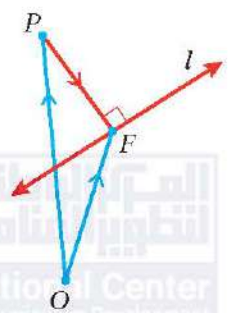
**الخطوة 1:** أجد النقطة $F$ التي تُمثِّل مسقط العمود من النقطة $P$ على المستقيم $l$.

**الخطوة 2:** أجد طول $\overrightarrow{PF}$.

### مثال 5

إذا كانت معادلة المستقيم $l$ هي: $\vec{\mathbf{r}} = 28\hat{\mathbf{i}} - 10\hat{\mathbf{j}} - 4\hat{\mathbf{k}} + t(8\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 6\hat{\mathbf{k}})$، والنقطة $P(3, -4, 2)$ غير واقعة على المستقيم $l$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين:

**1** أُحدِّد مسقط العمود من النقطة $P$ على المستقيم $l$.




أفترض أنَّ النقطة $F$ هي مسقط العمود. وبما أنَّ $F$ تقع على $l$، فإنَّ متجه موقع النقطة $F$ تُحدِّده إحدى قِيَم المُتغيِّر الوسيط $t$ في معادلة المستقيم $l$، ويُمكِن التعبير عن ذلك بما يأتي:

$$\overrightarrow{OF} = 28\hat{\mathbf{i}} - 10\hat{\mathbf{j}} - 4\hat{\mathbf{k}} + t(8\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 6\hat{\mathbf{k}})$$

$$= (28 + 8t)\hat{\mathbf{i}} + (-10 + 3t)\hat{\mathbf{j}} + (-4 - 6t)\hat{\mathbf{k}}$$

أستعمل قاعدة المثلث لجمع المتجهات لكتابة إحداثيات المتجه $\overrightarrow{PF}$ بدلالة $t$ على النحو الآتي:

$$\overrightarrow{PF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OP}$$

$$= (28 + 8t)\hat{\mathbf{i}} + (-10 + 3t)\hat{\mathbf{j}} + (-4 - 6t)\hat{\mathbf{k}} - (3\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}})$$

$$= (25 + 8t)\hat{\mathbf{i}} + (-6 + 3t)\hat{\mathbf{j}} + (-6 - 6t)\hat{\mathbf{k}}$$

بما أنَّ: $\overrightarrow{PF} \perp l$، فإنَّ $\overrightarrow{PF}$ عمودي على اتجاه $l$؛ أيْ إنَّ: $\overrightarrow{PF} \perp (8\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 6\hat{\mathbf{k}})$.

$$\overrightarrow{PF} \cdot (8\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 6\hat{\mathbf{k}}) = 0$$ شرط تعامد متجهين

$$[(25+8t)\hat{\mathbf{i}} + (-6+3t)\hat{\mathbf{j}} + (-6-6t)\hat{\mathbf{k}}] \cdot (8\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 6\hat{\mathbf{k}}) = 0$$ بتعويض المتجه $\overrightarrow{PF}$

$$(25+8t)(8) + (-6 + 3t)(3) + (-6-6t)(-6) = 0$$ تعريف الضرب القياسي

$$200 + 64t - 18 + 9t + 36 + 36t = 0$$ خاصية التوزيع

$$218 + 109t = 0$$ بجمع الحدود المُتشابِهة

$$t = -2$$ بحلِّ المعادلة لـ $t$

والآن يُمكِن تعويض قيمة $t$ الناتجة من حلِّ المعادلة السابقة في معادلة المستقيم $l$؛ لتحديد متجه موقع النقطة $F$ التي تقع على المستقيم $l$:

$\overrightarrow{OF} = (28+8t)\hat{\mathbf{i}} + (-10+3t)\hat{\mathbf{j}} + (-4-6t)\hat{\mathbf{k}}$ متجه موقع النقطة $F$

$= (28+8(-2))\hat{\mathbf{i}} + (-10+3(-2))\hat{\mathbf{j}} + (-4-6(-2))\hat{\mathbf{k}}$ بتعويض $t = -2$

$= 12\hat{\mathbf{i}} - 16\hat{\mathbf{j}} + 8\hat{\mathbf{k}}$ بالتبسيط

إذن، مسقط العمود من النقطة $P$ على المستقيم $l$ هو: $F(12, -16, 8)$.

**2** **أجد البُعْد بين النقطة $P$ والمستقيم $l$.**

البُعْد بين النقطة $P$ والمستقيم $l$ هو طول القطعة المستقيمة من النقطة $P$ إلى النقطة $F$، وهذا يساوي مقدار المتجه $\overrightarrow{PF}$.

**الخطوة 1:** أكتب المتجه $\overrightarrow{PF}$ بالصورة الإحداثية.

$\overrightarrow{PF} = (25+8t)\hat{\mathbf{i}} + (-6+3t)\hat{\mathbf{j}} + (-6-6t)\hat{\mathbf{k}}$ المتجه $\overrightarrow{PF}$ بدلالة $t$

$= (25+8(-2))\hat{\mathbf{i}} + (-6+3(-2))\hat{\mathbf{j}} + (-6-6(-2))\hat{\mathbf{k}}$ بتعويض $t = -2$

$= 9\hat{\mathbf{i}} - 12\hat{\mathbf{j}} + 6\hat{\mathbf{k}}$ بالتبسيط

**الخطوة 2:** أجد مقدار المتجه $\overrightarrow{PF}$.

$|\overrightarrow{PF}| = \sqrt{9^2 + (-12)^2 + 6^2}$ صيغة مقدار المتجه

$= \sqrt{261}$ بالتبسيط

إذن، البُعْد بين النقطة $P$ والمستقيم $l$ هو: $\sqrt{261}$ وحدة.

### أتحقَّق من فهمي

إذا كانت معادلة المستقيم $l$ هي: $\vec{\mathbf{r}} = 16\hat{\mathbf{i}} + 11\hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}} + t(5\hat{\mathbf{i}} + 7\hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}})$، والنقطة $P\left(2, 0, \frac{10}{3}\right)$ غير واقعة على المستقيم $l$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين:

a) أُحدِّد مسقط العمود من النقطة $P$ على المستقيم $l$.

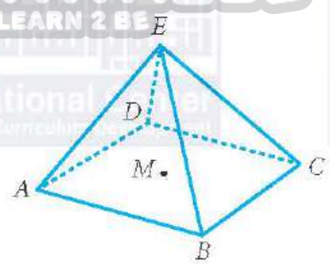
b) أجد البُعْد بين النقطة $P$ والمستقيم $l$.

**أُفكِّر**

إذا وقعت النقطة $P$ على المستقيم $l$، فما مسقط العمود من $P$ على $l$؟ وما المسافة بين $P$ و $l$؟

يُمكِن استعمال المتجهات لتحديد قياسات بعض الزوايا والأطوال لأضلاع تقع في مستويات مائلة ضمن أشكال ثلاثية البُعْد، عُلِمت إحداثيات رؤوسها.

**مثال 6**




**يظهر في الشكل المجاور الهرم $ABCDE$ الذي قاعدته المربع $ABCD$، وإحداثيات رؤوسه هي:**

**$A(1, 1, -1)$, $B(9,-1, -3)$, $C(9,-7, 3)$, $D(1,-5, 5)$, $E(8, 3, 7)$، ومركزه النقطة $M$.**

**1 أجد $m\angle AEC$ إلى أقرب عُشر درجة.**

**الخطوة 1:** أُحدِّد متجهين لهما نقطة البداية نفسها، والزاوية $AEC$ محصورة بينهما.

للمتجه $\overrightarrow{EA}$ والمتجه $\overrightarrow{EC}$ نقطة البداية نفسها، والزاوية $AEC$ محصورة بينهما. أكتب هذين المتجهين بالصورة الإحداثية كما يأتي:

$\overrightarrow{EA} = \langle x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\rangle$ الصورة الإحداثية للمتجه

$= \langle 1-8, 1-3, -1-7\rangle$ بالتعويض $E(8, 3, 7), A(1, 1, -1)$

$= \langle -7, -2, -8\rangle$ بالتبسيط

$\overrightarrow{EC} = \langle 9-8, -7-3, 3-7\rangle$ بالتعويض $E(8, 3, 7), C(9, -7, 3)$

$= \langle 1, -10, -4\rangle$ بالتبسيط

**الخطوة 2:** أستعمل الضرب القياسي لإيجاد قياس $\angle AEC$.

- أجد $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EC}$:

$$\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EC} = \langle -7, -2, -8\rangle \cdot \langle 1, -10, -4\rangle$$
$$= (-7)(1) -2(-10) -8(-4)$$
$$= -7 + 20 + 32 = 45$$

- أجد مقدار كلٍّ من المتجه $\overrightarrow{EA}$، والمتجه $\overrightarrow{EC}$:

$|\overrightarrow{EA}| = \sqrt{(-7)^2 + (-2)^2 + (-8)^2} = \sqrt{117}$ مقدار المتجه $\overrightarrow{EA}$

$|\overrightarrow{EC}| = \sqrt{1^2 + (-10)^2 + (-4)^2} = \sqrt{117}$ مقدار المتجه $\overrightarrow{EC}$

**أتذكَّر**

يشير الرمز $m\angle AEC$ إلى قياس الزاوية $AEC$، والحرف $m$ هو اختصار للكلمة الإنجليزية (measure) التي تعني القياس.

- أجد قياس الزاوية بين المتجه $\overrightarrow{EA}$ والمتجه $\overrightarrow{EC}$:

$$m\angle AEC = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EC}}{|\overrightarrow{EA}|\,|\overrightarrow{EC}|}\right)$$ صيغة قياس الزاوية بين متجهين

$$= \cos^{-1}\left(\frac{45}{\sqrt{117}\times\sqrt{117}}\right)$$ بتعويض الضرب القياسي، ومقدار كل متجه

$$\approx 67.4^\circ$$ باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، $m\angle AEC \approx 67.4^\circ$.

**2** **أُبيِّن أنَّ: $m\angle AME = 90^\circ$.**

**الخطوة 1:** أجد إحداثيات $M$.

النقطة $M$ هي مركز المربع؛ لذا فهي نقطة منتصف القُطْر $\overline{AC}$:

$$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$ إحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة

$$= \left(\frac{1+9}{2}, \frac{1+(-7)}{2}, \frac{-1+3}{2}\right)$$ بتعويض إحداثيات $A, C$

$$= (5, -3, 1)$$ بالتبسيط

**الخطوة 2:** أُحدِّد متجهين لهما نقطة البداية نفسها، والزاوية $AME$ محصورة بينهما.

للمتجه $\overrightarrow{MA}$ والمتجه $\overrightarrow{ME}$ نقطة البداية نفسها، والزاوية $AME$ محصورة بينهما. أكتب هذين المتجهين بالصورة الإحداثية كما يأتي:

$$\overrightarrow{MA} = \langle 1-5, 1-(-3), -1-1\rangle = \langle -4, 4, -2\rangle$$

$$\overrightarrow{ME} = \langle 8-5, 3-(-3), 7-1\rangle = \langle 3, 6, 6\rangle$$

**الخطوة 3:** أجد $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{ME}$.

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{ME} = \langle -4, 4, -2\rangle\cdot\langle 3, 6, 6\rangle$$
$$= -4(3) + 4(6) - 2(6)$$
$$= -12 + 24 - 12 = 0$$

بما أنَّ: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{ME} = 0$، فإنَّ $\overrightarrow{MA}$ و $\overrightarrow{ME}$ مُتعامِدان؛ لذا فإنَّ: $m\angle AME = 90^\circ$.

**أتعلَّم**

يُمكِن إيجاد النقطة $M$ بوصفها نقطة منتصف القُطْر $\overline{BD}$ أيضًا.

### أتحقّق من فهمي

a) أجد قياس $\angle EDB$ في الهرم المُبيَّن في المثال السابق.

b) أجد حجم الهرم.

**أتذكَّر**

حجم الهرم يساوي ثلث مساحة قاعدته في ارتفاعه.

### أتدرّب وأحلُّ المسائل

**أجد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كلٍّ ممّا يأتي:**

1) $\vec{\mathbf{u}} = 5\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{v}} = 7\hat{\mathbf{i}} + 6\hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}$

2) $\vec{\mathbf{u}} = 4\hat{\mathbf{i}} - 8\hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{v}} = 12\hat{\mathbf{i}} + 9\hat{\mathbf{j}} - 8\hat{\mathbf{k}}$

3) $\vec{\mathbf{u}} = \langle -5, 9, 17\rangle, \vec{\mathbf{v}} = \langle 4, 6, -2\rangle$

4) $\vec{\mathbf{u}} = \langle 1, -4, 12\rangle, \vec{\mathbf{v}} = \langle 3, 10, -5\rangle$

**أجد قياس الزاوية $\theta$ بين المتجهين إلى أقرب عُشر درجة في كلٍّ ممّا يأتي:**

5) $\vec{\mathbf{m}} = 4\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{n}} = 3\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}$

6) $\vec{\mathbf{v}} = \langle 3, -2, 9\rangle, \vec{\mathbf{w}} = \langle 5, 3, -4\rangle$

7) إذا كانت $A(3, 5, -4)$، و $B(7, 4, -3)$، و $O$ نقطة الأصل، فأجد $m\angle OAB$ إلى أقرب درجة.

8) يمرُّ المستقيم $l_1$ بالنقطتين: $(-3, 5, 7)$، و $(4, -1, 2)$، ويمرُّ المستقيم $l_2$ بالنقطتين: $(1, 2, -1)$، و $(6, -5, 3)$.
أجد قياس الزاوية الحادَّة بين المستقيم $l_2$ والمستقيم $l_1$ إلى أقرب عُشر درجة.

9) إذا كان المستقيم الذي معادلته: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 1, 4, -5\rangle + \lambda\langle -6, q+5, 3\rangle$، والمستقيم الذي معادلته: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 1, 4, -5\rangle + \mu\langle 5, q-6, -4\rangle$ مُتعامِدين، فما القِيَم المُمكِنة للثابت $q$؟

**إذا كانت معادلة المستقيم $l$ هي: $\vec{\mathbf{r}} = 2\hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}} + t(-\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}})$، والنقطة $P(-2, 22, 5)$ غير واقعة على المستقيم $l$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:**

10) أُحدِّد مسقط العمود من النقطة $P$ على المستقيم $l$.

11) أجد البُعْد بين النقطة $P$ والمستقيم $l$.

12 أجد مساحة المثلث $ABC$، حيث: $\overrightarrow{AB} = \langle 4, 9, 1\rangle$، و $\overrightarrow{AC} = \langle 9, 1, 4\rangle$.

13 أجد مساحة المثلث $ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه هي: $A(1, 3, 1), B(2, 7, -3), C(4, -5, 2)$.

14 حزام ناقل: يُمثِّل المتجه: $\vec{F} = 5\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$ القوَّة التي يُولِّدها حزام ناقل لتحريك حقيبة في مسار مستقيم، من النقطة $(1, 1, 1)$ إلى النقطة $(9, 4, 7)$. أجد مقدار الشغل الذي تبذله القوَّة $F$، علمًا بأنَّ القوَّة بالنيوتن $N$، والمسافة بالمتر $m$، ومقدار الشغل $(W)$ المبذول بوحدة جول $(J)$ يساوي ناتج الضرب القياسي لمتجه القوَّة في متجه الإزاحة؛ أيْ: $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$.

15 إذا كانت النقطة $R(27, -17, -1)$، والنقطة $S(11, -9, 11)$ تقعان على المستقيم $l$، وكانت النقطة $Q$ تقع على المستقيم $l$، حيث $\overline{OQ}$ عمودي على $l$، فأجد متجه الموقع للنقطة $Q$.

**إذا كانت متجهات مواقع النقاط: $A$، و$B$، و$D$ هي: $\begin{pmatrix} -4 \\ 13 \\ 22 \end{pmatrix}$، و $\begin{pmatrix} 4 \\ 17 \\ 14 \end{pmatrix}$، و $\begin{pmatrix} 2 \\ -29 \\ 7 \end{pmatrix}$ على الترتيب، فأُجيب عن الأسئلة الأربعة الآتية تباعًا:**

16 أُثبِت أنَّ: $\overline{AB} \perp \overline{AD}$.

17 أجد متجه موقع النقطة $C$ إذا كان $ABCD$ مستطيلًا.

18 أجد مساحة المستطيل $ABCD$.

19 أجد متجه موقع مركز المستطيل $ABCD$.

**معادلة المستقيم $l_1$ هي: $\vec{\mathbf{r}} = \langle -5, 7, 1\rangle + t\langle 3, 1, 4\rangle$، ومعادلة المستقيم $l_2$ هي:**

**$\vec{\mathbf{r}} = \langle 2, 8, -1\rangle + u\langle 2, 0, -3\rangle$، ومعادلة المستقيم $l_3$ هي: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 3, 19, 10\rangle + v\langle -1, 3, 1\rangle$.**

**إذا تقاطع المستقيم $l_2$ والمستقيم $l_1$ في النقطة $T$، وكانت النقطة $F$ تقع على المستقيم $l_3$، حيث: $\overline{TF} \perp l_3$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:**

20 أجد إحداثيات النقطة $F$.

21 أجد البُعْد بين النقطة $T$ والمستقيم $l_3$.

إذا كانت معادلة المستقيم $l$ هي: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 5, 3, 0 \rangle + \lambda \langle -1, 3, 1 \rangle$، وكانت $A(3, -2, 1)$، و $B(5, 3, 0)$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

22 أجد قياس الزاوية الحادّة بين المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ والمستقيم $l$.

23 تقع النقطة $C$ على المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$، حيث: $AB = AC$. أجد إحداثيات النقطة $C$.

تقع النقطة $A(-7, -4, 9)$ والنقطة $B(8, 5, 3)$ على المستقيم $l_1$، وتقع النقطة $C(6, 11, 7)$ على المستقيم $l_2$ الذي معادلته: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 6, 11, 7 \rangle + t\langle -1, 3, 2 \rangle$:

24 أُبيِّن أنَّ النقطة $B$ تقع على المستقيم $l_2$.

25 أُبيِّن أنَّ المستقيم $l_1$ والمستقيم $l_2$ مُتعامِدان.

26 أجد $m\angle ABC$.

27 أجد مساحة المثلث $ABC$.

$ABCD$ هرم ثلاثي. إذا كانت إحداثيات رؤوسه هي: $A(4, 3, -1), B(-4, 5, 2), C(6, -1, 0), D(10, 11, 19)$، فأُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

28 أجد مساحة المثلث $ABC$ على الصورة: $a\sqrt{6}$.

29 أُثبِت أنَّ: $m\angle AED = 90°$، حيث $E(1, 2, 1)$.

30 إذا علمْتُ أنَّ النقطة $E$ تقع في المستوى نفسه الذي يقع فيه المثلث $ABC$، فأجد حجم الهرم $ABCD$.

إذا كانت $A(3, 1, -6)$، و $B(5, -2, 0)$، و $C(8, -4, -6)$، فأُجيب عن الأسئلة الخمسة الآتية تباعًا:

31 أُبيِّن أنَّ: $\overrightarrow{AC} = n\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$، حيث $n$ عدد صحيح.

32 أُبيِّن أنَّ قياس الزاوية $ACB$ هو $\cos^{-1}\frac{5\sqrt{2}}{14}$.

33 أكتب معادلة متجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{AC}$.

34 إذا كانت $D(6, -1, p)$، وعُلِم أنَّ $\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{BD}$ متقاطعان، فما قيمة $p$؟

35 أُبيِّن أنَّ الشكل $ABCD$ مُعيَّن، ثم أجد طول كل ضلع من أضلاعه.

36 أَحُلُّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

## مهارات التفكير العليا

37 تبرير: إذا كانت $A(3, -2, 4)$، و $B(1, -5, 9)$، و $C(-4, 5, -1)$، وكانت النقطة $D$ تقع على المستقيم المارّ بالنقطة $A$ والنقطة $B$، وكانت الزاوية $CDA$ قائمة، فما إحداثيات النقطة $D$؟ أُبرِّر إجابتي.

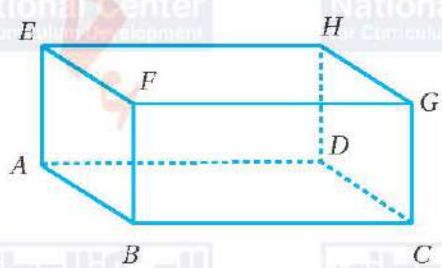
تحدٍّ: إذا كانت معادلة المستقيم $l_1$ هي: $\vec{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} -8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$، ومعادلة المستقيم $l_2$ هي: $\vec{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} -10 \\ 31 \\ -26 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$، وتقاطع هذان المستقيمان في النقطة $P$، وكانت النقطة $Q$ تقع على المستقيم $l_1$، حيث: $t = 3$، والنقطة $R$ تقع على المستقيم $l_2$، حيث: $u > 3$، و $PQ = PR$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

38 إذا كان $m\angle ABC = \theta$، فأُبيِّن أنَّ: $\cos\theta = -\frac{3}{94}$.

39 أُبيِّن أنَّ مساحة المثلث $PQR$ هي $2\sqrt{8827}$ وحدة مربعة.

تحدٍّ: رُسِم متوازي المستطيلات الآتي باستعمال برمجية حاسوبية تعتمد في قياساتها على المتجهات، فكانت كالآتي:

$$\overrightarrow{AB} = (2\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}), \overrightarrow{AD} = (-10\hat{\mathbf{i}} + 10\hat{\mathbf{j}} - 5\hat{\mathbf{k}}), \overrightarrow{AE} = (-6\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 6\hat{\mathbf{k}})$$




40 إذا كانت $B(8, 3, -2)$، فأجد إحداثيات النقطة $H$.

41 أجد قياس الزاوية $GAC$ مُقرَّبًا إلى أقرب عُشر درجة.

42 إذا كان $X$ نقطة منتصف الضلع $\overline{EF}$، فأجد جيب تمام الزاوية $DXC$.

**أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:**

1 إذا كانت $A(-3, 4, 9), B(5, -2, 3)$، فإنَّ الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$ هي:

a) $\langle -2, 2, 12 \rangle$ b) $\langle 8, -6, -6 \rangle$

c) $\langle -1, 1, 6 \rangle$ d) $\langle -8, 6, -6 \rangle$

2 إذا كان: $\vec{\mathbf{v}} = \langle 2, c, -5 \rangle$، وكان: $|\vec{\mathbf{v}}| = 3\sqrt{5}$، فإنَّ $c$ تساوي:

a) $4$ b) $-3, 5$

c) $15$ d) $-4, 4$

3 إذا كان $PQR$ مستقيمًا، حيث: $PQ : QR = 3 : 1$، و $\overrightarrow{PQ} = \vec{\mathbf{a}}$، فإنَّ التعبير عن المتجه $\overrightarrow{RQ}$ بدلالة $\vec{\mathbf{a}}$ هو:

P Q R

a) $\frac{1}{3}\vec{\mathbf{a}}$ b) $\frac{1}{4}\vec{\mathbf{a}}$

c) $-\frac{1}{3}\vec{\mathbf{a}}$ d) $-\frac{1}{4}\vec{\mathbf{a}}$

4 النقطة الواقعة على المستقيم الذي معادلته: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 4, -2, 5 \rangle + t\langle -2, 1, 3 \rangle$، والإحداثي $y$ لها 10 هي:

a) $(18, 10, 28)$ b) $(28, 10, 35)$

c) $(-8, 10, 20)$ d) $(-20, 10, 41)$

5 إذا كان: $\vec{\mathbf{v}} = \langle 2,-2,5 \rangle$، وكان: $\vec{\mathbf{w}} = \langle -3,4,6 \rangle$، فإنَّ $3\vec{\mathbf{v}} - 2\vec{\mathbf{w}}$ يساوي:

a) $\langle 0, 2, 3 \rangle$ b) $\langle 12, -14, 3 \rangle$

c) $\langle 13, -16, -8 \rangle$ d) $\langle -13, 16, 8 \rangle$

6 إذا كان قياس الزاوية بين $\vec{\mathbf{a}}$ و $\vec{\mathbf{b}}$ هو $60°$، وكان: $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = 30$، وكان: $|\vec{\mathbf{a}}| = 10$، فإنَّ مقدار $\vec{\mathbf{b}}$ هو:

a) $3$ b) $5$

c) $6$ d) $24$

7 إذا كان: $\vec{\mathbf{u}} = \langle -4, 2, a \rangle$، وكان: $\vec{\mathbf{v}} = \langle 2, b, 5 \rangle$، وكان: $\vec{\mathbf{u}} \parallel \vec{\mathbf{v}}$، فإنَّ قيمة $a$ هي:

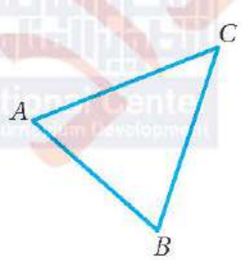
a) $-10$ b) $-5$

c) $-1$ d) $5$

8 إذا كان المتجه: $\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ والمتجه: $\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ q \end{pmatrix}$ مُتعامِدين، فإنَّ قيمة $q$ هي:

a) $0$ b) $8$ c) $10$ d) $18$

9 في المثلث المجاور، إذا كان: $\overrightarrow{AB} = 3\,\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + 2\,\hat{\mathbf{k}}$، وكان: $\overrightarrow{BC} = -2\,\hat{\mathbf{i}} + 4\,\hat{\mathbf{j}} + 3\,\hat{\mathbf{k}}$، فأجد قياس الزاوية $ABC$ إلى أقرب عُشر درجة.



**10** إذا وقعت النقاط: $E(2, 0, 4), F(h, 5, 1), G(3, 10, k)$ على مستقيم واحد، فما قيمة كلٍّ من $h$، و$k$؟

**11** إذا كانت: $A(3, -2, 4), B(1, -5, 6), C(-4, 5, -1)$، وكانت النقطة $D$ تقع على المستقيم المارِّ بالنقطة $A$ والنقطة $B$، وكانت الزاوية $CDA$ قائمة، فأجد إحداثيات النقطة $D$.

**إذا كانت معادلة المستقيم $l_1$ هي:**

$\vec{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$**، ومعادلة المستقيم $l_2$ هي:**

$\vec{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} -3 \\ -17 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$**، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:**

**12** أجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين: $l_1, l_2$.

**13** أجد قياس الزاوية الحادَّة بين المستقيمين: $l_1, l_2$.

**إذا كانت: $A(1, 4, -5), B(3, 0, 2), C(-4, 1, 3)$، فأُجيب عن الأسئلة الأربعة الآتية تباعًا:**

**14** أكتب معادلة متجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{AB}$.

**15** أكتب معادلة متجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{AC}$.

**16** إذا كان قياس $\angle BAC = \theta$، فأُثبِت أنَّ: $\cos\theta = \frac{58}{7\sqrt{138}}$.

**17** أجد مساحة المثلث $ABC$.

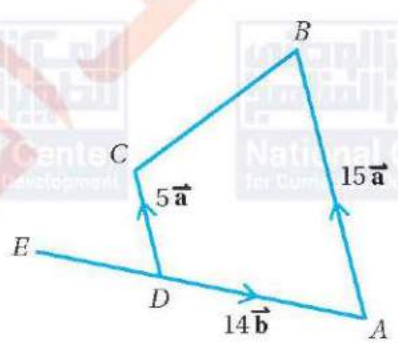
**18** إذا كانت معادلة المستقيم $l$ هي: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 3, -25, 13\rangle + t\langle 4, 5, -1\rangle$، وكانت النقطة $V$ تقع على المستقيم $l$، حيث: $l \perp \overline{OV}$، فما إحداثيات النقطة $V$؟

**يمرُّ المستقيم $l_1$ بالنقطتين: $E$، و$F$، ويمرُّ المستقيم $l_2$ بالنقطتين: $G$، و $H$. أُحدِّد إذا كان هذان المستقيمان متوازيين، أو متخالفين، أو متقاطعين، ثم أجد إحداثيات نقطة التقاطع إنْ كانا متقاطعين في كلٍّ ممّا يأتي:**

**19** $E(7, 6, 34), F(5, 9, 16),$
$G(1, 21, -2), H(-13, -14, 19)$

**20** $E(-3, -5, 16), F(12, 0, 1),$
$G(7, 2, 11), H(1, -22, 23)$

**21** في الشكل الرباعي $ABCD$ الآتي، مُدَّ $AD$ على استقامته ليصل إلى النقطة $E$، حيث: $AD = 2\,DE$. إذا كان: $\overrightarrow{DA} = 14\vec{\mathbf{b}}$، وكان: $\overrightarrow{DC} = 5\vec{\mathbf{a}}$، وكان: $\overrightarrow{AB} = 15\vec{\mathbf{a}}$، فأُثبِت أنَّ $B$، و$C$، و$E$ تقع على استقامة واحدة.



الوحدة
6

# الإحصاء والاحتمالات
# Probability and Statistics

## ما أهمية هذه الوحدة؟

ازدادت أهمية الإحصاء والاحتمالات كثيرًا في عصرنا الحاضر بسبب قدرة الحواسيب على تخزين بيانات ضخمة في عديد من المجالات الحياتية والعلمية، مثل: بيانات مواقع التواصل الاجتماعي، والطب، والتجارة؛ ما يتطلَّب تحليل هذه البيانات، والتوصُّل إلى استنتاجات دقيقة بخصوصها. وكذلك تُعَدُّ الطرائق الإحصائية والاحتمالية أساسًا لكثير من المجالات العلمية الحديثة، مثل: الذكاء الاصطناعي، وصناعة الروبوتات؛ لِما تحويه هذه المجالات من بيانات ضخمة يتعيَّن تحليلها بصورة مستمرة.

## تعلَّمْتُ سابقًا:

- حساب التوافيق والتباديل.
- إيجاد احتمال حادث ما في تجربة عشوائية.
- المُتغيِّر العشوائي، وتوزيعه الاحتمالي.
- إيجاد التوقُّع والتباين للمُتغيِّر العشوائي.

## سأتعلَّم في هذه الوحدة:

- التوزيع الهندسي، وتوزيع ذي الحدَّين.
- التوقُّع لكلٍّ من التوزيع الهندسي، وتوزيع ذي الحدَّين.
- خصائص منحنى التوزيع الطبيعي.
- إيجاد احتمال المُتغيِّر العشوائي الطبيعي.

أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحات (33–30) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

الدرس 1

# التوزيع الهندسي وتوزيع ذي الحدَّين
# Geometric and Binomial Distributions

**فكرة الدرس**

- تعرُّف التوزيع الاحتمالي والتوقُّع للمُتغيِّر العشوائي الهندسي.
- تعرُّف التوزيع الاحتمالي والتوقُّع والتباين للمُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين.

**المصطلحات** تجربة بيرنولي، التجربة الاحتمالية الهندسية، التجربة الاحتمالية ذات الحدَّين.

**مسألة اليوم** يتدرَّب عمر على لعبة الشطرنج للفوز ببطولتها في مواجهة برنامج حاسوبي مُعَدٍّ لهذا الغرض. إذا كان احتمال فوز عمر في كل لعبة هو 0.25، فأجد احتمال أنْ تكون اللعبة الثالثة هي أوَّل لعبة يفوز بها منذ بَدْئه التدريب.

## تجربة بيرنولي

**تجربة بيرنولي** (Bernoulli trial) هي تجربة عشوائية لها أحد ناتجين فقط، بحيث يُعبَّر عن أحدهما بالنجاح، ويُعبَّر عن الآخر بالفشل. فمثلًا، تجربة إلقاء قطعة النقد مَرَّة واحدة وملاحظة الوجه الظاهر تُمثِّل تجربة بيرنولي؛ لأنَّ لها أحد ناتجين: صورة، أو كتابة. وفي هذه التجربة، تُعَدُّ الصورة هي النجاح، والكتابة هي الفشل، أو العكس.

بوجه عام، يُمكِن النظر إلى أيِّ تجربة عشوائية بوصفها تجربة بيرنولي، بافتراض أنَّ حدثًا مُعيَّنًا من الفضاء العيني للتجربة هو النجاح، بصرف النظر عن العدد الفعلي لعناصر ذلك الحدث. فمثلًا، عند إلقاء حجر نرد أوجهه مُرقَّمة بالأرقام: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$، يُمكِن عَدُّ هذه التجربة تجربة بيرنولي على أساس أنَّ ظهور عدد أقل من 4 هو النجاح، وأنَّ أيَّ عدد (ناتج) آخر هو الفشل.

**أتعلَّم**

جاكوب بيرنولي (1654 - 1705م): عالِم سويسري برع في الإحصاء والاحتمالات، وسُمِّيت باسمه بعض النظريات الإحصائية، وكان أحد مُؤسِّسي علم التفاضل والتكامل.

## التجربة الاحتمالية الهندسية

يُطلَق على تكرار تجربة بيرنولي عددًا من المَرّات المستقلة حتى التوصُّل إلى أوَّل نجاح اسم **التجربة الاحتمالية الهندسية** (geometric probability experiment).

## مفهوم أساسي

إذا توافرت الشروط الأربعة الآتية في تجربة عشوائية ما، فإنَّها تُعَدُّ تجربة احتمالية هندسية:

1. اشتمال التجربة على محاولات مستقلة ومُتكرِّرة.
2. فرز النتائج المُمكِنة في كل محاولة إلى نجاح أو فشل.
3. ثبات احتمال النجاح في كل محاولة.
4. التوقُّف عند أوَّل نجاح.

### أتعلَّم

بوجه عام، إذا كانت المحاولات مستقلة، فهذا لا يعني بالضرورة ثبات احتمال النجاح في كل محاولة.

### مثال 1

أُبيِّن إذا كانت التجربة العشوائية تُمثِّل تجربة احتمالية هندسية في كلٍّ ممّا يأتي:

**1) إلقاء ريّان حجر نرد منتظمًا بشكل مُتكرِّر، ثم التوقُّف عند ظهور العدد 2.**

أبحث في تحقُّق الشروط الأربعة الآتية للتجربة الاحتمالية الهندسية:

1. اشتمال التجربة على محاولات مُتكرِّرة (إلقاء حجر نرد منتظم بشكل مُتكرِّر حتى يظهر العدد 2). وبما أنَّ نتيجة إلقاء حجر النرد في كل مَرَّة لا تُؤثِّر في نتيجة إلقائه في المَرّات الأُخرى، فإنَّ هذه المحاولات مستقلة.
2. فرز النتائج المُمكِنة في كل محاولة إلى ناتجين فقط، هما: النجاح (ظهور العدد 2)، أو الفشل (ظهور أيِّ عدد آخر).
3. ثبات احتمال النجاح في كل محاولة، وهو $\frac{1}{6}$.
4. التوقُّف عند أوَّل نجاح.

إذن، تُمثِّل هذه التجربة العشوائية تجربة احتمالية هندسية.

**2) سحب هديل 4 كرات على التوالي من دون إرجاع، من صندوق فيه 5 كرات حمراء، و6 كرات خضراء، ثم كتابة عدد الكرات الحمراء المسحوبة.**

أبحث في تحقُّق الشروط الأربعة للتجربة الاحتمالية الهندسية.

تتضمَّن هذه التجربة محاولات مُتكرِّرة (سحب 4 كرات). وبما أنَّ سحب نتيجة كل كرة تتأثَّر بنتائج سحب الكرات السابقة بسبب عدم إرجاع الكرات المسحوبة إلى الصندوق، فإنَّ هذه المحاولات غير مستقلة.

إذن، لا تُمثِّل هذه التجربة العشوائية تجربة احتمالية هندسية.

### أتعلَّم

لأيِّ تجربة عشوائية، يكون الحادث $(A)$ والحادث $(B)$ مستقلين إذا كان وقوع أحدهما (أو عدم وقوعه) لا يُؤثِّر في احتمال وقوع (أو عدم وقوع) الآخر.

### أُفكِّر

في الفرع 2 من المثال، إذا سُحِبت الكرات الأربع على التوالي مع الإرجاع، فهل يُمثِّل ذلك تجربة احتمالية هندسية؟ أُعيد الحلَّ في هذه الحالة.

### أتحقَّق من فهمي

**أُبيِّن إذا كانت التجربة العشوائية تُمثِّل تجربة احتمالية هندسية في كلٍّ ممّا يأتي:**

a) إلقاء عبد العزيز قطعة نقد منتظمة 6 مَرّات، ثم كتابة عدد مَرّات ظهور الصورة.

b) إطلاق سامية أسهمًا بشكل مُتكرِّر نحو هدف، ثم التوقُّف عند إصابته أوَّل مَرَّة، علمًا بأنَّ احتمال إصابتها الهدف في كل مَرَّة هو 0.6

## المُتغيِّر العشوائي الهندسي، وتوزيعه الاحتمالي

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ المُتغيِّر العشوائي هو مُتغيِّر تعتمد قِيَمه على نواتج تجربة عشوائية، وأنَّ التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي هو اقتران يربط كل قيمة للمُتغيِّر العشوائي باحتمال وقوعها.

في التجربة الاحتمالية الهندسية، إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي $X$ على عدد المحاولات وصولًا إلى أوَّل نجاح، فإنَّ $X$ يسمّى المُتغيِّر العشوائي الهندسي، ويُمكِن التعبير عنه بالرموز على النحو الآتي:

$$X \sim Geo(p)$$

حيث $p$ احتمال النجاح الثابت في كل محاولة.

ومن ثَمَّ، فإنَّ المُتغيِّر $X$ يأخذ القِيَم الآتية: ... ,3 ,2 ,1؛ أيْ إنَّ:

$$x \in \{1, 2, 3, \ldots\}$$

إذن، إذا كان $X$ مُتغيِّرًا عشوائيًّا هندسيًّا، فإنَّه يُمكِن إيجاد احتمال أنْ يأخذ $X$ قيمة بعينها ضمن مجموعة قِيَمه المُمكِنة باستعمال الصيغة الآتية:

**أتذكَّر**

يُرمَز إلى قِيَم المُتغيِّر العشوائي بالرمز $x$، ويُرمَز إلى المُتغيِّر العشوائي نفسه بالرمز $X$.

### مفهوم أساسي: التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي الهندسي

إذا كان: $X \sim Geo(p)$، فإنَّ: $x \in \{1, 2, 3, \ldots\}$، ويعطى التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي $X$ بالقاعدة الآتية:

$$P(X = x) = p(1-p)^{x-1}$$

حيث:

$x$: عدد المحاولات وصولًا إلى أوَّل نجاح.

$p$: احتمال النجاح في كل محاولة.

**أتذكَّر**

إذا كان الحادثان $A, B$ مستقلين، فإنَّ احتمال حدوثهما معًا هو حاصل ضرب احتمالي وقوعهما؛ أيْ إنَّ: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

## مثال 2

اتفقت ليلى وزميلاتها على ألّا تُشارِك أيٌّ منهن في لعبة حتى ترمي حجر نرد منتظم بشكل مُتكرِّر، ويظهر العدد 6. إذا أرادت ليلى المشاركة في اللعبة، وكان $X$ يُمثِّل عدد مَرّات رميها حجر النرد حتى ظهور العدد 6، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

**1** $P(X = 4)$

المُتغيِّر $X$ هو مُتغيِّر عشوائي هندسي؛ لأنَّه يُحقِّق الشروط الآتية:

1. اشتمال التجربة على محاولات مُتكرِّرة (إلقاء حجر نرد منتظم بشكل مُتكرِّر حتى يظهر العدد 6). وبما أنَّ نتيجة إلقاء حجر النرد في كل مَرَّة لا تُؤثِّر في نتيجة إلقائه في المَرّات الأُخرى، فإنَّ هذه المحاولات مستقلة.
2. فرز النتائج المُمكِنة في كل محاولة إلى ناتجين فقط، هما: النجاح (ظهور العدد 6)، أو الفشل (ظهور أيِّ عدد آخر).
3. ثبات احتمال النجاح في كل محاولة، وهو $\frac{1}{6}$.
4. توقُّف التجربة عند ظهور العدد 6.

$$P(X = x) = p(1-p)^{x-1}$$ صيغة التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي الهندسي

$$P(X = 4) = \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{6}\right)^3$$ بتعويض $x = 4, p = \frac{1}{6}$

$$= \frac{125}{1296}$$ بالتبسيط

**2** $P(X \leq 3)$

$$P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$ احتمال الحوادث المتنافية

$$= \left(\frac{1}{6}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)^0 + \left(\frac{1}{6}\right)^1\left(1-\frac{1}{6}\right)^1 + \left(\frac{1}{6}\right)^1\left(1-\frac{1}{6}\right)^2$$ صيغة التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي الهندسي

$$= \frac{91}{216}$$ بالتبسيط

### أُفكِّر

لماذا لا يأخذ المُتغيِّر العشوائي الهندسي القيمة $x = 0$؟

### أتعلَّم

ألاحِظ أنَّ المُتغيِّر العشوائي الهندسي يأخذ قِيَمًا معدودةً؛ لذا، فإنَّه يُسمّى مُتغيِّرًا عشوائيًّا منفصلًا.

### أتذكَّر

إذا كان $A$ و $B$ حادثين متنافيين في تجربة عشوائية، فإنَّ احتمال وقوع أحدهما على الأقل يساوي مجموع احتمالي وقوعهما.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

**3** **احتمال أنْ ترمي ليلى حجر النرد أكثر من 4 مَرّات لتشارك في اللعبة.**

المطلوب هو إيجاد $P(X > 4)$، وهذا يعني أنَّ:

$$P(X > 4) = P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + \cdots$$

بما أنَّ إيجاد $P(X > 4)$ يتطلَّب إيجاد مجموع عدد غير منتهٍ من الاحتمالات، فإنَّه يَلزم البحث عن طريقة أُخرى لإيجاد الاحتمال، وذلك باستعمال مُتمِّمة الحادث:

$$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4)$$ احتمال المُتمِّمة

$$= 1 - \left(P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)\right)$$ احتمال الحوادث المتنافية

$$= 1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^3\right)$$ صيغة التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي الهندسي

$$\approx 0.482$$ باستعمال الآلة الحاسبة

**أتذكَّر**

احتمال وقوع مُتمِّمة الحادث $A$ هو 1 ناقص احتمال وقوع الحادث $A$.

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

**أتحقَّق من فهمي**

**يُمثِّل الشكل المجاور قرصًا مُقسَّمًا إلى 4 قطاعات متطابقة. إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي $X$ على عدد مَرّات تدوير مُؤشِّر القرص حتى يقف عند اللون الأخضر أوَّل مَرَّة، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:**

a) $P(X = 3)$

b) $P(X \leq 4)$

c) احتمال تدوير مُؤشِّر القرص ثلاث مَرّات على الأقل حتى يقف عند اللون الأخضر أوَّل مَرَّة.

## التوقُّع للمُتغيِّر العشوائي الهندسي

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ التوقُّع $E(X)$ للمُتغيِّر العشوائي $X$ هو الوسط الحسابي لِقِيَمه الناتجة من تكرار التجربة نفسها عددًا كبيرًا من المَرّات (عند اقتراب العدد من $\infty$)، وأنَّه يساوي مجموع حاصل ضرب كل قيمة للمُتغيِّر $X$ في احتمال وقوعها.

يُمكِن التعبير عن ذلك بالرموز على النحو الآتي:

$$E(X) = \sum x \cdot P(x)$$

**رموز رياضية**

يُستعمَل كلٌّ من الرمز $E(X)$ والرمز $\mu$ للدلالة على توقُّع المُتغيِّر العشوائي $X$.

إذا كان $X$ مُتغيِّرًا عشوائيًّا هندسيًّا، فإنَّه يُمكِن إيجاد توقُّعه باستعمال الصيغة الآتية:

**مفهوم أساسي** **التوقُّع للمُتغيِّر العشوائي الهندسي**

إذا كان: $X \sim Geo(p)$، فــإنَّ: $x \in \{1, 2, 3, \ldots\}$، ويعطى التوقُّع للمُتغيِّرِ العشــوائي $X$ بالقاعدة الآتية:

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

حيث $p$ احتمال النجاح في كل محاولة.

**أتعلَّم**

تشــير القاعدة المجاورة إلــى أنَّ التوقُّــع للمُتغيِّرِ العشوائي الهندسي يساوي مقلــوب الاحتمال الثابت لجميع المحــاولات؛ أيْ إنَّــه إذا كان احتمال ظهور الصــورة عند إلقــاء قطعة نقد منتظمة هو $\frac{1}{2}$، فإنَّه من المُتوقَّع ظهــور الصورة أوَّل مَرَّة بعــد إلقاء قطعة النقد مَرَّتين.

**مثال 3 : من الحياة**

**صحافة: يريد مُراسِــل صحفي إجراء مقابلات مع عدد من زوّار مركز تجاري، وسؤالهم عن مشـــاهدة آخر مباراة لكرة القدم، ثم التوقُّف عن ذلك عند مقابلته أوَّل شخص شاهد المباراة. إذا كان لديه إحصائية تشـــير إلى أنَّ ما نسبته 5% من ســـكّان المدينة قد شـــاهدوا المباراة، فكم زائرًا يُتوقَّع أنْ يسأله المُراسِل قبل مقابلته شخصًا شاهد المباراة؟**

بما أنَّ مقابلة الزوّار في المركز التجاري ستســتمر حتى الالتقاء بأوَّل شــخص شاهد المباراة، فإنَّه يُمكِن استعمال توقُّع المُتغيِّرِ العشوائي الهندسي $X \sim Geo(0.05)$ لتعرُّف عدد مَنْ سألهم المُراسِل عن المباراة:

$E(X) = \frac{1}{p}$ صيغة التوقُّع للمُتغيِّرِ العشوائي الهندسي

$= \frac{1}{0.05}$ بتعويض $p = 0.05$

$= 20$ بالتبسيط

إذن، يُتوقَّع أنْ يسأل المُراسِل 19 زائرًا قبل التقائه بأوَّل شخص شاهد المباراة.

**أُفكِّر**

إذا افترضْتُ أنَّ المُراسِل الصحفــي قد ســأل 35 زائــرًا، وأنَّ أيًّــا منهم لم يشــاهد المبــاراة، فهل يعني ذلك أنَّ نســبة 5% غير صحيحة أو أنَّها فقط مصادفة؟ أُبرِّر إجابتي.

أتحقَّق من فهمي

تسويق: أعلنت إحدى شركات تصنيع حبوب القطور للأطفال عن وجود لعبة مجانية في بعض علب الحبوب الجديدة التي تُنتِجها الشـركة. إذا احتوت علبة من كل 4 علب على لعبة، ودلَّ المُتغيِّر العشـوائي $X$ على عدد العلب التي سيفتحها الطفل حتى يجد لعبة، فكم علبةً يُتوقَّع أنْ يفتحها الطفل حتى يجد أوَّل لعبة؟

## التجربة الاحتمالية ذات الحدَّين

يُطلَق على تكرار تجربة بيرنولي عددًا مُحدَّدًا من المَرّات المسـتقلة اسـم **التجربة الاحتمالية ذات الحدَّين** (binomial probability experiment).

**مفهوم أساسي** — **التجربة الاحتمالية ذات الحدَّين**

إذا توافرت الشـروط الأربعة الآتية في تجربة عشوائية ما، فإنَّها تُعَدُّ تجربة احتمالية ذات حدَّين:

1. اشتمال التجربة على محاولات مستقلة ومُتكرِّرة.
2. فرز النتائج المُمكِنة في كل محاولة إلى نجاح أو فشل.
3. ثبات احتمال النجاح في كل محاولة.
4. وجود عدد مُحدَّد من المحاولات في التجربة.

**أتعلَّم**

ألاحِظ في التجربة الاحتمالية ذات الحدَّين وجود عدد مُحدَّد من المحاولات بشكل مُسبَق، خلافًا للتجربة الاحتمالية الهندسية.

**مثال 4**

أُبيِّن إذا كانت التجربة العشوائية تُمثِّل تجربة احتمالية ذات حدَّين في كلٍّ ممّا يأتي:

1) إلقاء 5 قطع نقدية منتظمة ومتمايزة، ثم كتابة عدد الصور التي ظهرت.

أبحث في تحقُّق الشروط الأربعة الآتية للتجربة الاحتمالية ذات الحدَّين:

1. اشـتمال التجربة على محاولات مُتكرِّرة (إلقاء 5 قطع نقديـة). وبما أنَّ نتيجة إلقاء أيٍّ مـن القطع النقدية لا تُؤثِّر في نتيجة إلقاء القطع النقديـة الأُخرى، فإنَّ هذه المحاولات مستقلة.

2 فــرز النتائج المُمكِنة في كل محاولة إلى ناتجين فقط، هما: النجاح (ظهور الصورة)، أو الفشل (ظهور الكتابة).

3 ثبات احتمال النجاح في كل محاولة، وهو $\frac{1}{2}$ .

4 وجود عدد مُحدَّد من المحاولات في التجربة، هو 5.

إذن، تُمثِّل هذه التجربة العشوائية تجربة احتمالية ذات حدَّين.

2 **إلقاء قطعتي نقد منتظمتين ومتمايزتين حتى ظهور صورتين.**

لا تحوي هذه التجربة عددًا مُحدَّدًا من المحاولات؛ لأنَّها ستستمر حتى ظهور صورتين.

إذن، لا تُمثِّل هذه التجربة العشوائية تجربة احتمالية ذات حدَّين.

**أُفكِّر**

هـل تُعَـدُّ التجربـة في الفـرع 2 مـن المثـال هندسية؟ أُبرِّر إجابتي.

### أتحقَّق من فهمي

**أُبيِّن إذا كانت التجربة العشوائية تُمثِّل تجربة احتمالية ذات حدَّين في كلٍّ ممّا يأتي:**

a) إلقــاء حجر نرد منتظم 20 مَرَّة، ثم كتابة عدد المَرّات التــي ظهر فيها العدد 1 على الوجه العلوي لحجر النرد.

b) اختيار 7 طلبة عشــوائيًّا من صــف روضة فيه 15 ولدًا و10 بنات، وذلك لتشــكيل فريق لإحدى الألعاب، ثم كتابة عدد البنات اللاتي وقع عليهن الاختيار.

## المُتغيِّر العشوائي ذو الحدَّين، وتوزيعه الاحتمالي

في التجربة الاحتمالية ذات الحدَّين، إذا دلَّ المُتغيِّر العشــوائي $X$ على عدد مَرّات النجاح في جميــع محاولات التجربة التي عددها $n$، وكان احتمــال النجاح في كل محاولة هو $p$، فإنَّ $X$ يُسمّى المُتغيِّر العشوائي ذا الحدَّين، ويُمكِن التعبير عنه بالرموز على النحو الآتي:

$$X \sim B(n, p)$$

حيث $n$ و$p$ معاملا المُتغيِّر العشوائي.

ومن ثَمَّ، فإنَّ المُتغيِّر $X$ يأخذ القِيَم الآتية: $0, 1, 2, \ldots, n$؛ أيْ إنَّ:

$$x \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$$

**أتعلَّم**

في المُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين، من المُمكِن أنْ تكون $x = 0$، وهذا يدلُّ على عدم إحراز أيِّ نجاح عند تكــرار المحاولة $n$ مَرَّة.

إذا كان $X$ مُتغيِّرًا عشوائيًّا ذا حدَّين، فإنَّه يُمكِن إيجاد احتمال أنْ يأخذ $X$ قيمة بعينها ضمن مجموعة قِيَمه المُمكِنة باستعمال الصيغة الآتية:

**مفهوم أساسي** **التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين**

إذا كان: $X \sim B(n, p)$، فإنَّ: $x \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$، ويعطى التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي $X$ بالقاعدة الآتية:

$$P(X = r) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}$$

حيث:

$n$: عدد المحاولات في التجربة.

$p$: احتمال النجاح في كل محاولة.

$r$: عدد المحاولات الناجحة من بين $n$ من المحاولات.

**أتعلَّم**

تُستعمَل التوافيق $\binom{n}{r}$ لإيجاد عدد المرّات التي يُمكِن بها اختيار $r$ شيئًا من بين $n$ شيئًا. وقد استُعمِلت التوافيق في معادلة احتمال توزيع ذي الحدَّين لإيجاد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار الأماكن التي حدث فيها النجاح.

**مثال 5**

**1 في تجربة إلقاء قطعة نقد منتظمة 15 مَرَّة، أجد احتمال ظهور الصورة 5 مَرّات.**

يُمكِن النظر إلى عملية إلقاء قطعة النقد 15 مَرَّة بوصفها تجربة احتمالية ذات حدَّين؛ لأنَّها تحوي محاولات مستقلة ومُتكرِّرة، هي إلقاء قطعة النقد، ولأنَّ عدد هذه المحاولات مُحدَّد، وهو 15، ولأنَّه يُمكِن فرز النتائج المُمكِنة لكل محاولة إلى ناتجين فقط، هما: النجاح (ظهور الصورة)، أو الفشل (ظهور الكتابة). وبما أنَّ احتمال ظهور الصورة في كل محاولة هو $\frac{1}{2}$، فإنَّ احتمال النجاح في كل محاولة ثابت، وهو $\frac{1}{2}$.

إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي $X$ على عدد مَرّات ظهور الصورة، فإنَّ:

$$X \sim B(15, \frac{1}{2})$$

ومن ثَمَّ، فإنَّ احتمال أنْ تظهر الصورة 5 مَرّات هو $P(X = 5)$:

$$P(X = r) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}$$ صيغة التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين

$$P(X = 5) = \binom{15}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{15-5}$$ بتعويض $n = 15, r = 5, p = \frac{1}{2}$

$$\approx 0.0916$$ باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، احتمال ظهور الصورة 5 مَرّات عند إلقاء قطعة نقد منتظمة 15 مَرَّة هو 0.0916 تقريبًا.

**أتعلَّم**

ألاحِظ أنَّ المُتغيِّر العشوائي ذا الحدَّين يأخذ قِيَمًا معدودةً؛ لذا، فإنَّه يُسمّى مُتغيِّرًا عشوائيًّا منفصلًا.


**2** **يتألَّف اختبـار فيزياء من 10 أسـئلة، جميعها من نـوع الاختيار من مُتعـدِّد، ولكلٍّ منها 5 بدائل، واحدة منها فقط صحيحة. إذا أُجيب عن هذه الأسئلة جميعها بصورة عشوائية، فما احتمال أنْ تكون إجابات 7 أسئلة فقط منها صحيحة؟**

يُمكِـن النظر إلى عملية اختيار الإجابة عن الأسـئلة العشـرة بوصفها تجربـة احتمالية ذات حدَّين؛ لأنَّ عملية اختيار الإجابة عن كل سـؤال تُعَدُّ محاولة مُتكرِّرة ومستقلة، ولأنَّ عدد هذه المحاولات مُحدَّد، وهو 10، ولأنَّه يُمكِن فرز النتائج المُمكِنة لكل محاولة إلى ناتجين فقط، هما: النجاح (إجابة صحيحة)، أو الفشـل (إجابة غير صحيحة). وبما أنَّ لكل سؤال 5 بدائل، فإنَّ احتمال النجاح في كل محاولة ثابت، وهو $\frac{1}{5}$.

إذا دلَّ المُتغيِّر العشـوائي $X$ على عدد الأسـئلة التي أُجيب عنها إجابة صحيحة من الأسـئلة العشرة، فإنَّ:

$$X \sim B(10\,,\frac{1}{5})$$

ومن ثَمَّ، فإنَّ احتمال أنْ تكون إجابات 7 أسئلة فقط صحيحة هو $P(X=7)$:

$$P(X=r)=\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}$$ صيغة التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين

$$P(X=7)=\binom{10}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^7\left(\frac{4}{5}\right)^{10-7}$$ بتعويض $n=10,\ r=7,\ p=\frac{1}{5}$

$$\approx 0.000786$$ باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، احتمال أنْ تكون إجابات 7 أسئلة فقط صحيحة هو 0.000786 تقريبًا.

**أتعلَّم**

القيمة: 0.000786 تُعبِّر عن احتمال إجابة 7 أسئلة بصـورة صحيحـة عند الإجابة عشـوائيًّا، وهي قيمة صغيرة جدًّا؛ أيْ إنَّ الحظ لا يُحالِف الطالب الذي يجيب عشوائيًّا.

**3** **إذا كان احتمـال فوز أمل في لعبـة إلكترونية هو 0.75، ولعبت بهـذه اللعبة 10 مَرّات، فما احتمال أنْ تفوز فيها 8 مَرّات على الأكثر؟**

يُمكِن النظر إلى هذه اللعبة بوصفها تجربة احتمالية ذات حدَّين؛ لأنَّ كل مَرَّة تلعب فيها أمل تُعَدُّ محاولة مستقلة، ولأنَّ عدد هذه المحاولات مُحدَّد، وهو 10، ولأنَّه يُمكِن فرز النتائج المُمكِنة لكل محاولة إلى ناتجين فقط، هما: النجاح (الفوز)، أو الفشـل (الخسارة). وبما أنَّ احتمال فوز أمل في كل محاولة هو 0.75، فإنَّ احتمال النجاح في كل محاولة ثابت، وهو 0.75

إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي $X$ على عدد المَرّات التي فازت فيها أمل من المحاولات العشر، فإنَّ:

$$X \sim B(10, 0.75)$$

ومن ثَمَّ، فإنَّ احتمال أنْ تفوز أمل 8 مرّات على الأكثر هو $P(X \leq 8)$:

$P(X \leq 8) = 1 - P(X > 8)$ احتمال المُتمِّمة

$= 1 - (P(X = 9) + P(X = 10))$ صيغة الجمع للحوادث المتنافية

$= 1 - \left(\binom{10}{9}(0.75)^9(0.25)^1 + \binom{10}{10}(0.75)^{10}(0.25)^0\right)$ صيغة التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر ذي الحدَّين

$\approx 0.76$ باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، احتمال فوز أمل في اللعبة 8 مرّات على الأكثر هو 0.76 تقريبًا.

### أفكّر

هل يُمكِن استعمال $\binom{n}{n-r}$ بدلًا من $\binom{n}{r}$ في صيغة احتمال توزيع ذي الحدَّين؟ أبرِّر إجابتي.

### أتحقَّق من فهمي

a) ألقت عائشة حجر نرد منتظم 10 مرّات. ما احتمال ظهور الرقم 1 على الوجه العلوي 3 مرّات فقط.

b) تحتوي آلة حاسبة على 16 زِرًّا للأعداد من 0 إلى 9، إضافةً إلى العمليات الأساسية، والمساواة، والفاصلة العشرية. إذا أغمض أحمد عينيه، ثم ضغط على أزرار هذه الآلة 20 مرَّة بصورة عشوائية، فما احتمال أنْ يضغط على أزرار العمليات الحسابية الأساسية 3 مرّات فقط؟

c) إذا كان احتمال نجاح عملية جراحية هو 0.8، وأجرى طبيب هذه العملية 10 مرّات خلال عام واحد، فما احتمال نجاح 7 عمليات منها على الأقل؟

## التوقُّع والتباين للمُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين

إذا كان $X$ مُتغيِّرًا عشوائيًا ذا حدَّين، فإنَّه يُمكِن إيجاد توقُّعه باستعمال الصيغة الآتية:

### مفهوم أساسي — التوقُّع للمُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين

إذا كان: $X \sim B(n, p)$، فإنَّ: $x \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$، ويعطى التوقُّع للمُتغيِّر العشوائي $X$ بالقاعدة الآتية:

$$E(X) = np$$

حيث:

$n$: عدد المحاولات في التجربة.

$p$: احتمال النجاح في كل محاولة.

**مثال 6 : من الحياة**

طب: أُجريت دراسة على الآثار الجانبية الظاهرة على الأطفال بعد تناولهم دواءً جديدًا. وقد خلُصت الدراسة إلى أنَّ 10% من الأطفال الذين تناولوا هذا الدواء تظهر عليهم أعراض جانبية. إذا أعطى طبيب هذا الدواء لـ 50 طفلًا، فكم طفلًا يُتوقَّع أنْ تظهر عليه هذه الأعراض؟

إذا كان $X$ يُمثِّل عدد الأطفال الذين تظهر عليهم الأعراض الجانبية من بين الخمسين طفلًا الذين تناولوا الدواء، فإنَّ: $X \sim B(50, 0.1)$.

ومن ثَمَّ، فإنَّه يُمكِن إيجاد العدد المُتوقَّع من الأطفال الذين ستظهر عليهم أعراض الدواء الجانبية على النحو الآتي:

$$E(X) = np$$ صيغة التوقُّع للمُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين

$$= 50 \times 0.1$$ بتعويض $n = 50, p = 0.1$

$$= 5$$ بالتبسيط

إذن، يُتوقَّع أنْ تظهر الأعراض الجانبية للدواء الجديد على 5 أطفال.

**أتحقَّق من فهمي**

سيّارات: بعد إجراء مسح للسيّارات التي صنعتها شركة ما، تبيَّن أنَّ في 5% منها عطلًا ميكانيكيًّا. إذا استورد وكيل للشركة في إحدى الدول 1000 سيّارة، فأجد عدد السيّارات التي يُتوقَّع أنْ يظهر فيها هذا العطل.

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ تباين المُتغيِّر العشوائي $X$ هو مقياس لتشتُّت قِيَم $X$ عن وسطها الحسابي $E(X)$، وأنَّه يُرمَز إليه بالرمز $\text{Var}(X)$، أو الرمز $\sigma^2$.

ومن ثَمَّ، إذا كان $X$ مُتغيِّرًا عشوائيًّا ذا حدَّين، فإنَّه يُمكِن إيجاد تباينه باستعمال الصيغة الآتية:

**أتذكَّر**

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$
$$= \sum (x^2 \cdot P(x)) - (E(X))^2$$

**مفهوم أساسي** — **التباين للمُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين**

إذا كان: $X \sim B(n, p)$، وكانت: $x \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$، فإنَّ التباين للمُتغيِّر العشوائي $X$ يعطى بالقاعدة الآتية:

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = np(1-p)$$

حيث:

$n$: عدد المحاولات في التجربة.

$p$: احتمال النجاح في كل محاولة.

**أتعلَّم**

ألاحِظ أنَّه إذا كان $X \sim B(n, p)$، فإنَّ:

$$\text{Var}(X) = (1-p)E(X)$$

## مثال 7

**ألقى خالد قطعة نقد غير منتظمة 200 مَرَّة، فكان عدد مَرّات ظهور الكتابة هو 140 مَرَّة. إذا ألقى خالد قطعة النقد 20 مَرَّة أُخرى، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:**

**1 العدد المُتوقَّع لمَرّات ظهور الكتابة عند إلقاء خالد قطعة النقد 20 مَرَّة.**

**الخطوة 1:** أجد احتمال ظهور الكتابة.

بما أنَّ عدد مَرّات ظهور الكتابة هو 140 مَرَّة من 200 مَرَّة، فإنَّ احتمال ظهور الكتابة عند إلقاء قطعة النقد هو:

$$p = \frac{140}{200} = 0.7$$

**الخطوة 2:** أجد التوقُّع.

إذا دلَّ $X$ على عدد مَرّات ظهور الكتابة، فهذا يعني أنَّه مُتغيِّر عشوائي ذو حدَّين؛ لأنَّه ناتج من محاولات مستقلة ومُتكرِّرة عددها 20، ولأنَّ احتمال النجاح في كلٍّ منها ثابت، وهو 0.7:

$E(X) = np$ صيغة التوقُّع للمُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين

$= 20 \times 0.7$ بتعويض $n = 20, p = 0.7$

$= 14$ بالتبسيط

إذن، يُتوقَّع ظهور الكتابة 14 مَرَّة تقريبًا عند إلقاء خالد قطعة النقد 20 مَرَّة.

**2 تباين عدد مَرّات ظهور الكتابة عند إلقاء خالد قطعة النقد 20 مَرَّة.**

$\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$ صيغة التباين للمُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين

$= 20(0.7)(0.3)$ بتعويض $n = 20, p = 0.7$

$= 4.2$ بالتبسيط

إذن، تباين عدد مَرّات ظهور الكتابة عند إلقاء خالد قطعة النقد 20 مَرَّة هو 4.2

### أتذكَّر

يُسمّى الاحتمال في هذا المثال الاحتمال التجريبي؛ لأنَّه احتمال يعتمد على عدد مَرّات تكرار التجربة.

### أتعلَّم

لا يُشترَط الحصول على قيمة صحيحة للتوقُّع؛ لأنَّ التوقُّع وسط حسابي، ولأنَّ الوسط الحسابي قد يكون عددًا غير صحيح حتى لو كانت القِيَم الأصلية صحيحة.

### أتحقَّق من فهمي

فحص مُراقِب الجودة في أحد المصانع 500 عيِّنة عشوائيًّا من الخلطات الخرسانية، فوجد أنَّ 10 منها لا تُطابِق المواصفات. إذا فحص مُراقِب الجودة 200 عيِّنة أُخرى، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) العدد المُتوقَّع من العيِّنات التي لا تُطابِق المواصفات من العيِّنات العشرين التي فحصها مُراقِب الجودة.

b) تباين عدد العيِّنات التي لا تُطابِق المواصفات من العيِّنات العشرين التي فحصها مُراقِب الجودة.

**معلومة**

توجد اختبارات عِدَّة للخرسانة المُتصلِّبة، منها: اختبار مقاومة الضغط، واختبار مقاومة الشَّدِّ، واختبار النفاذية.

### أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

**إذا كان: $X \sim Geo(0.2)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب 3 منازل عشرية:**

1) $P(X=2)$
2) $P(X=10)$
3) $P(X \geq 3)$
4) $P(2 < X \leq 5)$
5) $P(X < 2)$
6) $P(X \leq 4)$
7) $P(1 \leq X < 2)$
8) $P(3 \leq X \leq 6)$

9) أُلقِي حجر نرد منتظم ذو ثمانية أوجه مُرقَّمة بالأرقام من 1 إلى 8 بشكل مُتكرِّر حتى ظهور العدد 7. أجد احتمال إلقاء حجر النرد 6 مرّات.

10) أطلق عماد رصاصة نحو هدف بصورة مُتكرِّرة، ثم توقَّف بعد إصابته الهدف. إذا كان احتمال إصابته الهدف في كل مَرَّة هو 0.7، فما احتمال أنْ يصيبه أوَّل مَرَّة في المحاولة العاشرة؟

11) **أحياء:** في دراسة لعالِمة أحياء على خنافس في إحدى الحدائق، توصَّلت العالِمة إلى أنَّ واحدة من كل 12 خنفساء لديها جسم برتقالي. إذا بدأت العالِمة جمع الخنافس عشوائيًّا على أنْ تتوقَّف عند إيجاد أوَّل خنفساء جسمها برتقالي، فأجد احتمال أنْ تتوقَّف عن جمع الخنافس عند جمعها 20 خنفساء.

12) **إصلاح سيّارات:** أصلح عبد الله مُحرِّك إحدى السيّارات، لكنَّه لم يستطع تجربة تشغيله إلّا مَرَّة واحدة كل 20 دقيقة نتيجة خلل كهربائي. إذا كان احتمال أنْ يعمل المُحرِّك عند محاولة تشغيله هو 0.4، فما احتمال عمل المُحرِّك أوَّل مَرَّة بعد مُضِيِّ أكثر من ساعة على محاولة إصلاحه؟

إذا كان احتمال إصابة شـــخص ما بأعراض جانبية بعد تناوله دواءً مُعيَّنًا هو 0.25، وقرَّر طبيب إعطاء مرضاه هذا الدواء إلى حين ظهور أوَّل إصابة بأعراضه الجانبية، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

13 احتمال أنْ يتوقَّف الطبيب عن إعطاء المرضى الدواء عند تناول 10 مرضى هذا الدواء.

14 احتمال أنْ يزيد عدد المرضى الذين سيتناولون الدواء على 3 مرضى.

15 العدد المُتوقَّع للمرضى الذين سيتناولون الدواء إلى حين ظهور أوَّل إصابة بأعراض الدواء الجانبية.

إذا كان: $X \sim B(10, 0.3)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب 3 منازل عشرية:

16 $P(X=2)$

17 $P(X \geq 9)$

18 $P(X \leq 8)$

19 $P(1 < X \leq 4)$

20 $P(X > 1)$

21 $P(X < 4)$

22 $P(0 \leq X < 3)$

23 $P(3 \leq X \leq 6)$

أجد التوقُّع لكلٍّ من المُتغيِّرين العشوائيين الآتيين:

24 $X \sim Geo(0.3)$

25 $X \sim Geo\left(\frac{3}{7}\right)$

أجد التوقُّع والتباين لكلٍّ من المُتغيِّرين العشوائيين الآتيين:

26 $X \sim B(5, 0.1)$

27 $X \sim B\left(20, \frac{3}{8}\right)$

28 في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم 9 مرّات، أجد احتمال ظهور عدد زوجي 5 مرّات.

طيران: يواجه الطيّارون صعوبة في الرؤيا باحتمال 0.25 عند الهبوط بالطائرات في أحد المطارات خلال فصل الشتاء بسبب سوء الأحوال الجوية. إذا هبط طيّار 20 مرَّة في هذا المطار شتاءً، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

29 احتمال أنْ يواجه الطيّار صعوبة في الرؤيا خلال الهبوط في ثلاث مرّات فقط.

30 احتمال أنْ يواجه الطيّار صعوبة في الرؤيا خلال الهبوط في ثلاث مرّات على الأقل.

31 احتمال أنْ يواجه الطيّار صعوبة في الرؤيا خلال الهبوط في المرّات جميعها.

32 العدد المُتوقَّع من المرّات التي سيواجه فيها الطيّار صعوبة في الرؤيا خلال عملية الهبوط.

33 إذا كان $X$ مُتغيِّرًا عشوائيًّا ذا حدَّين، وكان: $E(X) = 1.4, \text{Var}(X) = 1.12$، فأجد $P(X \geq 6)$.

34 إذا كان: $X \sim Geo(p)$، وكان: $E(X) = \frac{4}{3}$، فأجد قيمة $p$.

35 إذا كان: $X \sim B(21, p)$، وكان: $P(X = 10) = P(X = 9)$، فأجد قيمة $p$.

**في دراسة لمندوب مبيعات، تبيَّن أنَّ احتمال شراء شخص مُنتَجًا ما بعد التواصل معه هو 0.1. إذا تواصل مندوب المبيعات مع 10 أشخاص، وكان ثمن المُنتَج 10 JD، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:**

36 احتمال أنْ يشتري جميع الأشخاص المُنتَج.

37 احتمال أنْ يكون عائد المبيعات أكثر من 80 JD.

## مهارات التفكير العليا

38 أكتشف الخطأ: أرادت لانا حلَّ السؤال الآتي:

"عند إلقاء قطعة نقد غير منتظمة، كان احتمال ظهور الصورة هو $\frac{5}{11}$. إذا أُلقِيت قطعة النقد بصورة مُتكرِّرة حتى تظهر الصورة أوَّل مَرَّة، فما احتمال ظهور الصورة أوَّل مَرَّة عند إلقاء قطعة النقد في المَرَّة الثالثة؟". وكان حلُّها على النحو الآتي:

$$P(X = 3) = \frac{5}{11}\left(1 - \frac{5}{11}\right)^3$$

$$= \frac{1080}{14641}$$

أكتشف الخطأ في حلِّ لانا، ثم أُصحِّحه، مُبرِّرًا إجابتي.

39 تحدٍّ: تُرسِل إحدى الشركات استبانة إلكترونية إلى زبائنها بعد بيعهم مُنتَجًا ما؛ لتعرُّف التغذية الراجعة حيال المُنتَج. ولضمان ذلك، فإنَّ الشركة تُكرِّر إرسال كل استبانة إلى حين ردِّ الزبون. إذا كان احتمال ردِّ الزبون على الاستبانة في المَرَّة الأولى أكبر من 0.5، واحتمال ردِّه على الاستبانة في المَرَّة الثانية هو 0.21، وبافتراض أنَّ هذه المحاولات مستقلة، فأجد توقُّع عدد الاستبانات التي ستُرسِلها الشركة إلى حين ردِّ الزبون، علمًا بأنَّ احتمال ردِّ الزبون على أيِّ استبانة لا يتأثَّر بعدد مَرّات إرسالها.

تبرير: **إذا كان عدد الطلبة في أحد الصفوف 25 طالبًا، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:**

40 احتمال أنْ يكون طالب واحد فقط من مواليد شهر آذار.

41 احتمال أنْ يكون 3 طلبة فقط من مواليد شهر آذار.

42 احتمال أنْ يكون اثنان من الطلبة فقط من مواليد فصل الشتاء.

43 تحدٍّ: إذا كان: $X \sim B(30, 0.1)$، فأجد $P(\mu \leq X < \mu + \sigma)$.

الدرس 2

# التوزيع الطبيعي
# Normal Distribution

**فكرة الدرس**

- تعرف منحنى التوزيع الطبيعي، وخصائصه.
- إيجاد احتمالات المُتغيِّر العشوائي الطبيعي.

**المصطلحات**

المنحنى الطبيعي، القاعدة التجريبية، المُتغيِّر العشوائي المتصل، المُتغيِّر العشوائي المنفصل، التوزيع الطبيعي، التوزيع الطبيعي المعياري.

**مسألة اليوم**

إذا كان الزمن الذي تستغرقه الكهرباء في بطارية هاتف محمول قبل أنْ تنفد تمامًا يتبع توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 36 ساعة، وانحرافه المعياري 5 ساعة، فما احتمال أنْ تعمل البطارية مدَّة 27 ساعة على الأقل؟

**أتذكَّر**

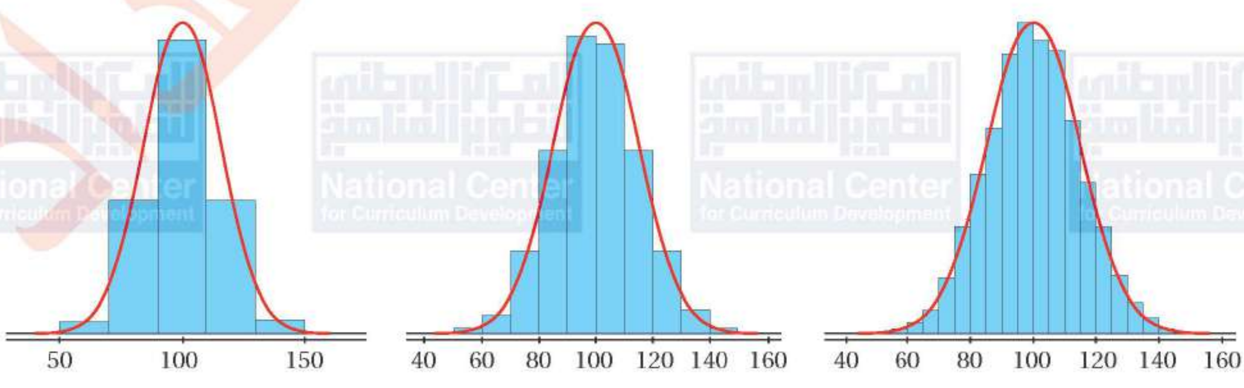
البيانات العددية المنفصلة هي بيانات تأخذ قِيَمًا قابلة للعدِّ، مثل: عدد الإخوة، وعدد الكتب. أمّا البيانات العددية المتصلة فهي بيانات قِيَمها المُمكِنة غير قابلة للعدِّ، لكنَّها قابلة للقياس، مثل: الطول، والكتلة.

## المنحنى الطبيعي

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ البيانات العددية هي بيانات يُمكِن رصدها في صورة أرقام، ويُمكِن أيضًا قياسها، وإجراء العمليات الحسابية عليها، وترتيبها تصاعديًّا وتنازليًّا.

تُصنَّف البيانات العددية إلى نوعين، هما: البيانات المنفصلة، والبيانات المتصلة. ويُمكِن استعمال المُخطَّطات التكرارية لتمثيل البيانات العددية المتصلة بيانيًّا.

تُبيِّن المُخطَّطات التكرارية الآتية كتل مجموعة من الأشخاص الذين اختيروا عشوائيًّا من مدينة ما:




$n = 100$ $\quad$ $n = 1000$ $\quad$ $n = 10000$

أُلاحِظ أنَّ زيادة حجم العيِّنة $n$، وتقليص أطوال الفئات، يجعلان المُخطَّط التكراري أكثر تناسقًا وقربًا من المنحنى المرسوم باللون الأحمر، الذي يُسمّى **المنحنى الطبيعي** (normal curve). يُستعمَل المنحنى الطبيعي لنمذجة البيانات العددية المتصلة التي تُختار عشوائيًّا في كثير من المواقف الحياتية.

بوجه عام، فإنَّ للمنحنى الطبيعي خصائص تُميِّزه عن غيره من المنحنيات الأُخرى؛ ما يُفسِّر سبب استعماله كثيرًا في التطبيقات الحياتية والعلمية المختلفة.

**أتعلَّم**

يجب أنْ يكون عدد البيانات كبيرًا جدًّا لكي يتخذ تمثيلها البياني شكل المنحنى الطبيعي.

## مفهوم أساسي — خصائص المنحنى الطبيعي

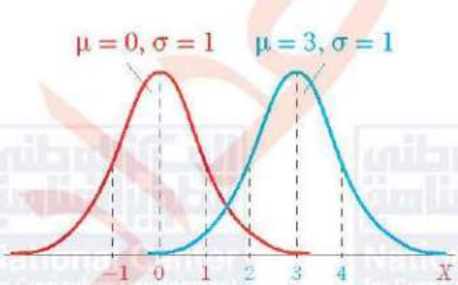
يمتاز المنحنى الطبيعي بالخصائص الآتية:

- منحنى متصل له شكل الجرس.
- تطابق الوسط الحسابي والوسيط والمنوال، وتوسُّط كلٍّ منها البيانات.
- تماثل البيانات حول الوسط الحسابي.
- اقتراب المنحنى عند طرفيه من المحور $x$ من دون أنْ يمسَّه.
- المساحة الكلية أسفل المنحنى هي 1.

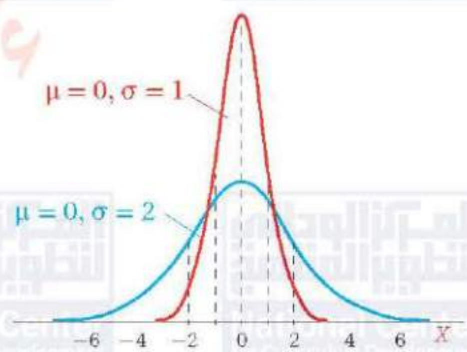
يعتمد شكل المنحنى الطبيعي وموقعه على الوسط الحسابي $\mu$، والانحراف المعياري $\sigma$. فمثلًا، في الشكل $(a)$ التالي، يُمكِن ملاحظة أنَّ التغيُّر في الوسط الحسابي يؤدي إلى انسحاب أفقي للمنحنى الطبيعي. أمّا في الشكل $(b)$ فيُلاحَظ أنَّ زيادة الانحراف المعياري تجعل المنحنى الطبيعي أكثر انتشارًا وتوسُّعًا.

**أتعلَّم**

أُلاحِظ من الشكل $(a)$ أنَّ زيادة الوسط الحسابي من 0 إلى 3 تسبَّبت في انسحاب المنحنى إلى اليمين 3 وحدات، علمًا بأنَّ $\sigma$ متساوية، في حين أنَّ زيادة الانحراف المعياري من 1 إلى 2 في الشكل $(b)$ أدَّت إلى توسُّع المنحنى أفقيًّا، من دون أنْ يُؤثِّر ذلك في مركز البيانات.



(a)

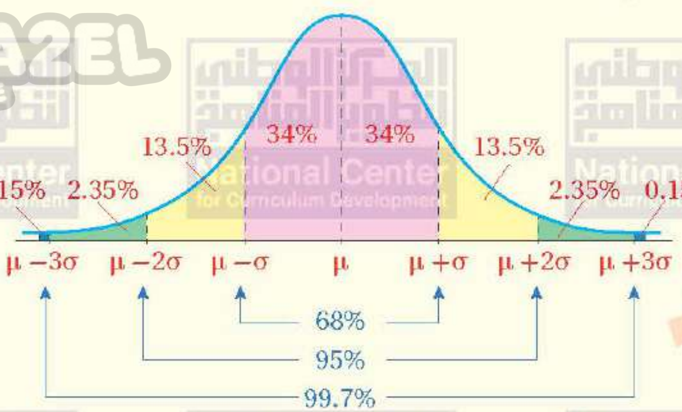


(b)

تُمثِّل المساحة التي تقع بين قيمتين من البيانات أسفل المنحنى الطبيعي النسبة المئوية للبيانات الواقعة بين هاتين القيمتين. يُمكِن استعمال **القاعدة التجريبية** (empirical rule) الآتية لتحديد المساحة التي تقع بين بعض القِيَم من البيانات أسفل المنحنى الطبيعي:

## مفهوم أساسي

إذا اتخذت مجموعة من البيانات شكل المنحنى الطبيعي، وكان وسطها الحسابي $\mu$، وانحرافها المعياري $\sigma$، فإنَّ:




- 68% من المشاهدات تقريبًا تقع بين $\mu-\sigma$ و $\mu+\sigma$؛ أيْ إنَّ 68% من البيانات لا يزيد البُعْد بينها وبين الوسط الحسابي على قيمة الانحراف المعياري.
- 95% من المشاهدات تقريبًا تقع بين $\mu-2\sigma$ و $\mu+2\sigma$؛ أيْ إنَّ 95% من البيانات لا يزيد البُعْد بينها وبين الوسط الحسابي على مثلي قيمة الانحراف المعياري.
- 99.7% من المشاهدات تقريبًا تقع بين $\mu-3\sigma$ و $\mu+3\sigma$؛ أيْ إنَّ 99.7% من البيانات لا يزيد البُعْد بينها وبين الوسط الحسابي على ثلاثة أمثال قيمة الانحراف المعياري.

**معلومة**

المنحنى الطبيعي هو منحنى الاقتران:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

حيث:

$\mu$: الوسط الحسابي.

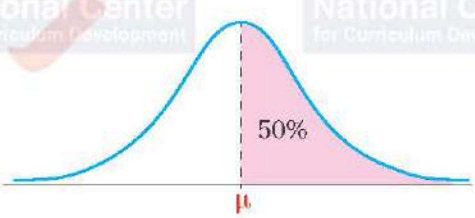
$\sigma$: الانحراف المعياري.

### مثال 1

**إذا اتخذت علامات بعض الطلبة شكل المنحنى الطبيعي في أحد الاختبارات، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:**

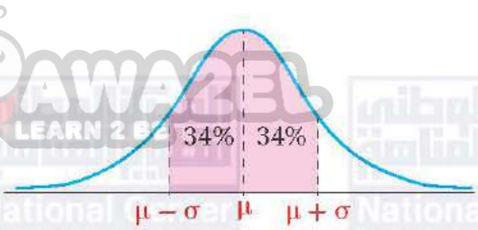
**1** **النسبة المئوية للعلامات التي تقع فوق الوسط الحسابي.**

بما أنَّ المنحنى الطبيعي مُتماثِل حول الوسط الحسابي، فإنَّ 50% من العلامات تقع فوق الوسط الحسابي كما في الشكل المجاور.



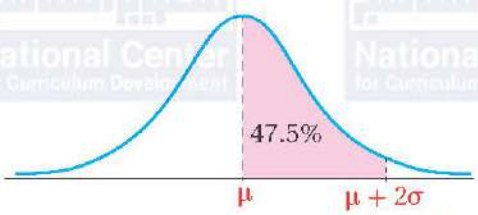
**2** **النسبة المئوية للعلامات التي لا يزيد البُعْد بينها وبين الوسط الحسابي على انحراف معياري واحد.**

68% هي النسبة المئوية للعلامات التي لا يزيد البُعْد بينها وبين الوسط الحسابي على انحراف معياري واحد كما في الشكل المجاور.



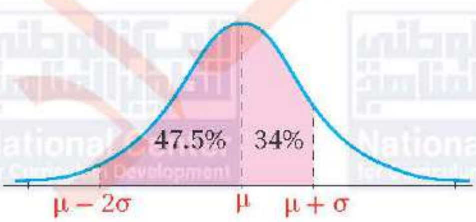

**3** **النسبة المئوية للعلامات التي تزيد على الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين.**

بما أنَّ 95% من المشاهدات في المنحنى الطبيعي تقع بين $\mu-2\sigma$ و $\mu+2\sigma$، وأنَّ المنحنى الطبيعي مُتماثِل حول الوسط الحسابي، فإنَّ 47.5% من العلامات تزيد على الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين كما في الشكل المجاور.




**4** **النسبة المئوية للعلامات التي تزيد على الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحراف معياري واحد، أو تقل عنه بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين.**

بما أنَّ 47.5% من العلامات تقل عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين، وأنَّ 34% من العلامات تزيد على الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحراف معياري واحد، فإنَّ 81.5% من العلامات تقع بين $\mu - 2\sigma$ و $\mu + \sigma$ كما في الشكل المجاور.



### أتحقَّق من فهمي

إذا اتخذ التمثيل البياني لأطوال مجموعة من طلبة الصف السابع شكل المنحنى الطبيعي، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) النسبة المئوية للطلبة الذين تقع أطوالهم فوق الوسط الحسابي.

b) النسبة المئوية للطلبة الذين لا يزيد البُعْد بين أطوالهم والوسط الحسابي على انحراف معياري واحد.

c) النسبة المئوية للطلبة الذين تقل أطوالهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين.

d) النسبة المئوية للطلبة الذين تقل أطوالهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على ثلاثة انحرافات معيارية، أو تزيد عليه بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين.

## المُتغيِّر العشوائي الطبيعي، والتوزيع الطبيعي

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ المُتغيِّر العشوائي هو مُتغيِّر تعتمد قِيَمه على نواتج تجربة عشوائية.

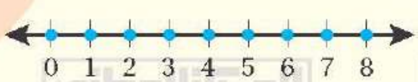
يوجد نوعان من المُتغيِّرات العشوائية، هما: **المُتغيِّر العشوائي المنفصل** (discrete random variable)، و**المُتغيِّر العشوائي المتصل** (continuous random variable).

### مفهوم أساسي

**المُتغيِّرات العشوائية المتصلة والمنفصلة**

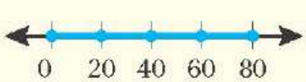
- المُتغيِّر العشوائي المنفصل هو مُتغيِّر عشوائي يأخذ قِيَمًا معدودةً.

**مثال:** عدد السيّارات التي ستمرُّ أمام إحدى المدارس خلال الساعة القادمة.




- المُتغيِّر العشوائي المتصل هو مُتغيِّر عشوائي يأخذ قِيَمًا متصلةً ضمن فترة مُعيَّنة من الأعداد الحقيقية.

**مثال:** سرعة أوَّل سيّارة ستمرُّ أمام إحدى المدارس خلال الساعة القادمة.




**أتعلَّم**

يُعَدُّ كلٌّ من المُتغيِّر العشوائي الهندسي والمُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين مُتغيِّرًا عشوائيًّا منفصلًا؛ لأنَّ كُلًّا منهما يأخذ قِيَمًا معدودةً، مثل: عدد مرّات إصابة الهدف، وعدد السيّارات.

إذا ارتبط المُتغيِّر العشوائي المتصل $X$ بتجربة عشوائية اتخذ تمثيل بياناتها البياني شكل المنحنى الطبيعي، فإنَّه يُسمّى مُتغيِّرًا عشوائيًا طبيعيًّا، ويُسمّى توزيعه الاحتمالي **التوزيع الطبيعي** (normal distribution)، ويُمكِن التعبير عنه بالرموز على النحو الآتي:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

حيث:

$\mu$: الوسط الحسابي.

$\sigma$: الانحراف المعياري.

**أتعلَّم**

يُرمَز إلى التوزيع الطبيعي بالحرف $N$؛ وهو الحرف الأوَّل من الكلمة الإنجليزية (Normal) التي تعني الطبيعي.

تعلَّمْتُ في المثال السابق أنَّ المساحة الواقعة بين قيمتين من البيانات أسفل المنحنى الطبيعي تُمثِّل النسبة المئوية للبيانات الواقعة بين هاتين القيمتين. وبما أنَّ المساحة أسفل المنحنى الطبيعي هي 1، فإنَّه يُمكِن إيجاد احتمال بعض قِيَم المُتغيِّر العشوائي الطبيعي باستعمال القاعدة التجريبية، بافتراض أنَّ المساحة أسفل المنحنى كاملة هي احتمال الحادث الأكيد.

**أتذكَّر**

لأيِّ حادث $A$ في الفضاء العيني لتجربة عشوائية، فإنَّ: $0 \le P(A) \le 1$.

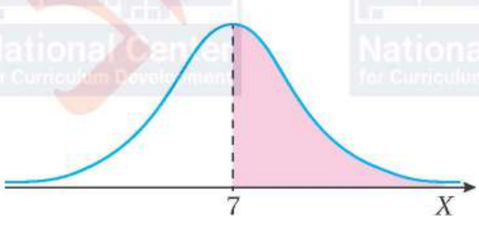
### مثال 2 : من الحياة

**صناعة: إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي $X$ على طول قُطْر برغي (بالملّيمتر) تُنتِجه آلة في مصنع، حيث: $X \sim N(7, 0.1^2)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:**

**1** $P(X > 7)$

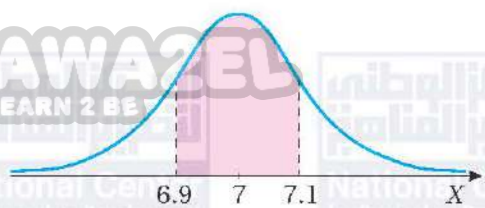
بما أنَّ الوسط الحسابي هو 7، والمنحنى الطبيعي مُتماثِل حول الوسط الحسابي، فإنَّ: $P(X > 7) = P(X > \mu) = 0.5$

كما في الشكل المجاور.



2 $P(6.9 < X < 7.1)$

تبعد كلٌّ من القيمة 6.9 والقيمة 7.1 انحرافًا معياريًّا واحدًا عن الوسط الحسابي.




وبما أنَّ 68% من البيانات لا يزيد بُعْدها عن الوسط الحسابي بمقدار قيمة الانحراف المعياري، فإنَّ:

$P(6.9 < X < 7.1) = P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.68$.

### أتحقَّق من فهمي

صناعة: إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي $X$ على طول قُطْر رأس مِثْقب (بالملّيمتر) تُنتِجه آلة في مصنع، حيث: $X \sim N(30, 0.4^2)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) $P(X > 30)$

b) $P(29.6 < X < 30.4)$

c) $P(29.2 < X < 30)$

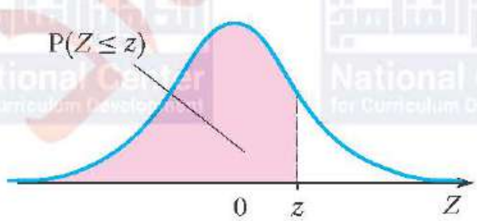
d) $P(29.2 < X < 30.4)$

## التوزيع الطبيعي المعياري

يُطلَق على التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي 0، وانحرافه المعياري 1 اسم **التوزيع الطبيعي المعياري** (standard normal distribution)، ويُمكِن التعبير عن المُتغيِّر العشوائي الطبيعي المعياري بالرموز على النحو الآتي:

$$Z \sim N(0, 1)$$

يُبيِّن الشكل المجاور منحنى التوزيع الطبيعي المعياري المُتماثِل حول الوسط الحسابي 0.




تُمثِّل مساحة المنطقة المُظلَّلة احتمال قِيَم المُتغيِّر العشوائي الطبيعي المعياري $Z$ التي تقل عن (أو تساوي) القيمة المعيارية $z$، أو $P(Z \leq z)$.

**أتعلَّم**

يُستعمَل الحرف $X$ عادة للدلالة على المُتغيِّر العشوائي الطبيعي، ويُستعمَل الحرف $Z$ للدلالة على المُتغيِّر العشوائي الطبيعي المعياري.

إذن، $P(Z < z)$ تساوي المساحة التي تقع يسار القيمة المعيارية $z$، وهي المساحة التي يُمكِن إيجادها باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

يُبيِّن الشكل التالي جزءًا من جدول التوزيع الطبيعي المعياري، الذي يحتوي فيه العمود الأوَّل على منزلة أجزاء العشرة في قيمة $z$ المعيارية، ويحتوي فيه الصف الأوَّل على منزلة أجزاء المئة في قيمة $z$ المعيارية، وتُمثِّل القيمة المُقابِلة لكلٍّ من هاتين القيمتين في الجدول المساحة أسفل المنحنى الطبيعي المعياري التي تقع يسار قيمة $z$ المعيارية، أو $P(Z < z)$. فمثلًا، لإيجاد المساحة أسفل المنحنى الطبيعي المعياري التي تقع يسار $z = 0.35$، أجد القيمة المُقابِلة لكلٍّ من 0.3 في العمود الأوَّل، و0.05 في الصف الأوَّل، وهذه القيمة تساوي $P(Z < 0.35)$.

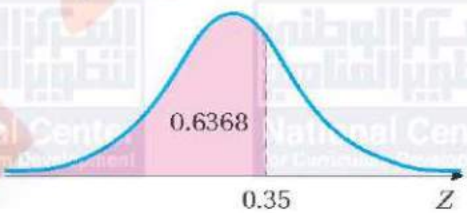
**أتعلَّم**

عند استعمال المُتغيِّر العشوائي المتصل $X$، فإنَّ إشارة المساواة لا تُؤثِّر في قيمة الاحتمال؛ لأنَّ المساحة (الاحتمال) أسفل نقطة واحدة على المنحنى هي صفر. فمثلًا:

$P(X \leq x) = P(X < x)$

جدول التوزيع الطبيعي المعياري

| $z$ | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | [illegible] | [illegible] | 0.7088 |
| [illegible] | [illegible] | 0.7291 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] |




**ملحوظة:** توجد نسخة كاملة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري في الملحق المُرفَق بنهاية الكتاب.

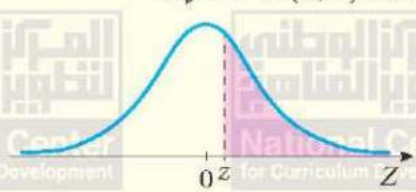
بالرغم من أنَّ الجدول السابق يُبيِّن احتمال القِيَم التي تقل عن (أو تساوي) القيمة المعيارية $z$، فإنَّه يُمكِن استعمال الخصائص الأساسية للتوزيع الطبيعي، إضافةً إلى الجدول، لإيجاد قِيَم الاحتمال لحالات مختلفة كما يأتي:

## مفهوم أساسي

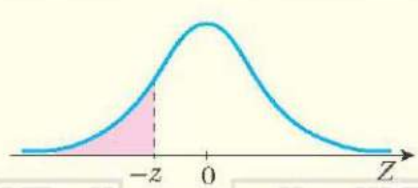
### إيجاد احتمال المُتغيِّر العشوائي الطبيعي المعياري

إذا كان: $Z \sim N(0, 1)$، فإنَّ:

1. $P(Z > z) = 1 - P(Z < z)$




2. $P(Z < -z) = 1 - P(Z < z)$

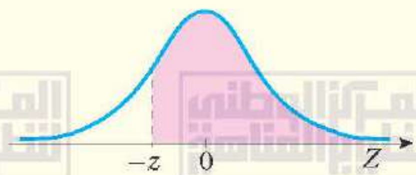


## إيجاد احتمال المُتغيِّر العشوائي الطبيعي المعياري (تابع)

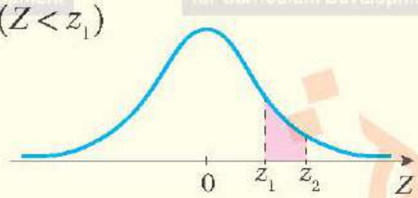
### مفهوم أساسي

إذا كان: $Z \sim N(0, 1)$، فإنَّ:

3 $P(Z > -z) = P(Z < z)$




4 $P(z_1 < Z < z_2) = P(Z < z_2) - P(Z < z_1)$




**أتعلَّم**

أُلاحِظ أنَّ جدول التوزيع الطبيعي المعياري يحوي احتمالات تُقابِل قِيَم $z$ الموجبة فقط؛ لذا يجب أنْ أُحوِّل أيَّ قيمة سالبة للمُتغيِّر $z$ إلى قيمة موجبة حتى أتمكَّن من استعمال الجدول.

### مثال 3

أجد كُلًّا ممّا يأتي، مُستعمِلًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

1 $P(Z < 2.13)$

$P(Z < 2.13) = 0.9834$    باستعمال الجدول

2 $P(Z > 0.25)$

$P(Z > 0.25) = 1 - P(Z < 0.25)$    باستعمال الخصائص

$= 1 - 0.5987$    باستعمال الجدول

$= 0.4013$    بالتبسيط

3 $P(Z < -1.75)$

$P(Z < -1.75) = 1 - P(Z < 1.75)$    باستعمال الخصائص

$= 1 - 0.9599$    باستعمال الجدول

$= 0.0401$    بالتبسيط

**أتعلَّم**

يحتوي جدول التوزيع الطبيعي على احتمالات تُقابِل قِيَم $z$ الموجبة فقط؛ لذا، يجب أنْ أُحوِّل جميع قِيَم $z$ السالبة إلى ما يُقابِلها من قِيَم موجبة.

4 $P(Z > -2.01)$

$P(Z > -2.01) = P(Z < 2.01)$ باستعمال الخصائص

$= 0.9778$ باستعمال الجدول

5 $P(-1.1 < Z < 2.34)$

$P(-1.1 < Z < 2.34) = P(Z < 2.34) - P(Z < -1.1)$ باستعمال الخصائص

$= P(Z < 2.34) - (1 - P(Z < 1.1))$ باستعمال الخصائص

$= 0.9904 - (1 - 0.8643)$ باستعمال الجدول

$= 0.8546$ بالتبسيط

### أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا ممّا يأتي، مُستعمِلًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

a) $P(Z < 1.5)$

b) $P(Z > 0.61)$

c) $P(Z < -0.43)$

d) $P(Z > -3.23)$

e) $P(-1.4 < Z < 2.07)$

## إيجاد احتمال المُتغيِّر العشوائي الطبيعي (غير المعياري)

تعلَّمْتُ في المثال 2 إيجاد احتمالات مُتغيِّرات عشوائية طبيعية غير معيارية لقِيَم مُحدَّدة، مثل $P(X < \mu - \sigma)$، باستعمال القاعدة التجريبية، وتعلَّمْتُ في المثال 3 إيجاد احتمالات المُتغيِّر العشوائي الطبيعي المعياري باستعمال الجدول. والآن سأتعلَّم إيجاد احتمال أيِّ مُتغيِّر عشوائي طبيعي غير معياري $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ لأيِّ قيمة، وذلك بتحويله إلى مُتغيِّر عشوائي طبيعي معياري.

إنَّ طرح الوسط الحسابي من جميع قِيَم المُتغيِّر العشوائي الطبيعي يجعل قيمة الوسط الحسابي 0 بدلًا من $\mu$، وإنَّ قسمتها جميعًا على الانحراف المعياري تجعل قيمة الانحراف المعياري 1 بدلًا من $\sigma$، وبذلك يصبح منحنى التوزيع الطبيعي معياريًّا.

يُمكِن استعمال الصيغة الآتية لتحويل قِيَم التوزيع الطبيعي $x$ إلى قِيَم معيارية $z$:

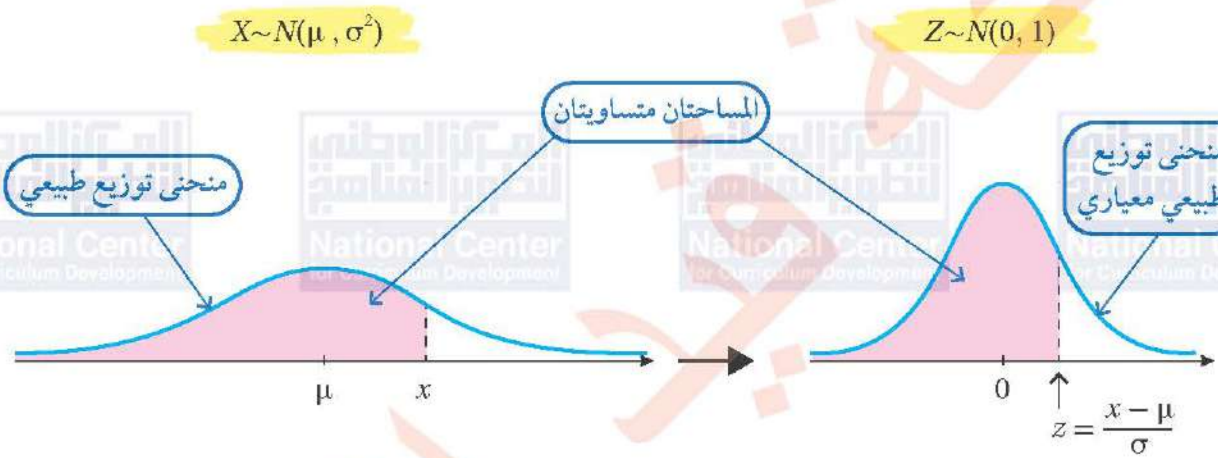
بطرح الوسط الحسـابي من قيمة $x$، ثم القسمة على الانحراف المعياري.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

وبذلك يتحوَّل المُتغيِّر العشـوائي $X \sim N(\mu , \sigma^2)$ إلى $Z \sim N(0, 1)$، عندئذٍ يُمكِن استعمال الجدول لإيجاد احتمال أيٍّ من قِيَمه.

**أتذكَّر**

يؤدّي التغيُّر في الوسط الحسابي إلى انسحاب أفقي لمنحنى التوزيع الطبيعي. أمّا التغيُّر في الانحراف المعياري فيُؤثِّر في انتشار المنحنى الطبيعي وتوسُّعه.




**مثال 4**

إذا كان: $X \sim N(15, 4^2)$، فأجد كل احتمال ممّا يأتي، مُستعمِلًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

**1** $P(X < 25)$

$P(X < 25) = P\left(Z < \frac{25 - \mu}{\sigma}\right)$ صيغة قِيَم $z$

$= P\left(Z < \frac{25 - 15}{4}\right)$ بتعويض $\mu = 15, \sigma = 4$

$= P(Z < 2.5)$ بالتبسيط

$= 0.9938$ باستعمال الجدول

**أتعلَّم**

القيمة المعيارية $z$ التي تُقابِل $x = 25$ هي 2.5

2 $P(X > 9)$

$P(X > 9) = P\left(Z > \frac{9-\mu}{\sigma}\right)$ صيغة قِيَم $z$

$= P\left(Z > \frac{9-15}{4}\right)$ بتعويض $\mu = 15, \sigma = 4$

$= P(Z > -1.5)$ بالتبسيط

$= P(Z < 1.5)$ باستعمال الخصائص

$= 0.9332$ باستعمال الجدول

**أتعلَّم**

عند إيجاد $\frac{x-\mu}{\sigma}$، أُقرِّب الإجابة إلى أقرب منزلتين عشريتين؛ لأتمكَّن من استعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

**أتحقَّق من فهمي**

إذا كان: $X \sim N(7, 3^2)$، فأجد كل احتمال ممّا يأتي، مُستعمِلًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

a) $P(X < -2)$ b) $P(X > 10)$ c) $P(4 < X \leq 13)$

**مثال 5 : من الحياة**

أطوال: توصَّلت دراسة إلى أنَّ أطوال الرجال في سِنِّ العشرين تتبع توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 177 cm، وانحرافه المعياري 7 cm. إذا اختير رجل عشوائيًّا، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1 احتمال أنْ يكون طول الرجل أقل من 170 cm

أفترض أنَّ المُتغيِّر العشوائي $X$ يدلُّ على طول الرجل:

$P(X < 170) = P\left(Z < \frac{170-\mu}{\sigma}\right)$ صيغة قِيَم $z$

$= P\left(Z < \frac{170-177}{7}\right)$ بتعويض $\mu = 177, \sigma = 7$

$= P(Z < -1)$ بالتبسيط

$= 1 - P(Z < 1)$ باستعمال الخصائص

$= 1 - 0.8413$ باستعمال الجدول

$= 0.1587$ بالتبسيط

2 احتمال أنْ يكون طول الرجل أكثر من 191 cm

$P(X > 191) = P\left(Z > \frac{191-\mu}{\sigma}\right)$ صيغة قِيَم $z$

$= P\left(Z > \frac{191-177}{7}\right)$ بتعويض $\mu = 177, \sigma = 7$

بالتبسيط $= P(Z > 2)$

باستعمال الخصائص $= 1 - P(Z < 2)$

باستعمال الجدول $= 1 - 0.9772$

بالتبسيط $= 0.0228$

**أتحقَّق من فهمي**

**أطوال: توصَّلت دراسة إلى أنَّ أطوال النساء في إحدى المدن تتبع توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 165 cm، وانحرافه المعياري 3 cm. إذا اختيرت امرأة عشوائيًّا، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:**

a) احتمال أنْ يكون طول المرأة أقل من 162 cm

b) احتمال أنْ يكون طول المرأة أكثر من 171 cm

c) احتمال أنْ يكون طول المرأة بين 162 cm و 171 cm

**معلومة**

يبلغ مُتوسِّط أطوال النساء في الأردن 158.8 cm

## إيجاد قيمة المُتغيِّر العشوائي إذا عُلِم الاحتمال

تعلَّمْتُ في المثال السابق إيجاد احتمال مُتغيِّر عشوائي طبيعي (غير معياري)، ولكنَّ الاحتمال قد يكون معلومًا في بعض الأحيان، وتكون قِيَم المُتغيِّر العشوائي $X$ هي المجهولة. وفي هذه الحالة، يُمكِن استعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري بطريقة عكسية، وذلك بإيجاد قيمة $z$ التي تُحقِّق الاحتمال، ثم استعمال الصيغة: $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ لتحديد قيمة $x$ التي تُقابِل القيمة المعيارية $z$.

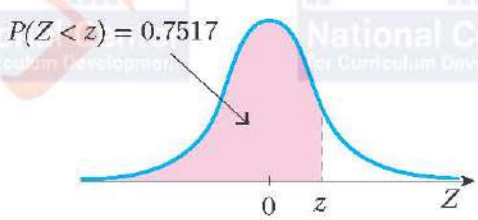
**مثال 6**

**إذا كان: $X \sim N(5, 3^2)$، فأجد قيمة $x$ التي تُحقِّق الاحتمال المعطى في كلٍّ ممّا يأتي:**

**1** $P(X < x) = 0.7517$

أُلاحِظ أنَّ الاحتمال المعطى يُمثِّل المساحة التي تقع يسار القيمة $x$ أسفل منحنى التوزيع الطبيعي. وبما أنَّ قيمة الاحتمال أكثر من 0.5، فإنَّ القيمة المعيارية المرتبطة بقيمة $x$ هي قيمة موجبة، ولتكن $z$.

يُمثِّل الاحتمال المساحة التي تقع يسار القيمة $z$ أسفل منحنى التوزيع الطبيعي المعياري كما في الشكل المجاور.



ومن ثَمَّ، يُمكِن إيجاد قيمة $x$ باتِّباع الخطوتين الآتيتين:

**الخطوة 1:** أجد قيمة $z$ التي تُحقِّق الاحتمال.

بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي المعياري، أجد أنَّ قيمة $z$ التي تُقابِل الاحتمال 0.7517 هي 0.68:

جدول التوزيع الطبيعي المعياري

| z | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 |
| [illegible] | [illegible] | [illegible] | 0.7939 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | 0.8106 |

**الخطوة 2:** أجد قيمة $x$ التي تُقابِل القيمة المعيارية.

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$ صيغة قِيَم $z$

$$0.68 = \frac{x-5}{3}$$ بتعويض $\mu = 5, \sigma = 3, z = 0.68$

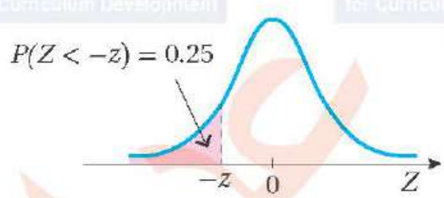
$$x = 7.04$$ بحلِّ المعادلة لـ $x$

إذن، قيمة $x$ التي تُحقِّق $P(X < x) = 0.7517$ هي 7.04

**2** $P(X < x) = 0.25$

ألاحِظ أنَّ الاحتمال المعطى يُمثِّل المساحة التي تقع يسار القيمة $x$ على منحنى التوزيع الطبيعي. وبما أنَّ قيمة الاحتمال أقل من 0.5، فإنَّ القيمة المعيارية المرتبطة بقيمة $x$ هي قيمة سالبة، ولتكن $-z$.

يُمثِّل الاحتمال المساحة التي تقع يسار القيمة $(-z)$ أسفل منحنى التوزيع الطبيعي المعياري كما في الشكل المجاور.




ومن ثَمَّ، يُمكِن إيجاد $x$، مُتَّبِعًا الخطوتين الآتيتين:

**الخطوة 1:** أجد قيمة $z$ التي تُحقِّق الاحتمال.

$$P(Z < -z) = 1 - P(Z < z)$$ باستعمال الخصائص

$$0.25 = 1 - P(Z < z)$$ بتعويض $P(Z < -z) = 0.25$

$$P(Z < z) = 0.75$$ بحلِّ المعادلة لـ $P(Z < z)$

بالرجـــوع إلى جدول التوزيع الطبيعي المعياري، أجد أنَّ القيمة الدقيقة للاحتمـــال 0.7500 غير موجودة؛ لذا أختار أقرب قيمة أقل منها، وهي 0.7486

ومن ثَمَّ، فإنَّ قيمة $z$ التي تُقابِل الاحتمال هي 0.67 كما في الجدول الآتي:

جدول التوزيع الطبيعي المعياري

| $z$ | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 |
| [illegible] | [illegible] | [illegible] | 0.7939 | [illegible] | [illegible] | | | | 0.8106 |

**الخطوة 2:** أجد قيمة $x$ التي تُقابِل القيمة المعيارية.

بما أنَّ قيمة $z$ المرتبطة بقيمة $x$ سالبة، فإنَّني أُعوِّض $z = -0.67$:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$ صيغة قِيَم $z$

$$-0.67 = \frac{x - 5}{3}$$ بتعويض $\mu = 5, \sigma = 3$

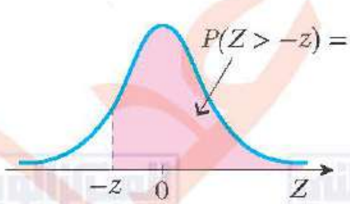
$$x = 2.99$$ بحلِّ المعادلة لـ $x$

إذن، قيمة $x$ التي تُحقِّق $P(X < x) = 0.25$ هي 2.99

### 3 $P(X > x) = 0.8438$

أُلاحِظ أنَّ الاحتمال المعطى يُمثِّل المســاحة التي تقع يمين القيمة $x$ أســفل منحنــى التوزيع الطبيعي. وبما أنَّ قيمة الاحتمال أكثر من 0.5، فإنَّ القيمة المعيارية المرتبطة بقيمة $x$ هي قيمة سالبة، ولتكن $-z$.

يُمثِّل الاحتمال المســاحة التي تقع يمين القيمة $(-z)$ أسفل منحنى التوزيع الطبيعي المعياري كما في الشكل المجاور.




ومن ثَمَّ، يُمكِن إيجاد قيمة $x$، مُتَّبِعًا الخطوتين الآتيتين:

**الخطوة 1:** أجد قيمة $z$ التي تُحقِّق الاحتمال.

$$P(Z > -z) = P(Z < z)$$ باستعمال الخصائص

$$0.8438 = P(Z < z)$$ بتعويض $P(Z > -z) = 0.8438$

بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي المعياري، أجد أنَّ قيمة $z$ التي تُقابِل الاحتمال 0.8438 هي 1.01:

**جدول التوزيع الطبيعي المعياري**

| $z$ | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 |

**الخطوة 2:** أجد قيمة $x$ التي تُقابِل القيمة المعيارية $z$.

بما أنَّ قيمة $z$ المرتبطة بقيمة $x$ سالبة، فإنَّني أُعوِّض $z = -1.01$:

صيغة قِيَم $z$ $\qquad z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

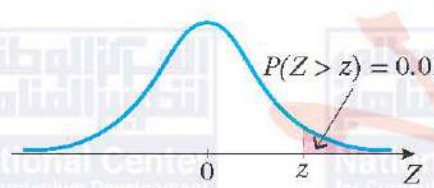
بتعويض $\mu = 5, \sigma = 3$ $\qquad -1.01 = \frac{x-5}{3}$

بحلِّ المعادلة لـ $x$ $\qquad x = 1.97$

إذن، قيمة $x$ التي تُحقِّق $P(X > x) = 0.8438$ هي 1.97

**4** $P(X > x) = 0.015$

أُلاحِظ أنَّ الاحتمال المعطى يُمثِّل المساحة التي تقع يمين القيمة $x$ أسفل منحنى التوزيع الطبيعي. وبما أنَّ قيمة الاحتمال أقل من 0.5، فإنَّ القيمة المعيارية المرتبطة بقيمة $x$ هي قيمة موجبة، ولتكن $z$.




يُمثِّل الاحتمال المساحة التي تقع يمين القيمة $z$ أسفل منحنى التوزيع الطبيعي المعياري كما في الشكل المجاور.

ومن ثَمَّ، يُمكِن إيجاد قيمة $z$، مُتَّبِعًا الخطوتين الآتيتين:

**الخطوة 1:** أجد قيمة $z$ التي تُحقِّق الاحتمال.

باستعمال الخصائص $\qquad P(Z > z) = 1 - P(Z < z)$

بتعويض $P(Z > z) = 0.015$ $\qquad 0.015 = 1 - P(Z < z)$

بحلِّ المعادلة لـ $P(Z < z)$ $\qquad P(Z < z) = 0.985$

بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي المعياري، أجد أنَّ قيمة $z$ التي تُقابِل الاحتمال 0.9850 هي 2.17:

**جدول التوزيع الطبيعي المعياري**

| $z$ | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 |

**الخطوة 2:** أجد قيمة $x$ التي تُقابِل القيمة المعيارية.

صيغة قِيَم $z$
$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

بتعويض $\mu = 5, \sigma = 3, z = 2.17$
$$2.17 = \frac{x-5}{3}$$

بحلِّ المعادلة لـ $x$
$$x = 11.51$$

إذن، قيمة $x$ التي تُحقِّق $P(X > x) = 0.015$ هي 11.51

### أتحقَّق من فهمي

**إذا كان $X$ مُتغيِّرًا عشوائيًّا طبيعيًّا، وسطه الحسابي $-3$، وانحرافه المعياري 4، فأجد قيمة $x$ التي تُحقِّق الاحتمال المعطى في كلٍّ ممّا يأتي:**

a) $P(X < x) = 0.9877$

b) $P(X < x) = 0.31$

c) $P(X > x) = 0.9738$

d) $P(X > x) = 0.2$

## إيجاد الوسط الحسابي أو الانحراف المعياري إذا عُلِم الاحتمال

في بعض المسائل، يكون احتمال إحدى قِيَم المُتغيِّر العشوائي الطبيعي معلومًا، في حين تكون قيمة الوسط الحسابي، أو الانحراف المعياري، أو قيمة الوسط الحسابي والانحراف المعياري غير معلومة. في هذه الحالة، أستعمل قِيَم الاحتمالات المعلومة لتحديد قيمة الوسط الحسابي، أو الانحراف المعياري للتوزيع الطبيعي.

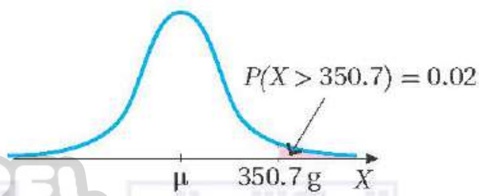
### مثال 7 : من الحياة

**زراعة: يُمثِّل $X \sim N(\mu, 25)$ المُتغيِّر العشوائي الطبيعي لكتل حبّات البطاطا العضوية (بالغرام) التي تُنتِجها إحدى المَزارع. إذا زادت كتلة 2% فقط منها على 350.7 g، فأجد الوسط الحسابي لكتل حبّات البطاطا.**

**معلومة**

تُزرَع المُنتَجات العضوية من دون استخدام أيّ مبيدات، أو أسمدة كيميائية، وهي غير مُعدَّلة وراثيًّا.

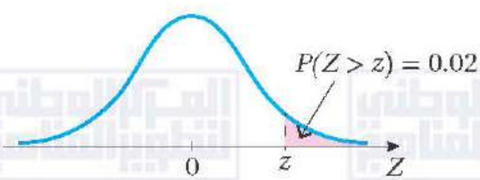
**الخطوة 1:** أرسم شكلًا توضيحيًّا للمعلومات المعطاة في المسألة.




**الخطوة 2:** أجد قيمة $z$ التي تُحقِّق الاحتمال.

أُلاحِظ أنَّ الاحتمال المعطى يُمثِّل المساحة التي تقع يمين القيمة $x$ أسفل منحنى التوزيع الطبيعي. وبما أنَّ قيمة الاحتمال أقل من 0.5، فإنَّ القيمة المعيارية المرتبطة بقيمة $x$ هي $z$ (قيمة موجبة).

يُمثِّل الاحتمال المساحة التي تقع يمين القيمة $z$ أسفل منحنى التوزيع الطبيعي المعياري كما في الشكل المجاور.




لإيجاد قيمة $z$، أستعين بخصائص التوزيع الطبيعي:

$$P(Z > z) = 1 - P(Z < z)$$ باستعمال الخصائص

$$0.02 = 1 - P(Z < z)$$ بتعويض $P(Z > z) = 0.02$

$$P(Z < z) = 0.98$$ بحلِّ المعادلة لـ $P(Z < z)$

بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي المعياري، أجد أنَّ القيمة الدقيقة للاحتمال 0.9800 غير موجودة؛ لذا أختار أقرب قيمة أقل منها، وهي 0.9798

ومن ثَمَّ، فإنَّ قيمة $z$ التي تُقابِل الاحتمال هي 2.05

**الخطوة 3:** أجد الوسط الحسابي.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$ صيغة قِيَم $z$

$$2.05 = \frac{350.7 - \mu}{5}$$ بتعويض $x = 350.7, \sigma = 5, z = 2.17$

$$\mu = 340.45$$ بحلِّ المعادلة لـ $\mu$

إذن، الوسط الحسابي لكتل حبّات البطاطا هو 340.45 g

**أتذكَّر**

لإيجاد قيمة $z$ التي تُقابِل احتمالًا مُعيَّنًا قيمته الدقيقة غير موجودة في الجدول، أستعمل أقرب قيمة أقل من الاحتمال المطلوب.

**أتذكَّر**

بما أنَّ التباين هو 25، فإنَّ الانحراف المعياري هو 5

### أتحقّق من فهمي

يُمثِّل $X \sim N(4.5, \sigma^2)$ المُتغيِّر العشــوائي الطبيعي لكتل أكياس السُّــكَّر (بالكيلوغرام) التي يُنتِجها أحد المصانــع. إذا زادت كتلة %3 فقط منها على 4.8 kg، فأجد الانحراف المعياري لكتل أكياس السُّكَّر.

### أتدرّب وأحُلُّ المسائل

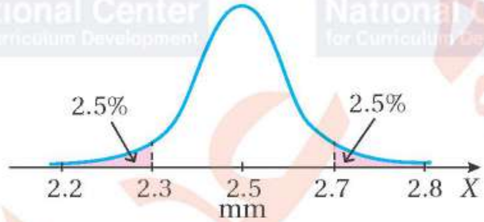
إذا اتخذ التمثيل البياني لكتل الطلبة في إحدى المحافظات منحنًى طبيعيًّا، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1. النسبة المئوية للطلبة الذين تزيد كتلهم على الوسط الحسابي.
2. النسبة المئوية للطلبة الذين تقل كتلهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحراف معياري واحد.
3. النسبة المئوية للطلبة الذين تزيد كتلهم على الوسط الحسابي بمقدار لا يقل عن انحرافين معياريين.
4. النسبة المئوية للطلبة الذين تقل كتلهم عن الوســط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين، أو تزيد عليه بمقدار لا يزيد على ثلاثة انحرافات معيارية.

إذا كان: $X \sim N(50, 4^2)$، فأجد كُلًّا من الاحتمالات الآتية باستعمال القاعدة التجريبية:

5. $P(X < 50)$
6. $P(46 < X < 54)$
7. $P(42 < X < 62)$

صناعة: يُمكِن نمذجة أطوال أقطار مســامير يُنتِجها مصنع بمنحنى التوزيع الطبيعي المُبيَّن في الشكل المجاور:




8. أجد الوسط الحســابي والانحراف المعياري لأطوال أقطار المسامير.
9. أجد النسبة المئوية للمسامير التي يزيد طول قُطْر كلٍّ منها على الوسط الحسابي بما لا يزيد على انحرافين معياريين.
10. أفاعٍ: يــدلُّ المُتغيِّر العشــوائي $X \sim N(100, \sigma^2)$ علــى أطوال الأفاعي (بالســنتيمتر) في أحد مجتمعاتها. إذا كانت أطوال %68 منها تتراوح بين 93 cm و 107 cm، فأجد $\sigma^2$.

أجد كُلًّا ممّا يأتي، مُستعمِلًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

11 $P(Z < 0.43)$

12 $P(Z > 1.08)$

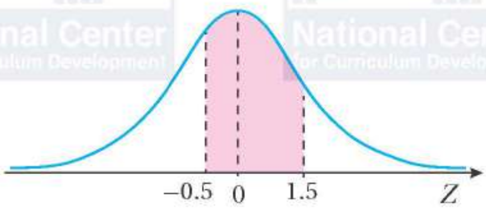
13 $P(Z < -2.03)$

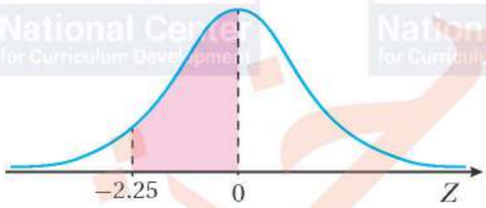
14 $P(Z > 2.2)$

15 $P(-0.72 < Z < 0.72)$

16 $P(1.5 < Z < 2.5)$

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة أسفل منحنى التوزيع الطبيعي المعياري في كلٍّ ممّا يأتي:

17



18



أجد القيمة المعيارية $z$ التي تُحقِّق كل احتمال ممّا يأتي:

19 $P(Z < z) = 0.7642$

20 $P(Z > z) = 0.372$

21 $P(Z > z) = 0.8531$

إذا كان: $X \sim N(-3, 25)$، فأجد كل احتمال ممّا يأتي، مُستعمِلًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

22 $P(X < 2)$

23 $P(X > 4.5)$

24 $P(-5 < X < -3)$

إذا كان $X$ مُتغيِّرًا عشوائيًّا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 30، وانحرافه المعياري 10، فأجد قيمة $x$ التي تُحقِّق الاحتمال المعطى في كلٍّ ممّا يأتي:

25 $P(X < x) = 0.99$

26 $P(X > x) = 0.1949$

27 $P(X < x) = 0.35$

28 $P(X > x) = 0.05$

رياضة: تتبع أطوال لاعبي كرة السلَّة توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 185 cm، وانحرافه المعياري 5 cm. إذا اختير لاعب عشوائيًّا، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

29 احتمال أنْ يزيد طول اللاعب على 175 cm

30 احتمال أنْ يتراوح طول اللاعب بين 180 cm و 190 cm

31 العدد التقريبي للاعبين الذين تزيد أطوالهم على 195 cm من بين 2000 لاعب.

32 في دراسة عن أشجار الكينا في إحدى الغابات، تبيّن أنَّ الوسط الحسابي لأطوال هذه الأشجار هو 6 m، وأنَّ الانحراف المعياري هو 2 m. إذا كانت أطوال الأشجار تتبع توزيعًا طبيعيًّا، فأجد احتمال أنْ يكون طول شجرة اختيرت عشوائيًّا أكثر من 9 أمتار.


**تعبئة: يُعبِّئ مصنع حبوب القهوة في أوعية من الكرتون. إذا كانت كتل الأوعية تتبع توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 232 g، وانحرافه المعياري 5 g، وكان المُتغيِّر العشوائي $X$ يدلُّ على كتلة الوعاء المختار عشوائيًّا، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:**

33 $P(X < 224)$.

34 قيمة $x$، حيث: $P(232 < X < x) = 0.2$.

35 صناعة: يُمثِّل $X\sim N(\mu, 169)$ المُتغيِّر العشوائي الطبيعي لطول قُطْر كلٍّ من إطارات درّاجات هوائية (بالملّيمتر) يُنتِجها أحد المصانع. إذا زاد طول قُطْر 11% منها على 47 cm، فأجد الوسط الحسابي لأطوال أقطار الإطارات التي يُنتِجها المصنع.

36 اختبارات: تتبع العلامات في أحد الاختبارات توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 43. إذا كان $X$ هو المُتغيِّر العشوائي للعلامات، فأجد قيمة الانحراف المعياري، علمًا بأنَّ احتمال ظهور علامة أعلى من 48 هو 0.2

37 إذا كان: $X\sim N(\mu, \mu^2)$، وكانت قيمة $z$ المعيارية المُقابِلة لقيمة $x = 1$ هي $z = 2$، فأجد قيمة $\mu$.

38 إذا كان: $X\sim N(\mu, \sigma^2)$ يُمثِّل توزيعًا طبيعيًّا، وكانت قيمة $z$ المعيارية المُقابِلة لقيمة $x = 10$ هي $z = 1$، وكانت قيمة $z$ المُقابِلة لقيمة $x = 4$ هي $-2$، فأجد قيمة كلٍّ من $\mu$، و $\sigma$.

39 في دراسة لإدارة السير، تبيَّن أنَّ سرعة السيّارات على أحد الطرق تتبع توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 90 km/h، وانحرافه المعياري 5 km/h. إذا كانت السرعة القصوى المُحدَّدة على هذا الطريق هي 100 km/h، وكان العدد الكلي للسيّارات التي تسير على هذا الطريق في أحد الأيام هو 1000 سيّارة، فأجد العدد التقريبي للسيّارات التي ستتجاوز السرعة المُحدَّدة على الطريق في هذا اليوم.

40 يُمكِن نمذجة كتل البيض في إحدى المَزارع بتوزيع طبيعي، وسطه الحسابي 60 g، وانحرافه المعياري 4 g. أجد عدد البيض صغير الحجم من بين 5000 بيضة في المزرعة، علمًا بأنَّ كتلة البيضة الصغيرة لا تزيد على 55 غرامًا.

## مهارات التفكير العليا

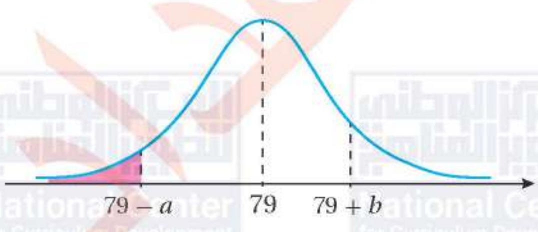
41 **أكتشف الخطأ:** قالت عبير: "إذا كان: $X \sim N(6.4, 0.09)$، فإنَّ 95% من البيانات تقع بين 6.22 و6.58". أكتشف الخطأ في قول عبير، ثم أُصحِّحه.

42 **تبرير:** إذا كان: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $P(X < 15) = 0.1469$, $P(X > 35) = 0.025$، فأجد قيمة كلٍّ من $\mu$، و $\sigma$، مُبرِّرًا إجابتي.

43 **تبرير:** تقدَّم 100000 طالب لاختبار دولي، وبلغ عدد الطلبة الذين زادت علاماتهم في الاختبار على 90% نحو 10000 طالب، منهم 5000 طالب أحرزوا علامات أكثر من 95%. إذا كانت علامات الطلبة المُتقدِّمين تتبع توزيعًا طبيعيًّا، فأجد الوسط الحسابي، والانحراف المعياري للعلامات.

44 **تحدٍّ:** أجرت باحثة تفاعلًا كيميائيًّا بصورة مُتكرِّرة، فوجدت أنَّ الزمن اللازم لحدوث التفاعل يتبع توزيعًا طبيعيًّا، وأنَّ 5% من التجارب يَلزمها أكثر من 13 دقيقة لحدوث التفاعل، وأنَّ 12% منها تتطلَّب أقل من 10 دقائق لحدوث التفاعل. أُقدِّر الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لزمن التفاعل.

**تبرير:** يُبيِّن الشكل المجاور منحنى التوزيع الطبيعي للمُتغيِّر العشوائي $X$ الذي وسطه الحسابي 79، وتباينه 144.




إذا كان: $P(79 - a \leq X \leq 79 + b) = 0.6463$،

وكان: $P(X \geq 79 + b) = 2P(X \leq 79 - a)$،

فأجد كُلًّا ممّا يأتي، مبررًا إجابتي:

45 مساحة المنطقة المُظلَّلة.

46 قيمة الثابت $b$.

**أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:**

1 إذا كان: $X \sim Geo(0.1)$، فإنَّ $P(X=1)$ يساوي:

a) 0.1 b) 0.9

c) 0.5 d) 0

2 إذا كان: $X \sim B(5, 0.1)$، فإنَّ $P(X=6)$ يساوي:

a) $(0.1)^6$ b) 0

c) $\binom{6}{5}(0.1)^6(0.9)^{-1}$ d) $\binom{6}{5}(0.1)^5(0.9)^1$

3 المســاحة التي تقع يســار القيمة: $z=-1.73$ أسفل منحنى التوزيع الطبيعي المعياري تساوي (بالوحدات المربعة):

a) 0.4582 b) 0.5280

c) 0.0418 d) 0.9582

4 إذا كان $Z$ مُتغيِّرًا عشــوائيًّا طبيعيًّــا معياريًّــا، فــإنَّ $P(-2.3 < Z < 0.14)$ يساوي:

a) 0.4449 b) 0.545

c) 0.6449 d) 0.8449

5 النسبة المئوية لمساحة المنطقة المحصورة بين $\mu - 3\sigma$ و $\mu + 3\sigma$ أسفل منحنى التوزيع الطبيعي هي:

a) 68% b) 95%

c) 99.7% d) 89.7%

6 إذا كان هطل الأمطار الســنوي فــي إحدى المدن يتبع توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 1000 mm، وانحرافه المعيــاري 200 mm، فــإنَّ احتمــال أنْ يكون هطل الأمطار السنوي أكثر 1200 mm هو تقريبًا:

a) 0.34 b) 0.16

c) 0.75 d) 0.85

**إذا كان: $X \sim Geo(0.3)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:**

7 $P(X=4)$

8 $P(3 < X \le 5)$

9 $P(X > 4)$

10 $P(5 \le X \le 7)$

**إذا كان: $X \sim B(10, 0.4)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:**

11 $P(X=3)$

12 $P(X > 2)$

13 $P(7 \le X < 9)$

14 $P(X \le 9)$

**إذا كان: $X \sim N(4, 9)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:**

15 $P(X > 8.5)$

16 $P(-2 < X < 7)$

17 $P(X < 10)$

18 $P(5.5 < X < 8.5)$

19 $P(X < 1)$

20 $P(X > -3)$

21 تبيَّن في مصنع للمصابيح الكهربائية أنَّ احتمال أنْ يكون أيُّ مصباح من إنتاج المصنع تالفًا هو 0.17. إذا اختير 100 مصباح عشــوائيًّا من إنتــاج المصنع، فأجد العدد المُتوقَّع من المصابيح التالفة.

22 تفيد إحصائيات أصدرتها إحدى الجامعات بأنَّ 20% فقط من طلبة الجامعة يمارسون التمرينات الرياضية الصباحية بشكل منتظم. أرادت إدارة الجامعة تحفيز الطلبة على ممارسة هذه التمرينات، فبدأت إجراء مقابلات عشوائية مع الطلبة لتعرُّف إذا كانوا يمارسون هذه التمرينات بانتظام أم لا. أجد عدد الطلبة المُتوقَّع مقابلتهم قبل مصادفة أوَّل طالب يمارس التمرينات الرياضية الصباحية بشكل منتظم.

**أجد القيمة المعيارية $z$ التي تُحقِّق كل احتمال ممّا يأتي:**

23 $P(Z > z) = 0.1$

24 $P(Z < z) = 0.9671$

25 $P(-z < Z < z) = 0.9464$

26 $P(Z > z) = 0.9222$

**توصَّلت دراسة إلى أنَّ أطوال الرجال حول العالَم تتبع توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 171 cm، وانحرافه المعياري 10 cm. إذا اختير رجل عشوائيًّا، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:**

27 احتمال أنْ يزيد طول الرجل على 181 cm.

28 احتمال أنْ يكون طول الرجل أقل من الوسط الحسابي للأطوال بأكثر من انحرافين معياريين.

29 احتمال أنْ يزيد طول الرجل على الوسط الحسابي للأطوال بأكثر من انحراف معياري.

30 احتمال ألّا يزيد الفرق بين طول الرجل والوسط الحسابي للأطوال على انحراف معياري واحد.

31 يُعبَّأ إنتاج مزرعة من التفّاح في صناديق، ثم تقاس كتلتها بحسب المواصفات المطلوبة. وقد تبيَّن أنَّ 1578 صندوقًا من أصل 10000 صندوق تزيد كتلة كلٍّ منها على 6 kg.

إذا كانت كتل الصناديق تتبع توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 5 kg، فأجد الانحراف المعياري لهذه الكتل.

32 إذا كان $X$ مُتغيِّرًا عشوائيًّا ذا حدَّين، وكان: $E(X) = 2.5, \mathrm{Var}(X) = 1.875$، فأجد $P(X \geq 8)$.

**أَعَدَّ أحد مصانع السيّارات الحديثة دراسة عن الزمن الذي يستغرقه الفنيون في اكتشاف عطل السيّارة الواحدة. وقد انتهت الدراسة إلى أنَّه يتعيَّن على الفني تشغيل السيّارة في كل مَرَّة يحاول فيها إيجاد العطل، وأنَّه يستطيع تشغيل السيّارة بعد دقيقتين من تشغيله إيّاها في المَرَّة السابقة. إذا أمكن نمذجة الزمن الذي يَلزم الفنيين إلى حين إيجاد العطل بمُتغيِّر طبيعي، وسطه الحسابي 10 دقائق، وانحرافه المعياري 5 دقائق، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:**

33 احتمال أنْ يضطر الفني إلى تشغيل السيّارة أكثر من 6 مَرّات حتى يتمكَّن من تحديد العطل.

34 احتمال أنْ يتمكَّن الفني من تحديد العطل بعد تشغيل السيّارة للمَرَّة الخامسة، وقبل تشغيلها مَرَّة سادسة.

35 احتمال ألّا يتمكَّن الفني من تحديد العطل خلال ثلث ساعة من الفحص.

# ملحقات

## الجبر

### العمليات الحسابية

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd} \qquad a(b+c)=ab+ac$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc} \qquad \frac{a+c}{b}=\frac{a}{b}+\frac{c}{b}$$

### الأسس والجذور

$$\frac{x^m}{x^n}=x^{m-n} \qquad x^m x^n = x^{m+n}$$

$$x^{-n}=\frac{1}{x^n} \qquad (x^m)^n = x^{mn}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n=\frac{x^n}{y^n} \qquad (xy)^n = x^n y^n$$

$$x^{m/n}=\sqrt[n]{x^m}=(\sqrt[n]{x})^m \qquad x^{1/n}=\sqrt[n]{x}$$

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \qquad \sqrt[n]{xy}=\sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$$

### حالات خاصة من تحليل كثيرات الحدود

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$$

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

### القانون العام

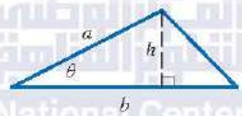
إذا كان: $ax^2+bx+c=0$، فإنّ:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

## الهندسة

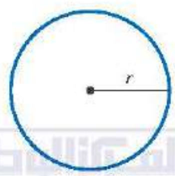
### صيغ هندسية (المساحة $A$، والمحيط $C$، والحجم $V$)

- المثلث:



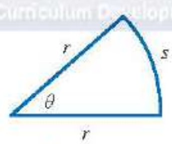

$$A=\frac{1}{2}bh$$
$$=\frac{1}{2}ab\sin\theta$$

- الدائرة:




$$A=\pi r^2$$
$$C=2\pi r$$

- القطاع الدائري:

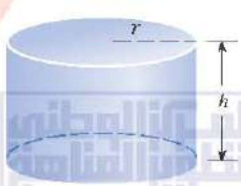



$$A=\frac{1}{2}r^2\theta$$
$$s=r\theta \ \ (\theta \text{ radian})$$

- الكرة:

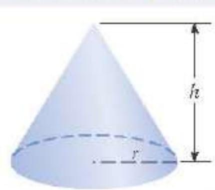

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$
$$A=4\pi r^2$$

- الأسطوانة:




$$V=\pi r^2 h$$
$$A=2\pi rh+2\pi r^2$$

- المخروط:




$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$
$$A=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$$

## الهندسة الإحداثية

### المسافة بين نقطتين ونقطة المنتصف

- المسافة بين النقطتين $P_1\,(x_1, y_1)$ و $P_2\,(x_2, y_2)$ هي:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

- إحداثيا نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{P_1\,P_2}$ هما:

$$M:\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

### المستقيم

- ميل المستقيم المارِّ بالنقطتين $P_1\,(x_1, y_1)$ و $P_2\,(x_2, y_2)$ هو:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

- معادلة المستقيم المارِّ بالنقطة $P_1\,(x_1, y_1)$، وميله $m$ هي:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

- إذا كان $l$ مستقيمًا في المستوى الإحداثي، وكانت $\theta$ الزاوية التي يصنعها المستقيم مع المحور $x$ الموجب، فإنَّ ميل المستقيم $m$ يعطى بالمعادلة: $m = \tan\theta$، حيث: $0 < \theta < \pi$.

### البُعْد بين نقطة ومستقيم

البُعْد بين المستقيم $l$ الذي معادلته: $Ax + By + C = 0$ والنقطة $P(x_1, y_1)$ يعطى بالصيغة الآتية:

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

شرط ألّا تكون قيمتا $A$ و $B$ معًا صفرًا.

### الدائرة

معادلة الدائرة التي مركزها $(h, k)$، ونصف قُطْرها $r$ هي:

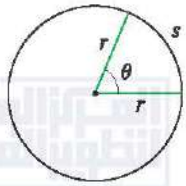
$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

## المثلثات

### قياسات الزوايا

$$\pi = 180^\circ \qquad 1^\circ = \frac{\pi}{180}\text{ rad}$$

$$1\text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi}$$




### الاقترانات المثلثية في المثلث القائم الزاوية


$$\sin\theta=\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \qquad \csc\theta=\frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$$

$$\cos\theta=\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \qquad \sec\theta=\frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$$

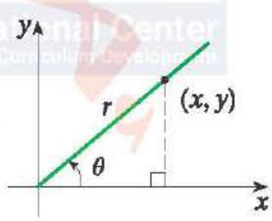
$$\tan\theta=\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} \qquad \cot\theta=\frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$$

### الاقترانات المثلثية لأيِّ زاوية

$$\sin\theta=\frac{y}{r} \qquad \csc\theta=\frac{r}{y}$$

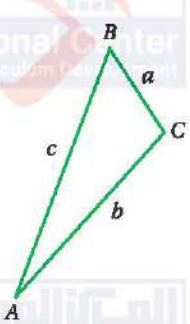
$$\cos\theta=\frac{x}{r} \qquad \sec\theta=\frac{r}{x}$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x} \qquad \cot\theta=\frac{x}{y}$$




### قانون الجيوب

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$




### قانون جيوب التمام

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

## المتطابقات المثلثية الأساسية

- متطابقات المقلوب:

$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

- المتطابقات النسبية:

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

- متطابقات فيثاغورس:

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

- متطابقات الزاويتين المتتامتين:

$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta$ $\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cot\theta$

$\sec(\frac{\pi}{2} - \theta) = \csc\theta$ $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta$

$\cot(\frac{\pi}{2} - \theta) = \tan\theta$ $\csc(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sec\theta$

- متطابقات الزاوية السالبة:

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ $\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

## المتطابقات المثلثية للمجموع والفرق

$\sin(x + y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$

$\sin(x - y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$

$\cos(x + y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$

$\cos(x - y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$

$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}$

$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x\tan y}$

## المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$

## المتطابقات المثلثية لتقليص القوّة

$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$ $\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$

$\tan^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$

## قِيَم بعض الاقترانات المثلثية للزوايا الخاصة

| $\theta°$ | $0°$ | $30°$ | $45°$ | $60°$ | $90°$ | $180°$ | $270°$ | $360°$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\theta$ rad | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
| $\sin\theta$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 | $-1$ | 0 |
| $\cos\theta$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-1$ | 0 | 1 |
| $\tan\theta$ | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | – | 0 | – | 0 |

### المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \qquad \cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

### متطابقات تحويل الضرب إلى مجموع أو فرق

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x-y) + \sin(x+y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$$

$$\cos x \sin y = -\frac{1}{2}[\sin(x-y) - \sin(x+y)]$$

## الاقترانات الأُسِّية واللوغاريتمية

### العلاقة بين الصورة الأُسِّية والصورة اللوغاريتمية

إذا كان $x > 0$ و $b > 0, b \neq 1$، فإنَّ:

| الصورة اللوغاريتمية | | الصورة الأُسِّية |
|---|---|---|
| $\log_b x = y$ | إذا وفقط إذا | $b^y = x$ |
| الأساس: $b$، الأُس: $y$ | | الأساس: $b$، الأُس: $y$ |

### الخصائص الأساسية للوغاريتمات

إذا كان $x > 0$ و $b > 0, b \neq 1$، فإنَّ:

- $\log_b 1 = 0$ $\quad b^0 = 1$
- $\log_b b = 1$ $\quad b^1 = b$
- $\log_b b^x = x$ $\quad b^x = b^x$
- $b^{\log_b x} = x,\ x > 0$ $\quad \log_b x = \log_b x$

### قوانين اللوغاريتمات

إذا كانت $b, x, y$ أعدادًا حقيقيةً موجبةً، وكان $p$ عددًا حقيقيًّا، حيث: $b \neq 1$، فإنَّ:

- قانون الضرب: $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$
- قانون القسمة: $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$
- قانون القوَّة: $\log_b x^p = p \log_b x$

## التفاضل

### قواعد أساسية للاشتقاق

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(cf(x)) = cf'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x) - g(x)) = f'(x) - g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)\,g(x)) = f(x)\,g'(x) + g(x)\,f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))\,g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\,f'(x) - f(x)\,g'(x)}{(g(x))^2}$$

### مشتقات الاقترانات الأُسِّية والاقترانات اللوغاريتمية

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \qquad \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x},\ x > 0$$

$$\frac{d}{dx}(b^x) = b^x \ln b \qquad \frac{d}{dx}(\log_b x) = \frac{1}{x \ln b}$$

### مشتقات الاقترانات المثلثية

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

## التكامل

### قواعد أساسية للتكامل

$$\int k\, dx = kx + C$$

$$\int x^n\, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$$

$$\int e^x\, dx = e^x + C$$

$$\int b^x\, dx = \frac{b^x}{\ln b} + C$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln |f(x)| + C, f(x) \neq 0$$

### خصائص التكامل غير المحدود

$$\int k f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$$

$$\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$$

### خصائص التكامل المحدود

$$\int_a^b k f(x)\, dx = k \int_b^a f(x)\, dx$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx$$

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

## المتجهات

إذا كان $\vec{\mathbf{v}} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle, \vec{\mathbf{w}} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ متجهين في الفضاء، وكان $c$ عددًا حقيقيًّا، فإنَّ:

### العمليات على المتجهات

$$\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}} = \langle (v_1 + w_1), (v_2 + w_2), (v_3 + w_3) \rangle$$

$$\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{w}} = \langle (v_1 - w_1), (v_2 - w_2), (v_3 - w_3) \rangle$$

$$c\vec{\mathbf{v}} = \langle cv_1, cv_2, cv_3 \rangle$$

### الضرب القياسي في الفضاء

$$\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

### قياس الزاوية بين متجهين في الفضاء

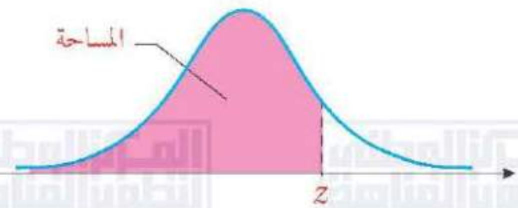
إذا كان $\vec{\mathbf{v}}$ و $\vec{\mathbf{w}}$ متجهين غير صفريين، فإنَّه يُمكِن إيجاد الزاوية بينهما باستعمال الصيغة الآتية:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}}}{|\vec{\mathbf{v}}|\,|\vec{\mathbf{w}}|}\right)$$

## رموز رياضية

| | |
|---|---|
| المستقيم المارُّ بالنقطتين $A$ و $B$ | $\overleftrightarrow{AB}$ |
| القطعة المستقيمة التي نقطتا نهايتيها $A$ و $B$ | $\overline{AB}$ |
| الشعاع الذي نقطة بدايته $A$، ويمرُّ بالنقطة $B$ | $\overrightarrow{AB}$ |
| طول القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ | $AB$ |
| متجه نقطة بدايته $A$، ونقطة نهايته $B$ | $\overrightarrow{AB}$ |
| المتجه $v$ | $\vec{\mathbf{v}}$ |
| مقدار المتجه $v$ | $\|\vec{\mathbf{v}}\|$ |
| الزاوية $A$ | $\angle A$ |
| زاوية ضلعاها $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ | $\angle ABC$ |
| قياس الزاوية $A$ | $m\angle A$ |
| المثلث $ABC$ | $\Delta ABC$ |
| موازٍ لـ | $\parallel$ |
| عمودي على | $\perp$ |
| نسبة $a$ إلى $b$ | $a:b$ |
| تكامل غير محدود | $\int$ |
| تكامل محدود | $\int_a^b$ |
| مشتقة الاقتران $f(x)$ | $f'(x)$ |

| | |
|---|---|
| سعة العدد المركب | arg |
| السعة الرئيسة للعدد المركب | Arg |
| دينار أردني | JD |
| متر | m |
| كيلومتر | km |
| سنتيمتر | cm |
| كيلوغرام | kg |
| غرام | g |
| ثانية | s |
| دقيقة | min |
| ساعة | h |
| إنش | in |
| قدم | ft |
| توافيق $n$ من العناصر أُخِذ منها $r$ كل مَرَّة | $\binom{n}{r}$ <br> ${}_nC_r$ |
| احتمال الحادث $A$ | $P(A)$ |
| احتمال مُتمِّمة الحادث $A$ | $P(\overline{A})$ |
| الوسط الحسابي | $\mu$ |
| الانحراف المعياري | $\sigma$ |
| التباين | $\sigma^2$ |




## جدول التوزيع الطبيعي المعياري

| z | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0.0** | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| **0.1** | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| **0.2** | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| **0.3** | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| **0.4** | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| **0.5** | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| **0.6** | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| **0.7** | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| **0.8** | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| **0.9** | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| **1.0** | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| **1.1** | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| **1.2** | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| **1.3** | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| **1.4** | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| **1.5** | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| **1.6** | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| **1.7** | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| **1.8** | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| **1.9** | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| **2.0** | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| **2.1** | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| **2.2** | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| **2.3** | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| **2.4** | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| **2.5** | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| **2.6** | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| **2.7** | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| **2.8** | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| **2.9** | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| **3.0** | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| **3.1** | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| **3.2** | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| **3.3** | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| **3.4** | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |