مراجعة عامة

الجبر:

❖ العمليات الحسابية

$$a(b+c)=ab+ac$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{a+c}{b}=\frac{a}{b}+\frac{c}{b}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$$

❖ الأسس والجذور

$$x^m x^n=x^{m+n} \quad , \quad \frac{x^m}{x^n}=x^{m-n}$$

$$\left(x^m\right)^n=x^{mn} \quad , \quad x^{-n}=\frac{1}{x^n}$$

$$(xy)^n=x^n y^n \quad , \quad \left(\frac{x}{x}\right)^n=\frac{x^n}{y^n}$$

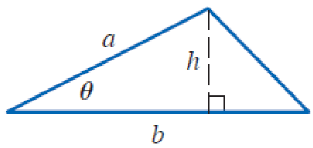
$$x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x} \quad , \quad x^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{x^m}=\left(\sqrt[n]{x}\right)^m$$

$$\sqrt[n]{xy}=\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y} \quad , \quad \sqrt[n]{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

الهندسة

صيغ هندسية (المساحة A ، المحيط C ، الحجم V)

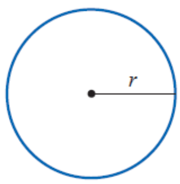
❖ المثلث



$$A=\frac{1}{2}bh$$

$$=\frac{1}{2}ab\sin\theta$$

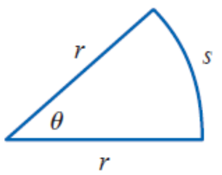
❖ الدائرة



$$A=\pi r^2$$

$$C=2\pi r$$

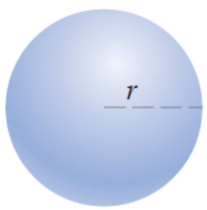
❖ القطاع الدائري



$$A=\frac{1}{2}r^2\theta$$

$$s=r\theta(\theta \text{ radian})$$

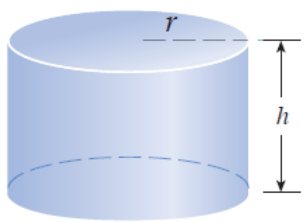
❖ الكرة



$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$A=4\pi r^2$$

❖ الاسطوانة



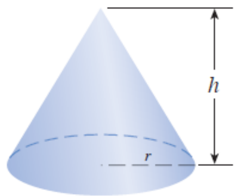
$$V=\pi r^3 h$$

$$A=2\pi rh+2\pi r^2$$

❖ المخروط

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$A=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$$



التحليل إلى العوامل:

(1) العامل المشترك:

$$x^2-7x=x(x-7)$$

$$2x^2-8x=2x(x-4)$$

$$15x^2+5x^3=5x^2(3+x)$$

(2) الفرق بين مربعين:

$$b^2-a^2=(b-a)(b+a)$$

$$x^2-9=(x-3)(x+3)$$

$$4x^2-9=(2x-3)(2x+3)$$

(3) مجموع مكعبين:

$$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ba+b^2\right)$$

$$x^3+125=(x+5)\left(x^2-5x+25\right)$$

$$8x^3+1=(2x+1)\left(4x^2-2x+1\right)$$

(4) فرق مكعبين:

$$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ba+b^2\right)$$

$$x^3-8=(x-2)\left(x^2+2x+4\right)$$

$$x^3-1=(x-1)\left(x^2+x+1\right)$$

$$8x^3-27=(2x-3)\left(4x^2+6x+9\right)$$

(5) تحليل العبارة التربيعية:

1) $x^2+7x+6=(x+6)(x+1)$

2) $x^2+5x+6=(x+3)(x+2)$

3) $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$

4) $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$

5) $2x^2-9x-5=x^2-9x-10$

$$=\left(x-\frac{10}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$=(x-5)(2x+1)$$

6) $20x^2-3x-2=x^2-3x-40$

$$=\left(x-\frac{8}{5\times4}\right)\left(x-\frac{5}{4\times5}\right)$$

$$=(5x-2)(4x+1)$$

7) $6x^2-5x+1=x^2-5x+6$

$$=\left(x-\frac{2}{2\times3}\right)\left(x-\frac{3}{2\times3}\right)$$

$$=(3x-1)(2x-1)$$

تدريب: حلل ما يلي:

1) $3x^2+16x-12$

2) $5x^2-11x+2$

3) $2x^2+5x-7$

4) $3x^2-8x+5$

حل المعادلات:

مـثـال: حل المعادلات التالية:

1) $2x-8=0$

$$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}=\frac{8}{2}\Rightarrow x=4$$

2) $2x+5=9$

$$2x=9-5\Rightarrow\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}=\frac{4}{2}\Rightarrow x=2$$

3) $3x-8=7x+1$

$$3x-7x=8+1$$

$$-4x=9\Rightarrow x=\frac{-9}{4}$$

4) $\frac{4}{3}x+5=9$

$$\frac{4}{3}x=4\Rightarrow\frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}}=\frac{12}{4}\Rightarrow x=3$$

5) $x^2-25=0$

$$x^2=25\Rightarrow x=5,-5$$

6) $x^2+6x=0$

$$x(x+6)=0\Rightarrow x=0,-6$$

7) $x^2+4x-12=0$

$$(x+6)(x-2)=0\Rightarrow x=-6,2$$

8) $(x-2)^2-16=0$

$$(x-2+4)(x-2-4)=0$$

$$(x+2)(x-6)=0\Rightarrow x=-2,6$$

9) $x^2+5x-7=0$

$$\Delta=b^2-4ac=25-4\times1\times-7=53$$

القانون العام $=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{53}}{2\times1}$$

10) $x^2+9x+14=0$

$$=b^2-4ac=81-4\times1\times14=25$$

$$=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-9\pm\sqrt{25}}{2\times 1}$$

$$x=\frac{-9+5}{2} \qquad\qquad x=\frac{-9-5}{2}$$

$$x=-2 \qquad\qquad x=-7$$

11) $\dfrac{2x-6}{x-1}=3$

$$2x-6=3x-3$$

$$-x=3\Rightarrow x=-3$$

12) $\dfrac{x^2+x-2}{x^2+4x-5}=-2$

$$\frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{(x-1)}(x+5)}=-2$$

$$\frac{x+2}{x+5}=-2$$

$$x+2=-2x-10$$

$$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}}=\frac{-12}{3}\Rightarrow x=-4$$

13) $\dfrac{x^3-1}{3x^2+3x+3}=5$

$$\frac{(x-1)\cancel{(x^2+x+1)}}{3\cancel{(x^2+x+1)}}=5$$

$$\frac{x-1}{3}=5\Rightarrow x-1=15\Rightarrow x=16$$

تدريب: حل المعادلات التالية:

1) $\dfrac{x^2+5x}{x+5}=-8$

2) $\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}=4$

درجة ثالثة فأكثر:

نجد الاصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود وهي:

$$\pm\frac{\text{عوامل الحد الثابت}}{\text{عوامل المعامل الرئيسي}}$$

مثال: حل المعادلة التالية:

$$x^3-7x+6=0$$

الحل:

نجد الاصفار النسبية

عوامل الحد الثابت $6 \Leftarrow 1,2,3,6$

عوامل الحد الرئيسي $1 \Leftarrow 1$

الاصفار هي $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$

نجرب $x=1 \Leftarrow 1-7+6=0$ c

$(x=1)$ هو جذر للمعادلة

$(x-1)$ احد العوامل

نستخدم القسمة الطويلة

```
          x²+x-6
      ___________
x-1  |  x³ - 7x +6
       - x³ ∓ x²
      ___________
          x² - 7x + 6
        - x² ∓ x
      ___________
         -6x + 6
         ±6x ∓ 6
      ___________
          0
```

$$x^3-7x+6=0$$

$$(x-1)(x^2+x-6)=0$$

$$(x-1)(x+3)(x-2)=0$$

$$x=1 \quad , \quad x=-3 \quad , \quad x=2$$

تدريب: حل المعادلة:

$$2x^3+2x+3x^2-7=0$$

حل المعادلات بالحذف:

مثال1: أجد حل المعادلات التالية:

$$3x+y=8 \qquad \ldots(1)$$

$$x+2y=1 \qquad \ldots(2)$$

الحل:

اضرب المعادلة (1) في (-2)

$$-6x\cancel{-2y}=-16$$

$$x\cancel{+2y}=1$$

$$-5x=-15 \Rightarrow \boxed{x=3}$$

نعوض في المعادلة (1) $\Leftarrow$ $\boxed{y=-1}$

مثال2: أجد حل المعادلات التالية:

$$2x^2+3y^2=11 \qquad \ldots(1)$$

$$7x^2-2y^2=26 \qquad \ldots(2)$$

الحل:

اضرب المعادلة (1) في 2

اضرب المعادلة (2) في 3

$$4x^2\cancel{+6y^2}=22$$

$$12x^2\cancel{-6y^2}=78$$

$$25x^2=100 \Rightarrow x^2=4$$

$x=2$	$x=-2$
$2(2)^2+3y^2=11$	$2(-2)^2+3y^2=11$
$8+3y^2=11$	$8+3y^2=11$
$y^2=1$	$y^2=1$
$y=1,-1$	$y=1,-1$

مجموعة الحل:

$$(2,1),(-2,1),(2,-1),(-2,-1)$$

مثال3: أجد حل المعادلات التالية:

$$x-y=1 \qquad \ldots(1)$$

$$x^2+y^2=5 \qquad \ldots(2)$$

الحل:

$$x-y=1 \Rightarrow \boxed{x=1+y}$$

نعوض في المعادلة (2)

$$(1+y)^2+y^2=5$$

$$1+2y+y^2+y^2=5$$

$$2y^2+2y+1=5$$

$$2y^2+2y-4=0$$

$$y^2+y-2=0 \Rightarrow (y+2)(y-1)=0$$

$y=1$	$y=-2$
$x=2$	$x=-1$

مثال4: أجد حل المعادلات التالية:

$$y=x^2+4x-3 \qquad \dots(1)$$

$$y=-x^2+2x-3 \qquad \dots(2)$$

الحل:

$$x^2+4x-3=-x^2+2x-3$$

$$2x^2+2x=0 \Rightarrow 2x(x+1)=0$$

$x=-1$	$x=0$
$y=-6$	$y=-3$

اشارة الاقتران:

1) نساوي السؤال بالصفر ونجد قيم x

2) نضعها على خط الاعداد ونقوم بدراسة الاشارة بأخذ عدد في كل منطقة

مثال: ادرس إشارة كل من الاقترانات التالية:

1) $f(x)=3x-6$

$$3x-6=0 \Rightarrow x=2$$

--   2   ++

2) $f(x)=6-2x$

$$6-2x=0 \Rightarrow x=3$$

++   3   --

3) $f(x)=x^2-x-6$

$$x^2-x-6=0$$

$$(x-3)(x+2)=0 \Rightarrow x=3,-2$$

++   -2   --   3   ++

4) $f(x)=4-x^2$

$$4-x^2=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=2,-2$$

++   -2   --   2   ++

5) $f(x)=x^3-3x^2$

$$x^3-3x^2=0$$

$$x^2(x-3)=0 \Rightarrow x=0,3$$

--   0   --   3   ++

6) $f(x)=x^2-4x+4$

$$x^2-4x+4=0$$

$$(x-2)(x-2)=0 \Rightarrow x=2$$

++   2   ++

4) $x^2+5\leq 0$

$x^2+5\neq 0$ لا تحلل

$+++++++++$

$\phi=$ مجموعة الحل

5) $x^3-8\leq 0$

$(x-2)(x^2+2x+4)=0 \Rightarrow x=2$

$--$ | $++$
2

$x\in(-\infty,2]$

6) $\dfrac{x^2-x}{x-6}\geq 0$

البسط: $x^2-x=0$

$x(x-1)=0 \Rightarrow x=0,1$

المقام: $x=6$

البسط: $++$ 0 $--$ 1 $++$

المقام: $----------------$ 6 $++$

$--$ 0 $++$ 1 $--$ 6 $++$

$x\in[0,1]\cup(6,\infty)$

7) $f(x)=-7-x^2$

$-7-x^2=0 \Rightarrow x^2=-7$ لا تحلل

$-----------$

تدريب: ابحث اشارة الاقترانات التالية:

1) $f(x)=2x-8$

2) $f(x)=3-x$

3) $f(x)=x^2-25$

4) $f(x)=x^2+4x+4$

5) $f(x)=x^2+7x+6$

حل المتباينات:

مثال: حل المتباينات التالية:

1) $2-4x>0$

$\dfrac{2}{4}>\dfrac{4x}{4} \Rightarrow \dfrac{1}{2}>x \Rightarrow x\in\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$

2) $2x+11<3x+1$

$x+1>11 \Rightarrow x>10 \Rightarrow x\in(10,\infty)$

3) $x^2-4\geq 0$

$(x-2)(x+2)=0 \Rightarrow x=2,-2$

$++$ ✓ -2 $--$ 2 $++$ ✓

$x\in(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$

تدريب: حل المتباينات التالية:

1) $4-2x\geq 0$

2) $3x-2>6x-4$

3) $x^2-9\leq 0$

4) $x^2+5x+6>0$

5) $x^2+4x+4>0$

6) $x^3-1>0$

7) $\dfrac{x^2-9}{x-2}>0$

اقتران القيمة المطلقة:

شكله: $f(x)=|\ \ |$

عمله: يلغي الاشارة السالبة

مثال: $|7|=7\quad,\quad |-2|=2$

❖ **خواص المطلق:**

1) $|f(x)|=f(x)\quad ,f(x)>0$

2) $|x^n|=x^n\quad ,n$ زوجي

$|x^2|=x^2$

$|x^2+5|=x^2+5$

$|x^4+2|=x^4+2$

3) $\sqrt{x^2}=|x|$

$\sqrt{(x-9)^2}=|x-9|$

$\sqrt{\cos^2 x}=|\cos x|$

4) $|x|=a$

$x=a\quad ,\quad x=-a$

مثال: $|2x+5|=8$

$2x+5=8$	$2x+5=-8$
$2x=3$	$2x=-13$
$x=\dfrac{3}{2}$	$x=\dfrac{-13}{2}$

5) $|x|\leq a\Rightarrow -a\leq x\leq a$

مثال: $|2x-4|\leq 8$

$-8\leq 2x-4\leq 8$

$-4\leq 2x\leq 12$

$-2\leq x\leq 6$

6) $|x|\geq a\Rightarrow x\leq -a\quad ,\quad x\geq a$

مثال: $|2x-8|>6$

$2x-8>6$	$2x-8<-6$
$2x>14$	$2x<2$
$x>7$	$x<1$

تدريب: أجد مجموعة حل ما يلي:

1) $|2x-4|<8$

2) $|3-6x|=8$

3) $|2x-4|>8$

❖ **إعادة تعريف القيمة المطلقة:**

1) نساوي السؤال بالصفر

2) نجد قيم x ونضعها على خط الاعداد

3) نختبر الاشارات على الخط

4) نكون الاقتران المتشعب

مثال: اعد تعريف كل مما يلي:

1) $f(x)=|2x-2|$

$$2x-2=0 \Rightarrow x=1$$

--	1	++

$$f(x)=\begin{cases} 2x-2 & ,x\ge 1 \\ 2-2x & ,x<1 \end{cases}$$

2) $f(x)=|-3x+12|$

$$-3x+12=0 \Rightarrow x=4$$

++	4	--

$$f(x)=\begin{cases} 3x-12 & ,x>4 \\ -3x+12 & ,x\le 4 \end{cases}$$

3) $f(x)=|x^2-x-12|$

$$x^2-x-12=0$$

$$(x-4)(x+3)=0 \Rightarrow x=4,-3$$

++	-3	--	4	++

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x-12 & ,x\le -3 \\ -x^2+x+12 & ,3<x<4 \\ x^2-x-12 & ,x\ge 4 \end{cases}$$

4) $f(x)=|-x^2+9|$

$$-x^2-9=0 \Rightarrow x=3,-3$$

--	-3	++	3	--

$$f(x)=\begin{cases} -9+x^2 & ,x<-3 \\ 9-x^2 & ,-3\le x\le 3 \\ -9+x^2 & ,x>3 \end{cases}$$

5) $f(x)=|4x-x^3|$

$$4x-x^3=0$$

$$x(4-x^2)=0 \Rightarrow x=0,2,-2$$

++	-2	--	0	++	2	--

$$f(x)=\begin{cases} 4x-x^3 & ,x<-2 \\ -4x+x^3 & ,-2\le x\le 0 \\ 4x-x^3 & ,0<x\le 2 \\ -4x+x^3 & ,x\ge 2 \end{cases}$$

تدريب: اعد تعريف كل من الاقترانات التالية:

1) $f(x)=|2x-6|$

2) $f(x)=|2-3x|$

3) $f(x)=|x^2-2x-3|$

4) $f(x)=|x^2-36|$

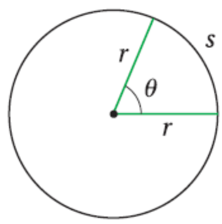
الاقترانات المثلثية:

❖ قياسات الزاوايا

$\pi=180$

$1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{ rad}$

$1\text{ rad}=\frac{180}{\pi}$



❖ الاقترانات المثلثية في المثلث القائم الزاوية

$\sin\theta=\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

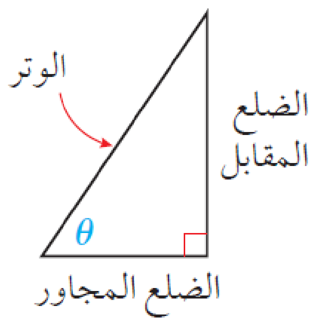
$\cos\theta=\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

$\tan\theta=\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

$\csc\theta=\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

$\sec\theta=\frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$

$\cot\theta=\frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$

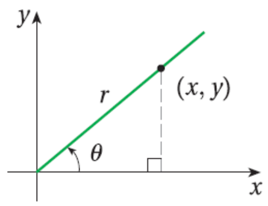


❖ الاقترانات المثلثية لأي زاوية

$\sin\theta=\frac{y}{r}\quad \csc\theta=\frac{r}{y}$

$\cos\theta=\frac{x}{r}\quad \sec\theta=\frac{r}{x}$

$\tan\theta=\frac{y}{x}\quad \cot\theta=\frac{x}{y}$



❖ قانون الجيوب

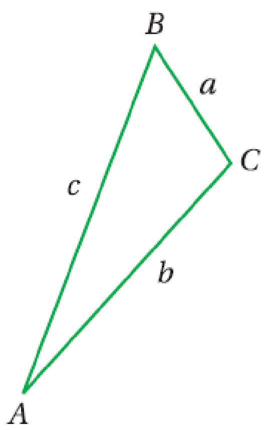
$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$

❖ قانون جيوب التمام

$$a^2=b^2+c^2-2bc(\cos A)$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac(\cos B)$$

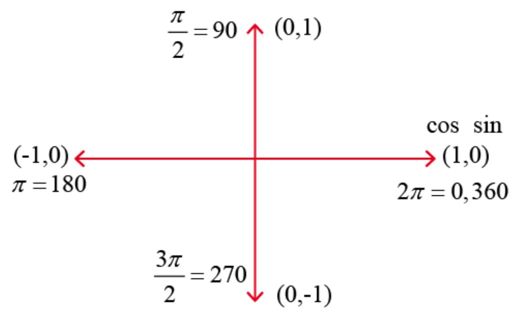
$$c^2=a^2+b^2-2ab(\cos C)$$



الاستاذ: محمد المجذوب
0799333306

الاستاذ: إياد عباد
0799366611

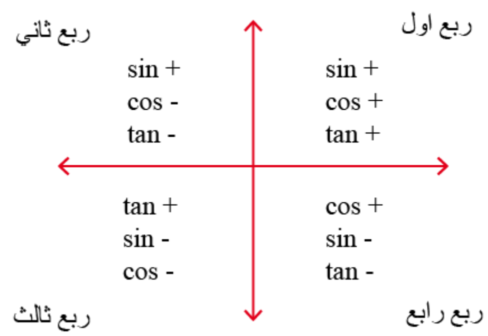
❖ زوايا المحاور



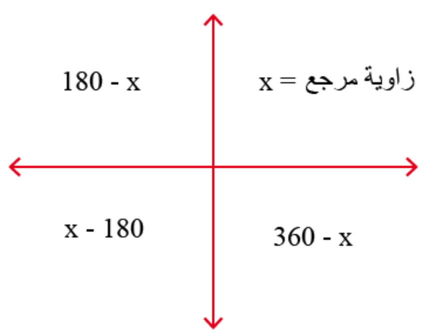
❖ زوايا المرجع

	$\frac{\pi}{6}=30$	$\frac{\pi}{4}=45$	$\frac{\pi}{3}=60$
$\sin x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\tan x$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

❖ اشارات الاقترانات المثلثية في الارباع



❖ قيمة الزاوية في الارباع



لتحويل الزاوية من درجات الى راديان نضرب في $\frac{\pi}{180}$

$$30^\circ = 30\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{6}$$

لتحويل من راديان الى درجات نضرب في $\frac{180}{\pi}$

$$\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}\times\frac{180}{\pi}=45^\circ$$

مثال: اجد قيمة الاقترانات المثلثية التالية:

1) $\sin 300=-\sin 60=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

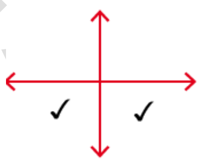
2) $\tan 210=\tan 30=\frac{1}{\sqrt{3}}$

3) $\sin 135=\sin 45=\frac{1}{\sqrt{2}}$

4) $\cos(-60)=\cos 60=\frac{1}{2}$

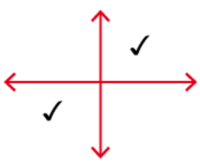
مثال: اجد حل المعادلات المثلثية التالية:

1) $\tan x=1$



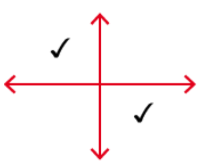
$x=45 \quad , \quad x=225$

2) $\tan x=-1$



$x=135 \quad , \quad x=315$

3) $\cos x=0$

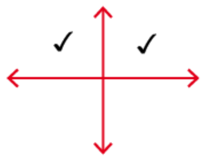


$x=270 \quad , \quad x=90$

الاستاذ: محمد المجذوب
0799333306

الاستاذ: إياد عباد
0799366611

4) $\sin x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$



$x = 45 \quad , \quad x = 135$

5) $\sin 2x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$2x = 240$ | $2x = 300$

$x = 120$ | $x = 150$

6) $\sin x = 0$

$x = \{0, \pi, 2\pi\}$

7) $\sin x = 1$

$x = \dfrac{\pi}{2}$

8) $\sin x = -1$

$x = \dfrac{3\pi}{2}$

9) $\sin x = -\cos x$

$\tan x = -1$

$x = \{135, 315\} \quad or \quad x = \left\{\dfrac{7\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right\}$

10) $2\tan x + 3 = 1$

$2\tan x = -2$

$\tan x = -1 \Rightarrow x = \{135, 315\}$

11) $2\cos x = \sqrt{3}$

$\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \{30, 330\}$

12) $2\cos^2 x - 3\cos x = -1$

$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

$(2\cos x - 1)(\cos x - 1) = 0$

$2\cos x - 1 = 0$ | $\cos x = 1$

$\cos x = \dfrac{1}{2}$ | $x = 0, 360$

$x = 60, 300$

متطابقات هامة (حفظ):

1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

2) $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

3) $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$= 2\cos^2 x - 1$

$= \cos^2 x - \sin^2 x$

4) $\tan 2x = \dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$

5) $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

6) $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

7) $\sin a - \sin b = 2\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$

8) $\cos a - \cos b = -2\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$

20) $\sin(\pi - x) = \sin x$

$\cos(\pi - x) = -\cos x$

❖ متطابقات المقلوب

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}, \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

❖ المتطابقات النسبية

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

❖ متطابقات فيثاغورس

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

❖ متطابقات الزاويتين المتتامتين

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \csc\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\theta$$

$$\csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sec\theta$$

9) $\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

10) $\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

11) $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$

12) $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$

13) $\tan(a \pm b) = \dfrac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$

14) $\cot x = \dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

15) $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

16) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

17) $\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$

18) $\sin(-x) = -\sin x$

$\cos(-x) = \cos x$

$\tan(-x) = -\tan x$

19) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$

$\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$

❖ متطابقات الزاوية السالبة

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta$$

$$\cos(-\theta)=\cos\theta$$

$$\tan(-\theta)=-\tan\theta$$

❖ المتطابقات المثلثية للمجموع والفرق

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$$

$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$$

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$

$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$$

$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$$

$$\tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}$$

❖ المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$$

$$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$$

$$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$$

$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

❖ المتطابقات المثلثية لتقليص القوة

$$\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

$$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

$$\tan^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}$$

❖ المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

$$\sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\tan\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

❖ قيم بعض الاقترانات المثلثية للزاويا الخاصة

θ	θ rad	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$-$
180°	π	0	-1	0
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	$-$
360°	2π	0	1	0

الهندسة الاحداثية

❖ **المسافة بين نقطتين ونقطة المنتصف**

المسافة بين النقطتين $P_2(x_2, y_2), P_1(x_1, y_1)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

احداثيا نقطة منتصف القطة المستقيمة $\overline{P_2P_1}$

$$M : \left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}\right)$$

❖ **المستقيم**

ميل المستقيم المار بالنقطتين $P_2(x_2, y_2), P_1(x_1, y_1)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

معادلة المستقيم المار بالنقطة $P_1(x_1, y_1)$ وميله m

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

اذا كان l مستقيماً في المستوى الاحداثي و θ الزاوية التي يصنعها المستقيم مع المحور x الموجب فإن ميل المستقيم m يعطى بالمعادلة $m = \tan\theta$ حيث $0 < \theta < \pi$

❖ **البعد بين نقطة ومستقيم**

البعد بين المستقيم l الذي معادلته $Ax + By + C = 0$ والنقطة $P_1(x_1, y_1)$ يعطى بالصيغة الآتية:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

شرط ألا تكون قيمتا A و B معاً صفراً

❖ **الدائرة**

معادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ونصف قطرها r هي:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

الاقترانات الاسية واللوغاريتمية

❖ **الخصائص الاساسية للوغاريتمات**

اذا كان $x > 0$ و $b > 0, b \neq 1$ فإن

$$\log_b 1 = 0$$

$$\log_b b = 1$$

$$\log_b b^x = x$$

$$b^{\log_b x} = x, x > 0$$

❖ **قوانين اللوغاريتمات**

اذا كانت b, x, y اعداداً حقيقية موجبة، وكان p عدداً حقيقياً حيث $b \neq 1$ فإن

قانون الضرب $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$

قانون القسمة $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$

قانون القوة $\log_b x^p = p \log_b x$

قواعد الاشتقاق

❖ القواعد الاساسية

$$\frac{d}{dx}(c)=0$$

$$\frac{d}{dx}(cf(x))=cf'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x))=f'(x)+g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)-g(x))=f'(x)-g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x))=f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}f(g(x))=f'(g(x))g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

❖ مشتقات الاقترانات الاسية والاقترانات اللوغاريتمية

$$\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$$

$$\frac{d}{dx}\ln|x|=\frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(b^x)=b^x\ln b$$

$$\frac{d}{dx}(\log_b x)=\frac{1}{x\ln b}$$

❖ مشتقات الاقترانات المثلثية

$$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x)=-\csc x\cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x)=-\csc^2 x$$

ايجاد النهايات:

مثال: أجد قيمة النهايات التالية:

1) $$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}}$$

$$\lim_{x\to 3}x+3=6$$

2) $$\lim_{x\to -2}\frac{3x^2+5x-2}{x^2+2x}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{(3x-1)\cancel{(x+2)}}{x\cancel{(x+2)}}$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{3x-1}{x}=\frac{-6-1}{-2}=\frac{-7}{-2}=\frac{7}{2}$$

تدريب: اجد قيمة النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-2x}$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-6}{1-\sqrt{x-1}}$

4) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{4}}$

الاتصال:

يكون الاقتران متصل اذا حقق الشروط التالية:

1) تكون الصورة موجودة

2) تكون النهاية موجودة

3) تكون النهاية تساوي الصورة

مثـال: بين اذا كانت الاقترانات التالية متصلة عند القيمة المعطاة لكل مما يلي:

1) $f(x)=\begin{cases}2x+6 & ,x\ge 2\\ 3x & ,x<2\end{cases}\quad ,x=2$

$f(2)=4+6=10$

$\lim\limits_{x\to 2^+}=2x+6=10$

$\lim\limits_{x\to 2^-}=3x=6$

$f(x)$ غير متصل عندما $x=2$

3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}=\dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}\times\dfrac{\sqrt{2x+1}+3}{\sqrt{2x+1}+3}$

$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x+1-9}{(x-4)(6)}$

$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x-8}{(x-4)(6)}$

$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}(6)}=\dfrac{1}{3}$

4) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x^2-8x}$

$\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x^2-8x}\times\dfrac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\sqrt[3]{x}+4}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\sqrt[3]{x}+4}$

$\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\cancel{x-8}}{x\cancel{(x-8)}(12)}$

$\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{1}{x(12)}=\dfrac{1}{8\times 12}=\dfrac{1}{96}$

5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{3}}{x^2-4}$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3-x-1}{(x+1)(3)\left(x^2-4\right)}$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cancel{2-x}}{(x+1)(3)\cancel{(x-2)}(x+2)}$

$\dfrac{-1}{(3)(3)(4)}=\dfrac{-1}{36}$

2) $f(x)=\begin{cases}12 & ,x=6\\ \dfrac{x^2-36}{x-6} & ,x\neq 6\end{cases}$, $x=6$

$f(6)=12$

$\lim\limits_{x\to 6}=\dfrac{x^2-36}{x-6}$

$\lim\limits_{x\to 6}=\dfrac{\cancel{(x-6)}(x+6)}{\cancel{x-6}}=12$

$f(x)$ متصل عندما $x=6$

3) $f(x)=\begin{cases}x^3+5x & ,x<1\\ 2x^2+4x & ,1\le x\le 3\\ 3x+7 & ,x>3\end{cases}$, $x=3$

$f(3)=30$

$\lim\limits_{x\to 3^+}=3x+7=16$

$\lim\limits_{x\to 3^-}=2x^2+4x=30$

$f(x)$ غير متصل عندما $x=3$

مثال: اجد نقاط عدم الاتصال للاقتران التالي:

$$f(x)=\frac{x}{x^2-4}+\frac{2x-1}{x^2-x-12}+\frac{x^2}{x}$$

الحل:

الكسر غير متصل عند اصفار المقام

$x=\{\pm 2,0,4,-3\}$

مثال:

اذا كانت $f(x)=\begin{cases}3b^2 & ,x=2\\ \dfrac{x^3-8}{x-2} & ,x\neq 2\end{cases}$

فما قيم b التي تجعل $f(x)$ متصل عندما $x=2$

الحل:

$f(2)=\lim\limits_{x\to 2}f(x)$

$3b^2=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$

$3b^2=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{x-2}}$

$3b^2=12\Rightarrow b^2=4\Rightarrow b=\{2,-2\}$

مثال: اذا كانت

$f(x)=\begin{cases}2x & ,x=2\\ ax^3-bx^2 & ,x<2\\ (a+b)x^2-6x-4 & ,x>2\end{cases}$

فما قيم a,b اذا كان $f(x)$ متصل عندما $x=2$

الحل:

$\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=f(2)$

$(a+b)4-12-4=4$

$4a+4b=20\quad\ldots(1)$

$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=f(2)$

$8a-4b=4\quad\ldots(2)$

بحل المعادلات: $a=2$, $b=3$

التعريف العام للمشتقة:

القانون العام:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

لو كان المطلوب المشتقة عند عدد مثلا $x=3$

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$

مثال1:

اذا كانــت $f(x)=x^2-5x+7$ أجــد $f'(x)$ باستعمال تعريف المشتقة الاولى

الحل:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-5(x+h)+7-x^2+5x-7}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^2}+2hx+h^2-\cancel{5x}-5h+\cancel{7}-\cancel{x^2}+\cancel{5x}-\cancel{7}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2-5h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2x+h-5)}{\cancel{h}}$$

$$=\lim_{h\to 0}2x+h-5=2x+0-5$$

$$f'(x)=2x-5$$

مثال2:

اذا كانــت $f(x)=x^2+3x+1$ أجــد $f'(3)$ باستعمال تعريف المشتقة الاولى

الحل:

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2+3(3+h)+1-19}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{9+6h+h^2+9+3h-18}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+9h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(h+9)}{\cancel{h}}=9$$

مثال3:

اذا كانت $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ أجد $f'(2)$ باستعمال تعريف المشتقة الاولى

الحل:

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(2+h)^2+1}-\frac{1}{5}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{4+4h+h^2+1}-\frac{1}{5}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{5+2h+h^2}-\dfrac{1}{5}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{5}-\cancel{5}-4h-h^2}{(5+4h+h^2)(5)(h)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(-4-h)}{(5+4h+h^2)(5)\cancel{(h)}}=\frac{-4}{25}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2+h+7}-3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h+9}-3}{h}\times\frac{\sqrt{h+9}+3}{\sqrt{h+9}+3}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h+\cancel{9}-\cancel{9}}{h(6)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(6)}=\frac{1}{6}$$

مثال4:

اذا كانـــت $f(x)=\sqrt{x}$ أجـــد $f'(x)$ باســـتعمال تعريف المشتقة الاولى

الحل:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\times\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x}+h-\cancel{x}}{(h)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}}{\cancel{(h)}\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مثال5:

اذا كان $f(x)=\sqrt{x+7}$ أجد $f'(x)$ باستعمال تعريف المشتقة عندما $x=2$

الحل:

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

مثال6:

اذا كانـــت $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ أجـــد $f'(0)$ باســـتعمال تعريف المشتقة الاولى

الحل:

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(0+h)^{\frac{1}{2}}-(0)^{\frac{1}{2}}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}h^{\frac{-1}{2}}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{0}=\infty$$

$f'(0)$ غير موجودة

$f(x)$ غير قابل للاشتقاق عندما $x=0$

مثال7:

اذا كانـــــت $f(x)=(x-3)^{\frac{1}{3}}$ أجــــد $f'(3)$
باستعمال تعريف المشتقة الاولى

الحل:

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(3+h-3)^{\frac{1}{3}}-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^{\frac{1}{3}}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{0}=\infty$$

$f'(3)$ غير موجودة

$f(x)$ غير قابل للاشتقاق عندما $x=3$

مثال8:

اذا كانـــــــــــت
$$f(x)=\begin{cases}x+1 & ,x\neq 1\\ 5 & ,x=1\end{cases}$$

أجد $f'(1)$ باستعمال تعريف المشتقة الاولى

الحل:

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1+h-5}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h-6}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{0-6}{0}=\frac{-6}{0}=-\infty$$

$f'(1)$ غير موجودة

تدريب:

اجد $f'(x)$ باستعمال التعريف عند قيمة x المعطاة لكل مما يلي:

1) $f(x)=(x+1)^{\frac{1}{5}}\quad ,x=-1$

2) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}\quad ,x=0$

3) $f(x)=\sqrt{x+1}\quad ,x=3$

4) $f(x)=\dfrac{3}{x+2}\quad ,x=1$

مثال9:

ابحث قابلية الاشتقاق باستعمال تعريف المشتقة للاقتران $f(x)=|x-2|$ عندما $x=2$

الحل:

اعادة تعريف $x-2=0\Rightarrow x=2$

--   ++
2

$$f(x)=\begin{cases}x-2 & ,x\geq 2\\ -x+2 & ,x<2\end{cases}$$

نجد المشتقة من اليمين واليسار

$$f'_{+}(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2+h-2-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$$

$$f_-^{'}(2)=\lim_{h\to0}\frac{-(2+h)+2-0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-h}{h}=-1$$

$$f_+^{'}(2)\neq f_-^{'}(2)$$

$f\,'(2)$ غير موجودة

مثال10:

اذا كانت $f(x)=|2x-6|$ أجد $f\,'(x)$ عندما $x=3$ باستعمال تعريف المشتقة الاولى

الحل:

اعادة تعريف $2x-6=0\Rightarrow x=3$

$$\xleftarrow{\quad - - \quad}\ 3\ \xrightarrow{\quad + + \quad}$$

$$f(x)=\begin{cases}2x-6 & ,x\geq3\\ 6-2x & ,x<3\end{cases}$$

$$f_+^{'}(3)=\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{2(h+3)-6-0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{2h}{h}=2$$

$$f_-^{'}(3)=\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{(6-2(3+h))-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{-2h}{h}=-2$$

$$f_+^{'}(3)\neq f_-^{'}(3)$$

$f\,'(3)$ غير موجودة

تدريب:

اذا كانت $f(x)=x|x-3|$ ابحث قابلية الاشتقاق باستخدام التعريف العام للمشتقة عندما $x=3$

المشتقة غير موجودة من الرسم البياني عندما:

1) عند الاطراف المغلقة

2) عند نقاط عدم الاتصال

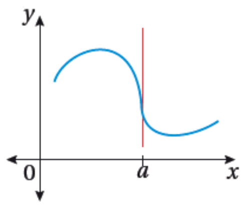
3) عند الرؤوس المدببة

4) عند وجود مماس رأسي

مثال:

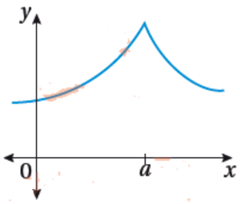
المشتقة غير موجودة عند $x=a$ في الحالات الآتية:

1)



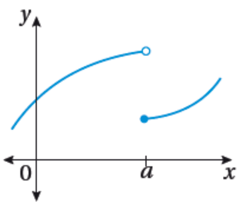
مماس رأسي عندما $x=a$

2)



رأس حاد أو رأس مدبب عندما $x=a$

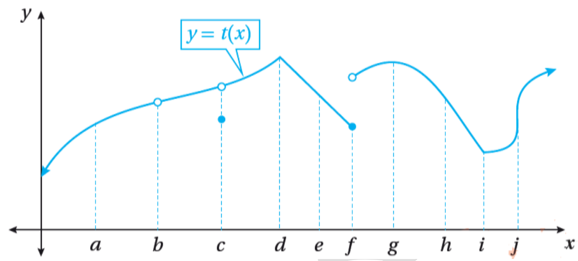
3)



عدم اتصال عندما $x=a$

مثال:

يبين الشكل الاتي منحنى الاقتران $t(x)$ أحدد قيم x للنقاط التي لا يكون عندها الاقتران $f(x)$ قابلا للاشتقاق مبرا إجابتي.



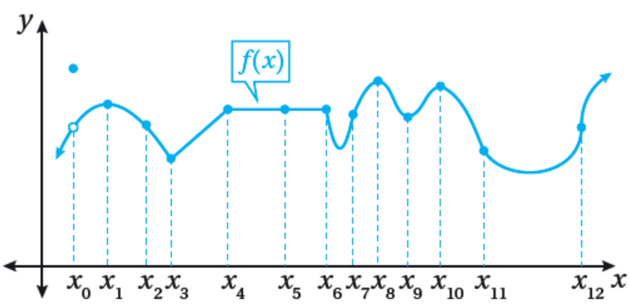
الحل:

الاقتران $t(x)$ غير قابل للاشتقاق عندما $x=b$ و $x=c$ و $x=f$ لأنه غير متصل عند هذه النقاط وهو غير قابل الالشتقاق عندما $x=i$ و $x=d$ نظرا إلى وجود رأس حاد عند هاتين النقطتين وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x=j$ نظرا إلى وجود مماس رأسي عند هذا النقطة.

مثال:

أحدد قيم x للنقاط التي لا يكون عندها كل اقتران مما يأتي قابلا للاشتقاق مبررا اجابتي

1)



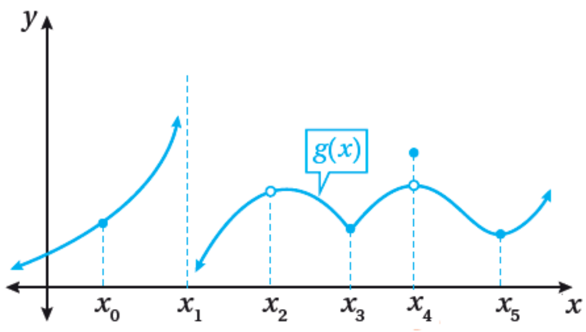
الحل:

عند x_0 لأن غير متصل

عند x_3 , x_4 , x_6 رؤوس حادة

عند x_{12} مماس رأسي

2)



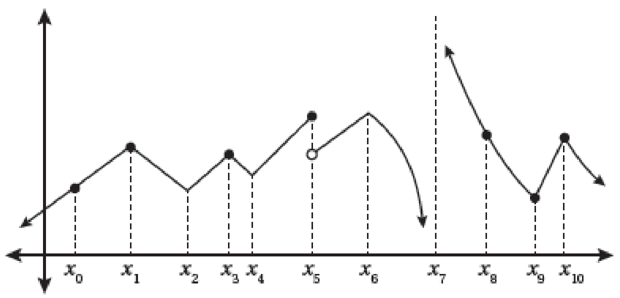
الحل:

عند x_1 , x_2 , x_4 عدم اتصال

عند x_3 رأس مدبب (حاد)

مثال:

يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)$ أحدد قيم x للنقاط التي يكون عندها الاقتران $f(x)$ غير قابل للاشتقاق مبررا إجابتي.



الحل:

عند x_5 عدم اتصال

عند x_7 عدم اتصال

عند $x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_6 , x_9 , x_{10}$ رؤوس حادة

قواعد الاشتقاق

قاعدة (1)

اذا كانت $y=c$ حيث c عدد ثابت فإن $\frac{dy}{dx}=0$

مشتقة الثابت تساوي صفر

مثال: أجد مشتقة كل مما يأتي:

1) $f(x)=8 \Rightarrow f'(x)=0$

2) $f(x)=\frac{-3\pi}{2} \Rightarrow f'(x)=0$

3) $y=\sqrt{7} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=0$

قاعدة (2)

اذا كانت $y=x^n$ ، فإن: $\frac{dy}{dx}=nx^{n-1}$

مثال: أجد مشتقة كل مما يأتي:

1) $f(x)=x^5 \Rightarrow f'(x)=5x^4$

2) $f(x)=3x^8 \Rightarrow f'(x)=24x^7$

3) $f(x)=x^{-8} \Rightarrow f'(x)=-8x^{-9}$

4) $y=3x^{-4} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-12x^{-5}$

ملاحظات هامة:

1) $\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{m}{n}}\right)=\frac{m}{n}x^{\frac{m-n}{n}}$

2) $\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}$ للتخلص من الجذر

3) $\frac{a}{x^n}=ax^{-n}$

مثال: اجد مشتقة ما يلي:

1) $f(x)=x^3 \Rightarrow f'(x)=3x^2$

2) $f(x)=x^{-3} \Rightarrow f'(x)=-3x^{-4}$

3) $y=x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

4) $y=\frac{1}{x} \Rightarrow y=x^{-1} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-x^{-2}$

5) $h(x)=\sqrt{x} \Rightarrow h(x)=x^{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow h'(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

6) $y=\frac{1}{\sqrt{x^3}} \Rightarrow y=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$

$y=x^{\frac{-3}{2}} \Rightarrow y'=\frac{-3}{2}x^{\frac{-5}{2}}$

7) $y=8x^7 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=65x^6$

8) $f(x)=\frac{1}{x^{-2}} \Rightarrow f(x)=x^2$

$\Rightarrow f'(x)=2x$

قاعدة (3)

اذا كانت $y = f(x) \pm g(x)$ فإن:

$y' = f'(x) \pm g'(x)$

المشتقة توزع على الجمع والطرح حيث نشتق كل اقتران لوحده

مثال: اجد مشتقة ما يلي:

1) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 9x + 12$

$f'(x) = 6x^2 - 8x + 9$

2) $h(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 9$

$h'(x) = 2x^2 - 3x$

3) $y = x + 2\sqrt[3]{x}$

$y' = 1 + \frac{2}{3}x^{\frac{-2}{3}}$

4) $y = \frac{5-7x}{x}$

$y = \frac{5}{x} - 7 = 5x^{-1} - 7$

$y' = -5x^{-2} = \frac{-5}{x^2}$

5) $f(x) = 3x^{-5} + 6x^{\frac{7}{5}} + 8x$

$f'(x) = -15x^{-6} + \frac{42}{5}x^{\frac{2}{5}} + 8$

9) $g(x) = x^{-5} \Rightarrow g'(x) = -5x^{-6}$

10) $g(x) = \sqrt[3]{x^4} \Rightarrow g'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$

11) $y = \frac{1}{\sqrt[7]{x}} \Rightarrow y = x^{\frac{-1}{7}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{7}x^{\frac{-8}{7}}$

12) $y = \frac{8}{3x^4} \Rightarrow y = \frac{8}{3}x^{-4}$

$\Rightarrow y' = \frac{-32}{3}x^{-5}$

13) $y = \frac{7}{2\sqrt{x}} \Rightarrow y = \frac{7}{2}x^{\frac{-1}{2}}$

$\Rightarrow y' = \frac{-7}{4}x^{\frac{-3}{2}}$

14) $h(x) = 3\sqrt[3]{x^2} \Rightarrow h(x) = 3x^{\frac{2}{3}}$

$\Rightarrow h'(x) = \frac{6}{3}x^{\frac{-1}{3}}$

15) $f(x) = x^5\left|x^2\right| \quad , x = 3$

$f(x) = x^5 \times x^2 = x^7$

$f'(x) = 7x^6$

$f'(3) = 7(3)^6 = 5103$

قاعدة (4) : مشتقة الجذر التربيعي

$$= \frac{\text{مشتقة ما داخل الجذر}}{2\sqrt{\text{الجذر نفسه}}}$$

مثال: أجد مشتقة ما يلي:

1) $f(x)=\sqrt{2x^5+8}$

$$f'(x)=\frac{10x^4}{2\sqrt{2x^5+8}}$$

2) $f(x)=\sqrt{8x^2+4x+2}$

$$f'(x)=\frac{16x+4}{2\sqrt{8x^2+4x+2}}$$

قاعدة (5)

اذا كانت $y=\left(g(x)\right)^n$ فإن

$$\frac{dy}{dx}=n\left(g(x)\right)^{n-1}g'(x)$$

مثال: اجد مشتقة ما يلي:

1) $g(x)=\left(5x^3-2x^4\right)^9$

$$g'(x)=9\left(5x^3-2x^4\right)^8\left(15x^2-8x^3\right)$$

2) $f(x)=\left(3x^2-8x-7\right)^{-7}$

$$f'(x)=-7\left(3x^2-8x-7\right)^{-8}(6x-8)$$

3) $y=\sqrt[3]{\left(2x^4-8\right)^5}$

$$y=\left(2x^4-8\right)^{\frac{5}{3}}$$

$$y'=\frac{5}{3}\left(2x^4-8\right)^{\frac{2}{3}}\left(8x^3\right)$$

4) $f(x)=\sqrt[3]{2x^3-1} \quad , x=1$

$$f(x)=\left(2x^3-1\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}\left(2x^3-1\right)^{\frac{-2}{3}}(6x)$$

$$f'(1)=\frac{1}{3}\left(2(1)^3-1\right)^{\frac{-2}{3}}(6(1))$$

$$=\frac{1}{3}(1)(6)=2$$

5) $g(x)=\sqrt[7]{x^4+1}$

$$g(x)=\left(x^4+1\right)^{\frac{1}{7}}$$

$$g'(x)=\frac{1}{7}\left(x^4+1\right)^{\frac{-6}{7}}\left(4x^3\right)$$

6) $f(x)=(2x-5)^{\frac{2}{3}}$

$$f'(x)=\frac{2}{3}(2x-5)^{\frac{-1}{3}}(2)$$

7) $f(x)=\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}$

$f(x)=\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{3}}$

$f'(x)=\frac{1}{3}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{-2}{3}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

تدريب:

اذا كانـــــت $f(x)=\sqrt{bx^2+5}$ وكانـــــت $f'(2)=2$ ، اجد قيمة b

قاعدة (6)

اذا كانت $f(x)=e^{g(x)}$ فإن

$f'(x)=g'(x)e^{g(x)}$

مثال: أجد مشتقة ما يلي:

1) $f(x)=e^{3x^5+8x+7}$

$f'(x)=\left(15x^4+8\right)e^{3x^5+8x+7}$

2) $f(x)=e^{\sqrt{x}}$

$f'(x)=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)e^{\sqrt{x}}$

3) $f(x)=e^{x^5+7x^{\frac{3}{5}}}$

$f'(x)=\left(5x^4+\frac{21}{5}x^{\frac{-2}{5}}\right)e^{x^5+7x^{\frac{3}{5}}}$

قاعدة (7)

اذا كانت $f(x)=a^{g(x)}$ حيث a عدد ثابت

فإن $f'(x)=g'(x)a^{g(x)}\ln a$

مثال: اجد مشتقة ما يلي:

1) $f(x)=3^{x^2+7x+8}$

$f'(x)=(2x+7)3^{x^2+7x+8}\ln 3$

2) $f(x)=5^{\sqrt{x}}$

$f'(x)=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)5^{\sqrt{x}}\ln 5$

3) $f(x)=7^{x}$

$f'(x)=\ln 7\times 7^{x}\times 1$

4) $f(x)=5^{3x}$

$f(x)=\ln 5\times 5^{3x}\times 3=(3\ln 5)5^{3x}$

5) $f(x)=8^{x^3}$

$f'(x)=\ln 8\times 8^{x^3}\times 3x^2$

6) $f(x)=e^{4x}+6^{5x}$

$f(x)=4e^{4x}+\ln 6\times 6^{5x}\times 5$

7) $f(x)=\pi^{\pi x}$

$f'(x)=\ln \pi\times \pi^{\pi x}\times \pi$

8) $f(x)=6^{1-x^3}$

$f'(x)=\ln 6\times 6^{1-x^3}\times -3x^2$

9) $f(x)=e^{4x}+4^{2x}$

$f'(x)=4e^{4x}+\ln 4\times 4^{2x}\times 2$

قاعدة (8)

اذا كانت $f(x)=\ln g(x)$

فإن $f'(x)=\dfrac{g'(x)}{g(x)}$

مثال: اجد مشتقة ما يلي:

1) $f(x)=\ln\left(5x^5+8x\right)$

$f'(x)=\dfrac{25x^4+8}{5x^5+8x}$

2) $f(x)=\ln\left(7x^3+\sqrt{x}\right)$

$f'(x)=\dfrac{21x^2+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{7x^3+\sqrt{x}}$

قاعدة (9)

$$\frac{d}{dx}\left(\log_a g(x)\right)=\frac{g'(x)}{(\ln a)\,g(x)}$$

اذا لم يكتب الاساس يكون 10

مثال: أجد مشتقة ما يلي:

1) $f(x)=\log 7x$

$f'(x)=\dfrac{7}{(\ln 10)7x}$

2) $f(x)=\log_6 \tan x$

$f'(x)=\dfrac{\sec^2 x}{\ln 6\tan x}$

قاعدة (10) : مشتقة الاقترانات الدائرية:

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\cot x$	$-\csc^2 x$
$\sec x$	$\sec x\tan x$
$\csc x$	$-\csc x\cot x$

مثال: اجد مشتقة ما يلي:

1) $f(x)=3\sin x+5x^4+6x+7$

$f'(x)=3\cos x+20x^3+6$

2) $f(x)=6e^x+8\cos x+7$

$f'(x)=6e^x-8\sin x$

3) $g(x) = 6\sec x + \tan x$

$$g'(x) = 6\sec x \tan x + \sec^2 x$$

4) $h(x) = \dfrac{\sin x}{4} + 3\cos x$

$$h'(x) = \frac{\cos x}{4} - 3\sin x$$

5) $y = x^{-2} + \cos x + \sin\dfrac{\pi}{4}$

$$\frac{dy}{dx} = -2x^{-3} - \sin x$$

6) $f(x) = -\csc x - \sin x$

$$f'(x) = \csc x \cot x - \cos x$$

7) $f(x) = x^{-3} + 12\sec x$

$$f'(x) = -3x^{-4} + 12\sec x \tan x$$

8) $f(x) = \sqrt{\sin x}$

$$f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$$

9) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x} + \sqrt[5]{x^2} + 7$

$$f(x) = \cot x + x^{\frac{2}{5}} + 7$$

$$f'(x) = -\csc x + \frac{2}{5}x^{\frac{-3}{5}}$$

10) $f(x) = \ln x^3 + \sin x + e^{3x^2+5}$

$$f'(x) = \frac{3x^2}{x^3} + \cos x + 6xe^{3x^2+5}$$

11) $f(x) = (\cos x)^5$

$$f'(x) = 5(\cos x)^4(-\sin x)$$

قاعدة (11) : مشتقة حاصل ضرب اقترانين

اذا كانت $A(x) = f(x)g(x)$ ، فإن:

$$A'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

(مشتقة الاول)(الثاني) + (مشتقة الثاني)(الاول)

مثال: أجد مشتقة ما يلي:

1) $f(x) = (x^5 + 3x)(6x^2 + 9)$

$$f'(x) = (x^5 + 3x)(12x) + (6x^2 + 9)(5x^4 + 3)$$

2) $f(x) = (x^{-2} + 7x^{-3})(3x^{-9} + 8)$

$$f'(x) = (x^{-2} + 7x^{-3})(-27x^{-10}) + (3x^{-9} + 8)(-2x^{-3} - 21x^{-4})$$

3) $y = \sqrt[3]{x}(\sqrt{x} + 3)$

$$y' = (\sqrt[3]{x})\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + (\sqrt{x} + 3)\left(\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}\right)$$

4) $y = x^2(2x-1)^{\frac{1}{3}}$

$$\frac{dy}{dx} = (x^2)\left(\frac{1}{3}(2x-1)^{\frac{-2}{3}}(2)\right) + (2x-1)^{\frac{1}{3}}(2x)$$

5) $f(x) = \sqrt{x(2x+1)^8}$

$$f'(x) = \frac{x\left(8(2x+1)^7(2)\right) + (2x+1)^8(1)}{2\sqrt{x(2x+1)^8}}$$

$$f'(x) = \frac{16x(2x+1)^7 + (2x+1)^8}{2\sqrt{x(2x+1)^8}}$$

6) $f(x) = xe^x$

$$f'(x) = x \times e^x + e^x \times 1 = xe^x + e^x$$

7) $f(x) = \ln x \cos x$

$$f'(x) = -\ln x \sin x + (\cos x)\left(\frac{1}{x}\right)$$

8) $f(x) = x^2 \sec x$

$$f'(x) = x^2 \sec x \tan x + (\sec x)(2x)$$

9) $f(x) = x \cot x$

$$f'(x) = x(-\csc^2 x) + \cot x \times 1$$

10) $f(x) = x^3 \tan x$

$$f(x) = x^3 \sec^2 x + \tan x \times 3x^2$$

11) $f(x) = e^x(\tan x - x)$

$$f'(x) = e^x(\sec^2 x - 1) + (\tan x - x)e^x$$

12) $f(x) = (x^3 - x)(x^2+2)(x^2+x)$

$$f(x) = (x^5 + x^3 - 2x)(x^2 + x)$$

$$f'(x) = (x^5 + x^3 - 2x)(2x+1) + (x^2+x)(5x^4 + 3x^2 - 2)$$

قاعدة (12) :

مشتقة القسمة = $\dfrac{\text{بسط}}{\text{مقام}}$

اذا كانت $B(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ، فإن:

$$B'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

= $\dfrac{\text{مشتقة المقام × البسط – مشتقة البسط × المقام}}{\text{(المقام)}^2}$

مثال: اجد مشتقة ما يلي:

1) $f(x) = \dfrac{x^3}{4x-8}$

$$f'(x) = \frac{(4x-8)(3x^2) - (x^3)(4)}{(4x-8)^2}$$

2) $f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$

$$f'(x)=\frac{(1+x^2)(-2x)-(1-x^2)(2x)}{(1+x^2)^2}$$

3) $f(x)=\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{-1}{2}}\left(\frac{(x)(1)-(x+1)(1)}{x^2}\right)$$

4) $f(x)=\frac{\ln x}{x+1}$

$$f'(x)=\frac{(x+1)\left(\frac{1}{x}\right)-(\ln x)(1)}{(x+1)^2}$$

5) $f(x)=\frac{\sin x}{e^x}$

$$f'(x)=\frac{(e^x)(\cos x)-(\sin x)(e^x)}{(e^x)^2}$$

6) $f(x)=\frac{\csc x}{1+\tan x}$

$$f'(x)=\frac{(1+\tan x)(-\csc x\cot x)-(\csc x)(\sec^2 x)}{(1+\tan x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-\csc x\cot x-\csc x\cot x\tan x-\csc x\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-\csc x\cot x-\csc x-\csc x\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$$

7) $f(x)=\frac{\tan x}{1+\sin x}$

$$f'(x)=\frac{(1+\sin x)(\sec^2 x)-(\tan x)(\cos x)}{(1+\sin x)^2}$$

8) $f(x)=\frac{x+1}{\cos x}$

$$f'(x)=\frac{(\cos x)(1)-(x+1)(-\sin x)}{(\cos x)^2}$$

9) $f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{e^x}$

$$f'(x)=\frac{e^x(\cos x-\sin x)-(\sin x+\cos x)e^x}{(e^x)^2}$$

مثال:

اذا كانـــــت $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ اثبـــــت أن

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

الحل:

$$f'(x)=\frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}(1)-(x)\left(\frac{1}{2}(x^2+1)^{\frac{-1}{2}}(2x)\right)}{\left((x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}-x^2(x^2+1)^{\frac{-1}{2}}}{(x^2+1)}$$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$f'(x)=\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1}\left(x^2+1\right)}$$

$$f'(x)=\frac{1}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}$$

مثال: اذا كانت $y=\frac{x+1}{x-1}$ حيث $x\neq 1$

1) اجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x-1)(1)-(x+1)(1)}{(x-1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2}{(x-1)^2}$$

2) اعد كتابة المعادلة بالنسبة إلى المتغير y (كتابة x بالنسبة الى y)

الحل:

$$y=\frac{x+1}{x-1}\Rightarrow xy-y=x+1$$

نجعل x موضع القانون

$$xy-y=1+y$$

$$x(y-1)=1+y\Rightarrow x=\frac{1+y}{y-1}$$

اشتقاق x بالنسبة الى y

$$\frac{dx}{dy}=\frac{(y-1)(1)-(1+y)(1)}{(y-1)^2}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{-2}{(y-1)^2}$$

3) اثبت أن $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

الحل:

نعوض $y=\frac{x+1}{x-1}$ بدل y

$$\frac{dx}{dy}=\frac{-2}{\left(\frac{x+1}{x-1}-1\right)^2}=\frac{-2}{\left(\frac{x+1-x+1}{x-1}\right)^2}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{-2}{\left(\frac{2}{x-1}\right)^2}=\frac{-2}{\frac{4}{(x-1)^2}}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{-2(x-1)^2}{4}=\frac{(x-1)^2}{-2}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

تعني $\frac{dx}{dy}$ هي نفسها مقلوب $\frac{dy}{dx}$

قاعدة (13)

اذا كانت $f(x)=\frac{a}{g(x)}$ ، فإن:

$$f'(x)=\frac{-a\times g(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

$$\frac{\text{سالب العدد} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$$

مثال: أجد مشتقة ما يلي:

1) $f(x)=\dfrac{1}{6x^2+8x+7}$

$$f'(x)=\frac{-1(12x+8)}{\left(6x^2+8x+7\right)^2}$$

2) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

$$f'(x)=\frac{-1}{x^2}$$

3) $f(t)=\dfrac{1}{t-\dfrac{1}{t}}$

$$f(t)=\frac{1}{t-t^{-1}} \Rightarrow f'(t)=\frac{-\left(1+t^{-2}\right)}{\left(t-t^{-1}\right)^2}$$

4) $f(x)=\dfrac{1}{e^x+\sqrt{x}}$

$$f'(x)=\frac{-\left(e^x+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(e^x+\sqrt{x}\right)^2}$$

5) $f(x)=x^2-\dfrac{1}{x}$

$$f'(x)=2x+\frac{1}{x^2}$$

6) $g(x)=(\csc x+\cot x)^{-1}$

$$g(x)=\frac{1}{(\csc x+\cot x)}$$

$$g'(x)=\frac{-1\left(-\csc x\cot x-\csc^2 x\right)}{(\csc x+\cot x)^2}$$

7) $f(x)=\dfrac{7}{\sin x+\ln x}$

$$f'(x)=\frac{-7\left(\cos x+\dfrac{1}{x}\right)}{(\sin x+\ln x)^2}$$

قاعدة (14)

$$\frac{d}{dx}(\sin g(x))=\cos g(x)(g'(x))$$

وهكذا باقي الاقترانات الدائرية

مثال: اجد مشتقة ما يلي:

1) $f(x)=\sin 8x+\tan 5x$

$$f'(x)=8\cos 8x+5\sec^2 5x$$

2) $f(x)=\sqrt{\cos x^2}$

$$f'(x)=\frac{\left(-\sin x^2\right)(2x)}{2\sqrt{\cos x^2}}$$

3) $f(x)=\sin\dfrac{3}{x}$

$$f'(x)=\frac{-3}{x^2}\cos\frac{3}{x}$$

4) $f(x)=\sec\left(x^2\right)$

$$f'(x)=(2x)\left(\sec x^2\right)\left(\tan x^2\right)$$

أمثلة عامة

مثال1: اجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x)=\dfrac{x^3}{2x-1}$

$$f'(x)=\frac{(2x-1)(3x^2)-(x^3)(2)}{(2x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{6x^3-3x^2-2x^3}{(2x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{4x^3-3x^2}{(2x-1)^2}$$

2) $f(x)=x^3\sec x^2$

$$f'(x)=x^3 2x\sec x^2\tan x^2+\sec x^2(3x^2)$$

3) $f(x)=\dfrac{x+1}{\cos x^2}$

$$f'(x)=\frac{(\cos x)(1)-(x+1)(-2x)(\sin x^2)}{(\cos x^2)^2}$$

4) $f(x)=e^{x^3}(\tan x-x)$

$$f'(x)=e^{x^3}(\sec^2 x-1)+(\tan x-x)(3x^2)e^{x^3}$$

5) $f(x)=\dfrac{\sin x+\cos x}{e^x}$

$$f'(x)=\frac{e^x(\cos x-\sin x)-(\sin x-\cos x)e^x}{(e^x)^2}$$

$$=\frac{\cancel{e^x\cos x}-e^x\sin x-e^x\sin x-\cancel{e^x\cos x}}{(e^x)^2}$$

$$=\frac{-2e^x\sin x}{(e^x)^2}=\frac{-2\sin x}{e^x}$$

6) $f(x)=x^3\sin x+x^2\cos x$

$$f'(x)=x^3\cos x+\sin x(3x^2)$$
$$+x^2(-\sin x)+\cos x(2x)$$

7) $f(x)=\sqrt[3]{x}(\sqrt{x}+5)$

$$f(x)=x^{\frac{1}{3}}(\sqrt{x}+5)$$

$$f'(x)=x^{\frac{1}{3}}\frac{1}{2\sqrt{x}}+(\sqrt{x}+5)\left(\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}\right)$$

8) $f(x)=\dfrac{1+\sec x}{1-\sec x}$

$$f'(x)=\frac{(1-\sec x)(\sec x\tan x)-(1+\sec x)(-\sec x\tan x)}{(1-\sec x)^2}$$

$$=\frac{\sec x\tan x-\sec^2 x\tan x+\sec x\tan x+\sec^2 x\tan x}{(1-\sec x)^2}$$

$$=\frac{2\sec x\tan x}{(1-\sec x)^2}$$

9) $f(x)=\dfrac{2-\frac{1}{x}}{x-3}$

$$f'(x)=\frac{(x-3)\left(\frac{1}{x^2}\right)-\left(2-\frac{1}{x}\right)(1)}{(x-3)^2}$$

10) $f(x)=(x^3-x)(x^2+2)(x^2+x+1)$

$$f'(x)=(x^3-x)(x^2+2)(2x+1)+(x^2+x+1)$$
$$((x^3-x)(2x)+(x^2+2)(3x^2-1)(x^2+x+1))$$

11) $f(x)=\dfrac{12}{(\csc x+\cot x)}$

$$f'(x)=\frac{-12(-\csc x\cot x-\csc^2 x)}{(\csc x+\cot x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{12\csc x(\cot x-\csc x)}{(\csc x+\cot x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{12\csc x}{\csc x+\cot x}$$

مثال2: اجد مشتقة كل مما يلي:

1) $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

$$f'(x)=\frac{(1+\cos x)(\cos x)-(\sin x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$=\frac{\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$$

$$=\frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2}=\frac{1}{1+\cos x}$$

2) $f(x)=x^3\csc x$

$$f'(x)=x^3(-\csc x\cot x)+\csc x(3x^2)$$

3) $f(x)=\dfrac{\tan x}{1+\sec x}$

$$f'(x)=\frac{(1+\sec x)(\sec^2 x)-(\tan x)(\sec x\tan x)}{(1+\sec x)^2}$$

$$=\frac{\sec^2 x+\sec^3 x-\tan^2 x\sec x}{(1+\sec x)^2}$$

4) $f(x)=2x^2+x\cot x$

$$f'(x)=4x+x(-\csc^2 x)+\cot x(1)$$

$$=4x-x\csc^2 x+\cot x$$

مثال3: اجد مشتقة كل مما يلي:

1) $f(x)=x^2\cot x$

$$f'(x)=x^2(-\csc^2 x)+(\cot x)(2x)$$

$$=-x^2\csc^2 x+(\cot)(2x)$$

2) $f(x)=\dfrac{\tan x}{1+\sin x}$

$$f'(x)=\frac{(1+\sin x)(\sec^2 x)-(\tan x)(\cos x)}{(1+\sin x)^2}$$

مثال4: اذا كان $f(x), g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عندما $x=0$ وكان $f(0)=5,\ f'(0)=-3$ $g(0)=-1,\ g'(0)=2$ فأجد كلا مما يأتي:

1) $(fg)'(0)$

$$(fg)'(0)=f(0)g'(0)+g(0)f'(0)$$

$$=5(2)+(-1)(-3)=10+3=13$$

2) $\left(\frac{f}{g}\right)'(0)$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(0)=\frac{g(0)f'(0)-f(0)g'(0)}{(g(0))^2}$$

$$=\frac{-1(-3)-5(2)}{(1)^2}=\frac{3-10}{1}=-7$$

3) $(7f-2fg)'(0)$

$$=7f'(0)-2(fg)'$$

$$=7(-3)-2(13)=-21-26=-47$$

مثـــال5: اذا كـان $f(x)=9\ln x+\frac{1}{2x^2}$

فأثبت أن $f'(x)=\frac{(3x-1)(3x+1)}{x^3}$

الحل:

$$f'(x)=9\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{-4x}{(2x^2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{9}{x}-\frac{4x}{4x^4}$$

$$f'(x)=\frac{9}{x}-\frac{1}{x^3}=\frac{9x^2-1}{x^3}$$

$$f'(x)=\frac{(3x-1)(3x+1)}{x^3}$$

مثال6: اجد مشتقة كل مما يأتي:

1) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$$

2) $f(x)=-\csc x-\sin x$

$$f'(x)=\csc x\cot x-\cos x$$

3) $f(x)=\frac{x+c}{x+\frac{c}{x}}$

$$f'(x)=\frac{\left(x+\frac{c}{x}\right)(1)-(x+c)\left(1-\frac{c}{x^2}\right)}{\left(x+\frac{c}{x}\right)^2}$$

4) $f(x)=x\cot x$

$$f'(x)=x\left(-\csc^2 x\right)+\cot x(1)$$

5) $f(x)=4x-x^2\tan x$

$$f'(x)=4-\left(x^2\sec^2 x+\tan x(2x)\right)$$

6) $f(x)=\frac{\cos x}{x^2}$

$$f'(x)=\frac{x^2(-\sin x)-\cos x(2x)}{x^4}$$

2) $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

$\frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right)$

$= \frac{-(-\sin x)}{\cos^2 x}$

$= \frac{\sin x}{\cos x \cos x} = \sec x \tan x$

3) $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

$\frac{d}{dx}(\csc x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin x}\right)$

$= \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$

$= \frac{-\cos x}{\sin x \sin x} = -\csc x \cot x$

مثال9: اجد مشتقة كل مما يأتي:

1) $f(x) = e^{4x+2}$

$f'(x) = 4e^{4x+2}$

2) $f(x) = 50e^{2x-10}$

$f'(x) = 50 \times 2e^{2x-10} = 100e^{2x-10}$

3) $f(x) = \cos\left(x^2 - 3x - 4\right)$

$f'(x) = -\sin\left(x^2 - 3x - 4\right)(2x-3)$

7) $f(x) = x\left(1 - \frac{4}{x+3}\right)$

$f(x) = x\left(\frac{4}{(x+3)^2}\right) + \left(1 - \frac{4}{x+3}\right)(1)$

8) $f(x) = \frac{3(1-\sin x)}{2\cos x}$

$f'(x) = \frac{(2\cos x)(-3\cos x) - 3(1-\sin x)(-2\sin x)}{(2\cos x)^2}$

مثال7: اذا كان $f(x) = x\sec x$ فأثبت أن $f'(x) = \sec x(1 + x\tan x)$

الحل:

$f'(x) = x\sec x\tan x + \sec x(1)$

$= \sec x(1 + x\tan x)$

مثال8: اثبت ما يلي:

1) $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$

$\frac{d}{dx}(\cot x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)$

$= \frac{(\sin x)(-\sin x) - (\cos x)(\cos x)}{\sin^2 x}$

$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$

$= \frac{-1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$

8) $f(x)=\ln\left(\frac{1+e^x}{1-e^x}\right)$

$f(x)=\ln(1+e^x)-\ln(1-e^x)$

$f'(x)=\frac{e^x}{1+e^x}-\frac{-e^x}{1-e^x}$

$f'(x)=\frac{e^x}{1+e^x}+\frac{e^x}{1-e^x}$

9) $f(x)=(\ln x)^4$

$f'(x)=4(\ln x)^3\left(\frac{1}{x}\right)$

10) $f(x)=\sin\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{\sin x}$

$f(x)=\sin x^{\frac{1}{3}}+(\sin x)^{\frac{1}{3}}$

$f'(x)=\cos x^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}\right)+\frac{1}{3}(\sin x)^{\frac{-2}{3}}(\cos x)$

11) $f(x)=\sqrt[5]{x^2+8x}$

$f(x)=(x^2+8x)^{\frac{1}{5}}$

$f'(x)=\frac{1}{5}(x^2+8x)^{\frac{-4}{5}}(2x+8)$

12) $f(x)=\frac{3^{2x}}{x}$

$f'(x)=\frac{x(\ln 3)3^{2x}(2)-3^{2x}(1)}{x^2}$

4) $f(x)=10x^2e^{-x^2}$

$f'(x)=10x^2\times-2xe^{-x^2}+e^{-x^2}\times 20x$

$=-20x^3e^{-x^2}+20xe^{-x^2}$

5) $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x}}$

$f(x)=\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{-1}{2}}\times\frac{(x)(1)-(x+1)(1)}{x^2}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{-1}{2}}\times\frac{-1}{x^2}$

6) $f(x)=x^2\tan\frac{1}{x}$

$f'(x)=x^2\times\sec^2\frac{1}{x}\times\frac{-1}{x^2}+\tan\frac{1}{x}\times 2x$

$=-\sec^2\frac{1}{x}+2x\tan\frac{1}{x}$

7) $f(x)=3x-5\cos(\pi x)^2$

$f'(x)=3-5\left(-\sin(\pi x)^2\right)(2\pi x)\pi$

$=3+10\pi x^2\times\sin(\pi x)^2$

6) $f(x)=2\cot^2(\pi x+2)$

$f'(x)=4\cot(\pi x+2)(-\csc(\pi x+2))(\pi)$

7) $f(x)=\log 2x$

$f(x)=\dfrac{1}{\ln 10}\times\dfrac{2}{2x}=\dfrac{1}{x\ln 10}$

8) $f(x)=\ln(x^3+2)$

$f'(x)=\dfrac{3x^2}{x^3+2}$

9) $f(x)=\left(\dfrac{x^2}{x^3+2}\right)^2$

$f'(x)=2\left(\dfrac{x^2}{x^3+2}\right)\left(\dfrac{(x^3+2)(2x)-(x^2)(3x^2)}{(x^3+2)^2}\right)$

10) $f(x)=x^2\sqrt{20-x}$

$f'(x)=x^2\times\dfrac{-1}{2\sqrt{20-x}}+\left(\sqrt{20-x}\right)(2x)$

11) $f(x)=\dfrac{\sin(2x+1)}{e^{x^2}}$

$f'(x)=\dfrac{e^{x^2}(\cos 2x+1)2-\sin(2x+1)e^{x^2}(2x)}{\left(e^{x^2}\right)^2}$

$=\dfrac{e^{x^2}\left(2(\cos 2x+1)-\sin(2x+1)(2x)\right)}{\left(e^{x^2}\right)^2}$

$=\dfrac{\cos(2x+1)-\sin(2x+1)(2x)}{e^{x^2}}$

13) $f(x)=2^{-x}\cos\pi x$

$f'(x)=2^{-x}(-\sin\pi x)\pi+(\cos\pi x)\ln 2\left(2^{-x}\right)(-1)$

14) $f(x)=\dfrac{10\log_4 x}{x}$

$f'(x)=\dfrac{x(10)\left(\dfrac{1}{\ln 4x}\right)-10(\log_4 x)}{x^2}$

مثال10: اجد مشتقة ما يلي:

1) $f(x)=100e^{-0.1x}$

$f'(x)=100(-0.1)e^{-0.1x}=-10e^{-0.1x}$

2) $f(x)=\sin(x^2+1)$

$f'(x)=\cos(x^2+1)(2x)$

3) $f(x)=\cos^2 x$

$f'(x)=2\cos x(-\sin x)$

4) $f(x)=\cos 2x-2\cos x$

$f'(x)=-\sin 2x(2)+2\sin x$

5) $f(x)=\log_3\dfrac{x\sqrt{x-1}}{2}$

$f(x)=\log_3 x+\dfrac{1}{2}\log_3(x-1)-\log_3 2$

$f'(x)=\dfrac{1}{\ln 3}\times\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\ln 3}\times\dfrac{1}{2(x-1)}$

12) $f(x)=3^{\cot x}$

$$f'(x)=\ln 3\left(3^{\cot x}\right)\left(-\csc^2 x\right)$$

مثـــال11: اذا كـان $h(x)=\sqrt{4+3f(x)}$

وكان $f(1)=7,\ f'(1)=4$ ، فأجد $h'(1)$

الحل:

$$h'(x)=\frac{3f'(x)}{2\sqrt{4+3f(x)}}$$

$$h'(1)=\frac{3f'(1)}{2\sqrt{4+3f(1)}}$$

$$=\frac{3\times 4}{2\sqrt{4+3(7)}}=\frac{12}{2\sqrt{25}}=\frac{12}{10}$$

مثــال12: اذا كـان $A(x)=f(g(x))$ وكـان

$$f(-2)=8,\ f'(-2)=4,\ f'(5)=3$$

$g(5)=-2,\ g'(5)=6$ ، فأجد $A'(5)$

الحل:

$$A'(5)=f'(g(5))g'(5)$$

$$=f'(-2)\times 6=4\times 6=24$$

مثال13: اذا كان $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

فأثبت أن $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}$

الحل:

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}(1)-x\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$f'(x)=\frac{\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}\left(x^2+1\right)}$$

$$f'(x)=\frac{1}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}$$

مثال14: أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

1) $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$

$$y'=\frac{\cos\sqrt{x}\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{\sin\sqrt{x}}}$$

2) $y=e^x\sin^2 x\cos x$

$$y=e^x\left(\sin^2 x\times-\sin x+\cos x 2\sin x\cos x\right)$$
$$+\left(\sin^2 x\cos x\right)e^x$$

3) $f(x)=\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$

$$f'(x)=2\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)\left(\frac{(1+\cos x)\cos x-\sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}\right)$$

$$=2\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)\left(\frac{\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}\right)$$

$$=2\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)\left(\frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2}\right)$$

$$=2\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)\left(\frac{1}{1+\cos x}\right)=2\frac{\sin x}{(1+\cos x)^2}$$

4) $f(x)=\log_3(1+x\ln x)$

$$f'(x)=\frac{x\left(\frac{1}{x}\right)+\ln x(1)}{\ln 3(1+x\ln x)}$$

5) $f(x)=e^{\sin 2x}+\sin\left(e^{2x}\right)$

$$f'(x)=e^{\sin 2x}(\cos 2x)(2)+\cos e^{2x}\times e^{2x}(2)$$

6) $f(x)=\tan^4(\sec(\cos x))$

$$f'(x)=4\tan^3(\sec(\cos x))\sec^2(\sec(\cos x))$$
$$\times\sec(\cos x)\tan x(\cos x)x-\sin x$$

7) $f(x)=2\sin x-e^x$

$$f'(x)=2\cos x-e^x$$

8) $f(x)=\frac{\ln x}{4}-\pi\cos x$

$$f(x)=\frac{1}{4}\ln x-\pi\cos x$$

$$f'(x)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{x}-(-\pi\sin x)$$

$$f'(x)=\frac{1}{4x}+\pi\sin x$$

9) $f(x)=\ln\left(\frac{1}{x^3}\right)+x^4$

$$f(x)=\ln 1-\ln x^3+x^4$$

$$f(x)=0-3\ln x+x^4$$

$$f'(x)=-3\left(\frac{1}{x}\right)+4x^3$$

10) $f(x)=e^{x+1}+1$

$$f'(x)=e^{x+1}=e^x\cdot e^1$$

11) $f(x)=e^x+x^e$

$$f'(x)=e^x+ex^{e-1}$$

12) $f(x)=\ln\left(\frac{10}{x^n}\right)$

$$f(x)=\ln 10-\ln x^n$$

$$f(x)=\ln 10-n\ln x$$

$$f'(x)=0-n\times\frac{1}{x}=\frac{-n}{x}$$

مثـال15: اذا كان $f(x)=\ln kx$ حيث k عدد حقيقي موجب و $x>0$ فأبين أن $f'(x)=\frac{1}{x}$

الحل:

$$f(x)=\ln k\cdot x=\ln k+\ln x$$

$$f'(x)=0+\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$$

مثال16: اذا كان الاقتران $y=\log x$ فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

1) اثبت أن $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\ln 10}$

الحل:

قاعدة $\left(\log x=\frac{\ln x}{\ln 10}\right)$

$$y=\log x=\frac{\ln x}{\ln 10}$$

$$y=\frac{1}{\ln 10}\times \ln x$$

$$y'=\frac{1}{\ln 10}\times\frac{1}{x}$$

$$y'=\frac{1}{x\ln 10}$$

2) معتمدا على النتيجة من السؤال السابق، أجد $\frac{dy}{dx}$ للاقتران $y=\log ax^2$ حيث a عدد حقيقي موجب

الحل:

$$y=\log a+2\log x$$

$$y'=\frac{2}{x\ln 10}$$

مثال17: اذا كانت $f(1)=2,\ f'(1)=3$ وكانت $g(1)=-1,\ g'(1)=1$

$h(x)=(fg)(x)$ ، أجد $h'(1)$

الحل:

$$h'(x)=f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$$

$$h'(1)=f(1)g'(1)+g(1)f'(1)$$

$$=2\times 1+-1\times 3=2-3=-1$$

تدريب 1:

اذا كان $f(x),g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق وكانت $f'(2)=-1,\ f(2)=10$ $g'(2)=2,g(2)=-3$ أجد $h'(2)$ في الحالات التالية:

1) $h(x)=2g(x)f(x)$

2) $h(x)=\frac{2f(x)}{4+g(x)}$

تدريب 2:

اذا كان $f(x)=\frac{1}{x}$ وكان $g'(1)=-2,g(1)=3$ اجد ما يلي:

1) $(3f+g+3\ln 4)'(1)$

2) $(fg)'(1)$

3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(1)$

4) $\left(\dfrac{f(1)}{g}\right)'(1)$

5) $\left(\dfrac{f}{g'(1)}\right)'(1)$

6) $\left(x+e^{x}+g\right)'(1)$

7) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f}{g+f}\right)'(1)$

8) $\left(\ln x\cdot g(x)\right)'(1)$

مثال18: ابحث قابلية اشتقاق كل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة

1) $f(x)=|x-5| \quad ,x=5$

الحل:

نعيد التعريف $x-5=0\Rightarrow x=5$

5 - x	x - 5
- -	+ +

$\longleftarrow\; 5 \;\longrightarrow$

$f(x)$ متصل عند $x=5$

$$f'(x)=\begin{cases}-1 & ,x<5\\ 1 & ,x>5\end{cases}$$

$f'(5^{+})\neq f'(5^{-})$ اذن $f'(5)$ غير موجودة

2) $f(x)=x^{\frac{2}{5}} \quad ,x=0$

الحل:

$$f'(x)=\frac{2}{5}x^{\frac{-3}{5}}=\frac{2}{5x^{\frac{3}{5}}}$$

$f'(0)=\dfrac{2}{0}$ غير موجودة

3) $f(x)=\begin{cases}x^2 & ,x\le 1\\ x^2-2x & ,x>1\end{cases} \quad ,x=1$

الحل:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=(1)^2=1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=1-2=-1$$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ غير موجودة

$f(x)$ غير متصل عند $x=1$

$f'(1)$ غير موجودة

4) $f(x)=\dfrac{3}{x} \quad ,x=4$

الحل:

$$f(x)=3x^{-1}$$

$$f'(x)=-3x^{-2}=\frac{-3}{x^2}$$

$$f'(4)=\frac{-3}{16}$$

5) $f(x)=(x-6)^{\frac{2}{3}} \quad , x=6$

$$f'(x)=\frac{2}{3}(x-6)^{\frac{-1}{3}}=\frac{2}{3(x-6)^{\frac{1}{3}}}$$

$f'(6)=\frac{2}{0}$ غير موجودة

6) $f(x)=\begin{cases} x+1 & , x\neq 4 \\ 3 & , x=4 \end{cases} \quad , x=4$

$f(4)=3$

$\lim\limits_{x\to 4} f(x)=4+1=5$

$f(4)\neq \lim\limits_{x\to 4} f(x)$

$f(x)$ غير متصل عند $x=4$

$f(x)$ غير قابل للاشتقاق

مثال19:

اذا كـــــان $f(x)=\begin{cases} x^2 & , x\leq 2 \\ mx+b & , x>2 \end{cases}$

فأجد قيمة كلا من m و b اللتين تجعلان f قابلا للاشتقاق عند جميع قيم x الحقيقية، مبرراً إجابتي

الحل:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & , x\leq 2 \\ m & , x>2 \end{cases}$$

$f'(2^-)=f'(2^+)$

$2(2)=m \Rightarrow m=4$

$f(x)$ متصل عند $x=2$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

$(2)^2=4(2)+b$

$4=8+b \Rightarrow b=4-8=-4$

مثال20: احدد قيمة (قيم) x التي لا يكون عندها كل اقتران مما يأتي قابلا للاشتقاق

1) $f(x)=\frac{x-8}{x^2-4x-5}$

الحل:

عند اصفار المقام

$x^2-4x-5=0$

$(x-5)(x+1)=0$

$x=5 \quad , \quad x=-1$

غير قابل للاشتقاق عند $x=5,-1$

2) $f(x)=\sqrt[3]{3x-6}+5$

الحل:

$f(x)=(3x-6)^{\frac{1}{3}}+5$

$$f'(x)=\frac{1}{3}(3x-6)^{\frac{-2}{3}}\times 3=\frac{1}{(3x-6)^{\frac{7}{3}}}$$

$3x-6=0 \Rightarrow 3x=6 \Rightarrow x=2$

غير قابل للاشتقاق عند $x=2$

3) $f(x)=|x^2-9|$

الحل:

نعيد التعريف

$$x^2-9=0 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3$$

x^2-9	$9-x^2$	x^2-9
$++$	$--$	$++$

$-3 \qquad 3$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & ,x<-3 \\ -2x & ,-3<x<3 \\ 2x & ,x>3 \end{cases}$$

$$f'(-3^-)\neq f'(-3^+)$$

$f'(x)$ غير موجودة عند $x=3,-3$

مثال21: اذا كان $f(x)=x|x|$ فأثبت أن $f'(0)$ موجودة

الحل:

$x=0$

$-x$	x
$--$	$++$

0

$$f(x)=\begin{cases} -x\cdot x=-x^2 & ,x<0 \\ x\cdot x=x^2 & ,x\geq 0 \end{cases}$$

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)$$

$f(x)$ متصل عند $x=0$

$$f'(x)=\begin{cases} -2x & ,x<0 \\ 2x & ,x>0 \end{cases}$$

$$f'(0^-)=0 \quad , \quad f'(0^+)=0$$

$$\therefore f'(0)=0$$

المشتقات العليا

اذا كانت $y=f(x)$ ، فإن:

المشتقة الاولى $\dfrac{dy}{dx}=y'=f'(x)$

المشتقة الثانية $\dfrac{d^2y}{dx^2}=y''=f''(x)$

المشتقة الثالثة $\dfrac{d^3y}{dx^3}=y'''=f'''(x)$

المشتقة الرابعة $\dfrac{d^4y}{dx^4}=y^{(4)}=f^{(4)}(x)$

المشتقة النونية $\dfrac{d^ny}{dx^n}=y^{(n)}=f^{(n)}(x)$

مثال1: أجد المشتقة العليا المطلوبة في كل مما يأتي:

1) $f(x)=x^3-4x^2+7x-3 \quad , f'''(5)$

$$f'(x)=3x^2-8x+7$$

$$f''(x)=6x-8$$

$$f'''(x)=6$$

$$f'''(5)=6$$

2) $f(x)=4\sin x-5\cos x \quad , f'''(x)$

$$f'(x)=4\cos x+5\sin x$$

$$f''(x)=-4\sin x+5\cos x$$

$$f'''(x)=-4\cos x-5\sin x$$

7) $f(x) = xe^x \quad , f^{(4)}(x)$

$f'(x) = xe^x + e^x$

$f''(x) = xe^x + e^x + e^x = xe^x + 2e^x$

$f'''(x) = xe^x + e^x + 2e^x = xe^x + 3e^x$

$f^{(4)}(x) = xe^x + e^x + 3e^x = xe^x + 4e^x$

مثال2: أجد المشتقات الثلاث الأولى للاقتران:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} = x^{-1}\sin x$$

الحل:

$f'(x) = x^{-1}\cos x + \sin x\left(-x^{-2}\right)$

$$f''(x) = x^{-1}(-\sin x) + \cos x\left(-x^{-2}\right) + \sin x\left(2x^{-3}\right) + \left(-x^{-2}\right)(\cos x)$$

$$f'''(x) = x^{-1}(-\cos x) + (-\sin x)\left(-x^{-2}\right) + \cos x\left(2x^{-3}\right) + \left(-x^{-2}\right)(-\sin x) + \sin x\left(-6x^{-4}\right) + \left(2x^{-3}\right)(\cos x) + \left(-x^{-2}\right)(-\sin x) + (\cos x)\left(2x^{-3}\right)$$

مثال3: الاحظ المشتقة المعطاة في كل مما يأتي، ثم أجد المشتقة العليا المطلوبة:

1) $f''(x) = 2 - \frac{2}{x} \quad , f'''(x)$

$f'''(x) = \frac{2}{x^2}$

3) $f(x) = (\sin x + \cos x)^5 \quad , f'(0)$

$f'(x) = 5(\sin x + \cos x)^4(\cos x - \sin x)$

$f'(0) = 5(0+1)^4(1-0) = 5\times1\times1 = 5$

4) $f(x) = \cos x \quad , f^{(4)}(x)$

$f'(x) = -\sin x$

$f''(x) = -\cos x$

$f'''(x) = \sin x$

$f^{(4)}(x) = \cos x$

5) $f(x) = \frac{1}{2+3x} \quad , f^{(4)}(x)$

$f(x) = (2+3x)^{-1}$

$f'(x) = -(2+3x)^{-2}(3)$

$f''(x) = 2(2+3x)^{-3}(3)^2$

$f'''(x) = -6(2+3x)^{-4}(3)^3$

$f^{(4)}(x) = 24(2+3x)^{-5}(3)^4$

6) $f(x) = (1+\tan x)^3 \quad , f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$f'(x) = 3(1+\tan x)^2\left(\sec^2 x\right)$

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3(1+1)^2(2) = 3\times4\times2 = 24$

2) $f'''(x)=2\sqrt{x}\quad , f^{(4)}(x)$

$$f^{(4)}(x)=2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

مثـــال4: اذا كـان الاقتران $y=e^x\sin x$ فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

1) أجد $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{d^2y}{dx^2}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=e^x\cos x+\sin xe^x$$

$$=e^x\cos x+e^x\sin x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=e^x(-\sin x)+\cos xe^x+e^x(\cos x)+\sin xe^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2e^x\cos x$$

2) أثبت أن: $\frac{d^2y}{dx^2}=2\frac{dy}{dx}-2y$

الحل:

$$2\frac{dy}{dx}-2y=2e^x\cos x+2e^x\sin x-2e^x\sin x$$

$$=2e^x\cos x=\frac{d^2y}{dx^2}$$

مثـــال4: اذا كان $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ حيث $x>0$

أجد $f'(x), f''(x)$

الحل:

$$f'(x)=\frac{x\left(\frac{1}{x}\right)-\ln x(1)}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$f''(x)=\frac{x^2\left(\frac{-1}{x}\right)-(1-\ln x)(2x)}{x^4}$$

$$=\frac{-x-2x+2x\ln x}{x^4}$$

$$=\frac{2x\ln x-3x}{x^4}$$

مثـــال5: اذا كـان $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$ فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً

1) أثبت أن $f''(x)=\frac{6\ln x-5}{x^4}$

الحل:

$$f'(x)=\frac{x^2\left(\frac{1}{x}\right)-\ln x(2x)}{x^4}$$

$$=\frac{x-2x\ln x}{x^4}=\frac{x(1-2\ln x)}{x^4}$$

$$=\frac{1-2\ln x}{x^3}$$

$$f''(x)=\frac{x^3\left(\frac{-2}{x}\right)-(1-2\ln x)3x^2}{x^6}$$

$$=\frac{-2x^2-(1-2\ln x)3x^2}{x^6}$$

$$f''(x) = -2(\cos(2x+1))(2)$$

$$= -4\cos(2x+1)$$

$$f'''(x) = -4(-\sin(2x+1))(2)$$

$$= 8\sin(2x+1)$$

$$f^{(4)}(x) = 8(\cos(2x+1)(2))$$

$$= 16\cos(2x+1)$$

$$f^{(5)}(x) = 16(-\sin(2x+1)(2))$$

$$= -32\sin(2x+1)$$

3) $f(x) = \cos x^2 \quad , f''(x)$

$$f'(x) = -\sin x^2(2x) = -2x\sin x^2$$

$$f''(x) = -2x\cos x^2(2x) + \sin x^2(-2)$$

$$= -4x^2\cos x^2 - 2\sin x^2$$

مثال7: أجد المشتقة الثانية لكل اقتران مما يأتي عند قيمة المعطاة:

1) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+4} \quad , x = -2$

$$f'(x) = \frac{(x^2+4)(2x) - (x^2-4)(2x)}{(x^2+4)^2}$$

$$= \frac{2x^3+8x-2x^3+8x}{(x^2+4)^2} = \frac{16x}{(x^2+4)^2}$$

$$= \frac{x^2(-2-3+6\ln x)}{x^6}$$

$$= \frac{6\ln x - 5}{x^4}$$

2) أجد قيمة المقدار:

$$x^4 f''(x) + 4x^3 f'(x) + 2x^2 f(x) + 1$$

الحل:

$$x^4\left(\frac{6\ln x-5}{x^4}\right) + 4x^3\left(\frac{1-2\ln x}{x^3}\right) + 2x^2\left(\frac{\ln x}{x^2}\right) + 1$$

$$= 6\ln x - 5 + 4 - 8\ln x + 2\ln x + 1$$

$$= 8\ln x - 8\ln x - 5 + 5 = 0$$

مثال6: أجد المشتقة العليا المطلوبة في كل مما يأتي:

1) $f(x) = \sin \pi x \quad , f'''(x)$

$$f'(x) = \pi\cos\pi x$$

$$f''(x) = \pi(-\sin\pi x)(\pi)$$

$$= -\pi^2\sin\pi x$$

$$f'''(x) = -\pi^2(\cos\pi x)(\pi)$$

$$= -\pi^3\cos\pi x$$

2) $f(x) = \cos(2x+1) \quad , f^{(5)}(x)$

$$f'(x) = -\sin(2x+1)(2)$$

$$f''(x)=\frac{\left(x^2+4\right)^2(16)-(16x)\left(2\left(x^2+4\right)\right)(2x)}{\left(x^2+4\right)^4}$$

$$f''(-2)=\frac{(8)^2(16)-16(-2)(2)(8)(-4)}{(8)^4}$$

$$=\frac{1024-2048}{(8)^2}=\frac{-1}{4}$$

2) $f(x)=\dfrac{1+x}{1+\sqrt[3]{x}}\quad , x=1$

$$f(x)=\frac{1+x}{1+\sqrt[3]{x}}=\frac{1+x}{1+x^{\frac{1}{3}}}$$

$$f'(x)=\frac{\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)-(1+x)\left(\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}\right)}{\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^2}$$

$$=\frac{1+x^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}-\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}}{\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^2}$$

$$=\frac{1+\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}}{\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^2}$$

$$f''(x)=\frac{\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^2\left(\frac{2}{9}x^{\frac{-2}{3}}+\frac{2}{9}x^{\frac{-5}{3}}\right)-\left(1+\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}-\frac{2}{3}x^{\frac{-2}{3}}\right)2\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)\left(\frac{2}{3}x^{\frac{-2}{3}}\right)}{\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^4}$$

عوض $x=1 \Leftarrow f''(1)=\dfrac{-8}{144}$

3) $f(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}\quad , x=4$

$$f'(x)=\frac{-\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

$$f''(x)=\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2\left(\frac{1}{4}x^{\frac{-3}{2}}\right)-\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}(2)\left(1+\sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}\right)}{\left(1+\sqrt{x}\right)^4}$$

$$f''(4)=\frac{9\left(\frac{1}{32}\right)-\frac{6}{16}}{81}=\frac{\frac{-3}{32}}{81}$$

مثال8:

اذا كان الاقتران $f(x)=3\sin x-\sin^3 x$ فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً

1) أثبت أن $f'(x)=3\cos^3 x$

الحل:

$$f'(x)=3\cos x-3\sin^2 x\cos x$$

$$=3\cos x\left(1-\sin^2 x\right)$$

$$=3\cos x\left(\cos^2 x\right)$$

$$f'(x)=3\cos^3 x$$

2) أجد $f''(x)$

الحل:

$$f''(x)=3\times 3\cos^2 x(-\sin x)$$

$$=-9\cos^2 x\sin x$$

مثال9: اذا كان الاقتران $y=e^{2x}+e^{-2x}$ فأثبت أن $f''(x)=4f(x)$

الحل:

$$f'(x)=2e^{2x}-2e^{-2x}$$

$$f''(x)=4e^{2x}+4e^{-2x}$$

$$=4\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)=4f(x)$$

مثال10:

اذا كان الاقتران $f(x)=\sin 4x+\cos 4x$

فأثبت أن $f''(x)+16f(x)=0$

الحل:

$$f(x)=\sin 4x+\cos 4x$$

$$f'(x)=4\cos 4x-4\sin 4x$$

$$f''(x)=-16\sin 4x-16\cos 4x$$

$$=-16(\sin 4x+\cos 4x)$$

$$=-16f(x)$$

$$f''(x)+16f(x)=-16f(x)+16f(x)=0$$

قاعدة

$$(f\circ g)'(x)=\left(f(g(x))\right)'=f'(g(x))g'(x)$$

$$(g\circ f)'(x)=\left(g(f(x))\right)'=g'(f(x))f'(x)$$

مثال11: أجد $(f\circ g)'(x)$ عند قيمة x المعطاة في كل مما يأتي:

1) $f(u)=u^5+1, u=g(x)=\sqrt{x}, x=1$

$$f'(u)=5u^4$$

$$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(f\circ g)'(1)=f'(g(1))g'(1)$$

$$=f'(1)\times\frac{1}{2}=5\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

2) $f(u)=u+\frac{1}{\cos^2 u}, u=g(x)=\pi x, x=\frac{1}{4}$

$$f(u)=u+\frac{1}{\cos^2 u}=u+\sec^2 u$$

$$f'(u)=1+2\sec u(\sec u\tan u)$$

$$=1+2\sec^2 u\tan u$$

$$g'(x)=\pi$$

$$(f\circ g)'\left(\frac{1}{4}\right)=f'\left(g\left(\frac{1}{4}\right)\right)g'\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\times\pi$$

$$=(1+2(2)\times 1)\times\pi=5\pi$$

مثال12:

اذا كان $g(x)=\sqrt{5x-1},\ f'(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

أجد $\left(fg(x)\right)'$ عندما $x=1$

الحل:

$$g'(x)=\frac{5}{2\sqrt{5x-1}}$$

$$\left(fg(x)\right)'=f'(g(x))\,g'(x)$$

$$=f'(g(1))\,g'(1)$$

$$=f'(2)\times\frac{5}{4}=\frac{2}{5}\times\frac{5}{4}=\frac{1}{2}$$

قاعدة السلسلة

اذا كانت (y) بدلالة (u)

وكانت (u) بدلالة (x)

فإن: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\times\dfrac{du}{dx}$

مثال1:

اذا كانت $u=x^3+2\quad,\quad y=3u^2+1$

أجد $\dfrac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=(6u)(3x^2)$$

$$\frac{dy}{dx}=6(x^3+2)(3x^2)$$

مثال2:

اذا كانت $u=x^2+3\quad,\quad y=u^3+2u+5$

أجد $\dfrac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=(3u^2+2)(2x)$$

$$\frac{dy}{dx}=3\left((x^2+3)^2+2\right)(2x)$$

❖ مشتقة المعادلات الوسيطية

اذا كانت x, y بدلالة نفس المتغير (t) فإننا نسميها اقترانات وسيطية ويكون (t) هو الوسيط وبذلك تكون مشتقة (y) بدلالة (x) حيث:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

مثال1: اذا كانت $x=t^2\quad,\quad y=3t^3$

أجد $\dfrac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{6t^2}{2t}=3t$$

مثال2:

اذا كانـــــــــــت $x = 2\sin t$, $y = 3\cos t$

أجد $\frac{dy}{dx}$ عندما $t = \frac{\pi}{4}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-3\sin t}{2\cos t} = \frac{-3\sin\frac{\pi}{4}}{2\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{-3}{2}$$

مثال3: يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية

$$x = t^2 \quad , \quad y = 2t$$

أجد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة t

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2}{2t} = \frac{1}{t}$$

تدريب:

اذا كانت

$$x = 5(t - \sin t) \quad , \quad y = 5(4 - \cos t)$$

حيث $0 \le t \le 2\pi$ ، أجد $\frac{dy}{dx}$

❖ **المشتقة الثانية في المعادلات الوسيطية**

خطوات الحل:

1) نجد المشتقة الاولى

2) نجد المشتقة الثانية ثم اضربها في $\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$

مثال1: اجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطية عندما $t = 1$

$$x = t^3 + 3t^2 \quad , \quad y = t^4 - 8t^2$$

الحل:

1) نجد $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4t^3 - 16t}{3t^2 + 6t}$$

2) نجد المشتقة الثانية

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(3t^2+6t)(12t^2-16) - (4t^3-16t)(6t+6)}{(3t^2+6t)^2} \times \frac{1}{3t^2+6t}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1} = \frac{4}{27}$$

مثال2:

اذا كانـــــــــــت $y = \cos 3t$, $x = \sin 3t$

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3\sin 3t}{3\cos 3t} = -\tan 3t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -3\sec^2 3t \times \frac{1}{3\cos 3t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sec^3 3t$$

مثال3:

اذا كانـــــــــت $x=t^2+4t \quad , \quad y=t^2-3t$

أجد $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t-3}{2t+4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(2t+4)(2)-(2t-3)(2)}{(2t+4)^2}\times\frac{1}{2t+4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{4t+8-4t+6}{(2t+4)^2}\times\frac{1}{2t+4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{14}{(2t+4)^3}$$

مثال4:

أجد $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطية الآتية عندما $t=2$

$$x=3t^2+1 \quad , \quad y=t^3-2t^2$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2-4t}{6t}=\frac{t(3t-4)}{6t}=\frac{1}{2}t-\frac{4}{6}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6t}=\frac{1}{12t}=\frac{1}{12(2)}=\frac{1}{24}$$

مثال5: أجد $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ لكل مما يأتي:

1) $x=\sin t, y=\cos t, t=\dfrac{\pi}{4}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\sin t}{\cos t}=-\tan t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\sec^2 t\times\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$=-\sec^2 t\times\frac{1}{\cos t}=-\sec^3 t$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\sec^3\frac{\pi}{4}=-\left(\sqrt{2}\right)^3=-2\sqrt{2}$$

2) $x=e^{-t}, y=t^3+t+1, t=0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2+1}{-e^{-t}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-e^{-t}(6t)-\left(3t^2+1\right)\left(-e^{-t}\right)}{\left(-e^{-t}\right)^2}$$

$$=\frac{-e^{-t}(6t)-\left(3t^2+1\right)\left(-e^{-t}\right)}{\left(-e^{-t}\right)^2}\times\frac{1}{-e^{-t}}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=\frac{0-(0+1)(-1)}{(-1)^2}\times\frac{1}{-1}=-1$$

استعمال التعريف العام للمشتقة في اثبات نظريتا مشتقة الضرب والقسمة

نظرية (1)

اذا علمت أن $f(x), g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق وكان $A(x)=f(x)g(x)$ مستخدما التعريف العام للمشتقة اثبت أن $A'(x)=f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$

البرهان:

$$A'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{A(x+h)-A(x)}{h}$$

$$A'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$A'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}$$

$$A'(x)=\lim_{h\to 0}\left(f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$$

$$A'(x)=\lim_{h\to 0}f(x+h)\times\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+\lim_{h\to 0}g(x)\times\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$A'(x)=f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$$

نظرية (2)

اذا علمت أن $f(x), g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق وكان $A(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, g(x)\neq 0$ مستخدما التعريف العام للمشتقة اثبت أن $A'(x)=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

البرهان:

$$A'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{A(x+h)-A(x)}{h}$$

$$A'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-g(x+h)f(x)}{hg(x)g(x+h)}$$

$$A'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x)f(x+h)-g(x)f(x)+g(x)f(x)-f(x)g(x+h)}{hg(x)g(x+h)}$$

$$A'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x)\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}+f(x)\dfrac{g(x)-g(x+h)}{h}}{g(x)g(x+h)}$$

$$A'(x)=\frac{\lim\limits_{h\to 0}g(x)\times\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim\limits_{h\to 0}f(x)\times\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x)-g(x+h)}{h}}{\lim\limits_{h\to 0}g(x)g(x+h)}$$

$$A'(x)=\frac{g(x)\times f'(x)+f(x)\times -g'(x)}{g(x)\times g(x)}$$

$$A'(x)=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

الاشتقاق الضمني

شكل السؤال:

1) تكون (y) لها قوة مثلا $y^5, \sqrt{y}$

2) تكون (x) مرتبطة في (y) مثلا $x^2 y, \frac{x}{y^5}$

3) تكون الزاوية لـ (y) لـ sin أو cos مثلا $\sin y, \cos \sqrt{y}$

خطوات الحل:

1) اشتق طرفي المعادلة بالنسبة إلى (x)

2) كل ما نشتق (y) نضع بعدها $\frac{dy}{dx}$

3) انقل جميع الحدود التي تحتوي $\frac{dy}{dx}$ الى طرف وباقي الحدود في الطرف الآخر

4) اخرج $\frac{dy}{dx}$ عامل مشترك واقسم على الجزء المتبقي

مثال توضيحي:

اشتق ما يلي ضمنياً

1) $y^5 \Rightarrow 5y^4 \frac{dy}{dx}$

2) $x^2 y \Rightarrow x^2 \frac{dy}{dx} + y(2x)$

3) $\sin y^3 \Rightarrow (3y^2 y')(\cos y^3)$

مثال: اجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

1) $x^2 + y^2 = 4$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

2) $2xy - y^3 = 1$

$$2x\frac{dy}{dx} + 2y - 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x\frac{dy}{dx} - 3y^2\frac{dy}{dx} = -2y$$

$$\frac{dy}{dx}(2x - 3y^2) = -2y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2y}{2x - 3y^2}$$

3) $\sin x + \cos y = 2x - 3y$

$$\cos x - \sin y\frac{dy}{dx} = 2 - 3\frac{dy}{dx}$$

$$3\frac{dy}{dx} - \sin y\frac{dy}{dx} = 2 - \cos x$$

$$\frac{dy}{dx}(3 - \sin y) = 2 - \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - \cos x}{3 - \sin y}$$

4) $x^3 + 3y^2 = y^3$

$$3x^2 + 6y\frac{dy}{dx} = 3y^2\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-3x^2}{2y}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,2)}=\frac{-3}{4} \quad , \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,-2)}=\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4}$$

7) $\tan(3x+2y)=x^3+y^3$

$$\sec^2(3x+2y)\left(3+2\frac{dy}{dx}\right)=3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}$$

$$\sec^2(3x+2y)(3)+2\sec^2(3x+2y)\frac{dy}{dx}=3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}$$

$$2\sec^2(3x+2y)\frac{dy}{dx}-3y^2\frac{dy}{dx}=3x^2-\sec^2(3x+2y)$$

$$\frac{dy}{dx}\left(2\sec^2(3x+2y)-3y^2\right)=3x^2-\sec^2(3x+2y)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-\sec^2(3x+2y)}{2\sec^2(3x+2y)-3y^2}$$

8) $x^2+y^2=13$

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$2y\frac{dy}{dx}=-2x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{2y}=\frac{-x}{y}$$

9) $2x+5y^2=\sin y$

$$2+10y\frac{dy}{dx}=\cos y\frac{dy}{dx}$$

$$3x^2=3y^2\frac{dy}{dx}-6y\frac{dy}{dx}$$

$$3x^2=\frac{dy}{dx}\left(3y^2-6y\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2}{3y^2-6y}$$

5) $x^3+7y=4x^2+4y^2 \quad ,(1,1)$

$$3x^2+7\frac{dy}{dx}=8x+8y\frac{dy}{dx}$$

$$3x^2-8x=8y\frac{dy}{dx}-7\frac{dy}{dx}$$

$$3x^2-8x=\frac{dy}{dx}(8y-7)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-8x}{8y-7}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1)}=\frac{3-8}{8-7}=\frac{-5}{1}=-5$$

6) $x^3+y^2=5$

$$1+y^2=5\Rightarrow y^2=4\Rightarrow y=2,-2$$

$$(1,2),(1,-2)$$

$$3x^2+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$2y\frac{dy}{dx}=-3x^2$$

12) $y^5 = \dfrac{2x}{3x-2}$

$$5y^4\frac{dy}{dx} = \frac{(3x-2)(2)-(2x)(3)}{(3x-2)^2}$$

$$5y^4\frac{dy}{dx} = \frac{6x-4-6x}{(3x-2)^2}$$

$$5y^4\frac{dy}{dx} = \frac{-4}{(3x-2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4}{5y^4(3x-2)^2}$$

13) $x^3 - 6xy + 5y^3 = 2 \quad ,(2,1)$

$$3x^2 - \left(6x\frac{dy}{dx} + y(6)\right) + 15y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$3x^2 - 6y = -15y^2\frac{dy}{dx} + 6x\frac{dy}{dx}$$

$$3x^2 + 6y = \frac{dy}{dx}\left(-15y^2 + 6x\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+6y}{-15y^2+6x}$$

14) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} = \sqrt{xy}$

$$\frac{\sqrt{y}+\sqrt{x}}{\sqrt{xy}} = \sqrt{xy}$$ توحيد المقامات

$$\sqrt{y}+\sqrt{x} = xy$$

$$2 = \cos y\frac{dy}{dx} - 10y\frac{dy}{dx}$$

$$2 = \frac{dy}{dx}(\cos y - 10y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\cos y - 10y}$$

10) $\sin(x+y) = y^2\cos x$

$$\cos(x+y)\left(1+\frac{dy}{dx}\right) = -y^2\sin x + \cos x\left(2y\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\cos(x+y) + \cos(x+y)\frac{dy}{dx} = -y^2\sin x + 2y\cos x\frac{dy}{dx}$$

$$\cos(x+y)\frac{dy}{dx} - 2y\cos x\frac{dy}{dx} = -y^2\sin x - \cos(x+y)$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\cos(x+y) - 2y\cos x\right) = -y^2\sin x - \cos(x+y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y^2\sin x - \cos(x+y)}{\cos(x+y) - 2y\cos x}$$

11) $y^2 = \dfrac{x-1}{x+1}$

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)(1)-(x-1)(1)}{(x+1)^2}$$

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}$$

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{2y(x+1)^2} = \frac{1}{y(x+1)^2}$$

17) $x^2=\dfrac{x-y}{x+y}$

$$2x=\frac{(x+y)\left(1-\frac{dy}{dx}\right)-(x-y)\left(1+\frac{dy}{dx}\right)}{(x+y)^2}$$

$$2x(x+y)^2=x-x\frac{dy}{dx}+y-y\frac{dy}{dx}$$
$$-x-x\frac{dy}{dx}+y+y\frac{dy}{dx}$$

$$2x(x+y)^2=2y-2x\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x(x+y)^2}{2y-2x}$$

18) $x^2-2y^2=4$

$$2x-4y\frac{dy}{dx}=0$$

$$2x=4y\frac{dy}{dx}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{4y}=\frac{x}{2y}$$

19) $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{10}$

$$\frac{-1\times 2x}{x^4}+\frac{-2y\frac{dy}{dx}}{y^4}=0$$

$$\frac{-2}{x^3}+\frac{-2\frac{dy}{dx}}{y^3}=0$$

$$\frac{-2}{x^3}=\frac{2\frac{dy}{dx}}{y^3}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{-y^3}{x^3}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2\sqrt{x}}=x\frac{dy}{dx}+y$$

$$\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}-x\frac{dy}{dx}=y-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{y}}-x}$$

15) $3xy^2+y^3=8$

$$3x(2y)\frac{dy}{dx}+y^2(3)+3y^2\frac{dy}{dx}=0$$

$$6xy\frac{dy}{dx}+3y^2\frac{dy}{dx}=-3y^2$$

$$\frac{dy}{dx}\left(6xy+3y^2\right)=-3y^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-3y^2}{6xy+3y^2}$$

16) $\tan(x-y)=2xy^3+1$

$$\sec^2(x-y)\left(1-\frac{dy}{dx}\right)=2x\left(3y^2\right)\frac{dy}{dx}+y^3(2)$$

$$\sec^2(x-y)+\sec^2(x-y)\left(-\frac{dy}{dx}\right)=6xy^2\frac{dy}{dx}+2y^3$$

$$-\sec^2(x-y)\frac{dy}{dx}-6xy^2\frac{dy}{dx}=2y^3-\sec^2(x-y)$$

$$\frac{dy}{dx}\left(-\sec^2(x-y)-6xy^2\right)=2y^3-\sec^2(x-y)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y^3-\sec^2(x-y)}{-\sec^2(x-y)-6xy^2}$$

20) $\left(x^2+y^2\right)^2=50\left(x^2-y^2\right)$

$$2\left(x^2+y^2\right)\left(2x+2y\frac{dy}{dx}\right)=50\left(2x+2y\frac{dy}{dx}\right)$$

$$2\left(x^2+y^2\right)(2x)+2\left(x^2+y^2\right)2y\frac{dy}{dx}=100x-100y\frac{dy}{dx}$$

$$2\left(x^2+y^2\right)(2y)\frac{dy}{dx}+100y\frac{dy}{dx}=100x-2\left(x^2+y^2\right)(2x)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{100x-2\left(x^2+y^2\right)(2x)}{2\left(x^2+y^2\right)(2y)+100y}$$

21) $e^x y=xe^y$

$$e^x\frac{dy}{dx}+ye^x=xe^y\frac{dy}{dx}+e^y$$

$$e^x\frac{dy}{dx}-xe^y\frac{dy}{dx}=e^y-ye^x$$

$$\frac{dy}{dx}\left(e^x-xe^y\right)=e^y-ye^x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^y-ye^x}{e^x-xe^y}$$

22) $3^x=y-2xy$

$$\ln 3\left(3^x\right)=\frac{dy}{dx}-2x\frac{dy}{dx}+y(-2)$$

$$\ln 3\left(3^x\right)+2y=\frac{dy}{dx}-2x\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\ln 3\left(3^x\right)+2y}{1-2x}$$

23) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=5$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}=\frac{-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

24) $x=\sec\frac{1}{y}$

$$1=\sec\frac{1}{y}\tan\frac{1}{y}\times-\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{-\sec\frac{1}{y}\tan\frac{1}{y}\times\frac{1}{y^2}}$$

تدريب:

25) $(\sin\pi x+\cos\pi y)^2=2$

26) $\frac{x}{y^2}+\frac{y^2}{x}=5$

$$\frac{x^2+y^4}{y^2x}=5$$

$$x^2+y^4=5y^2x$$

$$2x+4y^3\frac{dy}{dx}=5y^2(1)+x(10y)\frac{dy}{dx}$$

$$4y^3\frac{dy}{dx}-10xy\frac{dy}{dx}=5y^2-2x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{5y^2-2x}{4y^3-10xy}$$

$$\frac{dy}{dx}(-\sin x\sin y+5)=2x-\cos y\cos x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x-\cos y\cos x}{-\sin x\sin y+5}$$

30) $2y^2+2xy-1=0 \quad , x=\frac{1}{2}$

$$2y^2+y-1=0$$

$$(2y-1)(y+1)=0$$

$$y=\frac{1}{2} \quad , \quad y=-1$$

$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \quad , \quad \left(\frac{1}{2},-1\right)$$

$$4y\frac{dy}{dx}+2x\frac{dy}{dx}+y(2)=0$$

$$4y\frac{dy}{dx}+2x\frac{dy}{dx}=-2y$$

$$\frac{dy}{dx}(4y+2x)=-2y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2y}{4y+2x}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=\frac{-1}{2+1}=\frac{-1}{3}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(\frac{1}{2},-1\right)}=\frac{-2}{-4+1}=\frac{-2}{-3}=\frac{2}{3}$$

27) $x+y=\cos(xy)$

$$1+\frac{dy}{dx}=-\sin(xy)\left(x\frac{dy}{dx}+y\right)$$

$$1+\frac{dy}{dx}=-\sin xy\left(x\frac{dy}{dx}\right)-\sin(xy)y$$

$$\frac{dy}{dx}(1+x\sin xy)=-y\sin(xy)-1$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-y\sin(xy)-1}{1+x\sin xy}$$

28) $x^2+y^2=\ln(x+y)^2$

$$x^2+y^2=2\ln(x+y)$$

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=2\left(\frac{1+\frac{dy}{dx}}{(x+y)}\right)$$

$$x+y\frac{dy}{dx}=\frac{1+\frac{dy}{dx}}{(x+y)}$$

$$(x+y)x+y(x+y)\frac{dy}{dx}=1+\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x(x+y)-1}{1-y(x+y)}$$

29) $\sin x\cos y=x^2-5y$

$$\sin x\left(-\sin y\frac{dy}{dx}\right)+\cos y\cos x=2x-5\frac{dy}{dx}$$

31) $y^3+2x^2=11y \quad ,y=1$

$$1+2x^2=11 \Rightarrow x^2=5$$

$$\left(\sqrt{5},1\right),\left(-\sqrt{5},1\right)$$

$$3y^2\frac{dy}{dx}+4x=11\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}\left(3y^2+11\right)=-4x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-4x}{3y^2+11}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(\sqrt{5},1\right)}=\frac{-4\sqrt{5}}{14}\ ,\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(-\sqrt{5},1\right)}=\frac{4\sqrt{5}}{14}$$

32) $x^3y^3=144$

$$x^3 3y^2\frac{dy}{dx}+y^3\left(3x^2\right)=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-y^3\left(3x^2\right)}{x^3 3y^2}=\frac{-y}{x}$$

33) $xy=\sin\left(x+y\right)$

$$x\frac{dy}{dx}+y=\cos\left(x+y\right)\left(1+\frac{dy}{dx}\right)$$

$$x\frac{dy}{dx}-\cos\left(x+y\right)\frac{dy}{dx}=\cos\left(x+y\right)-y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos\left(x+y\right)-y}{x-\cos\left(x+y\right)}$$

34) $x\sin y-y\cos x=1$

$$x\cos y\frac{dy}{dx}+\sin y-y\left(-\sin x\right)+\cos x-\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$$

$$x\cos y\frac{dy}{dx}+\cos x\frac{dy}{dx}=-\sin y-y\sin x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\sin y-y\sin y}{x\cos y+\cos x}$$

35) $\cot y=x-y$

$$-\csc^2 y\frac{dy}{dx}=1-\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}-\csc^2 y\frac{dy}{dx}=1$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1-\csc^2 y}$$

36) $\sqrt{xy}+x+y^2=0$

$$\sqrt{x}\times\sqrt{y}+x+y^2=0$$

$$\sqrt{x}\times\frac{\frac{dy}{dx}}{2\sqrt{y}}+\sqrt{y}+\frac{1}{2\sqrt{x}}+1+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{\sqrt{x}\frac{dy}{dx}}{2\sqrt{y}}+2y\frac{dy}{dx}=-1-\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1-\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}+2y}$$

❖ المشتقة الثانية في الاشتقاق الضمني

مثال: أجد $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ لكل مما يأتي:

1) $x^2y-4x=5$

$$x^2\frac{dy}{dx}+y(2x)-4=0$$

$$x^2\frac{dy}{dx}=4-2xy$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4-2xy}{x^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(x^2\right)\left(-2x\dfrac{dy}{dx}+y(-2)\right)-(4-2xy)(2x)}{x^4}$$

2) $x^2+y^2=8$

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{2y}=\frac{-x}{y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\left(\frac{y-x\dfrac{dy}{dx}}{y^2}\right)=-\left(\frac{y-x\dfrac{-x}{y}}{y^2}\right)$$

$$=-\left(\frac{\dfrac{y^2+x^2}{y}}{y^2}\right)=\frac{-8}{y^3}$$

3) $y^2=x^3$

$$2y\frac{dy}{dx}=3x^2\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2}{2y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3}{2}\left(\frac{y(2x)-x^2\dfrac{dy}{dx}}{y^2}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{2xy-x^2\dfrac{3}{2}\dfrac{x^2}{y}}{y^2}\right)$$

4) $xy+y^2=2x$

$$x\frac{dy}{dx}+y(1)+2y\frac{dy}{dx}=2$$

$$x\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}=2-y$$

$$\frac{dy}{dx}(x+2y)=2-y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2-y}{x+2y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(x+2y)\left(-\dfrac{dy}{dx}\right)-(2-y)\left(1+2\dfrac{dy}{dx}\right)}{(x+2y)^2}$$

$$=\frac{(x+2y)\left(\dfrac{2-y}{x+2y}\right)-(2-y)\left(1+2\dfrac{2-y}{x+2y}\right)}{(x+2y)^2}$$

$$=\frac{2xy-x^2\left(\frac{x^2}{y}\right)}{y^2}=\frac{2xy^2-x^4}{y^3}$$

8) $x+y=\sin y$

$$1+\frac{dy}{dx}=\cos y\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}(1-\cos y)=-1$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{1-\cos y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-(-\sin y)\frac{dy}{dx}}{(1-\cos y)^2}$$

$$=\frac{\sin y\frac{-1}{1-\cos y}}{(1-\cos y)^2}=\frac{-\sin y}{(1-\cos y)^3}$$

9) $4y^3=6x^2+1$

$$12y^2\frac{dy}{dx}=12x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{12x}{12y^2}=\frac{x}{y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y^2(1)-x(2y)\frac{dy}{dx}}{y^4}$$

$$=\frac{y-x(2y)\frac{dy}{dx}}{y^4}$$

5) $x^2-y^2=1$

$$2x-2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{2y}=\frac{x}{y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y(1)-x\frac{dy}{dx}}{y^2}=\frac{y-x\left(\frac{x}{y}\right)}{y^2}$$

$$=\frac{\frac{y^2-x^2}{y}}{y^2}=\frac{y^2-x^2}{y^3}=\frac{-1}{y^3}$$

6) $x=\tan y$

$$1=\sec^2 y\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sec^2 y}=\cos^2 y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2\cos y(-\sin y)\frac{dy}{dx}$$

$$=-2\sin y\cos y\left(\cos^2 y\right)$$

$$=-2\sin y\cos^3 y$$

7) $2x^3-3y^2=8$

$$6x^2-6y\frac{dy}{dx}=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y}$$

$$=\frac{2xy-x^2\frac{dy}{dx}}{y^2}$$

$$= \frac{y^2 - 2xy\dfrac{x}{y^2}}{y^4}$$

$$= \frac{y^2 - 2\dfrac{x^2}{y}}{y^4} = \frac{y^3 - 2x^2}{y^5}$$

10) $xy + e^y = e$

$$x\frac{dy}{dx} + y + e^y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x+e^y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(x+e^y\right)\left(-\dfrac{dy}{dx}\right) + y\left(1 + e^y\dfrac{dy}{dx}\right)}{\left(x+e^y\right)^2}$$

$$= \frac{\left(x+e^y\right)\left(\dfrac{y}{x+e^y}\right) + y\left(1 + e^x\left(\dfrac{-y}{x+e^y}\right)\right)}{\left(x+e^y\right)^2}$$

الاشتقاق اللوغاريتمي

يمكن استعمال الاشتقاق الوغاريتمي لايجاد مشتقة بعض الاقترانات، كما يلي:

1) أخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي المعادلة

2) اشتقاق المعادلة ضمنياً بالنسبة إلى (x)

3) حل المعادلة الناتجة لـ $\dfrac{dy}{dx}$ ثم ضع $f(x)$ بدلاً من (y)

مثال1: أجد مشتقة كل مما يأتي باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي:

1) $y = x^x$

$$\ln y = \ln x^x$$

$$\ln y = x\ln x$$

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}(x\ln x)$$

$$\frac{1}{y}\times\frac{dy}{dx} = 1\times\ln x + x\times\frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = y(\ln x + 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = x^x(\ln x + 1)$$

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{24x}{3x^2+5}-\frac{6}{5(2x-1)}\right)\times\frac{(3x^2+5)^4}{\sqrt[5]{(2x-1)^3}}$$

4) $y=x^{\sqrt{x}}$

$$\ln y=\ln x^{\sqrt{x}}$$

$$\ln y=\sqrt{x}\ln x$$

$$\frac{1}{y}\times\frac{dy}{dx}=\sqrt{x}\left(\frac{1}{x}\right)+\ln x\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{2}\ln x\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{2}\ln x\right)\times y$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{2}\ln x\right)x^{\sqrt{x}}$$

5) $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x^4+1}}$

$$y=\left(\frac{x-1}{x^4+1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\ln y=\ln\left(\frac{x-1}{x^4+1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\ln y=\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x^4+1}$$

2) $y=\dfrac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+9}}$

$$\ln y=\ln\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+9}}$$

$$\ln y=2\ln(x-1)-\frac{1}{2}\ln(x^2+9)$$

$$\frac{d}{dx}(\ln y)=\frac{d}{dx}\left(2\ln(x-1)-\frac{1}{2}\ln(x^2+9)\right)$$

$$\frac{1}{y}\times\frac{dy}{dx}=2\times\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\times\frac{2x}{x^2+9}$$

$$\frac{1}{y}\times\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+x+18}{(x-1)(x^2+9)}$$

3) $y=\dfrac{(3x^2+5)^4}{\sqrt[5]{(2x-1)^3}}$

$$\ln y=\ln\frac{(3x^2+5)^4}{\sqrt[5]{(2x-1)^3}}$$

$$\ln y=\ln(3x^2+5)^4-\ln\sqrt[5]{(2x-1)^3}$$

$$\ln y=4\ln(3x^2+5)-\frac{3}{5}\ln(2x-1)$$

$$\frac{1}{y}\times\frac{dy}{dx}=\frac{4\times6x}{3x^2+5}-\frac{3}{5}\times\frac{2}{2x-1}$$

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{24x}{3x^2+5}-\frac{6}{5(2x-1)}\right)y$$

$$\frac{dy}{dx}=y\left(\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{x+2}-\frac{4x+2}{2x^2+2x+1}\right)$$

$$y=\frac{\left(x^4+1\right)\sqrt{x+2}}{2x^2+2x+1}\left(\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{2x+2}-\frac{4x+2}{2x^2+2x+1}\right)$$

8) $y=\sqrt{x^2(x+1)(x+2)}$

$$y=\left(x^2(x+1)(x+2)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\ln y=\frac{1}{2}\left(\ln x^2+\ln(x+1)+\ln(x+2)\right)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{x^2(x+1)(x+2)}}{2}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}\right)$$

9) $y=x^{\sin x}$

$$\ln y=\ln x^{\sin x}$$

$$\ln y=\sin x\ln x$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\sin x\left(\frac{1}{x}\right)+\ln x\cos x$$

$$\frac{dy}{dx}=y\left(\frac{\sin x}{x}+\cos x\ln x\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x}+\cos x\ln x\right)$$

$$\ln y=\frac{1}{2}\left(\ln(x-1)-\ln\left(x^4+1\right)\right)$$

$$\frac{1}{y}\times\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{4x^3}{x^4+1}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{4x^3}{x^4+1}\right)y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{4x^3}{x^4+1}\right)\sqrt{\frac{x-1}{x^4+1}}$$

6) $y=\left(x^2+3\right)^x$

$$\ln y=\ln\left(x^2+3\right)^x$$

$$\ln y=x\ln\left(x^2+3\right)$$

$$\frac{1}{y}\times\frac{dy}{dx}=x\left(\frac{2x}{x^2+3}+\ln\left(x^2+3\right)\times1\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=y\left(\frac{2x^2}{x^2+3}+\ln\left(x^2+3\right)\right)$$

$$=\left(x^2+3\right)^x\left(\frac{2x^2}{x^2+3}+\ln\left(x^2+3\right)\right)$$

7) $y=\dfrac{\left(x^2+1\right)\sqrt{x+2}}{2x^2+2x+1}$

$$\ln y=\ln\left(x^2+1\right)+\frac{1}{2}\ln(x+2)-\ln\left(2x^2+2x+1\right)$$

$$\frac{1}{y}\times\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{x+2}-\frac{4x+2}{2x^2+2x+1}$$

10) $y=(x-2)^{x+1}$

$$\ln y=(x+1)\ln(x-2)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=(x+1)\frac{1}{x-2}+\ln(x-2)$$

$$\frac{dy}{dx}=y\left(\frac{x+1}{x-2}+\ln(x-2)\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=y\left(\frac{x+1}{x-2}+\ln(x-2)\right)$$

11) $y=\dfrac{x^{10}\sqrt{x^2+5}}{\sqrt[3]{8x^2+2}}$

$$\ln y=\ln x^{10}+\ln\left(x^2+5\right)^{\frac{1}{2}}-\ln\left(8x^2+2\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\ln y=10\ln x+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+5\right)-\frac{1}{3}\ln\left(8x^2+2\right)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=10\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{2x}{x^2+5}-\frac{1}{3}\times\frac{16x}{8x^2+2}$$

$$\frac{dy}{dx}=y\left(\frac{10}{x}+\frac{x}{x^2+5}-\frac{16x}{3\left(8x^2+2\right)}\right)$$

12) $y=(\cos x)^{x}$

$$\ln y=x\ln\cos x$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=x\left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right)+\ln\cos x$$

$$\frac{dy}{dx}=y(-x\tan x+\ln\cos x)$$

مثـــال2: اذا كـان $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=10$ حيـث $x\neq y\neq 0$ فأثبت أن $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$

الحل:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=10$$

$$\frac{\sqrt{y}\,\frac{-1}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}\,\frac{\frac{dy}{dx}}{2\sqrt{y}}}{y}+\frac{\sqrt{x}\,\frac{\frac{dy}{dx}}{2\sqrt{y}}-\sqrt{y}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=0$$

$$\frac{\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}-\frac{\frac{dy}{dx}\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}}{y}=-\left(\frac{\frac{\frac{dy}{dx}\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}}{x}\right)$$

$$\frac{y-\frac{dy}{dx}x}{2\sqrt{x}\sqrt{y}\,y}=\frac{\frac{dy}{dx}x-y}{2\sqrt{y}\sqrt{x}\,x}$$

$$\frac{y-\frac{dy}{dx}x}{y}=\frac{-\frac{dy}{dx}x+y}{x}$$

$$xy-x^2y=xy\frac{dy}{dx}+y^2$$

$$xy-y^2=\frac{dy}{dx}\left(x^2-xy\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy-y^2}{x^2-xy}=\frac{y(x-y)}{x(x-y)}=\frac{y}{x}$$

مثـال3: اذا كان $y=\ln x$ حيث $x>0$ فأثبت أن $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$ باستعمال الاشتقاق الضمني

الحل:

$$y=\ln x \Rightarrow e^{y}=x$$

$$e^{y}\frac{dy}{dx}=1 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{e^{y}}=\frac{1}{x}$$

مسائل حياتية على التفاضل

مثال1: اجد معدل التغير في حجم المكعب بالنسبة لطول ضلعه عندما يكون طول الضلع يساوي 10cm

الحل:

$$v=x^{3}$$

$$\frac{dv}{dx}=3x^{2}=3(10)^{2}=300$$

مثـال2: يعطى عدد سكان مدينة صغيرة بالاقتران:

$P(t)=\frac{500t^{2}}{2t+9}$ ، حيث t الزمن بالسنوات، و P عدد السكان بالآلاف:

1) أجد معدل تغير عدد السكان في المدينة بالنسبة إلى الزمن

الحل:

$$P'(t)=\frac{(2t+9)(1000t)-(500t^{2})(2)}{(2t+9)^{2}}$$

$$=\frac{2000t^{2}+9000t-1000t^{2}}{(2t+9)^{2}}$$

$$=\frac{1000t^{2}+9000t}{(2t+9)^{2}}$$

2) أجد معدل تغير عدد السكان في المدينة عندما $t=12$ ، مفسرا معنى الناتج

الحل:

$$P'(12)=\frac{1000(12)^{2}+9000(12)}{(2(12)+9)^{2}}$$

$$=\frac{144000+108000}{(24+9)^{2}}$$

$$=\frac{252000}{1089}=231.4$$

مثـال3: اذا كان $v(t)=\frac{t^{2}}{2+t^{3}}$ أجد معدل تغير (v) بالنسبة لـ (t) عندما $t=1$

الحل:

$$v'(t)=\frac{(2+t^{3})(2t)-(t^{2})(3t^{2})}{(2+t^{3})^{2}}$$

$$=\frac{4t+2t^{4}-3t^{4}}{(2+t^{3})^{2}}$$

$$v'(1)=\frac{4+2-3}{(2+1)^{2}}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

مثـال4: وجد باحثون زراعيون أنه يمكن التعبير عن ارتفاع نبتة مهجنة من نبات تباع الشمس (h) بالامتار، باستعمال الاقتران: $h(t)=\frac{3t^{2}}{4+t^{2}}$ حيث (t) الزمن بالاشهر بعد زراعة البذور. أجد معدل تغير ارتفاع النبتة بالنسبة إلى الزمن.

الحل:

$$h'(t)=\frac{(4+t^2)(6t)-(3t^2)(2t)}{(4+t^2)^2}$$

$$=\frac{24t+6t^3-6t^3}{(4+t^2)^2}=\frac{24t}{(4+t^2)^2}$$

مثــال5: يعطى طول مستقيم بالمقدار $6t+5$ ويعطى عرضه بالمقدار $\sqrt{t}$ حيث (t) الزمن بالثواني والابعاد بالسنتمترات أجد معدل تغير مساحة المستطيل بالنسبة إلى الزمن

الحل:

$$A(t)=(6t+5)\sqrt{t}$$

$$A'(t)=(6t+5)\frac{1}{2\sqrt{t}}+\sqrt{t}(6)$$

$$=3\sqrt{t}+\frac{5}{2\sqrt{t}}+6\sqrt{t}$$

مثــال6: طرحت إحدى الشركات منتجا جديدا في الأسواق، ثم رصدت عدد القطع المبيعة منذ طرحه.

إذا مثل الاقتران: $N(t)=\frac{250000t^2}{(2t+1)^2}, t>0$

عدد القطع المبيعة منذ طرحه، حيث t الزمن بالأسابيع، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعا:

1) أجد معدل تغير عدد القطع المبيعة بالنسبة إلى الزمن أجد $N'(t)$:

الحل:

$$N(t)=\frac{250000t^2}{(2t+1)^2}$$

$$=\frac{(2t+1)^2(500000t)-(250000t^2)2(2t+1)\times 2}{(2t+1)^4}$$

$$=\frac{(2t+1)^2(500000t)-(1000000t^2)(2t+1)}{(2t+1)^4}$$

$$=\frac{(2t+1)(500000t)((2t+1)-2t)}{(2t+1)^4}$$

$$=\frac{500000t}{(2t+1)^3}$$

2) أجد $N'(52)$ ، مفسرا معنى الناتج

الحل:

$$N'(t)=\frac{500000t}{(2t+1)^3}$$

$$N'(52)=\frac{500000(52)}{(2(52)+1)^3}\approx 22$$

إذن، $N'(52)=22$ وهذا يعني أن إجمالي عدد القطع المبيعة من المنتج يزداد بمعدل 22 قطعة لكل أسبوع بعد مرور 52 أسبوعا على طرح المنتج في الأسواق

مثــال7: قيمة بدل الخدمة لأحد المنتجات تحسب بالدينار، باستعمال الاقتران:

$U(x)=80\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}$ حيث (x) عدد القطع المبيعة من المنتج.

1) أجد معدل تغير قيمة بدل الخدمة بالنسبة إلى عدد القطع المبيعة من المنتج

الحل:

$$U(x)=80\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}$$

$$U(x)=80\left(\frac{2x+1}{3x+4}\right)^{\frac{-1}{2}}$$

$$U'(x) = 80 \times \frac{1}{2}\left(\frac{2x+1}{3x+4}\right) \times \frac{(3x+4)(2)-(2x+1)(3)}{(3x+4)^2}$$

$$U'(x) = 40 \times \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{3x+4}\right)^{\frac{1}{2}}} \times \frac{6x+8-6x-3}{(3x+4)^2}$$

$$U'(x) = 40 \times \frac{1}{\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}} \times \frac{5}{(3x+4)^2}$$

2) أجد $U'(20)$ مفسرا معنى الناتج

الحل:

$$U'(20) = 40 \times \frac{1}{\sqrt{\frac{41}{64}}} \times \frac{5}{(64)^2} = 200$$

معدل التغير 200 عندما $x = 20$

مثال8: يمثل الاقتران: $A(t) = Ne^{0.1t}$ عدد الخلايا البكتيرية بعد t ساعة في مجتمع بكتيري:

1) أجد معدل نمو المجتمع بعد 3 ساعات بدلالة الثابت N

الحل:

$$A'(t) = Ne^{0.1t} \times 0.1$$

$$A'(3) = Ne^{0.3} \times 0.1$$

2) إذا كان معدل نمو المجتمع بعد k ساعة هو 0.2 خلية لكل ساعة، فما قيمة k بدلالة الثابت N

الحل:

$$Ne^{0.1k} \times 0.1 = 0.2 \Rightarrow Ne^{0.1k} = 2$$

$$e^{0.1k} = \frac{2}{N} \Rightarrow 0.1k = \ln\frac{2}{N}$$

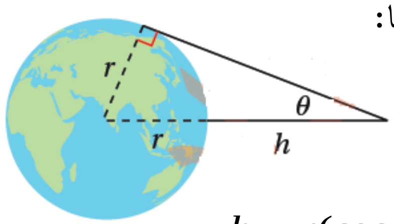
مثال9: يمكن نمذجة الكمية A (بالغرام) المتبقية من عينة كتلتها الابتدائية $20g$ من عنصر البلوتونيوم بعد t يوما باستعمال الاقتران: $A(t) = 20\left(\frac{1}{2}\right)^{t/140}$ أجد معدل تحلل عنصر البلوتونيوم عندما $t = 2$

الحل:

$$A'(t) = 20\left(\ln\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{140}} \times \frac{1}{140}$$

$$A'(2) = 20\left(\ln\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{140}} \times \frac{1}{140}$$

مثال10: عندما ترصد الأقمار الصناعية الأرض، فإنه يمكنها مسح جزء فقط من سطح الأرض وبعض الأقمار الصناعية تحوي مستشعرات لقياس الزاوية θ (بالراديان) المبينة في الشكل المجاور. إذا كان h يمثل المسافة بين القمر الصناعي وسطح الأرض بالكيلومتر، و r يمثل نصف قطر الأرض بالكيلومتر، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعا:



1) أثبت أن $h = r(\csc\theta - 1)$

الحل:

$$\csc\theta = \frac{r+h}{r}$$

$$r + h = r\csc\theta$$

$$h = r\csc\theta - r$$

$$h = r(\csc\theta - 1)$$

2) أجد معدل تغير h بالنسبة إلى θ عندما $\theta = \frac{\pi}{6}$

(افترض أن $r = 6371\ \text{km}$)

الحل:

$$\frac{dh}{d\theta} = -r(\csc\theta \cot\theta)$$

$$= 6371\left(-\csc\frac{\pi}{6}\cot\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= -6371(2)\left(\sqrt{3}\right) = -12742\sqrt{3}$$

التطبيقات الفيزيائية

عند دراسة جسيم يتحرك في خط مستقيم افترض أنه يتحرك على خط اعداد انطلاق من موقع ابتدائي وأن اتجاه الحركة يكون موجباً أو سالباً

ملاحظات:

$s(t)$: موقع الجسيم بالنسبة إلى الزمن

$v(t)$: السرعة المتجهة (معدل تغير اقتران الموقع $(s(t))$

$a(t)$: التسارع (معدل تغير السرعة بالنسبة إلى الزمن)

قواعد هامة:

$v > 0$: الجسيم يتحرك في الاتجاه الموجب

$v < 0$: الجسيم يتحرك في الاتجاه السالب

$v = 0$: الجسيم ساكن

$|v(t)|$: السرعة وهي قياسية لا تحدد اتجاه الحركة

ملاحظة:

$s(t) =$ موقع الجسم

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

$$a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt}$$

ملاحظات هامة:

1) أقصى بعد للجسيم عندما $v = 0$

2) تنعدم السرعة أو سكون لحظي عندما $v = 0$

3) بداية الحركة عندما $t = 0 \Leftarrow s(0)$

4) تبدأ بالعودة عندما $v = 0$ (يغير اتجاه الحركة) (تغير السرعة الاشارة)

5) ينعدم التسارع $\Leftarrow a = 0$

6) السرعة الابتدائية $\Leftarrow v(0)$

7) التسارع الابتدائي $\Leftarrow a(0)$

8) السرعة موجبة $v > 0$

9) السرعة سالبة $v < 0$

مثال1:

يمثل الاقتران: $s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t, t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم حيث s الموقع بالامتار و t الزمن بالثواني:

1) أجد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t = 5$

الحل:

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 8t + 5$$

$v(5)=3(5)^2-8(5)+5$

$=75-40+5=40$

$a(t)=6t-8$

$a(5)=6(5)-8=30-8=22$

2) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي

الحل:

سكون لحظي يعني $v(t)=0$

$3t^2-8t+5=0$

$(3t-5)(t-1)=0$

$t=\frac{5}{3}\quad , \quad t=1$

3) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t=4$

الحل:

$v(4)=3(4)^2-8(4)+5$

$=48-32+5=21>0$

الاتجاه هو نفس الاتجاه الاصلي لليمين

4) متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي

الحل:

عندما $s(t)=0$

$t^3-4t^2+5t=0$

$t\left(t^2-4t+5\right)=0$

$t=0$

$or \quad t^2-4t+5=0$

$\Delta=b^2-4ac=16-(4)(1)(5)$

$=16-20=-4<0$

مثـال2: يمثل الاقتران: $s(t)=e^t-4t, t\geq 0$

موقع جسيم يتحرك على خط مستقيم حيث s الموقع بالامتار و t الزمن بالثواني:

1) أحدد الموقع الابتدائي للجسيم

الحل:

الموقع الابتدائي $s(0)$

$s(0)=e^0-4(0)=1-0=1$

2) اجد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته المتجهة صفرا

الحل:

$v(t)=e^x-4=0$

$e^x=4$

$a(t)=e^x=4$

مثـال3: يمثل الاقتران: $v(t)=\frac{10}{2t+15}, t\geq 0$

السرعة المتجهة لسيارة بدأت الحركة في مسار مستقيم من وضع السكون، حيث v تقاس بالقدم لكل ثانية:

1) أجد تسارع السيارة عندما $t=5.23$

الحل:

$a(t)=\frac{-10(2)}{(2t+15)^2}$

$a(5.23)=\frac{-20}{(2\times 5.23+15)^2}$

$=\frac{-20}{(25.46)^2}=-0.03$

2) أجد تسارع السيارة عندما $t=20$

الحل:

$$a(20)=\frac{-20}{(2\times 20+15)^2}=\frac{-20}{(55)^2}=-0.01$$

مثال4:

يمثل الاقتران: $s(t)=t^2-7t+8, t\geq 0$ موقع جسم يتحرك على خط مستقيم حيث s الموقع بالامتار و t الزمن بالثواني

1) اجد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t=4$

الحل:

$$s(t)=t^2-7t+8$$

$$v(t)=2t-7$$

$$v(4)=2(4)-7=1$$

$$a(t)=2\Rightarrow a(4)=2$$

2) أجد قيم t التي يكون عنجها الجسم في حالة سكون لحظي

الحل:

$$v(t)=2t-7=0$$

$$2t=7\Rightarrow t=\frac{7}{2}=3.5$$

3) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t=2$

الحل:

$$v(2)=2(2)-7=-3<0$$

الحركة بعكس الاتجاه الاصلي (لليسار)

4) متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي

الحل:

$$s(t)=t^2-7t+8=0$$

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$=(7)^2-4(1)(8)=49-32=17$$

$$t=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{24}=\frac{7\pm\sqrt{17}}{24}$$

مثال5:

يمثل الاقتران: $s(t)=\ln(t^2-2t+1.9), t\geq 0$ موقع جسيم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالامتار، و t الزمن بالثواني:

1) أجد سرعة الجسيم المتجهة وتسارعه بعد t ثانية

الحل:

$$v(t)=s'(t)=\frac{2t-2}{t^2-2t+1.9}$$

$$a(t)=v'(t)=\frac{(t^2-2t+1.9)(2)-(2t-2)(2t-2)}{(t^2-2t+1.9)^2}$$

2) أجد موقع الجسيم وتسارعه عندما تكون سرعته المتجهة صفرا

الحل:

$$v(t)=0\Rightarrow 2t-2=0\Rightarrow t=1$$

$$s(1)=\ln(1-2+1.9)=\ln 0.9$$

$$a(1)=\frac{(1-2+1.9)(2)-(2-2)(2-2)}{(1-2+1.9)^2}$$

$$a(1)=\frac{1.8}{0.81}$$

3) متى يعود الجسيم إلى موقعه الابتدائي؟

الحل:

يعود الجسيم إلى موقعه الاصلي عندما $s(t)=0$

$$\ln(t^2-2t+1.9)=0=\ln 1$$

$t^2 - 2t + 1.9 = 1$

$t^2 - 2t + 0.9 = 0$

المميز $\Delta = b^2 - 4ac$

$= 4 - 4(1)(0.9) = 4 - 3.6 = 0.4$

$t = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{24} = \dfrac{2 \pm \sqrt{0.4}}{24}$

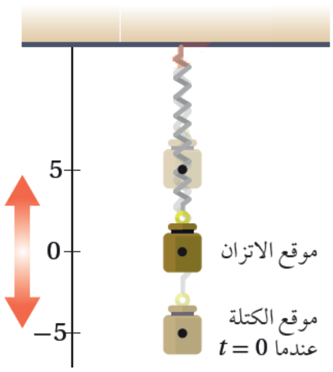
الحركة التوافقية البسيطة

تستخدم اذا كانت المعادلة تصف الازاحة

$y = a \sin wt$

$y = a \cos wt$

مثال1:



زنبرك : يبين الشكل المجاور جسما معلقا بزنبرك شد 5 وحدات أسفل الاتزان $(s = 0)$ ثم ترك عند الزمن $t = 0$ ليتحرك إلى الأعلى وإلى الأسفل ويمثل الاقتران: $s(t) = 5\cos t$ موقع الجسم عند أي زمن لاحق حيث t الزمن بالثواني و s الموقع بالسنتيمترات.

1) أجد اقترانا يمثل سرعة الجسم المتجهة واقترانا آخر يمثل تسارعه عند أي لحظة

الحل:

اقتران السرعة المتجهة

$v(t) = s'(t) = -5\sin t$

اقتران التسارع

$a(t) = v'(t) = -5\cos t$

2) أصف حركة الجسم

الحل:

$1 \ge \cos t \ge -1 \qquad \times 5$

$5 \ge 5\cos t \ge -5$

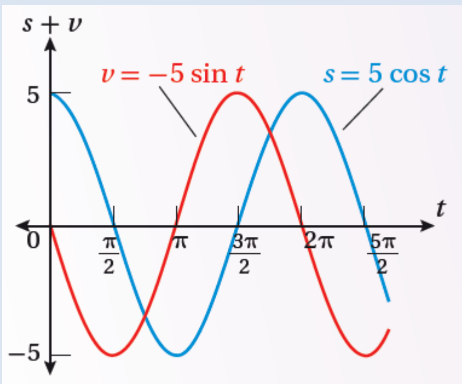
الجسيم يتحرك بمرور الزمن بين الموقع $s = 5$ والموقع $s = -5$

$s = 5 \leftarrow$ فوق موقع الاتزان

$s = -5 \leftarrow$ تحت موقع الاتزان

الدعم البياني

ألاحظ من التمثيل البياني الآتي لاقتراني الموقع والسرعة المتجهة أن موقع الجسم يتراوح بين القيمتين $s = 5\text{cm}$ و $s = -5\text{cm}$ وأن سرعته المتجهة تتراوح بين القيمتين $v = 5\text{cm/s}$ و $v = -5\text{cm/s}$



ألاحظ أيضا أن اقتران السرعة المتجهة يكون أكبر ما يمكن عندما يقطع منحنى اقتران الموقع المحور x (موقع الاتزان) إذن تكون سرعة الجسم المتجهة أكبر ما يمكن عندما يمر الجسم بموقع الاتزان

مثال2: يتحرك جسم معلق بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل ويمثل الاقتران: $s(t)=7\sin t$ موقع الجسم عند أي زمن لاحق، حيث t الزمن بالثواني و s الموقع بالامتار

1) أجد اقترانا يمثل سرعة الجسم المتجهة واقترانا آخر يمثل تسارعه عند أي لحظة

الحل:

$$s(t)=7\sin t$$
$$v(t)=s'(t)=7\cos t$$
$$a(t)=v'(t)=-7\sin t$$

2) أصف حركة الجسم

الحل:

أكبر قيمة لكل من الازاحة والسرعة والتسارع هي 7 واقل قيمة هي -7 ، التسارع يساوي عكس الازاحة

مثال3: زنبرك: يتحرك جسم معلق إلى الأعلى وإلى الأسفل ويحدد الاقتران: $s(t)=4\cos t$ موقع الجسم عند أي زمن لاحق حيث t الزمن بالثواني و s الموقع بالامتار:

1) أجد اقترانا يمثل سرعة الجسم المتجهة واقترانا آخر يمثل تسارعه عند أي لحظة

الحل:

$$v(t)=s'(t)=-4\sin t$$
$$a(t)=v'(t)=-4\cos t$$

2) أجد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t=\frac{\pi}{4}$

الحل:

$$v\left(\frac{\pi}{4}\right)=-4\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=-4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{-4}{\sqrt{2}}$$

$$a\left(\frac{\pi}{4}\right)=-4\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=-4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{-4}{\sqrt{2}}$$

3) أصف حركة الجسم

الحل:

الجسم يتحرك بين الموقعين $s=-4$ و $s=4$

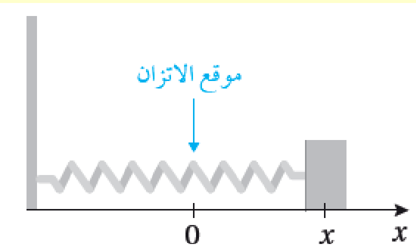
وتكون السرعة المتجهة اكبر ما يمكن عندما

$|\sin t|=1$ وتكون عندما $\cos t=0$

التسارع يساوي معكوس قيمة الموقع

تدريب:

يهتز جسم مثبت في زنبرك أفقيا على سطح أملس كما في الشكل المجاور ويمثل الاقتران $x(t)=8\sin t$ موقع الجسم، حيث t الزمن بالثواني، و x الموقع بالسنتيمترات:



1) أجد موقع الكتلة وسرعتها المتجهة وتسارعها عندما $t=\frac{2}{3}$

2) في أي اتجاه تتحرك الكتلة عندما $t=\frac{2}{3}$

مثال4:

يمثل الاقتران: $s(t)=4-\sin t, t\geq 0$ موقع جسيم يتحرك في مسار مستقيم حيث s الموقع بالامتار و t الزمن بالثواني:

1) أجد سرعة الجسيم المتجهة وتسارعه بعد t ثانية

الحل:

$$v(t)=s'(t)=-\cos t$$

$$a(t)=v'(t)=\sin t$$

2) أجد موقع الجسيم عندما كان في حالة سكون أول مرة بعد انطلاقه

الحل:

سكون يعني $v(t)=0$

$$v=-\cos t=0$$

$$t=\frac{\pi}{2}$$

$$s\left(\frac{\pi}{2}\right)=4-\sin\frac{\pi}{2}=4-1=3$$

3) أجد موقع الجسيم عندما يصل إلى أقصى سرعة متجهة مبررا إجابتي.

الحل:

$$\sin t=0 \Rightarrow$$

اقصى سرعة عندما $t=0\,,\,\pi\,,\,2\pi$

$$s(0)=4-0=4$$

$$s(\pi)=4-0=4$$

$$s(2\pi)=4-0=4$$

مثال5: يمثل الاقتران: $s(t)=3t^2-t^3, t\geq 0$ موقع جسيم يتحرك في مسار مستقيم حيث s الموقع بالامتار و t الزمن بالثواني:

1) أجد سرعة الجسيم المتجهة وتسارعه بعد t ثانية

الحل:

$$v(t)=s'(t)=6t-3t^2$$

$$a(t)=v'(t)=6-6t$$

2) أجد موقع (المواقع) الذي يكون عنده الجسيم في حالة سكون

الحل:

$$v(t)=6t-3t^2=0$$

$$3t(2-t)=0 \Rightarrow t=0 \quad , \quad t=2$$

$$s(0)=0-0=0$$

$$s(2)=3(2)^2-(2)^3=12-8=4$$

مثال6: زنبرك: تتحرك كرة معلقة بزنبرك إلى الاعلى والاسفل، ويحدد الاقتران: $s(t)=0.1\sin 2.4t$ موقع الكرة عند أي زمن لاحق، حيث s الموقع بالسنتميرات و t الزمن بالثواني:

1) أجد السرعة المتجهة للكرة عندما $t=1$

الحل:

$$v(t)=s'(t)=0.1\cos 2.4t\times 2.4$$

$$v(1)=0.1\cos 2.4\times 2.4$$

$$=0.24\cos 2.4$$

2) أجد موقع الكرة عندما تكون سرعتها المتجهة صفرا

الحل:

$$v(t)=0.24\cos 2.4t=0$$

$$\cos 2.4t=0$$

$$2.4t = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \frac{3\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\frac{\pi}{2}}{2.4} \quad , \quad \frac{\frac{3\pi}{2}}{2.4}$$

$$s\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2.4}\right) = 0.1 \times 1 = 0.1$$

$$s\left(\frac{\frac{3\pi}{2}}{2.4}\right) = 0.1 \times -1 = -0.1$$

مثـــال7: يمثـل الاقتـران: $v(t) = 15te^{-0.05t^2}$ السرعة المتجهة (بالمتر لكل ثانية) لسيارة تتحرك في مسـار مسـتقيم، حيـث: $0 \le t \le 10$ أجد السـرعة المتجهة للسيارة عندما يكون تسارعها صفرا

الحل:

$$v(t) = 15te^{-0.05t^2}$$

$$a(t) = v'(t) = 15t\left(-0.1e^{-0.05t^2}\right) + 15e^{-0.05t^2}$$

$$15t\left(-0.1e^{-0.05t^2}\right) + 15e^{-0.05t^2} = 0$$

$$15e^{-0.05t^2}\left(t(-0.1)+1\right) = 0$$

$$-t(0.1)+1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{0.1} = 10$$

$$v(10) = 150e^{-5}$$

مثـال8: يمثل الاقتران: $s(t) = t^{1/t}, t > 0$ موقع جسـيم يتحـرك فـي مسـار مسـتقيم، حيـث s الموقـع بالأمتار، و t الزمن بالثواني.

1) أجد سرعة الجسيم المتجهة وتسارعه

الحل:

$$s = t^{\frac{1}{t}} \Rightarrow \ln s = \ln t^{\frac{1}{t}} \Rightarrow \ln s = \frac{1}{t}\ln t$$

$$\frac{s'}{s} = \frac{1}{t} \times \frac{1}{t} + \ln t \times \frac{1}{t^2}$$

$$v = s'(t) = s(t) \times \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2}\ln t\right)$$

$$a(t) = s(t) \times \left(\frac{-2}{t^3} + \frac{1}{t^2} \times \frac{1}{t} + \ln t \times \frac{-2}{t^3}\right) + \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2} + \ln t\right)s'(t)$$

2) أجد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته المتجهة صفرا

الحل:

$$v(t) = 0 \Rightarrow t = 0$$

مرفوضة لأن $t > 0$

$$\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2} \times \ln t = 0 \Rightarrow t = e$$

معادلة المماس والعمودي

خطوات الحل:

1) نعوض بالسؤال y_1

2) نشتق السؤال

3) نعوض بالمشتقة (الميل $= m$)

4) معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

5) معادلة العمودي: $y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$

مثــال1: اذا كانـت $f(x) = x^2 + 5x + 7$ أجـد معادلة المماس والعمودي عندما $x = 1$

الحل:

$f(1) = 1 + 5 + 7 = 13 \Rightarrow y_1$

نقطة التماس $(1,13)$

$f'(x) = 2x + 5$

$f'(1) = 2(1) + 5 = 7 = m$

معادلة المماس $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 13 = 7(x - 1)$

معادلة العمودي $y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$

$y - 13 = \frac{-1}{7}(x - 1)$

ملاحظات هامة:

1) عند التوازي $m_1 = m_2$

2) عند التعامد $m_1 = \frac{-1}{m_2}$

3) عند التقاطع نساوي الاقترانات ببعض

4) اذا علمت زاوية الميل θ (الميل $= \tan\theta$)

5) يقاطع محور $x \Leftarrow y = 0$

6) يقاطع محور $y \Leftarrow x = 0$

7) ميل المستقيم المار في نقطتين $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

8) f يمس g $(f = g \quad , \quad f' = g')$

9) كلمة المماس أفقي أو يوازي السينات $\Leftarrow$ المشتقة تساوي صفر

10) المماس رأسي $\Leftarrow$ يوازي y

ميله $= \frac{a}{0}$ ومعادلته $x = x_1$

مثال2: أجد معادلة المماس لكل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

1) $f(x) = x + \cos 2x \quad , x = 0$

الحل:

$f(0) = 0 + \cos 0 = 1 \qquad \therefore (0,1)$

$f'(x) = 1 + (-2\sin 2x(2))$

$f'(0) = 1 + 0 = 1$

$y - 1 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x + 1$

2) $f(x)=2^x \quad , x=0$

الحل:

$f(0)=2^0=1 \qquad \therefore (0,1)$

$f'(x)=\ln 2\times 2^x$

$f'(0)=\ln 2\times 2^0=\ln 2$

$y-1=\ln 2(x-0)$

$y=(\ln 2)x+1$

3) $f(x)=\sqrt{x+1}\sin\frac{\pi x}{2} \quad , x=3$

الحل:

$f(3)=2\sin\frac{3\pi}{2}=2(-1)=-2$

$\therefore (3,-2)$

$f'(x)=\sqrt{x+1}\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\frac{\pi x}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)$

$f'(3)=2\left(\cos\frac{3\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\frac{3\pi}{2}\left(\frac{1}{2\times 2}\right)$

$=0+(-1)\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{-1}{4}$

$y+2=\frac{-1}{4}(x-3)$

$y=\frac{-1}{4}x+\frac{3}{4}-2 \Rightarrow y=\frac{-1}{4}x-\frac{5}{4}$

مثال3: إذا كان الاقتران: $y=e^{\sin x}$ فأجد ميل مماس منحنى الاقتران عند النقطة $(0,1)$

الحل:

$f'(x)=(\cos x)e^{\sin x}$

$f'(0)=(\cos 0)e^{\sin 0}=1\times 1=1$

مثال4:

إذا كان الاقتران: $f(x)=2\sin x-4\cos x$

فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعا:

1) أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x=0$

الحل:

$f'(x)=2\cos x+4\sin x$

$f'(0)=2\cos 0+4\sin 0=2+0=2$

2) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x=\frac{\pi}{2}$

الحل:

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\frac{\pi}{2}-4\cos\frac{\pi}{2}$

$=2(1)-4(0)=2 \qquad \therefore \left(\frac{\pi}{2},2\right)$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+4\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$=2(0)+4(1)=0+4=4$

$y-2=4\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow y=4x-2\pi+2$

مثال5: أجد معادلة المماس لكل اقتران مما يأتي عند النقطة المعطاة:

1) $f(x)=x^2\cos x \quad ,(\frac{\pi}{2},0)$

$f'(x)=x^2(-\sin x)+\cos x(2x)$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}(-1)+0=\frac{-\pi^2}{4}$

$y-0=\frac{-\pi^2}{4}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

2) $f(x)=\dfrac{1+x}{1+e^x} \quad ,(0,\dfrac{1}{2})$

$$f'(x)=\frac{(1+e^x)(1)-(1+x)e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$f'(0)=\frac{(1+1)(1)-(1+0)(1)}{(1+1)^2}=\frac{1}{4}$$

$$y-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(x-0)\Rightarrow y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$$

3) $f(x)=e^x\cos x+\sin x \quad ,(0,1)$

$$f'(x)=-e^x\sin x+\cos xe^x+\cos x$$

$$f'(0)=0+1+1=2$$

$$y-1=2(x-0)\Rightarrow y=2x+1$$

4) $f(x)=\dfrac{1+\sin x}{\cos x} \quad ,(\pi,-1)$

$$f'(x)=\frac{\cos x(\cos x)-(1+\sin x)(-\sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$f'(\pi)=\frac{(-1)(-1)-(1+0)(0)}{(-1)^2}=1$$

$$y+1=1(x-\pi)\Rightarrow y=x-\pi-1$$

مـــثال6: إذا كـان: $f(x)=\sin x+\dfrac{1}{2}e^x$ ،

فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعا:

1) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $(\pi,\dfrac{1}{2}e^{\pi})$

الحل:

$$f'(x)=\cos x+\frac{1}{2}e^x$$

$$f'(\pi)=\cos\pi+\frac{1}{2}e^{\pi}=-1+\frac{1}{2}e^{\pi}$$

$$y-\frac{1}{2}e^{\pi}=\left(-1+\frac{1}{2}e^{\pi}\right)(x-\pi)$$

2) اجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $(\pi,\dfrac{1}{2}e^{\pi})$

الحل:

$$y-\frac{1}{2}e^{\pi}=\frac{-1}{-1+\frac{1}{2}e^{\pi}}(x-\pi)$$

مثال7: أجد قيمة x التي يكون عندها المماس أفقيا لمنحنى الاقتران: $f(x)=e^x-2x$

الحل:

مماس أفقي يعني $f'(x)=0$

$$f'(x)=e^x-2=0$$

$$e^x=2\Rightarrow x=\ln 2$$

مـثال8: اختيار من متعدد: أي الآتية تمثل معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x)=\sin x+\cos x$ عندما $x=\pi$

a) $y=-x+\pi-1$ b) $y=x-\pi-1$
c) $y=x-\pi+1$ d) $y=x+\pi+1$

الحل:

$$f(\pi)=0-1=-1 \qquad \therefore(\pi,-1)$$

$$f'(x)=\cos x-\sin x$$

$$f'(\pi) = -1 - 0 = -1 = m$$

$$y + 1 = \frac{-1}{-1}(x - \pi)$$

$$y + 1 = x - \pi \Rightarrow \boxed{y = x - \pi - 1}$$

الجواب فرع (b)

مثال9: إذا كان: $y = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$ فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعا:

1) أجد ميل المماس عند نقطة الأصل

الحل:

$$y' = \frac{(1 + e^{-x})(e^{-x}) - (1 - e^{-x})(-e^{-x})}{(1 + e^{-x})^2}$$

$$= \frac{e^{-x} + e^{-2x} + e^{-x} - e^{-2x}}{(1 + e^{-x})^2}$$

$$= \frac{2e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$$

$$y'(0) = \frac{2}{(1+1)^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

2) أبين عدم وجود مماس أفقي للاقتران y ، مبررا إجابتي

الحل:

يحدث المماس أفقي عندما $y' = 0$ لكن $-2e^{-x} \neq 0$ مهما كانت قيمة x لذلك لا يوجد مماس أفقي

مثال10: أجد ميل مماس منحنى العلاقة:

$y^2 = \ln x$ عند النقطة $(e, 1)$

الحل:

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2xy}$$

عند النقطة $(e, 1)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2e}$$

مثال11: أجد ميل مماس منحنى العلاقة:

$(y-3)^2 = 4(x-5)$ عندما $x = 6$

الحل:

نجد y

$$(y-3)^2 = 4(6-5)$$

$$(y-3)^2 = 4$$

$$y - 3 = \pm 2$$

$$y - 3 = 2 \Rightarrow y = 5 \qquad (6, 5)$$

$$y - 3 = -2 \Rightarrow y = 1 \qquad (6, 1)$$

$$2(y-3)\frac{dy}{dx} = 4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{2(y-3)}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(6,5)} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(6,1)} = \frac{4}{-4} = -1$$

مثال12: أجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة:

$x^3+y^3-3xy=17$ عند النقطة $(2,3)$

الحل:

$$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}-\left(3x\frac{dy}{dx}+y(3)\right)=0$$

$$3y^2\frac{dy}{dx}-3x\frac{dy}{dx}=3y-3x^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3y-3x^2}{3y^2-3x}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,3)}=\frac{9-12}{27-6}=\frac{-3}{21}=\frac{-1}{7}$$

$$y-3=\frac{-1}{7}(x-2)$$

مثال13: أجد ميل المماس لمنحنى كل علاقة مما يأتي عند النقطة المعطاة:

1) $e^{xy}=\ln xy+e \quad ,(1,1)$

$$e^{xy}=\ln x+\ln y+e$$

$$e^{xy}\left(x\frac{dy}{dx}+y\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$$

نعوض $y=1, x=1$

$$e\left(1\frac{dy}{dx}+1\right)=1+\frac{dy}{dx}$$

$$e\frac{dy}{dx}+e=1+\frac{dy}{dx}$$

$$e\frac{dy}{dx}-\frac{dy}{dx}=1-e$$

$$\frac{dy}{dx}(e-1)=1-e\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{1-e}{e-1}=-1$$

2) $x^2+y^2=25 \quad ,(3,-4)$

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{2y}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,-4)}=\frac{-2(3)}{2(-4)}=\frac{3}{4}$$

3) $x^2y=4(2-y) \quad ,(2,1)$

$$x^2\frac{dy}{dx}+y\times 2x=-4\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}\left(x^2+4\right)=2xy$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{x^2+4}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,1)}=\frac{2\times2\times1}{4+4}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

4) $e^{\sin x}+e^{\cos y}=e+1 \quad ,(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

$$\cos xe^{\sin x}-\sin ye^{\cos y}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos xe^{\sin x}}{\sin ye^{\cos y}}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{0e^1}{1e^0}=\frac{0}{1}=0$$

5) $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=5 \quad ,(8,1)$

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=5$$

$$\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}+\frac{2}{3}y^{\frac{-1}{3}}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}}{\frac{2}{3}y^{\frac{-1}{3}}}=\frac{-y^{\frac{-1}{3}}}{x^{\frac{-1}{3}}}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(8,1)}=\frac{-2}{1}=-2$$

مثال14: أجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة مما يأتي عند النقطة المعطاة:

1) $x^2+xy+y^2=13 \quad ,(-4,3)$

$$2x+x\frac{dy}{dx}+y+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x-y}{x+2y}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-4,3)}=\frac{8-3}{-4+6}=\frac{5}{2}$$

$$y-3=\frac{5}{2}(x+4)$$

2) $x+y-1=\ln(x^2+y^2) \quad ,(1,0)$

$$1+\frac{dy}{dx}=\frac{2x+2y\frac{dy}{dx}}{x^2+y^2}$$

$$1+\frac{dy}{dx}=\frac{2+0}{1}$$

$$1+\frac{dy}{dx}=2\Rightarrow\frac{dy}{dx}=1$$

$$y-0=1(x-1)\Rightarrow y=x-1$$

3) $x^2+3xy+y^2=x+3y \quad ,(2-1)$

$$2x+3xy'+y(3)+2yy'=1+3y'$$

$$4+6y'-3-2y'=1+3y'$$

$$y'=0=m$$

$$y+1=0(x-2)\Rightarrow y=-1$$

4) $xe^y+y\ln x=2 \quad ,(1,\ln 2)$

$$xe^yy'+e^y+y\times\frac{1}{x}+(\ln x)y'=0$$

$$1e^{\ln 2}y'+e^{\ln 2}+\ln 2+0=0$$

$$2y'+\ln 2=0$$

$$2y'=-2-\ln 2\Rightarrow y'=\frac{-2-\ln 2}{2}$$

$$y-\ln 2=\frac{-2-\ln 2}{2}(x-1)$$

5) $4xy=9 \quad ,\left(1,\frac{9}{4}\right)$

$$y=\frac{9}{4x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{9}{4}\times\frac{-1}{x^2}=\frac{-9}{4}=m$$

$$y-\frac{9}{4}=\frac{-9}{4}(x-1)$$

6) $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{8}=1 \quad ,(1,2)$

$$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}+\frac{2yy'}{8}=0$$

$$1+\frac{2yy'}{8}=0\Rightarrow\frac{1}{2}y'=-1$$

$$y'=2=m$$

$$y-2=-2(x-1)$$

مــثال15: أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران:

$y = x^{(x^2)}$ عندما $x = 2$

الحل:

$y = 2^4 = 16 \qquad (2,16)$

$\ln y = x^2 \ln x$

$\frac{y'}{y} = x^2\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x(2x)$

$\frac{y'}{16} = 2 + 4\ln 2$

$y' = 16(2 + 4\ln 2)$

$y - 16 = 16(2 + 4\ln 2)(x - 2)$

مثال16: أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة: $(x+y)^3 = x^2 + y$ عند النقطة $(1,0)$

الحل:

$3(x+y)^2(1+y') = 2x + y'$

$3(1)^2(1+y') = 2 + y'$

$2 + 2y' = 2 + y'$

$y' = 0$

العمودي رأسي $x = 1$

مــثال17: أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران:

$y = x(\ln x)^x$ عندما $x = e$

الحل:

$y = e(\ln e)^e = e(1)^e = e \qquad (e,e)$

$\ln y = \ln x + \ln(\ln x)^x$

$\ln y = \ln x + x\ln(\ln x)$

$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + x\left(\frac{1}{\ln x}\right)\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(\ln x)(1)$

$y' = 1 + e$

$y - e = (1+e)(x - e)$

مـثال17: إذا كان الاقتران: $f(x) = \ln x$ فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعا:

1) أثبت أن مماس منحنى الاقتران عند النقطة $(e,1)$ يمر بنقطة الاصل

الحل:

$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(e) = \frac{1}{e}$

$y - 1 = \frac{1}{e}(x - e)$

$y - 1 = \frac{1}{e}(0 - e)$

$y - 1 = 0 - 1 \Rightarrow y = 0$

اذن المماس يمر بنقطة الاصل

2) أثبت أن المقطع x للعمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة $(e,1)$ هو: $e + \frac{1}{e}$

الحل:

ميل العمودي

$y - 1 = -e(x - e)$

يقطع المحور x عندما $y = 0$

$-1 = -e(x - e) \Rightarrow 1 = e(x - e)$

$\frac{1}{e} = x - e \Rightarrow x = \frac{1}{e} + e$

مثال19: اذا كان الاقتران: $y = e^x - ax$ حيث a عدد حقيقي فأجد معادلة المماس عند نقطة تقاطع الاقتران مع المحور y مبررا إجابتي

الحل:

يقطع المنحنى محور y عندما $x = 0$

$$y = e^0 - 0 = 1 \qquad \therefore (0,1)$$

$$y' = e^x - a$$

$$y'(0) = 1 - a$$

$$y - 1 = (1-a)(x-0)$$

مثال20: أثبت عدم وجود مماس ميله 2 للاقتران:

$$y = 2e^x + 3x + 5x^3$$

الحل:

$$y' = m$$

$$y' = 2e^x + 3 + 15x^2 = 2$$

$$2e^x + 15x^2 = 2 - 3 = -1$$

وبما ان $2e^x > 0$ دائما

مهما كانت قيمة x $\quad 15x^2 \geq 0$

$$2e^x + 15x^2 > 0$$

لا يمكن ان يكون (-1)

اذن، لا يوجد مماس ميله يساوي 2

مثال21: إذا كان الاقتران: $y = ke^x$ حيث $k > 0$ وكان منحناه يقطع المحور y عند النقطة p أجد نقطة تقاطع مماس منحنى الاقتران عند النقطة p مع المحور x

الحل:

يقطع المحور y عندما $x = 0$

$$y = ke^0 = k \qquad \therefore (k,0)$$

$$y' = ke^x$$

$$y'(0) = ke^0 = k$$

$$y - k = k(x-0)$$

$$y - k = kx$$

يقطع المحور x عندما $y = 0$

$$-k = kx \Rightarrow x = -1 \qquad \therefore (-1,0)$$

مثال22: إذا كانت العلاقة: $x^3 + y^3 = 6xy$ فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعا:

1) أجد معادلة المماس عند نقطة تقاطع منحنى المعادلة مع منحنى $y = x$ في الربع الأول

الحل:

بتعويض $y = x$

$$x^3 + x^3 = 6x(x)$$

$$2x^3 = 6x^2 \Rightarrow 2x^3 - 6x^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \quad , \quad x = 3$$

نأخذ $x=3$ فتكون $y=3$

النقطة $(3,3)$

$$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}=6x\frac{dy}{dx}+y\times 6$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{6y-3x^2}{3y^2-6x}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,3)}=\frac{18-27}{27-18}=\frac{-9}{9}=-1$$

$$y-3=-1(x-3)\Rightarrow y=-x+6$$

2) أجد إحداثيي نقطة على منحنى العلاقة في الربع الأول بحيث يكون عندها مماس المنحنى أفقيا

الحل:

المماس أفقي $\frac{dy}{dx}=0$

$$x^3+y^3=6xy\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{6y-3x^2}{3y^2-6x}$$

$$\Rightarrow 0=\frac{6y-3x^2}{3y^2-6x}$$

$$6y-3x^2=0$$

$$2y-x^2=0\Rightarrow 2y=x^2\Rightarrow y=\frac{x^2}{2}$$

$$x^3+\left(\frac{x^2}{2}\right)^3=6x\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

$$x^3+\frac{x^6}{8}=3x^3 \qquad \div x^3$$

$$1+\frac{x^3}{8}=3$$

$$x^3=16\Rightarrow x=\sqrt[3]{16}$$

$$y=\frac{\left(\sqrt[3]{16}\right)^2}{2}$$

$$\therefore\left(\sqrt[3]{16},\frac{\left(\sqrt[3]{16}\right)^2}{2}\right)$$

مـثال23: أجد إحداثيي نقطة (نقاط) على المنحنى: $y^3=x^2$ بحيث يكون عندها مماس المنحنى عموديا على المستقيم: $y+3x-5=0$

الحل:

$$3y^2\frac{dy}{dx}=2x\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{3y^2}$$

ميل المستقيم $y+3x-5=0$

ميل العمودي $\frac{dy}{dx}+3=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-3$

ميل المماس $=\frac{1}{3}$

$$\frac{2x}{3y^2}=\frac{1}{3}\Rightarrow y^2=2x\Rightarrow x=\frac{y^2}{2}$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{y^4}{4}$$

بالتعويض $y^3=\frac{y^4}{4}$

$$y^3-\frac{y^4}{4}=0\Rightarrow y^3\left(1-\frac{y}{4}\right)=0$$

$y=0 \quad , \quad y=4$

$y=0 \Rightarrow 0=x^2 \Rightarrow x=0 \qquad (0,0)$

$y=4 \Rightarrow 64=x^2 \Rightarrow x=\pm 8$

$(8,4),(-8,4)$

$(0,0)$ لا تحقق

$(-8,4)$ لا تحقق

$(8,4)$ تحقق المعادلة لأن الميل يساوي $\frac{1}{3}$

مثال24: أجد لإحداثيي النقطة على منحنى الاقتران: $y=x^{\frac{1}{x}}, x>0$ التي يكون عندها ميل المماس صفرا

الحل:

$\ln y=\frac{1}{x}\ln x$

$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{x}\times\frac{1}{x}+\ln x\times\frac{-1}{x^2}$

$y'=y\left(\frac{1}{x}\times\frac{1}{x}+\ln x\times\frac{-1}{x^2}\right)$

$y=0 \Rightarrow x=0$ مرفوضة

$\frac{1}{x^2}+\ln x\left(\frac{-1}{x^2}\right)=0$

$\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}\ln x$

$\ln x=1 \Rightarrow x=e \Rightarrow y=e^{\frac{1}{e}} \qquad \therefore \left(e,e^{\frac{1}{e}}\right)$

مثال25: أجد إحداثيات جميع النقاط على منحنى الدائرة: $x^2+y^2=100$ التي يكون عندها ميل المماس $\frac{3}{4}$

الحل:

$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$

$2y\frac{dy}{dx}=-2x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{2y}=\frac{-x}{y}$

$\frac{-x}{y}=\frac{3}{4} \Rightarrow x=\frac{-3}{4}y$

$\left(\frac{-3}{4}y\right)^2+y^2=100$

$\frac{9}{16}y^2+y^2=100$

$\frac{9y^2+16y^2}{16}=100 \Rightarrow \frac{25y^2}{16}=100$

$y^2=\frac{100\times 16}{25} \Rightarrow y^2=64 \Rightarrow y=\pm 8$

$y=8 \Rightarrow x=\frac{-3}{4}(8)=-6 \Rightarrow (-6,8)$

$y=-8 \Rightarrow x=\frac{-3}{4}(-8)=6 \Rightarrow (6,-8)$

مثال26: أجد إحداثيي النقطة (النقاط) التي يكون عندها لمنحنى كل اقتران مما يأتي مماس أفقي:

1) $f(x)=\frac{2x-1}{x^2}$

$f'(x)=\frac{x^2(2)-(2x-1)(2x)}{x^4}$

$8e^{x}(x+1)=0$

$e^{x}=0$ **لايوجد**

$x=-1$

$f(-1)=\dfrac{8(-1-2)}{e^{-1}}=-24e$

$\therefore(-1,-24e)$

مثال27: أجد معادلة المماس للاقتران الآتي:

$f(x)=4e^{-0.5x^{2}} \quad ,x=-2$

الحل:

$f(-2)=4e^{-2} \quad \therefore\left(-2,4e^{-2}\right)$

$f'(x)=4\left(e^{-0.5x^{2}}\right)(-0.5(2x))$

$=-4xe^{-0.5x^{2}}$

$f'(-2)=8e^{-2}$

$y-4e^{-2}=8e^{-2}(x+2)$

مثال28: أجد ميل المماس لمنحنى $y^{2}+x^{2}+6y-2x+2=0$ عند النقطة $(3,-1)$

الحل:

$2y\dfrac{dy}{dx}+2x+6\dfrac{dy}{dx}-2=0$

$2y\dfrac{dy}{dx}+6\dfrac{dy}{dx}=2-2x$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2-2x}{2y+6}$

$=\dfrac{2x^{2}-4x^{2}+2x}{x^{4}}$

$=\dfrac{2x-2x^{2}}{x^{4}}=0$

$2x-2x^{2}=0$

$2x(1-x)=0\Rightarrow x=0$ ليس في المجال

$x=1$

$f(1)=\dfrac{2-1}{1}=1 \quad \therefore(1,1)$

2) $h(x)=\dfrac{x^{2}}{x^{2}+1}$

$h'(x)=\dfrac{\left(x^{2}+1\right)(2x)-\left(x^{2}\right)(2x)}{\left(x^{2}+1\right)^{2}}$

$=\dfrac{2x^{3}+2x-2x^{3}}{\left(x^{2}+1\right)^{2}}=\dfrac{2x}{\left(x^{2}+1\right)^{2}}$

$2x=0\Rightarrow x=0$

$h(0)=\dfrac{0}{1}=0 \quad \therefore(0,0)$

3) $g(x)=\dfrac{8(x-2)}{e^{x}}$

$g'(x)=\dfrac{e^{x}(8)-8(x-2)e^{x}}{\left(e^{x}\right)^{2}}$

$=e^{x}(8)-8(x-2)e^{x}=0$

$8e^{x}(1-x+2)=0$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,-1)}=\frac{2-6}{-2+6}=\frac{-4}{4}=-1$$

$$\tan\theta=-1\Rightarrow\theta=135^\circ=\frac{3\pi}{4}$$

تدريب:

أجد ميل مماس منحنى العلاقة $y^2=x$ عندما $x=4$

مثال 29: أجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة $x^2-xy+y^2=7$ عند النقطة $(-1,2)$

الحل:

$$2x-\left(x\frac{dy}{dx}+y\right)+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$2x-x\frac{dy}{dx}-y+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$2y\frac{dy}{dx}-x\frac{dy}{dx}=y-2x$$

$$\frac{dy}{dx}(2y-x)=y-2x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-2x}{2y-x}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-1,2)}=\frac{2-2\times-1}{2\times2--1}=\frac{4}{5}=m$$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-2=\frac{4}{5}(x--1)$$

$$y=\frac{4}{5}x+\frac{14}{5}$$

مثال 30: أجد ميل المماس لمنحنى $\sin(xy)=y$ عند النقطة $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$

الحل:

$$\cos(xy)\left(x\frac{dy}{dx}+y\right)=\frac{dy}{dx}$$

عوض $y=1$, $x=\frac{\pi}{2}$

$$\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}\frac{dy}{dx}+1\right)=\frac{dy}{dx}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=0$$

مثال 31: أجد معادلة المماس لمنحنى $e^{xy}=y^3$ عند $(0,1)$

الحل:

$$e^{xy}\left(x\frac{dy}{dx}+y\right)=3y^2\frac{dy}{dx}$$

عوض $y=1$, $x=0$

$$1(0+1)=3\frac{dy}{dx}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}$$

$$y-1=\frac{1}{3}(x-0)\Rightarrow y=\frac{1}{3}x+1$$

مثال 32: أجد معادلة المماس لمنحنى كل معادلة وسيطية مما يأتي عند النقطة المحددة بقيمة t المعطاة:

1) $x=t+2$, $y=t^2-1$, $t=1$

$$x(1)=1+2=3$$

$$y(1)=1-1=0\qquad\therefore(3,0)$$

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{1-\cos\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$$

$$y-\frac{1}{2}=\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

4) $x=\sec^2 t-1\ ,\ y=\tan t\ ,\ t=-\frac{\pi}{4}$

$$x\left(-\frac{\pi}{4}\right)=2-1=1$$

$$y\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1$$

$$\therefore(1,-1)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\sec^2 x}{2\sec x(\sec x\tan x)}$$

$$=\frac{1}{2\tan x}=\frac{1}{2\tan\frac{-\pi}{4}}=\frac{1}{2(-1)}=\frac{-1}{2}$$

$$y+1=\frac{-1}{2}(x-1)$$

$$y=\frac{-1}{2}x+\frac{1}{2}-1\Rightarrow y=\frac{-1}{2}x-\frac{1}{2}$$

مثال33: أجد معادلة المماس لكل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

1) $y=3\sin 5x-4\cos 3x\ ,\ x=\frac{\pi}{2}$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\frac{5\pi}{2}-4\cos 3\frac{\pi}{2}$$

$$=2\times1-4\times0=2\qquad\therefore\left(\frac{\pi}{2},2\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t}{1}=\frac{2}{1}=2$$

$$y-0=2(x-3)\Rightarrow y=2x-6$$

2) $x=\frac{t}{2}\ ,\ y=t^2-4\ ,\ t=-1$

$$x(-1)=\frac{-1}{2}$$

$$y(-1)=1-4=-3\qquad\therefore\left(-\frac{1}{2},-3\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t}{\frac{1}{2}}=\frac{2(-1)}{\frac{1}{2}}=-4$$

$$y+3=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$y+3=-4x+2\Rightarrow y=-4x-5$$

3) $x=t-\sin t\ ,\ y=1-\cos t\ ,\ t=\frac{\pi}{3}$

$$x\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$$

مـــثال34: يعطـى منحنـى بالمعادلـة الوسـيطية: $x=a\cos t\ ,\ y=b\sin t$ حيـــــــث: $0\le t\le 2\pi$ أجد المقطع y لمماس المنحنى عندما $t=\frac{\pi}{4}$ بدلالة a و b

الحل:

$$x\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{a}{\sqrt{2}}\quad ,\quad y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{b}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{b\cos t}{-a\sin t}$$

عند $\frac{\pi}{4}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{b}{\sqrt{2}}}{\frac{-a}{\sqrt{2}}}=\frac{-b}{a}=m$$

$$y-\frac{b}{\sqrt{2}}=\frac{-b}{a}\left(x-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

يقطع محور y عند $x=0$

$$y-\frac{b}{\sqrt{2}}=\frac{-b}{a}\left(0-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

$$y-\frac{b}{\sqrt{2}}=\frac{-b}{a}\times\frac{-a}{\sqrt{2}}=\frac{b}{\sqrt{2}}$$

$$y=\frac{b}{\sqrt{2}}+\frac{b}{\sqrt{2}}=\frac{2b}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}b$$

$$y'=10\cos 5x+12\sin 3x$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=10\cos\frac{5\pi}{2}+12\sin\frac{3\pi}{2}$$

$$=10\times 0+12\times -1=-12$$

$$y-2=-12\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

2) $f(x)=(x^2+2)^3\quad ,x=-1$

$$f(-1)=(1+2)^3=27\qquad(-1,27)$$

$$f'(x)=3\left(x^2+2\right)^2(2x)$$

$$f'(-1)=3(1+2)^2(-2)=-54$$

$$y-27=-54(x+1)$$

3) $f(x)=\tan 3x\quad ,x=\frac{\pi}{4}$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{3\pi}{4}=-1\qquad\therefore\left(\frac{\pi}{4},-1\right)$$

$$f'(x)=3\sec^2 3x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=3\sec^2\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$m=3(2)=6$$

$$y+1=6\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

مثال35: أجد معادلة مماس منحنى المعادلة الوسيطية الآتية، عندما $t=\frac{\pi}{4}$

$$x=\sec t,\quad y=\tan t,\quad -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$$

الحل:

$$x\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sec\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\sec^2 t}{\sec t\tan t}=\frac{\sec t}{\tan t}=\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$$

$$y-1=\sqrt{2}\left(x-\sqrt{2}\right)$$

$$y-1=\sqrt{2}x-2\Rightarrow y=\sqrt{2}x-1$$

مثال36: يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية:

$x=2(t-\sin t)\,,\ y=2(1-\cos t)$ حيث: $0\le t\le 2\pi$ أثبت أن ميل المماس وميل العمودي على المماس لمنحنى هذه العلاقة عندما $t=\frac{\pi}{4}$ هما $1+\sqrt{2}$ و $1-\sqrt{2}$ على الترتيب

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2\sin t}{2(1-\cos t)}$$

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{1-\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

بالضرب بالمرافق $\frac{1}{\sqrt{2}-1}\times\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}$

$$=\frac{\sqrt{2}+1}{2-1}=\sqrt{2}+1=m$$

ميل العمودي $=\frac{-1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}}$

$$=-\left(\sqrt{2}-1\right)=-\sqrt{2}+1=1-\sqrt{2}$$

مثال37: إذا كان الاقتران: $y=e^{ax}$ حيث a ثابت و $a>0$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعا:

1) أجد إحداثيي النقطة P التي تقع على منحنى الاقتران ويكون ميل المماس عندها 1

الحل:

$$y'=ae^{ax}=1$$

$$e^{ax}=\frac{1}{a}$$

$$f'(x)=ae^{ax}=1$$

$$e^{ax}=\frac{1}{a}$$

$$ax=\ln\frac{1}{a}=-\ln a$$

$$x=\frac{-\ln a}{a}$$

$$y = e^{\frac{a(-\ln a)}{a}} = e^{-\ln a} = e^{\ln a^{-1}} = a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$\therefore \left(\frac{-\ln a}{a}, \frac{1}{a}\right)$$

2) اثبت أنه يمكن كتابة معادلة العمودي على المماس عند النقطة P في صورة $x + y = k$ ثم أجد قيمة الثابت k

الحل:

ميل العمودي $= -1$

$$y - \frac{1}{a} = -1\left(x + \frac{\ln a}{a}\right)$$

$$y - \frac{1}{a} = -x - \frac{\ln a}{a}$$

$$y + x = -\frac{\ln a}{a} + \frac{1}{a}$$

$$k = -\frac{\ln a}{a} + \frac{1}{a}$$

مثال 38: يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية:

$x = \sin^2\theta, y = 2\cos\theta$ حيث:

$0 \le \theta \le 2\pi$

1) أجد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة θ

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-2\sin\theta}{2\sin\theta\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta}$$

2) أجد معادلة المماس عندما يكون الميل $\sqrt{2}$

الحل:

$$\frac{-1}{\cos\theta} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

$$y + \sqrt{2} = \sqrt{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

3) أجد النقطة التي يكون عندها المماس موازيا للمحور y

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\cos\theta} = \frac{-1}{0}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad , \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad (1,0)$$

$$x\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1 \quad , \quad y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \qquad (1,0)$$

مثال 39: أجد النقطة على منحنى $(y-4)^2 = x+2$ التي يكون المماس عندها موازي للمستقيم $3x + 6y = -2$

الحل:

ميل المستقيم = ميل المنحنى $\quad m_1 = m_2$

ميل المنحنى m_1

$$2(y-4)\frac{dy}{dx}=1$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2(y-4)}$$

ميل المستقيم m_2

$$3+6\frac{dy}{dx}=0$$

$$6\frac{dy}{dx}=-3\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{-3}{6}=\frac{-1}{2}$$

ميل المستقيم = ميل المنحنى

$$m_1=m_2$$

$$\frac{-1}{2}=\frac{1}{2(y-4)}$$

$$-y+4=1\Rightarrow y=3$$

$$1=x+2\Rightarrow x=-1$$

النقطة $(-1,3)$

مـــــثال40: أجـــد النقطـــة علـــى منحنـــى $\sqrt{x}+\sqrt{y}=6$ التي يكون المماس عندها عموديا للمستقيم $3x=5+6y$

الحل:

عمودي/ يعامد $\frac{-1}{m_1}=m_2$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=m_1$$

ميل المستقيم

$$3-6\frac{dy}{dx}=0\Rightarrow-6\frac{dy}{dx}=-3$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=m_2$$

$$\frac{-1}{m_1}=m_2$$

$$-2=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

$$-2\sqrt{x}=-\sqrt{y}\Rightarrow\sqrt{y}=2\sqrt{x}$$

بالتعويض في المعادلة الأساسية في السؤال:

$$\sqrt{x}+2\sqrt{x}=6$$

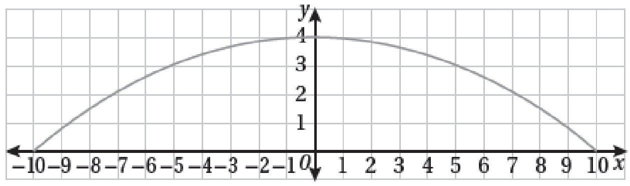
$$3\sqrt{x}=6\Rightarrow\sqrt{x}=2\Rightarrow x=4$$

بالتعويض $2+\sqrt{y}=6$

$$\sqrt{y}=4\Rightarrow y=16$$

النقطة $(4,16)$

مثال41: يبين التمثيل البياني المجاور شكل مطب سرعة صمم للتخفيف من سرعة السيارات على أحد الطرق. وفيه يمثل المحور x سطح الأرض وتقاس جميع الأطوال بالسنتيمترات.



إذا كانت المعادلة الوسيطية التي تمثل منحنى المطب هي: $x = 10\sin t, y = 2 + 2\cos 2t$ حيث: $-\dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{\pi}{2}$ فأجد كلا مما يأتي:

1) ميل المماس لمنحنى المطب بدلالة t

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-4\sin 2t}{10\cos t}$$

2) قيمة t عند أعلى نقطة على منحنى المطب

الحل:

اعلى نقطة يكون ميل المماس يساوي صفر

$$\frac{-4\sin 2t}{10\cos t} = 0 \Rightarrow -4\sin 2t = 0$$

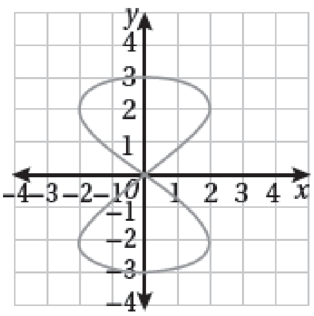
$$\sin 2t = 0 \Rightarrow 2t = 0, \pi, 2\pi$$

$$\Rightarrow t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$$

لأنه $-\dfrac{\pi}{2} \le t < \dfrac{\pi}{2}$

مثال42: يبين الشكل المجاور منحنى المعادلة الوسيطية:

$$x = 2\sin 2t, y = 3\cos t \qquad 0 \le t \le 2\pi$$



أجد ميل المماس لمنحنى المعادلة عند نقطة الأصل، مبررا إجابتي.

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-3\sin t}{4\cos 2t}$$

$x = 2\sin 2t$ عند $t = 0, x = 0$

$$x' = 4\cos 2t = 4\cos 0 = 4$$

$y = 3\cos t$ عند $y = 0$

$$\cos t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

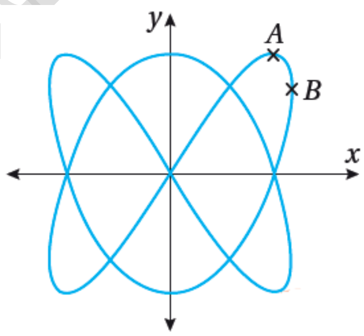
$$y' = -3\sin t = -3(1) = -3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3}{4}$$

مثال43:

يبين الشكل المجاور منحنى المعادلة الوسيطية:

$$x = \sin 2t, \quad y = \sin 3t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$



1) إذا كان مماس منحنى المعادلة أفقيا عند النقطة A الواقعة في الربع الأول، فأجد إحداثيي A

الحل:

عند $t=0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3\cos 3t}{2\cos 2t}$$

المماس أفقي الميل = صفر

$$3\cos 3t=0\Rightarrow \cos 3t=0$$

$$\Rightarrow 3t=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}$$

$$x=\sin\left(2\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y=\sin\left(3\frac{\pi}{6}\right)=1$$

$$\therefore A\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$$

2) اذا كان مماس المنحنى موازياً للمحور y عند النقطة B فأجد إحداثيي B

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3\cos 3t}{2\cos 2t}$$

الميل = $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$

$$2\cos 2t=0\Rightarrow \cos 2t=0$$

$$\Rightarrow 2t=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$$

$$x=\sin\left(2\frac{\pi}{4}\right)=1$$

$$y=\sin\left(3\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore B\left(1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

3) اذا مر فرعان من المنحنى بنقطة الاصل كما هو موضح في الشكل فأجد ميل المماس لكل منهما عند هذه النقطة

الحل:

يمكن $t=0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3\cos 0}{2\cos 0}=\frac{3}{2}$$

يمكن $t=\pi$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3\cos(3\pi)}{2\cos(2\pi)}=\frac{3(-1)}{2(1)}=\frac{-3}{2}$$

مثال44: اذا كان العمودي على المماس عند النقطة p يقطع المحور x عند النقطة $(100,0)$ فأجد قيمة k

الحل:

ميل العمودي

$$y-k=\frac{-1}{k}(x-0)$$

$$0-k=\frac{-1}{k}(100-0)$$

$$-k^2=-100$$

$$k^2=100\Rightarrow k=10c\ ,k=-10d$$

مـــثال45: أجـد معادلـة المماس لمنحنـى الاقتـران:

$f(x)=2e^x+x$ عندما $x=2$

الحل:

$$f(2)=2e^2+2$$

النقطة $\left(2,2e^2+2\right)$

$$f'(x)=2e^x+1$$

$$f'(2)=2e^2+1$$

$$y-\left(2e^2+2\right)=\left(2e^2+1\right)(x-2)$$

مـــثال46: أثبـت عـدم وجـود مماس أفقي لمنحنـى

الاقتران: $f(x)=3x+\sin x+2$

الحل:

المماس أفقي يعني الميل يساوي صفر

$$f'(x)=3+\cos x=0$$

$$\cos x=-3$$

لا يوجد لها حل اذن لا يوجد مماس أفقي

مـــــثال47: إذا كـــان: $f(x)=\ln x^2$ حيـــث

$x>0$ فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعا:

1) اجد معادلة مماس منحنى الاقتران عندما $x=e^x$

الحل:

$$f(e^2)=2\ln e^2=2(2)=4$$

$\left(e^2,4\right)$

$$f'(x)=2\times\frac{1}{x}$$

$$f'(e^2)=\frac{2}{e^2}$$

$$y-4=\frac{2}{e^2}\left(x-e^2\right)$$

2) أجد الاحداثي x للنقطة التي يكون المماس عندها

موازيا للمستقيم $6x-2y+5=0$

الحل:

موازي يعني لهم نفس الميل، نشتق المستقيم

$$6x+5=2y$$

$$6=2y'\Rightarrow y'=3$$

$$\frac{2}{x}=3\Rightarrow 2=3x\Rightarrow x=\frac{2}{3}$$

مثال48: أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى

العلاقـــة: $(x-6)(y+4)=2$ عنـــد النقطـــة

$(7,-2)$

الحل:

$$(x-6)\frac{dy}{dx}+(y+4)(1)=0$$

$$(7-6)\frac{dy}{dx}+(-2+4)=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-2$$

ميل العمودي $=\frac{1}{2}$

$$y+2=\frac{1}{2}(x-7)\Rightarrow y=\frac{1}{2}x-\frac{11}{2}$$

مثال49: أثبت أن لمنحنى العلاقة: $3x^2+2xy+y^2=6$ مماسين أفقين، ثم أجد إحداثيي نقطتي التماس

الحل:

مماس أفقي يعني $\frac{dy}{dx}=0$

$$6x+2x\frac{dy}{dx}+y\times 2+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow 6x+2y=0$$

$$2y=-6x \Rightarrow y=-3x$$

$$3x^2+2x(-3x)+(-3x)^2=6$$

$$3x^2-6x^2+9x^2=6$$

$$6x^2=6 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

قيمتان لـ x اذن يوجد مماسين

$$x=1, y=-3 \Rightarrow (1,-3)$$

$$x=-1, y=3 \Rightarrow (-1,3)$$

مثال50: أجد إحداثيي نقطة على المنحنى $x+y^2=1$ بحيث يكون عندها مماس المنحنى موازيا للمستقيم: $x+2y=0$

الحل:

ميل المماس

$$x+y^2=1$$

$$1+2y\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-1}{2y}=m_1$$

ميل المستقيم

$$x+2y=0$$

$$1+2\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-1}{2}=m_2$$

المماس يوازي المستقيم

$$\frac{-1}{2y}=\frac{-1}{2} \Rightarrow y=1$$

$$x+1=1 \Rightarrow x=0 \qquad \therefore (0,1)$$

مثال51: إذا كان الاقتران: $y=\ln(ax+b)$ حيث a و b ثابتان موجبان وكان ميل المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة P هو 1 فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعا:

1) أثبت أن الإحداثي x للنقطة P أقل من 1

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a}{ax+b}=1$$

$$ax+b=a$$

$$b=a-ax$$

$$b=a(1-x)$$

بما أن $a>0$

$$1-x>0 \Rightarrow 1>x$$
$$\Rightarrow x<1$$

2) أجد إحداثيي النقطة التي يكون عندها ميل المماس $\frac{1}{2}$ علما بأن P هي النقطة $(0,2)$ ثم أبرر إجابتي

الحل:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(0,2)}=\frac{b}{a}=1 \Rightarrow a=b$$

$$y|_{(0,2)}=\ln(0+b)$$

$$=\ln b=2\Rightarrow b=e^2$$

فتكون $a=e^2$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a}{ax+b}=\frac{e^2}{e^2x+e^2}$$

$$=\frac{e^2}{e^2(x+1)}=\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x=1$$

$$y=\ln(ax+b)$$

$$=\ln(e^2+e^2)=\ln 2e^2$$

$$\therefore (1,\ln 2e^2)$$

مثال52: اذا كانت $y=2t\ ,\ x=t^2$ أثبت أن مساحة المثلث المكون من العمودي على المماس والمحورين الإحداثيين هي $\frac{1}{2}|t|(2+t^2)^2$

الحل:

يقطع محور x عند $y=0$

$$0-2t=-t(x-t^2)$$

$$2=x-t^2$$

$$x=t^2+2$$

القاعدة $=t^2+2$

يقطع محور y عند $x=0$

$$y-2t=-t(0-t^2)$$

$$y-2t=t^3$$

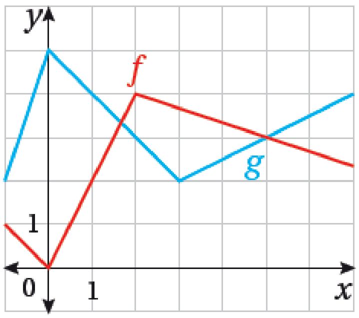
$$y=t^3+2t=t(t^2+2)$$

الارتفاع $=|t|(t^2+2)$

المساحة $=\frac{1}{2}$ القاعدة $\times$ الارتفاع

$$=\frac{1}{2}(t^2+2)\times|t|(t^2+2)=\frac{1}{2}|t|(t^2+2)^2$$

مثال53: يبين الشكل المجاور منحنيي الاقترانين $f(x)$ و $g(x)$ إذا كان: $h(x)=f(g(x))$ وكان: $p(x)=g(f(x))$ فأجد كلا مما يأتي:



1) $h'(1)$

$$h'(x)=f'(g(x))\,g'(x)$$

من الشكل $g(1)=4$

لايجاد $g'(1)$

$$(0,5)(1,4)$$

$$m=\frac{5-4}{0-1}=-1\Rightarrow g'(1)=-1$$

لايجاد $f'(4)$

$$(2,4)(5,3)$$

$$m=\frac{4-3}{2-5}=\frac{1}{-3}=\frac{-1}{3}\Rightarrow f'(4)=\frac{-1}{3}$$

$$h'(1)=f'(4)\,g'(1)$$

$$h'(1)=f'(4)\times-1=\frac{-1}{3}\times-1=\frac{1}{3}$$

$$\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{4}=x \Rightarrow x=1$$

نجد y

$$\frac{1}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

$$\frac{y^2}{9}=\frac{3}{4} \Rightarrow y^2=\frac{27}{4} \Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{27}}{2}$$

$$\left(1,\frac{\sqrt{27}}{2}\right)\left(1,\frac{-\sqrt{27}}{2}\right)$$

عندما $\left(1,\frac{\sqrt{27}}{2}\right)$

$$y'=\frac{-9}{2\sqrt{27}}=m$$

$$y-\frac{\sqrt{27}}{2}=\frac{-9}{2\sqrt{27}}(x-1)$$

عندما $\left(1,\frac{-\sqrt{27}}{2}\right)$

$$y'=\frac{9}{2\sqrt{27}}=m$$

$$y+\frac{\sqrt{27}}{2}=\frac{9}{2\sqrt{27}}(x-1)$$

مــثال54: أجـد نقطتـي تقـاطع منحنـى العلاقـة: $x^2+xy+y^2=7$ مـع المحـور x ثـم أثبـت أن مماسي منحنى العلاقة عند هاتين النقطتين متوازيان.

الحل:

يقطع المنحنى محور x عندما $y=0$

$$x^2=7 \Rightarrow x=\pm\sqrt{7}$$

$$\left(\sqrt{7},0\right),\left(-\sqrt{7},0\right)$$

2) $p'(1)$

$$p'(1)=g'(f(1))\,f'(1)$$

$f(1)=2$ من الشكل

لايجاد $f'(1)$

$$(0,0)(2,4)$$

$$m=\frac{0-4}{0-2}=2 \Rightarrow f'(1)=2$$

لايجاد $g'(2)$

$$(0,5)(3,2)$$

$$m=\frac{5-2}{0-3}=-1 \Rightarrow g'(2)=-1$$

$$p'(1)=g'(2)\times 2=-1\times 2=-2$$

مــثال53: أجد معـادلتي مماسـي منحنـى العلاقـة: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ اللذين يمران بالنقطة $(4,0)$

الحل:

نفرض نقطة التماس (x,y)

$$(4,0)$$

ميل المماس $=\frac{y-0}{x-4}$

$$\frac{2x}{4}+\frac{2yy'}{9}=0$$

$$\frac{2yy'}{9}=\frac{-x}{2} \Rightarrow y'=\frac{-9x}{4y}$$

$$\frac{y}{x-4}=\frac{-9x}{4y} \Rightarrow 4y^2=-9x^2+36x$$

$$4y^2+9x^2=36x \qquad \div 36$$

$$2x+xy'+y+2yy'=0$$

عند $\left(\sqrt{7},0\right)$

$$2\sqrt{7}+\sqrt{7}y'+0+0=0$$

$$y'=\frac{-2\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=-2=m_1$$

عند $\left(-\sqrt{7},0\right)$

$$-2\sqrt{7}+\left(-\sqrt{7}\right)y'+0+0=0$$

$$y'=\frac{-2\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=-2=m_2$$

المماسان متوازيان لأن الميلين متساويان

مــثال55: إذا كـان: $x^2-y^2=1$ فأجيـب عـن الأسئلة الأربعة الآتية تباعا:

1) أجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$2x-2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$2y\frac{dy}{dx}=2x\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{2y}=\frac{x}{y}$$

2) يمكن التعبير عن منحنى العلاقة: $x^2-y^2=1$ بالمعادلة الوسيطية: $x=\sec t, y=\tan t$ حيث: $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$ استـعمل هـذه الحقيقـة لإيجـاد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة t

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\sec^2 t}{\sec t\tan t}=\frac{\sec t}{\tan t}$$

3) أثبـت أن المقـدارين الجبـريين اللـذين يمـثلان $\frac{dy}{dx}$ الناتجين في الفرعين السابقين متكافئان، مبررا إجابتي

الحل:

$$\frac{\sec t}{\tan t}=\frac{x}{y}$$

4) أجـد إحـداثيات النقـاط التـي يمكـن عنـدها ميـل المماس 2

الحل:

$$\frac{x}{y}=2\Rightarrow x=2y$$

$$(2y)^2-y^2=1$$

$$4y^2-y^2=1\Rightarrow 3y^2=2$$

$$y^2=\frac{2}{3}\Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$x=\pm2\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\left(2\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(-2\sqrt{\frac{2}{3}},-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

مثال56: إذا مثل المستقيم A أي مماس لمنحنى المعادلة: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{k}$ حيث k ثابت موجب، فأثبت أن مجموع المقطع x والمقطع y للمستقيم A يساوي k، مبررا إجابتي

الحل:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{k}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}y'=0$$

عند النقطة (a,b)

$$y'=\frac{-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=-\sqrt{\frac{y}{x}}=-\sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$y-b=-\sqrt{\frac{b}{a}}(x-a)$$

$$x=0\Rightarrow y=-\sqrt{\frac{b}{a}}\times a+b=b+\sqrt{ab}$$

$$=\frac{-\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\times a+b$$

$$y=0\Rightarrow -b=\frac{-\sqrt{b}}{\sqrt{a}}(x-a)$$

$$x=a+\sqrt{ab}$$

$$x+y=\sqrt{a}\sqrt{b}+b+\sqrt{a}\sqrt{b}$$

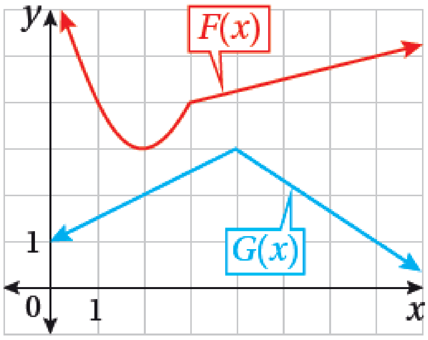
$$\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)+\sqrt{b}\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)$$

$$=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$$

$$=\sqrt{k}\sqrt{k}=k$$

مثال57: يبين الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: $F(x)$ و $G(x)$ إذا كـــــــــــــــــــــــان: $P(x)=F(x)G(x)$ وكان $Q(x)=\frac{F(x)}{G(x)}$:

فأجد كلا مما يأتي:



1) $P'(2)$

$F(2)=3 \quad , \quad G(2)=2$

لايجاد المشتقة عند اي نقطة على الخط المستقيم

تكون المشتقة = ميل المستقيم

ولايجاد الميل نجد نقطتين على الخط المستقيم ويكون

الميل $=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

واذا كان المماس أفقي عند نقطة فإن المشتقة = صفر

لذلك $F'(2)=0$ ولايجاد $G'(2)$

نختار النقطتين $(4,3),(2,2)$

$$m=\frac{3-2}{4-2}=\frac{1}{2}$$

$$P(x)=F(x)G(x)$$

$$P'(x)=F(x)G'(x)+G(x)F'(x)$$

$$P'(2)=F(2)G'(2)+G(2)F'(2)$$

$$P'(2)=3\left(\frac{1}{2}\right)+2(0)=\frac{3}{2}$$

2) $Q'(7)$

من الشكل

$F(7)=5 \quad , \quad G(7)=1$

لايجاد $F'(7)$ نختار $(7,5),(3,4)$

$$m=\frac{5-4}{7-3}=\frac{1}{4}$$

$$F'(7)=\frac{1}{4}$$

لايجاد $G'(7)$ نختار $(7,1),(4,3)$

$$m=\frac{1-3}{7-4}=\frac{-2}{3}$$

$$G'(7)=\frac{-2}{3}$$

$$Q(x)=\frac{F(x)}{G(x)}$$

$$Q'(x)=\frac{G(x)F'(x)-F(x)G'(x)}{(G(x))^2}$$

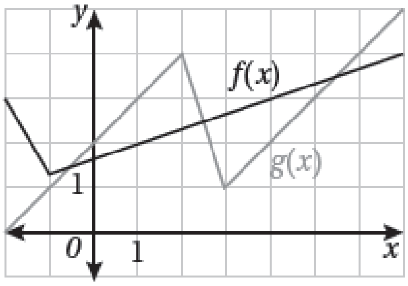
$$Q'(7)=\frac{1\left(\frac{1}{4}\right)-5\left(\frac{-2}{3}\right)}{1}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{10}{3}=\frac{3+40}{12}=\frac{43}{12}$$

مـثال58: يبين الشكل المجاور منحنيي الاقترانين:

$g(x), f(x)$ إذا كــان: $u(x)=f(x)g(x)$

وكان: $v(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ فأجد كلا مما يأتي:



1) $u'(1)$

من الشكل

$f(1)=2 \quad , \quad g(1)=3$

$f:(1,2),(4,3)$

$$m=\frac{2-3}{1-4}=\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3}$$

$$f'(1)=\frac{1}{3}$$

$g:(1,3),(2,4)$

$$m=\frac{3-4}{1-2}=1$$

$$g'(1)=1$$

$$u(x)=f(x)g(x)$$

$$u'(x)=f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$$

$$u'(1)=2\times1+3\times\frac{1}{3}=2+1=3$$

2) $v'(4)$

من الشكل

$f(4)=3 \quad , \quad g(4)=2$

$f'(4)=\dfrac{1}{3}$ نفس الخط المستقيم

$g:(3,1),(4,2)$

$$m=\frac{1-2}{3-4}=1$$

$$g'(4)=1$$

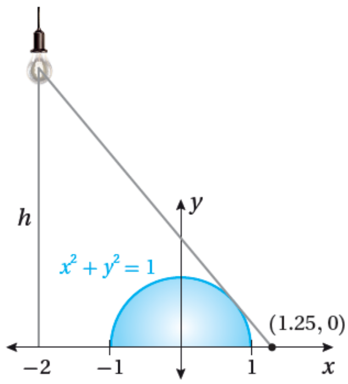
$$v'(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$v'(x)=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$v'(4)=\frac{2\times\frac{1}{3}-3\times 1}{4}$$

$$v'(4)=\frac{\frac{2}{3}-3}{4}=\frac{\frac{-7}{3}}{4}=\frac{-7}{12}$$

مــثال59: يبين الشكل المجاور مصباحا على ارتفاع h وحدة من المحور x إذا وقعت النقطة $(1.25,0)$ في نهاية الشعاع الصادر من المصباح، الذي يمس منحنى العلاقة: $x^2+y^2=1$ فأجد ارتفاع المصباح h



الحل:

نفرض نقطة التماس (x,y)

$$m=\frac{y-0}{x-1.25}$$

نجد ميل المماس من المستقيم

$$2x+2x\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{2y}=\frac{-x}{y}$$

$$\frac{-x}{y}=\frac{y-0}{x-1.25}$$

$$y^2=-x^2+1.25x$$

$$y^2=-x^2+1.25x$$

$$y^2+x^2=1.25x$$

$$1.25x=1\Rightarrow x=\frac{1}{1.25}=\frac{1}{\frac{5}{4}}=\frac{4}{5}$$

نجد y

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2+y^2=1$$

$$y^2=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}\Rightarrow y=\frac{3}{5}$$

$$\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{y}=\frac{\frac{-4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{-4}{3}=m$$

$$y-\frac{3}{5}=-\frac{4}{3}\left(x-\frac{4}{5}\right)$$

عند $x=-2$

$$y-\frac{3}{5}=-\frac{4}{3}\left(-2-\frac{4}{5}\right)$$

$$y-\frac{3}{5}=\frac{8}{3}+\frac{16}{15}\Rightarrow y=\frac{65}{15}$$

مثال60: إذا كان مماس منحنى الاقتران: $y=x^{\sqrt{x}}$ عند النقطة $(4,16)$ يقطع المحور x في النقطة B ، والمحور y في النقطة C ، فأجد مساحة ΔOBC حيث O نقطة الأصل

الحل:

$$y = x^{\sqrt{x}}$$

$$\ln y = \sqrt{x}\ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \sqrt{x} \times \frac{1}{x} + \ln x \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = y\left(\frac{1}{x} + \ln x \times \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= 16\left(\frac{1}{2} + \ln 4 \times \frac{1}{4}\right) = 8 + 4\ln 4$$

$$y - 16 = (8 + 4\ln 4)(x - 4)$$

يقطع محور x عندما $y = 0$

$$-16 = 4(2 + \ln 4)(x - 4)$$

$$-16 = 4(2 + \ln 4)x - 16(2 + \ln 4)$$

$$x = \frac{16(2 + \ln 4) - 16}{2(2 + \ln 4)}$$

يقطع محور y عندما $x = 0$

$$y - 16 = -16(2 + \ln 4)$$

$$y = 16 - 16(2 + \ln 4)$$

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{16(2+\ln 4) - 16}{2(2+\ln 4)}\right)\left(16 - 16(2 + 2\ln 4)\right)$$

مثال61: اجد مساحة المثلث المكون من المماس لمنحنى $y = \frac{2}{x}$ عند النقطة $(1, 2)$ وكل من المحور x والمحور y

الحل:

نقطة التماس $(1, 2)$

ميل المماس = ميل المنحنى

$$m = \frac{-2}{x^2}$$

عوض $x = 1 \Leftarrow m = -2$

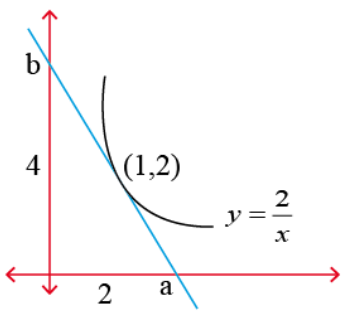
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = -2(x - 1)$$

$$y = -2x + 2 + 2 \Rightarrow y = -2x + 4$$

المماس متناقص لأن ميله سالب

نرسم خط يمثل المماس في المستوى البياني



تقاطع المماس مع المحور x نضع $y = 0$

$$0 = -2x + 4$$

$$2x = 4 \Rightarrow x = 2 \qquad \therefore a(2, 0)$$

تقاطع المماس مع المحور y نضع $x = 0$

$$y = -2x + 4$$

$$y = 0 + 4 \Rightarrow y = 4 \qquad \therefore b(4, 0)$$

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ |المقطع (x)| المقطع (y)|

$$A = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$$

مثال62: اجد مساحة المثلث المتكون من المحور x وكل من المماس والعمودي لمنحنى $f(x)=x^2$ عند النقطة $(2,4)$

الحل:

نقطة التماس $(2,4)$

ميل المماس = ميل المنحنى

$$m=2x$$

عوض $x=2 \Rightarrow m=4$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-4=4(x-2)$$

$$y=4x-8+4 \Rightarrow y=4x-4$$

المماس متزايد لأن ميله موجب

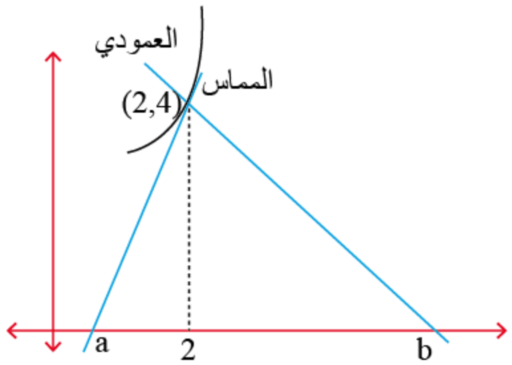
وكذلك معادلة العمودي

$$y-y_1=\frac{-1}{m}(x-x_1)$$

$$y-4=\frac{-1}{4}(x-2)$$

$$y=\frac{-1}{4}x+\frac{1}{2}+4 \Rightarrow y=\frac{-1}{4}x+\frac{9}{2}$$

العمودي متناقص لأن ميله سالب



تقاطع المماس مع المحور x نضع $y=0$

$$y=4x-4 \Rightarrow 0=4x-4$$

$$4x=4 \Rightarrow x=1 \qquad \therefore a(1,0)$$

تقاطع العمودي مع المحور x نضع $y=0$

$$0=\frac{-1}{4}x+\frac{9}{2} \Rightarrow \frac{1}{4}x=\frac{9}{2}$$

$$x=\frac{9}{2}\times 4 \Rightarrow x=18 \qquad \therefore b(18,0)$$

مساحة المثلث $= \frac{1}{2}\times$ القاعدة $\times$ الارتفاع

$$A=\frac{1}{2}\times(18-1)\times 4=34$$

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1) يمثل الاقتران: $s(t)=3+\sin t$ حركة توافقية بسيطة لجسيم إحدى الآتية تمثل الزمن الذي تكون عنده سرعة الجسيم المتجهة صفرا:

a) $t=0$ b) $t=\frac{\pi}{4}$

c) $t=\frac{\pi}{2}$ d) $t=\pi$

الحل:

$$v(t)=s'(t)=\cos t=0 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$$

2) إذا كان: $y=uv$ وكان:

$u(1)=2, u'(1)=3 \quad v(1)=-1, v'(1)=1$

فإن $y'(1)$ تساوي:

a) 1 b) -1 c) -4 d) 4

الحل:

$$y'=uv'+vu'$$

$$2\times1+-1\times3=-1$$

3) إذا كان: $f(x)=x-\frac{1}{x}$ ، فإن $f''(x)$ هو:

a) $1+\frac{1}{x^2}$ b) $1-\frac{1}{x^2}$

c) $\frac{2}{x^3}$ d) $-\frac{2}{x^3}$

الحل:

$$f(x)=x-\frac{1}{x}=x-x^{-1}$$

$$f'(x)=1+x^{-2}$$

$$f''(x)=-2x^{-3}=\frac{-2}{x^3}$$

4) إذا كان: $y=\tan 4t$ ، فإن $\frac{dy}{dt}$ هو:

a) $4\sec 4t\tan 4t$ b) $\sec 4t\tan 4t$

c) $\sec^2(4t)$ d) $4\sec^2(4t)$

الحل:

$$\frac{dy}{dt}=4\sec^2(4t)$$

5) إذا كان: $y^2-x^2=1$ ، فإن ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة $(1,\sqrt{2})$ هو:

a) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $-\sqrt{2}$ c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ d) $\sqrt{2}$

الحل:

$$2yy'-2x=0$$

$$2yy'=2x \Rightarrow y'=\frac{2x}{2y}=\frac{x}{y}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,\sqrt{2})}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

6) إذا كان: $f(x)=\log(2x-3)$ ، فإن $f'(x)$ هو:

a) $\frac{2}{(2x-3)\ln 10}$ b) $\frac{2}{(2x-3)}$

c) $\frac{1}{(2x-3)\ln 10}$ d) $\frac{1}{(2x-3)}$

الحل:

$$f'(x)=\frac{2}{(2x-3)\ln 10}=\frac{2}{(2x-3)}$$

7) إذا كان: $y = 2^{1-x}$ ، فإن ميل المماس لمنحنى العلاقة عندما $x = 2$ هو:

a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{\ln 2}{2}$ d) $-\frac{\ln 2}{2}$

الحل:

$$y' = -\ln 2\left(2^{1-x}\right) = -\ln 2\left(2^{-1}\right) = \frac{-\ln 2}{2}$$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

8) $f(x) = e^x\left(x + x\sqrt{x}\right)$

$$f(x) = e^x\left(x + x^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$f'(x) = e^x\left(1 + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right) + \left(x + x^{\frac{3}{2}}\right)e^x$$

9) $f(x) = \frac{x}{\tan x}$

$$f'(x) = \frac{\tan x - x\sec^2 x}{\tan^2 x}$$

10) $f(x) = \frac{1}{x} - 12\sec x$

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} - 12\sec x\tan x$$

11) $f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$

$$f'(x) = \frac{\ln x \times e^x - e^x \times \frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$$

12) $f(x) = \frac{\ln x}{x^4}$

$$f'(x) = \frac{x^4 \times \frac{1}{x} - \ln x \times 4x^3}{x^8}$$

13) $f(x) = 5^{2-x}$

$$f'(x) = -\ln 5\left(5^{2-x}\right)$$

14) $f(x) = 10\sin 0.5x$

$$f'(x) = 10(0.5)\cos 0.5x$$

$$f'(x) = 5\cos 0.5x$$

15) $f(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^3\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2\left(2\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right)^2\left(3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2\left(\frac{-1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)\right)$$

16) $f(x) = e^{-1.5x}\cos x^2$

$$f'(x) = e^{-1.5x} \times \left(-\sin x^2\right)(2x) + \cos x^2\left(-1.5e^{-1.5x}\right)$$

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عندما $x = 2$ وكان: $g(2) = 1, g'(2) = 2$ $f(2) = 3, f'(2) = -4$ فأجد كلا مما يأتي:

17) $(fg)'(2)$

$$(fg)'(2) = f(2)g'(2) + g(2)f'(2)$$

$$= 3 \times 2 + 1 \times -4 = 6 - 4 = 2$$

18) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(2)$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(2)=\frac{g(2)f'(2)-f(2)g'(2)}{\left(g(2)\right)^2}$$

$$=\frac{1\times -4-3\times 2}{(1)^2}=\frac{-4-6}{1}=-10$$

19) $(3f-4fg)'(2)$

$$=3f'(2)-4(fg)'(2)$$

$$=3(-4)-4(2)=-20$$

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران مما يأتي:

20) $f(x)=x^7\ln x$

$$f'(x)=x^7\times\frac{1}{x}+\ln x\times 7x^6$$

$$f'(x)=x^6+7x^6\ln x$$

$$f''(x)=6x^5+7x^6\times\frac{1}{x}+\ln x\times 42x^5$$

$$f''(x)=6x^5+7x^5+42x^5\ln x$$

$$f''(x)=13x^5+42x^5\ln x$$

21) $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$

$$f'(x)=\frac{x(-\sin x)-\cos x}{x^2}$$

$$=\frac{-x\sin x-\cos x}{x^2}$$

$$f''(x)=\frac{x^2\left(-x\cos x-\sin x(-1)+\sin x\right)-\left(x\sin x-\cos x\right)2x}{x^4}$$

22) $f(x)=\dfrac{x}{1+\sqrt{x}}$

$$f'(x)=\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)(1)-x\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{1+\sqrt{x}-\frac{1}{2}\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

$$f''(x)=\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)-\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)\left(2\left(1+\sqrt{x}\right)\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(1+\sqrt{x}\right)^4}$$

23) $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

$$f'(x)=\frac{\left(1+x^2\right)(-2x)-\left(1-x^2\right)(2x)}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-2x^3-2x+2x^3}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-4x}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$f''(x)=\frac{\left(1+x^2\right)^2(-4)-(-4x)\left(2\left(1+x^2\right)(2x)\right)}{\left(1+x^2\right)^4}$$

أجد معادلة المماس لكل اقتران مما يأتي عند القيمة المعطاة:

24) $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x}, x=1$

$f(1)=\dfrac{1}{2}$

$\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$ نقطة التماس

$f'(x)=\dfrac{(1+x)(2x)-x^2(1)}{(1+x)^2}$

$f'(1)=\dfrac{2(2)-1}{4}=\dfrac{3}{4}$

$y-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}(x-1)$ معادلة المماس

25) $f(x)=\dfrac{x^2}{\cos x}, x=\dfrac{\pi}{4}$

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\frac{\pi^2}{16}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}\dfrac{\pi^2}{16}$

$f'(x)=\dfrac{\cos x(2x)-x^2(-\sin x)}{(\cos x)^2}$

$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{2\pi}{4}+\frac{\pi^2}{16}\times\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}}$

$=2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times\dfrac{2\pi}{4}+\dfrac{\pi^2}{16}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

معادلة المماس

$y-\dfrac{\sqrt{2}\pi^2}{16}=2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times\dfrac{2\pi}{4}+\dfrac{\pi^2}{16}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

26) $f(x)=\ln(x+5), x=0$

$f(0)=\ln 5 \qquad (0,\ln 5)$

$f'(x)=\dfrac{1}{x+5}$

$f'(0)=\dfrac{1}{5}$

$y-\ln 5=\dfrac{1}{5}(x-0)$ معادلة المماس

$y=\dfrac{1}{5}x+\ln 5$

27) $f(x)=\sin x+\sin 3x, x=\dfrac{\pi}{4}$

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+3\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

$f'(x)=\cos x+3\cos 3x$

$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+3\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{-2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$

$y-2\sqrt{2}=-\sqrt{2}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ معادلة المماس

أجد معادلة المماس لمنحنى كل معادلة وسيطة مما يأتي عند النقطة المحددة بقيمة المعطاة:

28) $x=t^2, y=t+2, t=4$

$x=16 \quad , \quad y=6 \quad , \quad (16,6)$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{1}{2t}=\dfrac{1}{8}$

$y-6=\dfrac{1}{8}(x-16)$ معادلة المماس

29) $x = 4\cos t,\ y = 3\sin t\ ,t = \dfrac{\pi}{4}$

$$x = 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$y = 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\left(\frac{4}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3\cos t}{-4\sin t} = \frac{-3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{-3}{4}$$

معادلة المماس $y - \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{-3}{4}\left(x - \dfrac{4}{\sqrt{2}}\right)$

إذا كـان: $y = x\ln x$ حيـث $x > 0$ فأجيـب عـن السؤالين الآتيين تباعا:

30) أجد معادلة المماس عند النقطة $(1,0)$

الحل:

$$y' = x \times \frac{1}{x} + \ln x = 1 + \ln x$$

$$y'(1) = 1 + \ln 1 = 1 + 0 = 1$$

$$y - 0 = 1(x-1) \Rightarrow y = x - 1$$

31) أجد إحداثيي النقطـة التـي يكـون ميـل المماس عندها 2

الحل:

$$y = 1 + \ln x = 2 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$$

$$y = e\ln e = e \qquad \therefore (e,e)$$

أجد $\dfrac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

32) $x(x+y) = 2y^2$

$$x^2 + xy = 2y^2$$

$$2x + xy' + y = 4yy'$$

$$2x + y = 4yy' - xy'$$

$$y' = \frac{2x+y}{4y-x}$$

33) $x = \dfrac{2y}{x^2 - y}$

$$x^3 - xy = 2y$$

$$3x^2 - xy' + y(-1) = 2y'$$

$$3x^2 - y = 2y' + xy'$$

$$y' = \frac{3x^2 - y}{2 + x}$$

34) $y\cos x = x^2 + y^2$

$$y(-\sin x) + \cos x(y') = 2x + 2yy'$$

$$-y\sin x - 2x = 2yy' - \cos xy'$$

$$y' = \frac{2x + y\sin x}{\cos x - 2y}$$

35) $2xe^y + ye^x = 3$

$$2xe^y(y') + e^y(2) + ye^x + e^x y' = 0$$

$$2xe^y y' + e^x y' = -2e^y - ye^x$$

$$y' = \frac{-2e^y - ye^x}{2xe^y + e^x}$$

36) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة: $y^2 = \frac{x^3}{2-x}$ عند النقطة $(1,-1)$

الحل:

$$2yy' = \frac{(2-x)(3x^2) - x^3(-1)}{(2-x)^2}$$

$$2(-1)y' = \frac{(1)(3)+1}{(2-1)^2} = 4$$

ميل المماس $y' = \frac{4}{-2} = -2$

ميل العمودي $= \frac{1}{2}$

معادلة العمودي

$$y+1 = \frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي:

37) $y = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$

$$\ln y = \ln(x+1) + \ln(x-2) - \ln(x-1) - \ln(x+2)$$

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

$$y' = y\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right)$$

38) $y = x^{\ln x}$

$$\ln y = \ln x \ln x = (\ln x)^2$$

$$\frac{1}{y}y' = 2\ln x\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow y' = y\left(\frac{2}{x}\right)\ln x$$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة مما يأتي عند النقطة المعطاة:

39) $x^2 + 3xy + y^2 = x + 3y, (2,-1)$

$$2x + 3xy' + y(3) + 2yy' = 1 + 3y'$$

$$4 + 6y' - 3 - 2y' = 1 + 3y'$$

$$y' = 0 = m$$

$$y + 1 = 0(x-2) \Rightarrow y = -1$$

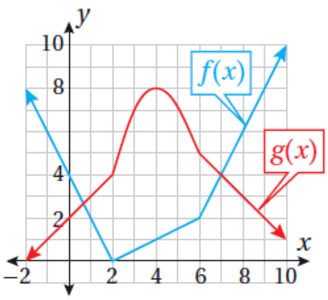
40) $x^2e^y = 1, (1,0)$

$$x^2e^y(y') + e^y(2x) = 0$$

$$1(1)y' + 1(2) = 0 \Rightarrow y' = -2$$

$$y - 0 = -2(x-1) \Rightarrow y = -2x + 2$$

يبين الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: $f(x)$ و $g(x)$ إذا كان: $p(x) = f(x)g(x)$ وكان: $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ فأجد كلا مما يأتي:



41) $p'(1)$

$$f(1) = 2$$

$$(0,4),(2,0)$$

$$m = \frac{4-0}{0-2} = -2 \Rightarrow f'(1) = -2$$

$g(1)=3$

$(0,2),(2,4)$

$m=\dfrac{2-4}{0-2}=1 \Rightarrow g'(1)=1$

$p(x)=f(x)g(x)$

$p'(1)=f(1)g'(1)+g(1)f'(1)$

$=2\times 1+3\times -2=-4$

42) $p'(4)$

$f(4)=1$

$(2,0),(6,2)$

$m=\dfrac{0-2}{2-6}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow f'(4)=\dfrac{1}{2}$

$g(4)=8 \quad , \quad g'(4)=0$ مماس أفقي

$p(x)=f(x)g(x)$

$p'(4)=f(4)g'(4)+g(4)f'(4)$

$=1\times 0+8\times \dfrac{1}{2}=4$

43) $q'(7)$

$f(7)=4$

$(6,2),(8,6)$

$m=\dfrac{2-6}{6-8}=2 \Rightarrow f'(7)=2$

$g(7)=4$

$(7,4),(8,3)$

$m=\dfrac{4-3}{7-8}=-1 \Rightarrow g'(7)=-1$

$q(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$q'(7)=\dfrac{g(7)f'(7)-f(7)g'(7)}{(g(7))^2}$

$=\dfrac{4\times 2-4\times -1}{16}=\dfrac{12}{16}=\dfrac{3}{4}$

44) مواد مشتعة: يمكن نمذجة الكمية R (بالغرام) المتبقية من عينة كتلتها $200g$ من عنصر مشع بعد t يوما باستعمال الاقتران: $R(t)=200(0.9)^t$

أجد $\dfrac{dR}{dt}$ عندما $t=2$

الحل:

$R(t)=200(0.9)^t$

$\dfrac{dR}{dt}=200(0.9)^t\times \ln(0.9)$

$=200(0.9)^2\times \ln(0.9)=162\ln 0.9$

45) يمثل الاقتران: $s(t)=10+\dfrac{1}{4}\sin(10\pi t)$ موقع جسيم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالسنتميرات و t الزمن بالثواني أجد سرعة الجسيم المتجهة وتسارعه بعد t ثانية.

الحل:

$s(t)=10+\dfrac{1}{4}\sin(10\pi t)$

$v(t)=\dfrac{1}{4}\cos(10\pi t)10\pi=\dfrac{10\pi}{4}\cos(10\pi t)$

$a(t)=\dfrac{10\pi}{4}(-\sin(10\pi t))(10\pi t)$

$=\dfrac{-100\pi^2 t^2}{4}\sin(10\pi t)$

ورقة عمل شاملة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1) اذا كان $f(x)=\ln\left(\dfrac{x^3}{x-1}\right)$ ، فإن $f'(3)$ تساوي:

a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) $-\frac{1}{2}$ d) 2

2) اذا كان

$$f(x)=x^2-\ln x-\ln 3\left(\log_3(2x+1)\right)$$

فإن $f'(1)$ تساوي:

a) 1 b) $\frac{1}{3}$ c) $-\frac{2}{3}$ d) $\frac{5}{3}$

3) اذا كان $f(x)=5^{6-3x}+x^2$ ، فإن $f'(2)$ تساوي:

a) $4-\ln 5$ b) $4+3\ln 5$
c) $-3\ln 5$ d) $4-3\ln 5$

4) اذا كان الاقتران $y=e^{2x}+e^{-2x}$ ، فإن y'' تساوي:

a) y b) $2y$ c) $-2y$ d) $4y$

اذا كان $f(x)=x^3+2x\ ,\ g(x)=3x^2$ أجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

5) قيمة $(f'\circ g')'(1)$ تساوي:

a) 108 b) 110
c) 216 d) 648

6) قيمة $(f'\circ g')'(2)$ تساوي:

a) 432 b) 72
c) 216 d) 422

7) اذا كان $f(x)=ax^3+1$ وكان $g'(2)=3, g''(2)=-1$ ، وكان $(f\circ g')'(2)=9$ فإن قيمة الثابت a تساوي:

a) $-\frac{1}{3}$ b) $\frac{10}{27}$ c) $-\frac{9}{8}$ d) -9

8) اذا كان $(x-y)^4+(y-x)^4=32$ حيث $x\neq y$ ، فإن $\dfrac{dy}{dx}$ تساوي:

a) -4 b) -1 c) 4 d) 1

9) اذا كان $y^2+2xy=5$ ، فإن y' عند النقطة $(2,1)$ تساوي:

a) $-\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$

10) اذا كان $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=41$ حيث $x,y\neq 0$ ، فإن $\dfrac{dy}{dx}$ تساوي:

a) $\dfrac{-x^2}{y^2}$ b) $\dfrac{x^2}{y^2}$ c) $\dfrac{-y^2}{x^2}$ d) $\dfrac{y^2}{x^2}$

11) اذا كان $f(x)=\dfrac{\pi}{1-x}$ حيث $x\neq 1$ فإن قيمة $f'(-1)$ تساوي:

a) $\dfrac{-\pi}{2}$ b) $\dfrac{-\pi}{4}$ c) $\dfrac{\pi}{2}$ d) $\dfrac{\pi}{4}$

12) اذا كان $f(x)=x\sqrt{x}$ وكان $h(4)=8, h'(4)=-2$ ، فإن قيمة $(h(4)\, f')'(4)$ تساوي:

a) 0 b) 3 c) 12 d) -3

13) اذا علمت أن $f(1)=2, h(1)=-1$ ، $f'(1)=2, h'(1)=-6$ فإن قيمة $(\dfrac{f+h}{h})'(1)$ تساوي:

a) -2 b) 10 c) 2 d) -10

14) اذا كان $f(x)=\sin^2 x\cos x$ ، فإن $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ تساوي:

a) -1 b) 1 c) 0 d) 2

15) اذا كان $f(x)$ اقتران كثير حدود من الدرجة الثانية وكان $f(1)=2, f'(1)=-3, f''(1)=2$ ، فإن قاعدة الاقتران f هي:

a) $f(x)=x^2+5x+6$

b) $f(x)=x^2-5x+6$

c) $f(x)=x^2-5x-6$

d) $f(x)=x^2+5x-6$

16) اذا كان $f(x),h(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق وكان $f'\left(\dfrac{-1}{2}\right)=\dfrac{-1}{2}$ ، $h(2)=\dfrac{-1}{2}, h'(2)=\dfrac{-1}{4}$ فإن قيمة $(f\circ h)'(2)$ تساوي:

a) $\dfrac{1}{8}$ b) $-\dfrac{1}{8}$ c) $\dfrac{1}{4}$ d) $-\dfrac{1}{4}$

17) اذا كان $f(x)=x^2+(0.5)h(x)$ وكان ميل العمودي على المماس لمنحنى $f(x)$ عند $x=2$ يساوي $\dfrac{-1}{5}$ ، فإن قيمة $(0.5)f'(2)-h'(2)$ تساوي:

a) $\dfrac{5}{2}$ b) 2 c) $\dfrac{1}{2}$ d) 4

18) اذا كان $f(x)=\left((x+2)^3+2\right)^4$ ، فإن قيمة $f'(-1)$ تساوي:

a) 81 b) 324

c) 36 d) 4

19) اذا كان $y^2 - x^2 = 1$ ، فإن ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة $(1, \sqrt{2})$ يساوي:

a) $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ b) $-\sqrt{2}$
c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ d) $\sqrt{2}$

20) اذا كان ميل العمودي على المماس لمنحنى $f(x) = x^3 + ax^2 + 5$ عند $x = 2$ يساوي $\frac{-1}{4}$ فإن قيمة a تساوي:

a) -2 b) $-\frac{49}{16}$ c) -8 d) -4

21) ميل المماس للمعادلة الوسيطية $y = \sin 2t, x = \sin t$ عند نقطة الاصل يساوي:

a) 2 b) -2 c) 0 d) $2, -2$

22) اذا كان $\frac{dx}{dt} = 2t - 1$ ، $y = t^2 + 2$ فإن $\frac{d^2y}{dx^2}$ عند $t = 2$ يساوي:

a) $-\frac{2}{9}$ b) $-\frac{2}{27}$
c) $\frac{2}{9}$ d) $\frac{2}{27}$

23) اذا كان الاقتران $s(t) = t^3 - 6t^2 + 1, t \geq 0$ يمثل موقع جسم يتحرك على خط مستقيم ، فإن السرعة عندما ينعدم التسارع يساوي:

a) $12\ m/s$ b) $-36\ m/s$
c) $36\ m/s$ d) $-12\ m/s$

24) اذا كان $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{3x-2}\right)^3$ ، فإن $f''(2)$ تساوي:

a) $\frac{75}{16}$ b) $\frac{3}{4}$
c) $-\frac{21}{16}$ d) $\frac{15}{4}$

25) اذا كان الاقتران $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x - 3}$ ، فإن قيم x التي تجعل الاقتران غير قابل للاشتقاق هي:

a) $0, -2, 3$ b) $2, -3$
c) ϕ d) $-1, 3$

26) اذا كان $f(x) = x^3 l(x)$ ، وكان $l(2) = 3, l'(2) = 6$ فإن قيمة $f'(2)$ تساوي:

a) 84 b) 100
c) 125 d) 120

27) اذا كان $f(x) = kx^2 + \frac{16}{\sqrt{x}}$ حيث $x > 0$ وكانت $f''(1) = 36$ ، فإن قيمة k تساوي:

a) 3 b) 21
c) 12 d) -12

الاستاذ: محمد المجذوب
0799333306

الوحدة الأولى : التفاضل

الفرع العلمي

الاستاذ: إياد عباد
0799366611

28) اذا كان f, g اقترانين قابلين للاشتقاق وكان

$f(x)=\dfrac{g(x)}{x^2+1}$ وكان ______________

$f'(1)=0$ ، $f(1)=\dfrac{1}{2}$ ، فإن قيمة $g'(1)$

تساوي:

a) -1 b) 0 c) 2 d) 1

29) اذا كان $f(x)=x\;f(x)+1$ ، فإن

$f'(2)$ تساوي:

a) -1 b) 1 c) 0 d) 2

30) اذا كان $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{3}$ ، $y=\cot(2t)$ فإن قيمة

$\dfrac{dy}{dx}$ عند $x=\dfrac{\pi}{6}$ تساوي:

a) 1 b) -1 c) 9 d) -9

31) اذا كان $y=a\sin 3x$ ، فإن قيمة الثابت a

علماً أن $y''+5y=4\sin 3x$ تساوي:

a) 2 b) -1 c) 1 d) $\dfrac{1}{2}$

32) اذا كان $f(x)=x\dfrac{d}{dx}\left(\sin^2 2x\right)$ ، فإن

$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ تساوي:

a) 2π b) -2π

c) $2-2\pi$ d) $2+2\pi$

33) اذا كان $y=f(\cos x)+\cos(f(x))$

وكان $f'(\pi)=5$ ، $f(\pi)=\dfrac{\pi}{2}$ ، فإن y' عند

$x=\pi$ تساوي:

a) 5 b) -5 c) 1 d) 0

34) اذا كان $f(3x+5)=x^3-2x^2$ ، فإن

$f'(8)$ تساوي:

a) $-\dfrac{1}{3}$ b) -1 c) $\dfrac{1}{3}$ d) 1

35) اذا كان $x^3y^4=8$ ، فإن $\dfrac{dy}{dx}$ عند $y=1$

يساوي:

a) $-\dfrac{1}{3}$ b) $\dfrac{1}{4}$ c) $\dfrac{3}{8}$ d) $-\dfrac{3}{8}$

5	4	3	2	1
c	d	d	b	a
10	9	8	7	6
d	a	d	a	a
15	14	13	12	11
b	a	b	b	d
20	19	18	17	16
a	c	b	c	a
25	24	23	22	21
d	c	d	b	d
30	29	28	27	26
d	b	d	c	a
35	34	33	32	31
d	a	b	b	b

أستعد لدراسة الوحدة

حل المعادلات كثيرات الحدود:

مثال: حل المعادلات التالية:

1) $2x-8=0$

$$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}=\frac{8}{2}\Rightarrow x=4$$

2) $2x+5=9$

$$2x=9-5\Rightarrow \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}=\frac{4}{2}\Rightarrow x=2$$

3) $3x-8=7x+1$

$$3x-7x=8+1$$

$$-4x=9\Rightarrow x=\frac{-9}{4}$$

4) $\frac{4}{3}x+5=9$

$$\frac{4}{3}x=4\Rightarrow \frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}}=\frac{12}{4}\Rightarrow x=3$$

5) $x^2-25=0$

$$x^2=25\Rightarrow x=5,-5$$

6) $x^2+6x=0$

$$x(x+6)=0\Rightarrow x=0,-6$$

7) $x^2+4x-12=0$

$$(x+6)(x-2)=0\Rightarrow x=-6,2$$

8) $(x-2)^2-16=0$

$$(x-2+4)(x-2-4)=0$$

$$(x+2)(x-6)=0\Rightarrow x=-2,6$$

9) $x^2+5x-7=0$

$$\Delta=b^2-4ac=25-4\times1\times-7=53$$

القانون العام $=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{53}}{2\times1}$$

10) $x^2+9x+14=0$

$$=b^2-4ac=81-4\times1\times14=25$$

$$=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-9\pm\sqrt{25}}{2\times1}$$

$x=\frac{-9+5}{2}$	$x=\frac{-9-5}{2}$
$x=-2$	$x=-7$

11) $\frac{2x-6}{x-1}=3$

$2x-6=3x-3$

$-x=3 \Rightarrow x=-3$

12) $\frac{x^2+x-2}{x^2+4x-5}=-2$

$\frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{(x-1)}(x+5)}=-2$

$\frac{x+2}{x+5}=-2$

$x+2=-2x-10$

$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}}=\frac{-12}{3} \Rightarrow x=-4$

13) $\frac{x^3-1}{3x^2+3x+3}=5$

$\frac{(x-1)\cancel{(x^2+x+1)}}{3\cancel{(x^2+x+1)}}=5$

$\frac{x-1}{3}=5 \Rightarrow x-1=15 \Rightarrow x=16$

تدريب: حل المعادلات التالية:

1) $\frac{x^2+5x}{x+5}=-8$

2) $\frac{x^2+2x-3}{x-1}=4$

درجة ثالثة فأكثر:

نجد الاصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود وهي:

$\pm\frac{\text{عوامل الحد الثابت}}{\text{عوامل المعامل الرئيسي}}$

مثال: حل المعادلة التالية:

$x^3-7x+6=0$

الحل:

نجد الاصفار النسبية

عوامل الحد الثابت $6 \Leftarrow 1,2,3,6$

عوامل الحد الرئيسي $1 \Leftarrow 1$

الاصفار هي $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$

نجرب $x=1 \Leftarrow 1-7+6=0$ c

$(x=1)$ هو جذر للمعادلة

$(x-1)$ احد العوامل

نستخدم القسمة التركيبية بطريقة الجدول

$x^3-7x+6=0$

$(x-1)(x^2+x-6)=0$

$(x-1)(x+3)(x-2)=0$

$x=1 \quad , \quad x=-3 \quad , \quad x=2$

تدريب: حل المعادلة:

$$2x^3+2x+3x^2-7=0$$

مثال:

أحل كلاً من المعادلات الآتية:

1) $3x^3+7x^2-9x=5x+24$

الحل:

أستعمل نظرية الأصفار النسبية لإيجاد أحد أصفار المعادلة على النحو الآتي:

المعادلة المعطاة:

$$3x^3+7x^2-9x=5x+24$$

بطرح $(5x+24)$ من طرفي المعادلة

$$3x^3+7x^2-14x-24=0$$

بتعويض $x=2$

$$3(2)^3+7(2)^2-14(2)-24\overset{?}{=}0$$

بالتبسيط

$0=0$ c

إذن، $x=2$ هو أحد أصفار المعادلة و $x-2$ هو أحد عوامل المقدار: $(3x^3+7x^2-14x-24)$

لإيجاد العامل الآخر، أقسم هذا المقدار على $(x-2)$

	$3x^2$	$13x$	12	
x	$3x^3$	$13x^2$	$12x$	0
-2	$-6x^2$	$-26x$	-24	

بالتحليل وفق نتيجة القسمة

$$(x-2)(3x^2+13x+12)=0$$

خاصية الضرب الصفري

$$3x^2+13x+12=0 \quad or \quad x-2=0$$

المعادلة التربيعية الناتجة

$$3x^2+13x+12=0$$

بالتحليل إلى العوامل

$$(3x+4)(x+3)=0$$

$$x+3=0 \quad or \quad 3x+4=0$$

بحل كل من المعادلتين

$$x=-3 \quad or \quad x=-\frac{4}{3}$$

إذن، يوجد للمعادلة 3 حلول (أصفار)، هي:

$$2,-3,-\frac{4}{3}$$

2) $x^2-4x-12=0$

الحل:

$$(x-6)(x+2)=0 \Rightarrow x=6, x=-2$$

3) $2x^3-6x^2+7x-60=0$

الحل:

بتجريب الاصفار النسبية المحتملة، نجد أن $x=4$ حل لهذه المعادلة

إذن $(x-4)$ عامل من عوامل كثير الحدود $2x^3-6x^2+7x-60$ ، نقسم فنحصل على:

$$2x^3-6x^2+7x-60=(x-4)(2x^2+2x+15)$$

$$2x^3-6x^2+7x-60=0 \Rightarrow x=4$$

ملاحظة: العبارة التربيعية $2x^2+2x+15$ مميزها سالب، أي ليس لها جذور حقيقية

فالحل الوحيد لهذه المعادلة هو: $x=4$

تمثيل المتجهات في المستوى الإحداثي والعمليات عليها

مثال1:

اذا كانت $A(-5,4)$ وكانت $B(2,7)$ فأكتب الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$ ثم أجد مقداره

الحل:

صيغة الصورة الإحداثية للمتجه

$$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A)$$

بتعويض $A(-5,4)$ و $B(2,7)$ والتبسيط

$$=\langle 2-(-5),7-4\rangle=\langle 7,3\rangle$$

صيغة مقدار المتجه $a=\langle a_1,a_2\rangle$

$$|a|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$$

بتعويض $a=\overrightarrow{AB}=\langle 7,3\rangle$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{7^3+3^2}$$

بالتبسيط

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{58}$$

إذن، $|\overrightarrow{AB}|=\langle 7,3\rangle$ ومقداره $\sqrt{58}$

مثال2:

اذا كانت $A(4,2)$ وكانت $B(2,6)$ فأكتب الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$ ثم أجد مقداره

الحل:

$$\overrightarrow{AB}=\langle 2-4,6-2\rangle=\langle -2,4\rangle$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

مثال3:

اذا كانت $A(-2,3)$ وكانت $B(0,7)$ فأكتب الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$ ثم أجد مقداره

الحل:

$$\overrightarrow{AB}=\langle 0-(-2),7-3\rangle=\langle 2,4\rangle$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

معادلة الدائرة:

مثال1:

أكتب معادلة دائرة مركزها $(3,-4)$ وتمر بنقطة الاصل أجد طول نصف القطر r ، وهو المسافة بين المركز ونقطة تمر بها الدائرة

صيغة المسافة بين نقطتين

$$r=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

بتعويض $(x_2,x_1)=(0,0),(y_2,y_1)=(3,-4)$

$$=\sqrt{(3-0)^2+(-4-0)^2}$$

بالتبسيط

$$=\sqrt{9+16}=5$$

صيغة معادلة دائرة مركزها (h,k) ونصف قطرها r

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

بتعويض $r=5,(h,k)=(3,-4)$

$$(x-3)^2+(y+4)^2=25$$

مثال2:

أكتب معادلة دائرة مركزها $(-1,8)$ وطول نصف قطرها 5 وحدات

الحل: $(x+1)^2+(y-8)^2=25$

مثال 3:

أكتب معادلة دائرة مركزها $(-7,13)$ وتمر بالنقطة $(5,4)$

الحل:

$$r=\sqrt{(5+7)^2+(4-13)^2}$$

$$=\sqrt{144+81}=\sqrt{225}=15$$

$$(x+7)^2+(y-13)^2=225$$

حل نظام متباينات خطية

مثال 1:

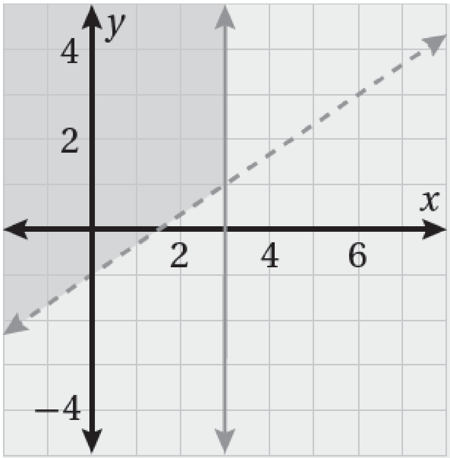
أمثل بيانياً منطقة حل نظام المتباينات الآتي، ثم أتحقق من صحة الحل:

$$x\le 3$$

$$y>\frac{2}{3}x-1$$

الخطوة 1: أمثل بيانيا المستقيمين الحدوديين

أمثل بيانيا المستقيمين الحدودين: $x=3$ و $y=\frac{2}{3}x-1$ في المستوى الإحداثي نفسه وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة الثانية فإنني أرسم المستقيم: $y=\frac{2}{3}x-1$ متقطعا أما المستقيم: $x=3$ فأرسمه متصلا، نظرا إلى وجود مساواة في رمز المتباينة الأولى كما في الشكل



الخطوة 2: أحدد منطقة التقاطع بين حلي المتباينتين

أظلل منطقة الحل لكل متباينة ومن ثم تكون المنطقة المشتركة بين منطقتي حل المتباينتين هي حل نظام المتباينات كما في الشكل المجاور

الخطوة 3: أتحقق من صحة الحل:

أتحقق من صحة الحل باختيار زوج مرتب يقع في منطقة حل النظام، مثل $(0,2)$ ثم أعوضه في متباينات النظام جميعها

المتباينة الأولى $x\le 3$

بالتعويض $0\overset{?}{\le}3$

العبارة صحيحة $0\le 3$

المتباينة الثانية $y>\frac{2}{3}x-1$

بالتعويض $2\overset{?}{>}\frac{2}{3}(0)-1$

العبارة صحيحة $2>-1$

مثال2:

أمثل بيانيا منطقة حل نظام المتبيانات الآتي، ثم أتحقق من صحة الحل:

$$4x+3y\le 12$$
$$y-2x<0$$

الحل:

نرسم المستقيم $4x+3y=12$ بخط متصل

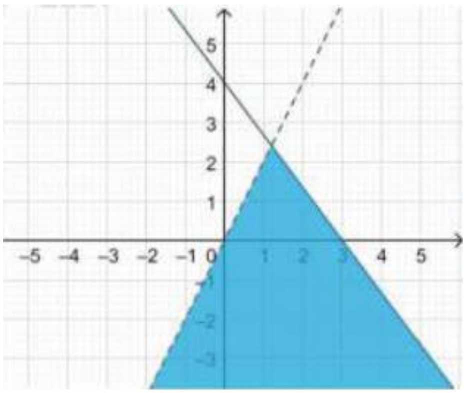
ونرسم المستقيم $y-2x=0$ بخط متقطع على المستوى الديكارتي نفسه

ونظلل المنطقة التي تحوي النقاط التي تحقق كلا المتباينتين

لتحقق من صحة الحل نعوض الزوج $(2,0)$ في المتباينتين

$$4(2)+3(0)\le 12 \rightarrow 8\le 12$$
$$0-2(2)<0 \rightarrow -2<0$$

إذن الحل صحيح لأن الزوج $(2,0)$ من منطقة الحل المظللة حقق المتباينتين معا



الدرس1: الأعداد المركبة

❖ فكرة الدرس:

تعرف العدد المركب وإيجاد سعته مقياسه وتمثيله بيانيا في المستوى المركب

❖ المصطلحات :

الوحدة التخيلية، العدد التخيلي، العدد المركب، الجزء الحقيقي، الجزء التخيلي، مرافق العدد المركب، مقياس العدد المركب، سعة العدد المركب، السعة الرئيسة للعدد المركب، الصورة المثلثية للعدد المركب

❖ مسألة اليوم:

افترض عالم الرياضيات الإيطالي جيرولامو كاردانو قديماً أن القيمة: $\sqrt{-1}$ تمثل حلا للمعادلة: $x^2+1=0$ هي يبدو ذلك منطقياً؟

الحل:

اذا تصورنا وجود جذر تربيعي للعدد -1 في مجموعة من مجموعات الأعداد فإن:

$$\left(\sqrt{-1}\right)^2+1=-1+1=0$$

وبالتالي يكون $\sqrt{-1}$ حلاً للمعادلة $x^2+1=0$

❖ الوحدة التخيلية والعدد التخيلي:

تعلمت سابقا أنه لا يوجد حل حقيقي للمعادلة التربيعية: $x^2=-1$ لأنني إذا حاولت حلها، فإن الناتج سيكون:

$$x^2=-1$$

$$x=\pm\sqrt{-1}$$

وهذا غير ممكن لأن مربع أي عدد حقيقي لا يكون سالبا

لكن علماء الرياضيات تمكنوا من حل هذه المعادلة بابتكار توسعة للنظام العددي، تمثلت في إضافة وحدة تخيلية رمز إليها بالرمز وعُرفت لتحقق المعادلة: $i^2=-1$ بناء على تعريف i فإن كلا من i و $-i$ يُعد جذراً تربيعياً للعدد -1 لأن $i^2=(-i)^2=-1$ إلا أن i يسمى الجذر الرئيس للعدد -1

يطلق على العدد الذي في صورة: $\sqrt{-k}$ حيث k عدد حقيقي موجب، اسم العدد التخيلي ويمكن إيجاد الجذر الرئيس للعدد الحقيقي السالب $(-k)$ على النحو الآتي:

$$\sqrt{-k}=\sqrt{-1\times k}=\sqrt{-1}\times\sqrt{k}=i\sqrt{k}$$

معلومة:

تمثل الأعداد التخيلية ركيزة أساسية في علم الهندسة الكهربائية

مثال 1 :

أجد قيمة الجذر الرئيس في كل مما يأتي بدلالة i :

1. $\sqrt{-16}$

بالتحليل : $\sqrt{-16} = \sqrt{-1 \times 16}$

$= \sqrt{-1}\sqrt{16}$

تعريف الجذر الرئيس للعدد -1 : $= i \times 4 =$

$4i$

2. $\sqrt{-72}$

بالتحليل :

$\sqrt{-72} = \sqrt{-1 \times 36 \times 2}$

$= \sqrt{-1} \times \sqrt{36} \times \sqrt{2}$

تعريف الجذر الرئيس للعدد -1 :

$= i \times 6 \times \sqrt{2} = 6i\sqrt{2}$

تدريب : أجد قيمة الجذر الرئيس في كل مما يأتي بدلالة i :

$= (i \times i) \times (\sqrt{8} \times \sqrt{18})$

a) $\sqrt{-75}$

$= i^2 \times \sqrt{144}$

b) $\sqrt{-49}$

$= -1 \times 12 = -12$

$= \sqrt{-1 \times 49} = \sqrt{-1} \times \sqrt{49} = 7i$

مثال2:

أجد قيمة الجذر الرئيس في كل مما يأتي بدلالة i

1) $\sqrt{-128} = \sqrt{-1 \times 2 \times 64} = 8i\sqrt{2}$

$= 5i \times \sqrt{-1} \times \sqrt{4}$

2) $\sqrt{-14} = \sqrt{-1 \times 14} = i\sqrt{14}$

3) $\sqrt{-81} = \sqrt{-1 \times 81} = 9i$

4) $\sqrt{-125} = \sqrt{-1 \times 5 \times 25} = 5i\sqrt{5}$

5) $3\sqrt{-32} = 3\sqrt{-1 \times 2 \times 16} = 12i\sqrt{2}$

6) $\sqrt{-\dfrac{28}{9}} = \sqrt{-1 \times \dfrac{7 \times 4}{9}} = \dfrac{2i\sqrt{7}}{3}$

مثال 2 :

أجد ناتج كل مما يلي في أبسط صورة مفترضا أنّ : $\sqrt{-1} = i$

1. $\sqrt{-8} \times \sqrt{-18}$

بالتحليل : $\sqrt{-8} \times \sqrt{-18} = \sqrt{-1 \times 8} \times \sqrt{-1 \times 18}$

$= (\sqrt{-1} \times \sqrt{8}) \times (\sqrt{1}\, - \times \sqrt{18})$

بافتراض أن $\sqrt{-1} = i$

خاصيتا التبديل والتجميع للضرب :

خاصية ضرب الجذور التربيعية :

$= \sqrt{-1 \times 25 \times 3} = \sqrt{-1} \times \sqrt{25} \times \sqrt{3}$

$= 5i\sqrt{3}$

بالتبسيط: $i^2 = -1$:

2. $5i \times \sqrt{-4}$

بالتحليل : $5i \times \sqrt{-4} = 5i \times \sqrt{-1 \times 4}$

خاصية ضرب الجذور التربيعية:

بافتراض أن : $\sqrt{-1} = i$: $= 5i \times i \times 2$

خاصيتا التبديل والتجميع : $= (2 \times 5) \times i \times i$

بالضرب :

$= 10i^2$

بالتبسيط: $i^2 = -1$:

$= 10 \times -1 = -10$

3. i^{15}

خاصية قوّة القوّة :

$i^{15} = (i^2)^7 \times i$

بالتبسيط : $i^2 = -1$:

$= (-1)^7 \times i = -i$

بالتبسيط: $(-1)^7 = -1$

مثال2:

أجد نـاتج كـل ممـا يـأتي فـي أبسط صـورة مفترضـاً أن

$\sqrt{-1} = i$

1) $i^7 = i^6 \times i = (i^2)^3 \times i = (-1)^3 \times i = -i$

2) $i^{12} = (i^2)^6 = (-1)^6 = 1$

3) $i^{98} = (i^2)^{49} = (-1)^{49} = -1$

4) $i^{121} = i^{120} \times i = (i^2)^{60} \times i = (-1)^{60} \times i = i$

أجد ناتج كل مما يلي في أبسط صورة مفترضا

أنّ $\sqrt{-1} = i$:

a) $\sqrt{-27} \times \sqrt{-48}$

$$= \sqrt{-1 \times 27} \times \sqrt{-1 \times 48}$$
$$= i\sqrt{9 \times 3} \times i\sqrt{16 \times 3}$$
$$= i^2\sqrt{9 \times 3 \times 16 \times 3}$$
$$= 36i^2 = -36$$

b) $\sqrt{-50} \times -4i$

$$= \sqrt{-1 \times 50} \times (-4i)$$
$$= 5i\sqrt{2} \times (-4i) = -20\sqrt{2}i^2$$
$$= 20\sqrt{2}$$

c) i^{2021}

$$= (i^2)^{1010} \times i = (-1)^{1010} \times i = i$$

❖ الأعداد المركبة:

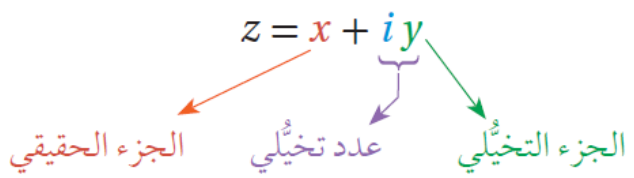
العدد المركب هو عدد يمكن كتابته في صورة: $a+ib$ حيث a,b عددان حقيقيان يتكون العدد المركب من جزء حقيقي هو العدد a وجزء تخيلي هو العدد b

الجزء التخيلي هو b وليس ib

عند كتابة العدد المركب في صورة $(a+ib)$ فإنه يكون مكتوباً بالصورة القياسية

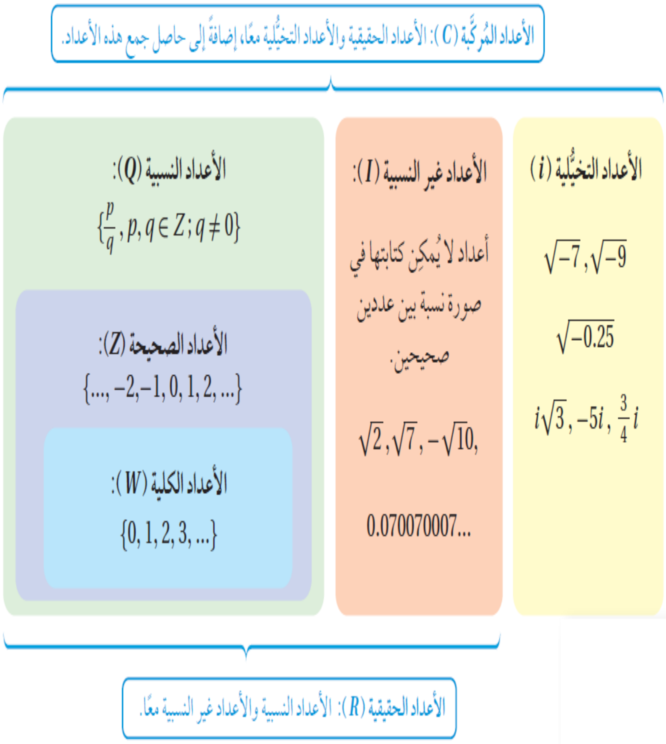
ألاحظ من الصورة القياسية للعدد المركب أن الأعداد الحقيقية هي أيضاً أعداد مركبة، لأنه يمكن كتابة أي عدد حقيقي a في صورة: $a+0i$ وهو عدد مركب فيه $b=0$

ألاحظ أيضاً أن الأعداد التخيلية هي أعداد مركبة لأنه يمكن كتابة أي عدد تخيلي ib في صورة: $0+ib$ وهو عدد مركب فيه $a=0$



أستنتج مما سبق أن الأعداد الحقيقية والأعداد التخيلية تمثل مجموعتين جزئيتين من النظام العددي وأن اتحادهما معاً إضافة إلى حاصل جمع أعدادهما ينتج منه مجموعة الأعداد المركبة

يبين المخطط الآتي العلاقات بين مجموعات الأعداد التي تعلمتها سابقا



❖ الأعداد المركبة:

يتساوى العددان المركبان إذا تساوى جزآهما الحقيقيان وتساوى جزآهما التخيليان

مفهوم أساسي (تساوي الأعداد المركبة)

يتساوى العددان المركبان: $a+ib\,,\, c+id$ إذا وفقط إذا كان: $a=c, b=d$ حيث a,b,c,d أعداد حقيقية

مثال 3 :

أجد قيمة x ، وقيمة y الحقيقيتين اللتين تجعلان المعادلة :
$$2x - 6 + (3y + 2)i = 4x + 8i$$
صحيحة .

أساوي الجزأين الحقيقيين ، وأساوي الجزأين التخيّليين، ثم أحل المعادلتين الناتجتين :

بمساواة الجزأين التخيليين بحل المعادلة

$$3y + 2 = 8$$
$$y = 2$$

تدريب : أجد قيمة x وقيمة y الحقيقيتين اللتين تجعلان المعادلة $x + 5 + (4y - 9)i = 12 - 5i$ صحيحة .

$$\rightarrow x + 5 = 12 \text{ و } 4y - 9 = -5$$
$$\rightarrow x = 7 , y = 1$$

مثال6:

أجد قيمة x وقيمة y الحقيقيتين اللتين تجعلان كل معادلة مما يأتي صحيحة:

1) $(2x+1)+4i = 7 - i(y-3)$

الحل:

$2x+1=7 \quad , \quad 4=-y+3$

$x=3 \quad , \quad y=-1$

2) $i(2x-4y)+x+3y=26+32i$

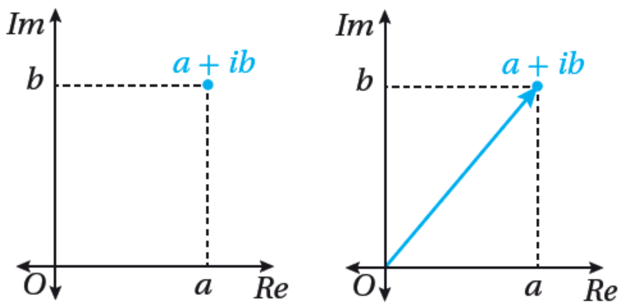
الحل:

$x+3y=26 \quad , \quad 2x-4y=32$

$x=20 \quad , \quad y=2$

❖ **تمثيل العدد المركب ومرافقه بيانيا:**

يمكن تمثيل العدد المركب $a+ib$ في المستوى الإحداثي في صورة الزوج المرتب (a,b) أو صورة المتجه $\langle a,b\rangle$ عندئذ يسمى المحور الأفقي المحور الحقيقي ويرمز إليه بالرمز (Re) ويسمى المحور الرأسي المحور التخيلي ويرمز إليه بالرمز (Im) في حين يسمى المستوى الإحداثي في هذه الحالة المستوى المركب

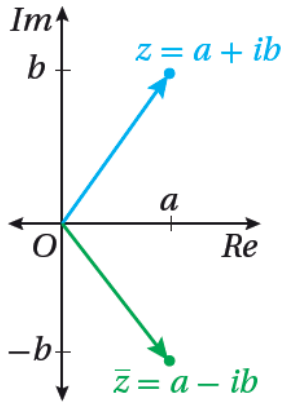


ملاحظة:

يسمى المستوى المركب أيضا مساوى أرجاند نسبة إلى عالم الرياضيات جون آرجاند الذي ابتكره عام 1806م

أما **مرافق العدد المركب** المكتوب في الصورة القياسية: $z = a+ib$ فهو العدد المركب: $\bar{z} = a - ib$ وعند تمثيل z ومرافقه بيانياً في المستوى الإحداثي نفسه، ألاحظ أن كلا منهما هو

انعكاس للآخر في المحور الحقيقي (Re) كما في الشكل المجاور



ملاحظة:

يستعمل الحرف z رمزاً للعدد المركب بوجه عام

مثال 4 :

أمثل العدد المركّب ومرافقه بيانيا في المستوى المركب في كل مما يأتي :

1. $z = -3 + 5i$

مرافق العدد المركّب : $z =$ هو $\bar{z} = -3 - 5i$: $-3 + 5i$

يمثل الزوج المرتب (3, 5-) العدد المركّب z،

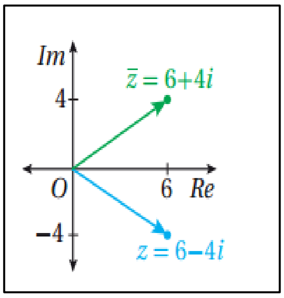
ويمثل الزوج المرتب (3- , 5-) مرافقه $\bar{z}$.

2. $z = 6 - 4i$

مرافق العدد المركّب: $z =$ هو $\bar{z} = 6 - 4i$: $6 - 4i$

يمثل الزوج المرتب (6, 4-) العدد المركّب z،

ويمثل الزوج المرتب (6 , 4) مرافقه $\bar{z}$.



مثال5:

أملا الفراغ بما هو مناسب في الجدول الآتي:

z	$Re(z)$	$Im(z)$
$-4+6i$		
-3		
$8i$		
	-8	3

الحل:

z	$\mathrm{Re}(z)$	$\mathrm{Im}(z)$
$-4+6i$	-4	6
-3	-3	0
$8i$	0	8
$-8+3i$	-8	3

مثال6:

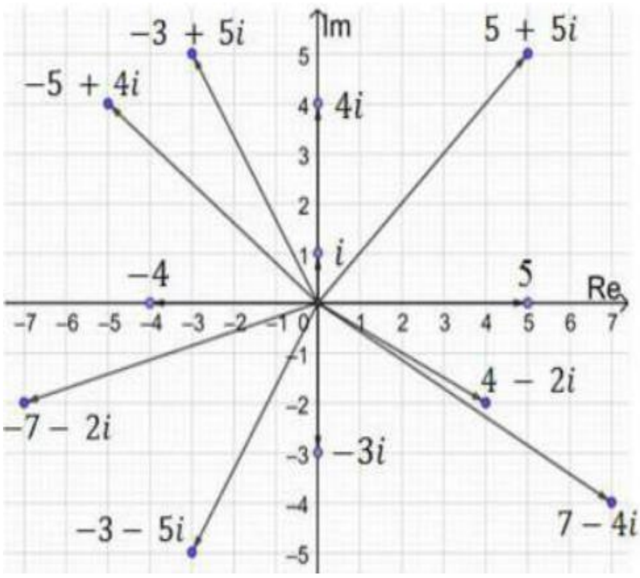
أمثل كلا من الأعداد المركبة الآتية في المستوى المركب المجاور:

1) 5
2) -4
3) $4i$
4) $-3i$
5) $4-2i$
6) $-3+5i$
7) $-3-5i$
8) i

9) $7-4i$ 10) $-5+4i$

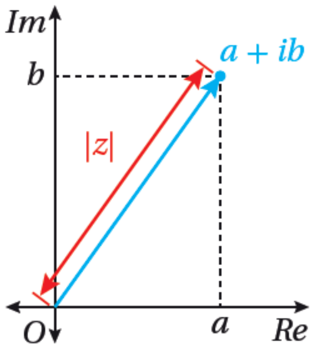
11) $-7-2i$ 12) $5+5i$

الحل:



❖ **مقياس العدد المركب:**

مقياس العدد المركب المكتوب في الصورة القياسية: $z=a+ib$ هو المسافة بين نقطة الأصل $(0,0)$ والنقطة (a,b) ويرمز إليه عادة بالرمز $|z|$ أو الرمز r



يستعمل قانون المسافة بين نقطتين لإيجاد مقياس العدد المركب

ملاحظة:

عند تمثيل العدد المركب في صورة المتجه فإن مقياس العدد المركب هو طول المتجه

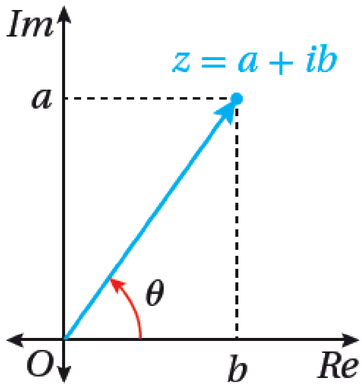
مفهوم أساسي: مقياس العدد المركب

مقياس العدد المركب: $z=a+ib$ هو:

$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ حيث a,b عددان حقيقيان

❖ سعة العدد المركب:

سعة العدد المركب هي الزاوية θ المحصورة بين المحور الحقيقي الموجب والقطعة المستقيمة التي تصل نقطة الأصل بالنقطة التي تمثل العدد المركب مقيسة بالراديان ويرمز إلى سعة العدد المركب z بالرمز $Arg\left(z\right)$



وبما أنه يوجد عدد لا نهائي من الزوايا المرسومة في الوضع القياسي التي لها ضلع الانتهاء نفسه فقد عُرِفت السعة الرئيسة للعدد المركب بأنها السعة التي تقع في الفترة: $-\pi < \theta \le \pi$ ويرمز إليها بالرمز $Arg\left(z\right)$، أي أن:

$$Arg\left(z\right) = Arg\left(z\right) + 2\pi n = \theta + 2\pi n$$

حيث: $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

ويمكن استعمال النسب المثلثية في المثلث القائم الزاوية لإيجاد سعة العدد المركب: $z = a + ib$ الذي يقع في الربع الأول

ملاحظة:

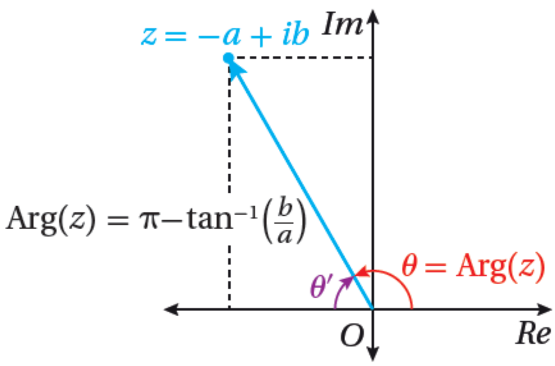
تشير كلمة (السعة) إلى السعة الرئيسة أينما ورد ذكرها في الكتاب

مفهوم أساسي: السعة في الربع الأول

إذا كان: $z = a + ib$ عدداً مركباً في الربع الأول فإن سعته تعطى بالصيغة الآتية:

$$\theta = Arg\left(z\right) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

إذا وقع العدد المركب z في الربع الثاني فإن سعته تكون زاوية منفرجة لذا تستعمل مكملتها لإيجادها إذا كانت سعة هي الزاوية المنفرجة θ فإن مكملتها θ' هي زاوية حادة لذا يُرسم في الربع الثاني مثلث قائم أحد رؤوسه z وإحدى زواياه θ' كما في الشكل المجاور وتستعمل النسب المثلثية لإيجاد قياس θ'



عدد مُركَّب في الربع الثاني

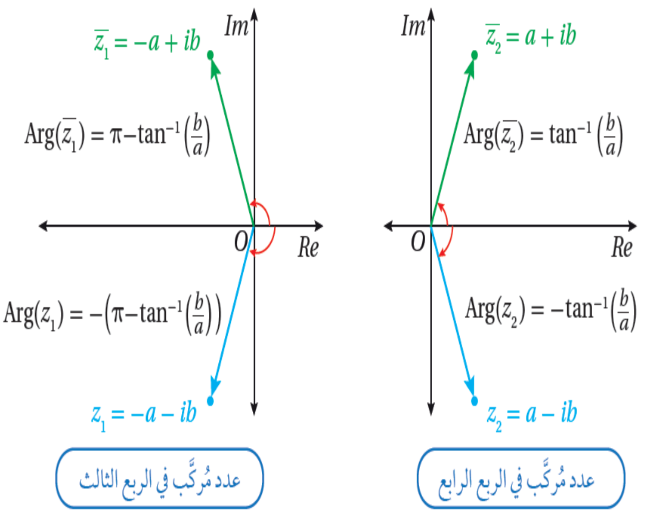
ملاحظة:

يكون قياس الزاوية موجباً عند دوران ضلع انتهائها عكس اتجاه دوران عقارب الساعة، وسالباً عند دورانه في اتجاه دوران عقارب الساعة

أما إذا وقع العدد المركب في الربع الثالث أو الربع الرابع فإن سعته تساوي معكوس سعة مرافقه الذي يقع في الربع الأول أو الربع الثاني لأن قياس الزاوية بين المحور الحقيقي الموجب والقطعة المستقيمة التي تصل نقطة الأصل بالنقطة التي تمثل العدد المركب يساوي قياس الزاوية بين المحور الحقيقي الموجب والقطعة المستقيمة التي تصل نقطة الأصل بالنقطة التي تمثل مرافق العدد المركب لكن اتجاه كل من هاتين الزاويتين مختلف (إحداهما في اتجاه دوران عقارب الساعة والأخرى عكس اتجاه دوران عقارب الساعة)

ملاحظة:

في الشكل المجاور $a, b > 0$



ملخص المفهوم: سعة العدد المركب

إذا كان a, b عددين حقيقيين موجبين فإن:

العدد المركب z	الربع الذي يقع فيه z	$Arg(z)$
$z = a + ib$	الأول	$\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$
$z = -a + ib$	الثاني	$\pi - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$
$z = -a - ib$	الثالث	$-\pi\left(-\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right)$
$z = a - ib$	الرابع	$-\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

مثال 1: أجد سعة كل من الأعداد المركبة الآتية مقرّبا إجابتي إلى أقرب منزلتين عشريتين :

a) $z = 8 + 2i$

$$Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{8}\right) \approx 0.24$$

b) $z = -5 + 12i$

$$Arg(z) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right) \approx 1.97$$

c) $z = -2 - 3i$

$$Arg(z) = -(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)) \approx -2.16$$

d) $z = 8 - 8i\sqrt{3}$

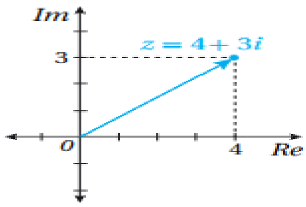
$$Arg(z) = -\tan^{-1}\left(\frac{8\sqrt{3}}{8}\right) \approx -\frac{\pi}{3}$$

مثال 6 :

أجد سعة كل من الأعداد المركبة الآتية ،مقرّبا إجابتي إلى أقرب منزلتين عشريتين :

1. $z = 4 + 3i$

بالنظر إلى التمثيل البياني للعدد المركّب $z = 4 + 3i$ في الشكل المجاور ، ألاحظ أنه يقع في الربع الأوّل.

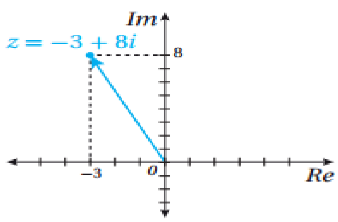


$$\text{Arg}(z) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$
$$= \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$$
$$\approx 0.64$$

إذن ، $Arg(z) \approx 0.64$

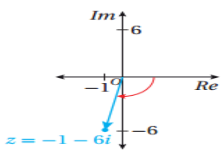
2. $z = -3 + 8i$

بالنظر إلى التمثيل البياني للعدد المركّب $z = -3 + 8i$ في الشكل المجاور ، ألاحظ أنه يقع في الربع الثاني.



$$\text{Arg}(z) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$
$$= \pi - \tan^{-1}\left(\frac{8}{3}\right)$$
$$\approx 1.93$$

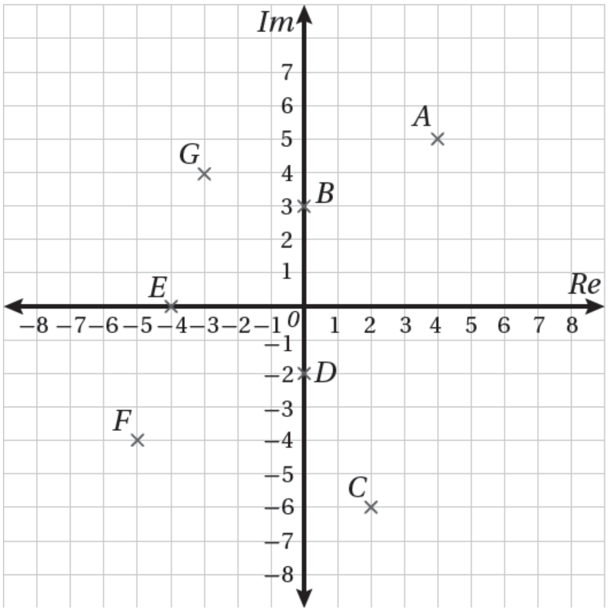
$z = -1 - 6i$ بالنظر إلى التمثيل البياني للعدد المركّب في الشكل المجاور ، ألاحظ أنه يقع في الربع الثالث.



$$\text{Arg}(z) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right)$$
$$= -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{6}{1}\right)\right)$$
$$\approx -1.74$$

مثال5:

أكتب كلا من الأعداد المركبة الممثلة بيانياً في المستوى المركب المجاور بالصورة القياسية ثم أجد مقياسه وسعته



الحل:

$$A = 4 + 5i \rightarrow |A| = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$$

$$Arg(A) = \tan^{-1}\frac{5}{4} \approx 0.90$$

$$B = 3i \rightarrow |B| = \sqrt{9} = 3$$

$$Arg(B) = \frac{\pi}{2}$$

$$C = 2 - 6i \rightarrow |C| = \sqrt{4 + 36} = 2\sqrt{10}$$

$$Arg(C) = -\tan^{-1} 3 \approx -1.25$$

$$D = -2i \rightarrow |D| = \sqrt{4} = 2$$

$$Arg(D) = -\frac{\pi}{2}$$

$$E = -4 \rightarrow |E| = \sqrt{16} = 4$$

$Arg(E) = \pi$

$F = -5-4i \rightarrow |F| = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$

$Arg(F) = -\left(\pi - \tan^{-1}\frac{4}{5}\right) \approx -2.47$

$G = -3+4i \rightarrow |G| = \sqrt{9+16} = 5$

$Arg(G) = \pi - \tan^{-1}\frac{4}{3} \approx 2.21$

مفهوم أساسي: الصورة المثلثية للعدد المركب

إذا كان: $z = a+ib$ عدداً مركباً فإن سعته العدد المركب $Arg(z) = \theta$ و مقياسة $|z| = r$ يستعملان لكتابة الصورة المثلثية كما يلي :

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

مثال :

أكتب كلا من الأعداد المركبة الآتية بالصورة المثلثية:

1) 6

الحل:

$|z| = 6$

$Arg(z) = \tan^{-1}\frac{0}{6} = 0$

$z = 6(\cos 0 + i\sin 0)$

2) $-5i$

الحل:

$|z| = 5$

$Arg(z) = -\frac{\pi}{2}$

$z = 5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

3) $-2\sqrt{3}-2i$

الحل:

$|z| = \sqrt{12+4} = 4$

$Arg(z) = -\left(\pi - \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{5\pi}{6}$

$z = 4\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

4) $-1+i$

الحل:

$|z| = \sqrt{2}$

$Arg(z) = \pi - \tan^{-1}1 = \frac{3\pi}{4}$

$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

5) $4-2i$

الحل:

$|z| = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$

$Arg(z) = -\tan^{-1}\frac{1}{2} \approx -0.46$

$z = 2\sqrt{5}(\cos(-0.46) + i\sin(-0.46))$

6) $2+8i$

الحل:

$$|z| = 2\sqrt{17}$$

$$Arg(z) = \tan^{-1} 4 \approx 1.33$$

$$z = 2\sqrt{17}\left(\cos 1.33 + i\sin 1.33\right)$$

مثال 8:

أكتب كلا من الأعداد المركبة الآتية بالصورة القياسية:

1) $6\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

الحل:

$$6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 3\sqrt{3} + 3i$$

2) $12\left(\cos\pi + i\sin\pi\right)$

الحل:

$$12\left(-1 + i(0)\right) = -12$$

3) $8\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

الحل:

$$8\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -4 + 4i\sqrt{3}$$

4) $3\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)$

الحل:

$$3\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}i$$

مثال 9:

أجد مرافق كل من الأعداد المركبة الآتية، ثم أمثلها جميعاً في المستوى المركب نفسه

1) $-1 - i\sqrt{5} \rightarrow \bar{z} = -1 + i\sqrt{5}$

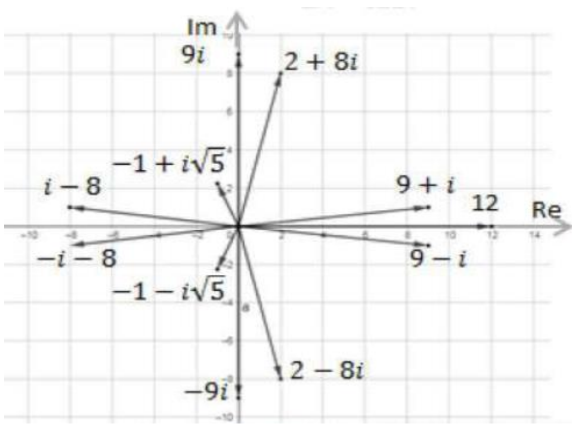
2) $9 - i \rightarrow \bar{z} = 9 + i$

3) $2 - 8i \rightarrow \bar{z} = 2 + 8i$

4) $-9i \rightarrow \bar{z} = 9i$

5) $12 \rightarrow \bar{z} = 12$

6) $i - 8 \rightarrow \bar{z} = i - 8$



تدريب : أجد ناتج كل مما يلي في أبسط صورة مفترضا أنّ $\sqrt{-1} = i$:

a) $\sqrt{-27} \times \sqrt{-48}$

$$= \sqrt{-1 \times 27} \times \sqrt{-1 \times 48}$$
$$= i\sqrt{9 \times 3} \times i\sqrt{16 \times 3}$$
$$= i^2\sqrt{9 \times 3 \times 16 \times 3}$$
$$= 36i^2 = -36$$

b) $\sqrt{-50} \times -4i$

$$= \sqrt{-1 \times 50} \times (-4i)$$
$$= 5i\sqrt{2} \times (-4i) = -20\sqrt{2}i^2 = 20\sqrt{2}$$

c) i^{2021}

$$= (i^2)^{1010} \times i = (-1)^{1010} \times i = i$$

مثال 3 :

أجد قيمة x ، وقيمة y الحقيقيتين اللتين تجعلان المعادلة :
$2x - 6 + (3y + 2)i = 4x + 8i$ صحيحة .

أساوي الجزأين الحقيقيين ، وأساوي الجزأين التخيّليين، ثم أحل المعادلتين الناتجتين :

بمساواة الجزأين التخيليين بحل المعادلة
$$3y + 2 = 8$$
$$y = 2$$

بمساواة الجزأين الحقيقيين بحل المعادلة
$$2x - 6 = 4x$$
$$x = -3$$

إذن، $x = -3 , y = 2$

تدريب : أجد قيمة x وقيمة y الحقيقيتين اللتين تجعلان المعادلة $x + 5 + (4y - 9)i = 12 - 5i$ صحيحة .

$\rightarrow x + 5 = 12$ و $4y - 9 = -5$

$\rightarrow x = 7 , y = 1$

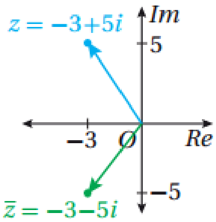
مثال 4 :

أمثل العدد المركّب ومرافقه بيانيا في المستوى المركب في كل مما يأتي :

1. $z = -3 + 5i$

مرافق العدد المركّب : $z = -3 + 5i$ هو $\bar{z} = -3 - 5i$:

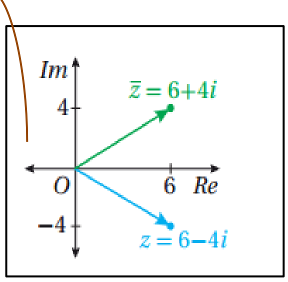
يمثل الزوج المرتب (5 ,3-) العدد المركّب z، ويمثل الزوج المرتب (5- , 3-) مرافقه $\bar{z}$.

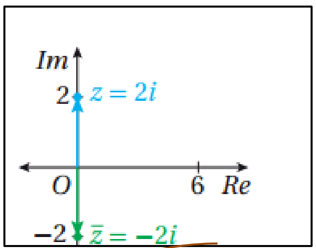


2. $z = 6 - 4i$

مرافق العدد المركّب: $z = 6 - 4i$ هو $\bar{z} = 6 - 4i$:

يمثل الزوج المرتب (4- ,6) العدد المركّب z، ويمثل الزوج المرتب (4 , 6) مرافقه $\bar{z}$.





3. $z = 2i$

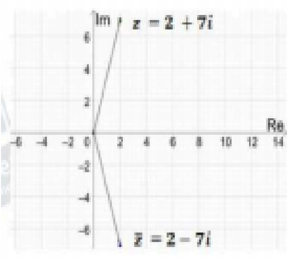
مرافق العدد المركّب : $z = 2i$ هو $\bar{z} = -2i$:

يمثل الزوج المرتب (2, 0) العدد المركّب z، ويمثل الزوج المرتب (2 -,0) مرافقه $\bar{z}$.

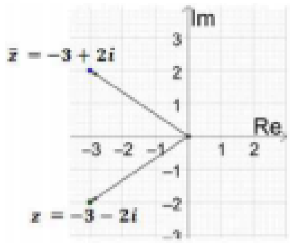
الأستاذ : محمد المجذوب
0799333306
الأستاذ إياد عباد
0799366611

تدريب : أمثل العدد المركّب ومرافقه بيانيا في المستوى المركب في كل مما يأتي :

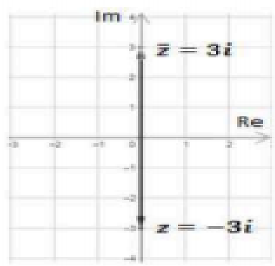
a) $z = 2 + 7i\,, \bar{z} = 2 - 7i$



b) $z = -3 - 2i\,, \bar{z} = -3 + 2i$



c) $z = -3i\,, \bar{z} = 3i$



مثال 5 :

أجد مقياس كل عدد مركّب مما يأتي :

1. $z = 3 - 4i$

صيغة مقياس العدد المركب : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

بتعويض $a=3\,, b=-4$: $= \sqrt{3^2 + (-4)^2}$

بالتبسيط : $= \sqrt{25} = 5$

2. $z = 12i$

صيغة مقياس العدد المركب : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

بتعويض $a=3\,, b=-4$: $= \sqrt{0^2 + (12)^2}$

بالتبسيط : $= \sqrt{144} = 12$

تدريب : أجد مقياس كل عدد مركّب مما يأتي :

a) $z = -3 - 6i\sqrt{2}$

$\rightarrow |z| = \sqrt{(-3)^2 + (-6\sqrt{2})^2} = \sqrt{81} = 9$

b) $z = -2i$

$\rightarrow |z| = \sqrt{(0)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$

c) $z = 4 + \sqrt{-20}$

$= 4 + \sqrt{-1} \times \sqrt{20} = 4 + i\sqrt{20}$

$\rightarrow |z| = \sqrt{(4)^2 + (\sqrt{20})^2} = \sqrt{36} = 6$

الأستاذ : محمد المجذوب
0799333306

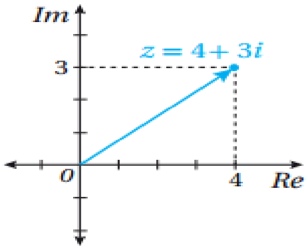
الأستاذ إياد عباد
0799366611

مثال 6 :

أجد سعة كل من الأعداد المركبة الآتية ،مقرّبا إجابتي إلى أقرب منزلتين عشريتين :

1. $z = 4 + 3i$

بالنظر إلى التمثيل البياني للعدد المركّب $z = 4 + 3i$ في الشكل المجاور ، الاحظ أنه يقع في الربع الأوّل.



سعة العدد المركب في الربع الأول :

بتعويض b=3,a=4

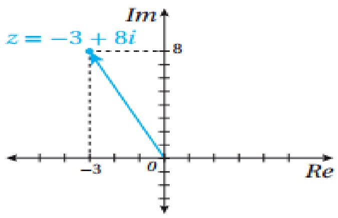
$$\text{Arg}(z) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$
$$= \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$$
$$\approx 0.64$$

باستعمال الآلة الحاسبة :

إذن ، $Arg(z) \approx 0.64$

2. $z = -3 + 8i$

بالنظر إلى التمثيل البياني للعدد المركّب $z = -3 + 8i$ في الشكل المجاور ، ألاحظ أنه يقع في الربع الثاني.



سعة العدد المركب في الربع الثاني :

بتعويض b=8,a=3

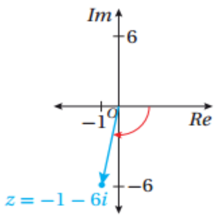
$$\text{Arg}(z) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$
$$= \pi - \tan^{-1}\left(\frac{8}{3}\right)$$
$$\approx 1.93$$

باستعمال الآلة الحاسبة :

إذن ، $Arg(z) \approx 1.93$

3. $z = -1 - 6i$

بالنظر إلى التمثيل البياني للعدد المركّب $-1 - 6i$ في الشكل المجاور ، ألاحظ أنه يقع في الربع الثالث.



سعة العدد المركب في الربع الثالث :

بتعويض b=6,a=1

$$\text{Arg}(z) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right)$$
$$= -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{6}{1}\right)\right)$$
$$\approx -1.74$$

باستعمال الآلة الحاسبة :

إذن ، $Arg(z) \approx 1.74$

4. $z = 8 - 4i$

بالنظر إلى التمثيل البياني للعدد المركّب $z = 8 - 4i$ في الشكل المجاور ، ألاحظ أنه يقع في الربع الرابع .

سعة العدد المركب في الربع الثالث :

بتعويض b=8,a=4

باستعمال الآلة الحاسبة :

إذن ، $Arg(z) \approx -0.46$

تدريب : أجد سعة كل من الأعداد المركبة الآتية ،مقرّبا إجابتي إلى أقرب منزلتين عشريتين :

a) $z = 8 + 2i$

$$Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{8}\right) \approx 0.24$$

b) $z = -5 + 12i$

$$Arg(z) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right) \approx 1.97$$

c) $z = -2 - 3i$

$$Arg(z) = -(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)) \approx -2.16$$

d) $z = 8 - 8i\sqrt{3}$

$$Arg(z) = -\tan^{-1}\left(\frac{8\sqrt{3}}{8}\right)) \approx -\frac{\pi}{3}$$

مثال 7 :

اكتب العدد المركب z في كل مما يأتي بالصورة المثلثية :

1. $|z| = 4, Arg(z) = \frac{\pi}{6}$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ الصورة المثلثية للعدد المُركَّب

$= 4(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$ بتعويض $r = 4, \theta = \frac{\pi}{6}$

إذن ، الصورة المثلثية للعدد z هي :

$$z = 4(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$$

2. $z = -2 - 5i$

الخطوة 1 : أجد مقياس العدد z

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$$

الخطوة 2 : أجد سعة العدد z

بما أنّ العدد z يقع في الربع الثالث ، فإنّ :

سعة العدد المركب في الربع الثالث :

$$Arg(z) = -(Arg(\bar{z}))$$

بتعويض $a=2$, $b=5$:

$$= -(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right))$$

باستعمال الآلة الحاسبة : ≈ -1.95

إذن، $Arg(z) \approx -1.95$

الخطوة 3 : أكتب z بالصورة المثلثية .

$$z \approx \sqrt{29}(\cos(-1.95) + i\sin(-1.95))$$

تدريب : اكتب العدد المركب z في كل مما يأتي بالصورة المثلثية :

a) $|z| = 4\sqrt{2}, Arg(z) = -\frac{3\pi}{4}$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= 4\sqrt{2}(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right))$$

b) $z = -4 - 4i$

$$\rightarrow r = |z| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$$

$$Arg(z) = -(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{4}{4}\right)) \approx -\frac{3\pi}{4}$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= 4\sqrt{2}(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right))$$

مسائل :

- أجد قيمة الجذر الرئيس في كل مما يأتي بدلالة i :

1. $\sqrt{-19}$

$$= \sqrt{-1 \times 19} = \sqrt{-1} \times \sqrt{19}$$
$$= i\sqrt{19}$$

2. $\sqrt{-\frac{12}{25}}$

$$= \sqrt{-1 \times \frac{12}{25}} = \sqrt{-1} \times \sqrt{\frac{12}{25}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}i$$

3. $\sqrt{-\frac{9}{32}}$

$$= \sqrt{-1 \times \frac{9}{32}} = \sqrt{-1} \times \sqrt{\frac{9}{32}} = \frac{3}{4\sqrt{2}}i$$

4. $\sqrt{-53}$

$$= \sqrt{-1 \times 53} = \sqrt{-1} \times \sqrt{53} = i\sqrt{53}$$

- أجد ناتج كل مما يلي في أبسط صورة مفترضا أنّ $\sqrt{-1} = i$:

5. $i^{26} = (i^2)^{13} = -1$

6. $i^{39} = (i^2)^{19} \times i = (-1)^{19} \times i = -i$

7. $(i)(2i)(-7i)$

$$= (2i^2)(-7i) = (-2)(-7i) = 14i$$

8. $\sqrt{-6} \times \sqrt{-6}$

$$= \sqrt{-1 \times 6} \times \sqrt{-1 \times 6}$$
$$= i\sqrt{6} \times i\sqrt{6}$$
$$= 6i^2 = -6$$

9. $\sqrt{-4} \times \sqrt{-8}$

$$= \sqrt{-1 \times 4} \times \sqrt{-1 \times 8}$$
$$= 2i \times 2\sqrt{2}\, i$$
$$= 4\sqrt{2}i = -4\sqrt{2}$$

10. $2i \times \sqrt{-9}$

$$= 2i \times \sqrt{-1 \times 9}$$
$$= 2i \times 3i$$
$$= 6i^2 = -6$$

- اكتب في كل مما يأتي العدد المركب z الصورة القياسية :

11. $\frac{2+\sqrt{-4}}{2} = \frac{2+2i}{2} = 1 + i$

12. $\frac{8+\sqrt{-16}}{2} = \frac{8+4i}{2} = 4 + 2i$

13. $\frac{10-\sqrt{-50}}{5} = \frac{10-5i\sqrt{2}}{5} = 2 - i\sqrt{2}$

- أحدد الجزء الحقيقي والجزء التخيلي لكل من الأعداد المركبة الآتية، ثم أمثلها جميعا في المستوى المركب نفسه:

14. $z = 2 + 15i$

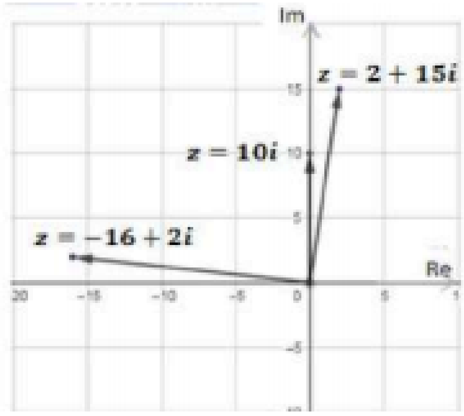
$$\to Re(z) = 2, Im(z) = 15$$

15. $z = 10i$

$$\to Re(z) = 0, Im(z) = 10$$

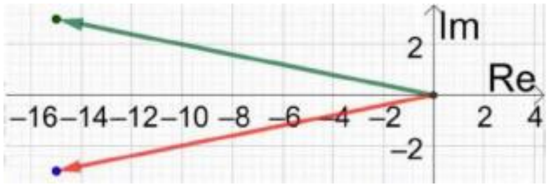
16. $z = -16 - 2i$

$$\to Re(z) = -16, Im(z) = -2$$

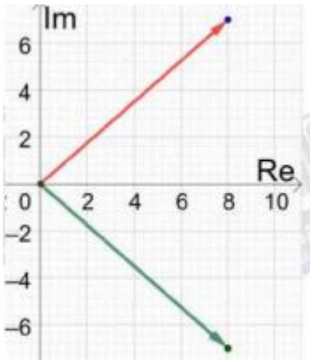


- أمثل العدد المركب ومرافقه بيانيا في المستوى المركب في كل مما يأتي :

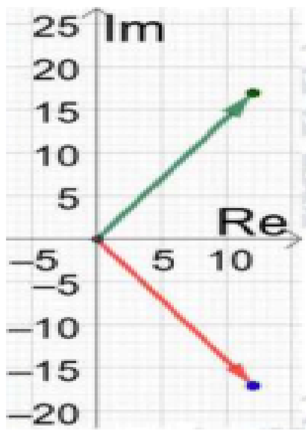
17. $z = -15 + 3i\ , \bar{z} = -15 - 3i$



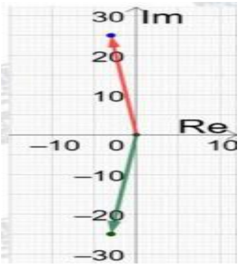
18. $z = 8 - 7i, \bar{z} = 8 + 7i$



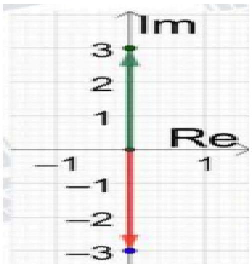
19. $z = 12 + 17i, \bar{z} = 12 - 17i$



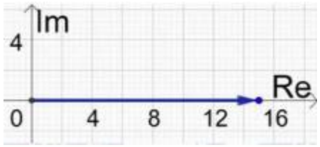
20. $z = -3 - 25i, \bar{z} = -3 + 25i$



21. $z = 3i, \bar{z} = -3i$



22. $z = 15, \bar{z} = 15$



- أجد $|z|$ و $\bar{z}$ لكل مما يأتي :

23. $z = -5 + 5i$

$\bar{z} = -5 - 5i$

$|z| = \sqrt{(-5)^2 + (5)^2} = 5\sqrt{2}$

24. $z = 3 + 3\sqrt{3}i$

$\bar{z} = 3 - 3\sqrt{3}i$

$|z| = \sqrt{(3)^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 27} = 6$

25. $z = 6 - 8i$

$\bar{z} = 6 + 8i$

$|z| = \sqrt{(6)^2 + (-8)^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$

- أجد قيم كل من x، وy الحقيقية التي تجعل كلا من المعادلات الآتية صحيحة :

26. $x^2 - 1 + i(2y - 5) = 8 + 9i$

$\rightarrow x^2 - 1 = 8$ و $2y - 5 = 9$

$\rightarrow x = \pm 3$ و $y = 7$

27. $2x + 3y + i(x - 2y) = 8 - 3i$

$\rightarrow 2x + 3y = 8$ و $x - 2y = -3$

$\rightarrow x = 1$ و $y = 2$

28. $y - 3 + i(3x + 2) = 9 + i(y - 4)$

$\rightarrow y - 3 = 9$ و $3x + 2 = y - 4$

$\rightarrow x = 2$ و $y = 12$

29)

$i(2x - 5y) + 3x + 5y = 7 + 3i$

$\rightarrow 2x - 5y = 3 \ , 3x + 5y = 7$

$\rightarrow x = 2 \ , y = \frac{1}{5}$

- أجد سعة كل من الأعداد المركبة الآتية ،مقربا إجابتي إلى أقرب منزلتين عشريتين :

30. $z = 1$

$Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{0}{1}\right) = 0$

31. $z = 3i$

$Arg(z) = \frac{\pi}{2}$

32. $z = -5 - 5i$

$Arg(z) = -(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{5}{5}\right)) = -\frac{3\pi}{4}$

33. $z = 1 - i\sqrt{3}$

$Arg(z) = -\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = -\frac{\pi}{3}$

34. $z = 6\sqrt{3} + 6i$

$Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{6}{6\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

35. $z = 3 - 4i$

$Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{-}\right) \approx -0.93$

37. $z = -58 - 93i$

$Arg(z) = -(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{93}{58}\right)) \approx -2.13$

38. $z = -4 + 2i$

$Arg(z) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{2}{4}\right) \approx 2.68$

- أكتب في كل مما يأتي العدد المركب z بالصورة المثلثية :

39. $r = |z| = 2, Arg(z) = \frac{\pi}{2}$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 2(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}))$

40. $r = |z| = 3, Arg(z) = \frac{\pi}{3}$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 3(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}))$

41. $r = |z| = 7, Arg(z) = \frac{5\pi}{6}$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 7(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{6}))$

42. $r = |z| = 1, Arg(z) = \frac{\pi}{4}$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 1(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}))$

$= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin(\frac{\pi}{4})$

43. $z = 6$

$\rightarrow r = |z| = \sqrt{(6)^2 + (0)^2} = 6$

$Arg(z) = 0$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 6(\cos(0) + i\sin(0))$

44. $z = 1 + i$

$\rightarrow r = |z| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$

$Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} =$

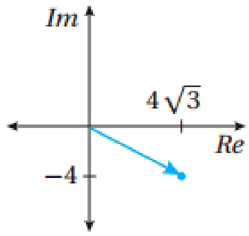
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}))$

45- يبين الشكل المجاور التمثيل البياني للعدد المركّب z_1 في المستوى المركّب، z_2 الذي يحقق ما يأتي :

$$|z_2| = 40 \ and \ Arg z_2 = Arg\overline{z_1}$$

بافتراض أن : $z = a + ib$ ، حيث: $|z| = 10\sqrt{2}$

وأنّ: $Arg(z) = \frac{3\pi}{4}$



$$z_1 = 4\sqrt{3} - 4i \rightarrow \bar{z}_1 = 4\sqrt{3} + 4i$$

$$Arg(z_2) = Arg(\overline{z_1}) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{4\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$z_2 = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 40(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6}))$$

$$= 40\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 20\sqrt{3} + 20i$$

إذن، $z_2 = 20\sqrt{3} + 20i$

46.أكتب العدد المركب z بالصورة القياسية :

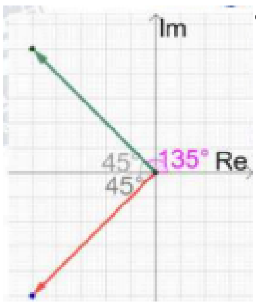
$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 10\sqrt{2}\left(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

$$= 10\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -10 + 10i$$

إذن، $z = -10 + 10i$

47. أجد قياس الزاوية المحصورة بين z و $\bar{z}$

بما أن z في الربع الثاني ، فإن $\bar{z}$ في الربع الثالث فتكون الزاوية بينهما هي $\frac{\pi}{2}$.



إذا كان : $z = -8 + 8i$ ، فأجد كل مما يأتي :

48. $|z| = \sqrt{(-8)^2 + (8)^2} = 8\sqrt{2}$

49. $Arg(z) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{8}{8}\right) = \frac{3\pi}{4}$

50. $|\bar{z}| = |z| = 8\sqrt{2}$

51.Arg(

. $\bar{z} = -8 + 8i$

$$\rightarrow Arg(\bar{z}) = -(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{8}{8}\right)) = -\frac{3\pi}{4}$$

أو نكتب مباشرة :

$$Arg(\bar{z}) = Arg(z) = -\frac{3\pi}{4}$$

مهارات التفكير العليا:

تبرير : إذا كان: $Arg(5 + 2i) = \alpha$ فأجد سعة كل مما يأتي بدلالة α مبررا إجابتي :

52. $-5 - 2i$

$$Arg(5 + 2i) = \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$Arg(-5 - 2i) = -(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)) = -(\pi - \alpha) = -\pi + \alpha$$

53. $5 - 2i =$

$$Arg(5 - 2i) = -\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) = -\alpha$$

54 -5+2i

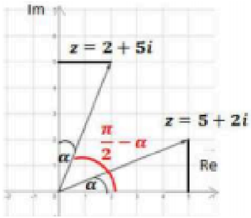
$$Arg(-5 + 2i) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) = \pi - \alpha$$

55. $2+5i$

يوضح الرسم المجاور العلاقة بين سعة كل من العددين :

$z=2+2i$ و $z=5+2i$

$$Arg(2+5i)=\tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{\pi}{2}-\alpha$$



56. $-2+5i$

$$Arg(-2+5i)=\pi-\tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\pi}{2}+\alpha$$

57. **تحد:** إذا كان: $z=5+im$ حيث : $|z|=6$ و $0<Arg(z)<\frac{\pi}{2}$ فأجد قيمة العدد الحقيقي m

$$|z|=\sqrt{(5)^2+(m)^2}=\sqrt{25+m^2}=6$$

$$\to 25+m^2=36\to m=\pm\sqrt{11}$$

لكن $0<Arg(z)<\frac{\pi}{2}$ وهذا يعني أن Z في الربع الأول ومنه $m=\sqrt{11}$.

58 . تبرير: إذا كان: $z = 5 + 3ik$، حيث: $|z|=13$، فأجد جميع قيم k الحقيقية الممكنة ، مبررا إجابتي .

$$|z|=\sqrt{(5)^2+(3k)^2}=\sqrt{25+9k^2}=13$$

$$\to 25+9k^2=169\to k=\pm 4$$

59. بافتراض ان z ....

اكتب z_1 بالصورة القياسية.

$$|z_1|=r=4\sqrt{5}\quad ,\ Arg(z_1)=\tan^{-1}(2)=\theta$$

(نستنتج هنا أن z_1 يقع في الربع الأول ، ففي الأرباع الأخرى تكون السعة بإشارة سالبة أو تحتوى π)

$$\tan\theta=2\to\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}\ ,\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$z1=r(\cos\theta+i\sin\theta)=4\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+i\frac{2}{\sqrt{5}}=4+8i$$

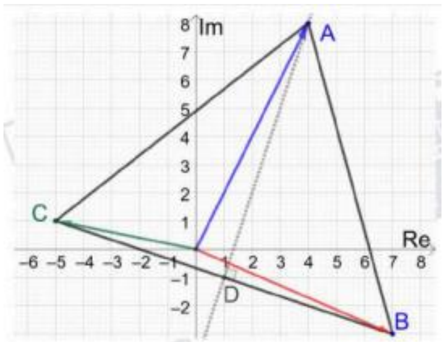
60. إذا كان : $z_2=7-3i, z_3=-5+i$ فأجد مساحة المثلث الذي رؤوسه : z_1,z_2,z_3 في المستوى المركّب .

$$z_1=4+8i\ ,z_2=7-3i\ ,z_3=-5+i$$

$$AC=\sqrt{(4-(-5))^2+(8-1)^2}=\sqrt{130}$$

$$AB=\sqrt{(4-7)^2+(8-(-3))^2}=\sqrt{130}$$

$$BC=\sqrt{(7-(-5))^2+(-3-1)^2}=\sqrt{160}$$



ومنه فإن المثلث ABC متطابق الضلعين ، نتخذ BC قاعدة له ونجد إحداثيي النقطة D نقطة منتصف القاعدة BC :

$$D\left(\frac{7-5}{2},\frac{-3+1}{2}\right)\to D(1,-1)$$

ارتفاع هذا المثلث هو القطعة المستقيمة الواصلة بين رأس ومنتصف القاعدة وهو $\overline{AD}$

$$AD=\sqrt{(4-1)^2+(8--1)^2}=\sqrt{90}$$

لتكن مساحة المثلث ABC هي A فإن :

$$A=\frac{1}{2}\times\sqrt{160}\times\sqrt{90}=60$$

إذن مساحة المثلث ABC، تساوي 60 وحدة مربعة .

الدرس2: العمليات على الأعداد المركبة

❖ **فكرة الدرس:**

- اجراء العمليات الحسابية الأربع (الجميع، الطرح، الضرب، القسمة) على الأعداد المركبة
- إيجاد الجذر التربيعي لعدد مركب وإيجاد الجذور المركبة لمعادلات كثيرات الحدود

❖ **جمع الأعداد المركبة وطرحها:**

تشبه عمليتا جمع الاعداد المركبة وطرحها عمليتي جمع المقادير الجبرية وطرحها، حيث تجمع الحدود المتشابهة بعضها مع بعض

لجمع عددين مركبين أو طرحهما يتعين جمع جزأيهما الحقيقيين أو طرحهما وجمع جزأيهما التخيليين أو طرحهما

قاعدة:

اذا كان: $z_1 = a+ib\,,\ z_2 = x+iy$ عددين مركبين فإنه يمكن إيجاد ناتج جمعهما أو طرحهما على النحو الآتي:

$$z_1 + z_2 = (a+x) + i(b+y)$$

$$z_1 - z_2 = (a-x) + i(b-y)$$

ملاحظة:

يحقق جمع الأعداد المركبة خاصية التبديل فإذا كان z, w عددين مركبين، فإن: $z + w = w + z$

مثال1:

أجد ناتج كل مما يأتي:

1) $(5+7i)+(-9-4i)$

الحل:

$$(5+7i)+(-9-4i) = 5+7i-9-4i$$
$$=(5-9)+(7-4)i$$
$$=-4+3i$$

2) $(8-5i)-(2-11i)$

الحل:

$$(8-5i)-(2-11i) = 8-5i-2+11i$$
$$=(8-2)+(-5+11)i$$
$$=6+6i$$

3) $(7+8i)+(-9+14i)$

الحل:

$$(7+8i)+(-9+14i) = -2+22i$$

4) $(11+9i)-(4-6i)$

الحل:

$$(11+9i)-(4-6i) = 7+22i$$

ملاحظة:

النظير الجمعي للعدد المركب: $z=a+bi$ هو:

$-z=-a-bi$

❖ ضرب الأعداد المركبة

يمكن ضرب الأعداد المركبة بطريقة مشابهة لعملية ضرب المقادير الجبرية، وذلك باستعمال خاصية التوزيع وبعد إتمام عملية الضرب يوضع العدد -1 بدل i^2 أينما ظهرت

مثال :

أجد ناتج كل مما يأتي، ثم أكتبه بالصورة القياسية:

1) $5i(3-7i)$

الحل:

$5i(3-7i)=5i(3)+(5i)(-7i)$

$=15i+(-35)i^2$

باستبدال i^2 بالعدد -1

$=15i+(-35)(-1)=35+15i$

2) $(6+2i)(7-3i)$

الحل:

$(6+2i)(7-3i)=6(7)+6(-3i)+2i(7)+2i(-3i)$

$=42-18i+14i-6i^2$

باستبدال i^2 بالعدد -1

$=42-18i+14i-6(-1)$

$=(42+6)+(-18+14)i=48-4i$

3) $(5+4i)(5-4i)$

الحل:

$(5+4i)(5-4i)=5(5)+5(-4i)+4i(5)+4i(-4i)$

$=25-20i+20i-16i^2$

باستبدال i^2 بالعدد -1

$=25-20i+20i+16=41$

ملاحظة:

لاحظ أن أحد العددين المركبين المضروبين مرافق للآخر وأن ناتج الضرب عدد حقيقي

4) $-3i(4-5i)$

الحل:

$-3i(4-5i)=-12i+15i^2=-15-12i$

5) $(5+4i)(7-4i)$

الحل:

$(5+4i)(7-4i)=35-20i+28i-16i^2$

$=35+8i+16=51+8i$

6) $(3+6i)^2$

الحل:

$(3+6i)^2=9+36i+36i^2$

$=9+36i-36=-27+36i$

❖ قسمة الأعداد المركبة:

لاحظت في المثال أن ناتج ضرب العدد المركب: $5+4i$ في مرافقه يساوي عددا حقيقيا وهذا صحيح دائما لأي عدد مركب: $z=a+ib$ وناتج الضرب يكون دائما في صورة: a^2+b^2 أي إن:

$z\bar{z}=|z|^2$

ملاحظة:

مرافق العدد المركب $z=a+ib$ هو العدد المركب

$\bar{z}=a-ib$

يمكن استعمال هذه الحقيقية لإيجاد ناتج قسمة عددين مركبين وذلك بضرب كل من المقسوم والمقسوم عليه في المرافق المقسوم علية فيصبح المقسوم عليه عددا حقيقيا

مثال:

أجد ناتج كل مما يأتي، ثم أكتبه بالصورة القياسية:

1) $\dfrac{8-5i}{3-2i}$

الحل:

$$\frac{8-5i}{3-2i}=\frac{8-5i}{3-2i}\times\frac{3+2i}{3+2i}$$

$$=\frac{24+16i-15i-10i^2}{9+4}$$

باستبدال i^2 بالعدد -1

$$=\frac{24+16i-15i+10}{9+4}$$

$$=\frac{34+i}{13}=\frac{34}{13}+\frac{1}{13}i$$

2) $\dfrac{3+5i}{2i}$

الحل:

بالضرب في $\dfrac{i}{i}$

$$\frac{3+5i}{2i}=\frac{3+5i}{2i}\times\frac{i}{i}=\frac{3i+5i^2}{2i^2}$$

باستبدال i^2 بالعدد -1

$$=\frac{3i-5}{-2}=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}i$$

ملاحظة:

يمكن ايضا ضرب كل من المقسوم والمقسوم عليه في $\dfrac{-2i}{-2i}$ لكن الأسهل هو الضرب في $\dfrac{i}{i}$

3) $\dfrac{-4+3i}{1+i}$

$$\frac{-4+3i}{1+i}=\frac{-4+3i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}$$

$$=\frac{-4+4i+3i-3i^2}{1-i^2}$$

$$=\frac{-4+7i+3}{1+i}=\frac{-1+7i}{2}$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}i$$

3) $(4-3i)(1+3i)$

الحل:

$=4+12i-3i+9=13+9i$

4) $(4-6i)(1-2i)(2-3i)$

الحل:

$=(4-6i)(2-3i-4i-6)$

$=(4-6i)(-4-7i)$

$=-16-28i+24i-42=-58-4i$

5) $(9-2i)^2$

الحل:

$=81-36i-4=77-36i$

مثال :

أجد ناتج كل مما يأتي ثم أكتبه بالصورة القياسية:

1) $(6+8i)+(3-5i)$

$9+3i$

2) $(-6-3i)-(-8+2i)$

$2-5i$

3) $4i(7-3i)$

$12+28i$

4) $(8-6i)(8+6i)$

$64-36i^2=100$

4) $\dfrac{2-6i}{-3i}$

الحل:

$$\frac{2-6i}{-3i}=\frac{2-6i}{-3i}\times\frac{i}{i}=\frac{2i-6i^2}{-3i^2}$$

$$=\frac{2i+6}{3}=2+\frac{2}{3}i$$

5) $\dfrac{7i}{4-4i}$

الحل:

$$\frac{7i}{4-4i}=\frac{7i}{4-4i}\times\frac{4+4i}{4+4i}$$

$$=\frac{28i+28i^2}{16-16i^2}=\frac{28i-28}{16+16}$$

$$=\frac{28i-28}{32}=-\frac{7}{8}+\frac{7}{8}i$$

مثال :

أجد نـاتج مـل ممـا يـأتي ، ثـم أكتبـه بالصـورة القياسية :

1) $(7+2i)+(3-11i)$

الحل:

$=10-9i$

2) $(5-9i)-(-4+7i)$

الحل:

$=9-16i$

5) $\left(-2+2i\sqrt{3}\right)^2$

$$-8+24\sqrt{3}i+72-24\sqrt{3}i=64$$

6) $\dfrac{(2+i)(1-i)}{4-3i}$

$$\frac{3-i}{4-3i}\times\frac{4+3i}{4+3i}=\frac{15+5i}{25}=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$$

❖ **ضرب الأعداد المركبة المكتوبة بالصورة المثلثية وقسمتها:**

إذا كان: $z_1=r_1\left(\cos\theta_1+i\sin\theta_1\right)$

وكان: $z_2=r_2\left(\cos\theta_2+i\sin\theta_2\right)$

فإن:

$$z_1z_2=r_1\left(\cos\theta_1+i\sin\theta_1\right)\times r_2\left(\cos\theta_2+i\sin\theta_2\right)$$

$$=r_1r_2\left(\cos\theta_1+i\sin\theta_1\right)\left(\cos\theta_2+i\sin\theta_2\right)$$

$$=r_1r_2\left(\cos\theta_1\cos\theta_2+i\cos\theta_1 i\sin\theta_2+i\sin\theta_1\cos\theta_2+i^2\sin\theta_1\sin\theta_2\right)$$

$$=r_1r_2\left(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2+i\left(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2\right)\right)$$

$$=r_1r_2\left(\cos\left(\theta_1+\theta_2\right)+i\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right)$$

قاعدة:

ضرب الاعداد المركبة المكتوبة بالصورة المثلثية

إذا كان: $z_1=r_1\left(\cos\theta_1+i\sin\theta_1\right)$

وكان: $z_2=r_2\left(\cos\theta_2+i\sin\theta_2\right)$

فإن:

$$z_1z_2=r_1r_2\left(\cos\left(\theta_1+\theta_2\right)+i\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right)$$

ملاحظة:

ألاحظ أنه إذا كان: $-\pi<\theta_1+\theta_2\le\pi$ فإن:

$$Arg\left(z_1z_2\right)=Arg\left(z_1\right)+Arg\left(z_2\right)$$

يمكن بطريقة مشابهة إثبات أنه إذا كان $z_2\neq 0$ فإن:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left(\cos\left(\theta_1-\theta_2\right)+i\sin\left(\theta_1-\theta_2\right)\right)$$

قاعدة:

قسمة الاعداد المركبة المكتوبة بالصورة المثلثية

إذا كان: $z_1=r_1\left(\cos\theta_1+i\sin\theta_1\right)$

وكان: $z_2=r_2\left(\cos\theta_2+i\sin\theta_2\right)$

فإن: $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}\left(\cos\left(\theta_1-\theta_2\right)+i\sin\left(\theta_1-\theta_2\right)\right)$

ملاحظة:

ألاحظ أنه إذا كان: $-\pi<\theta_1-\theta_2\le\pi$ فإن:

$$Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=Arg\left(z_1\right)-Arg\left(z_2\right)$$

ملاحظة:

في الصورة المثلثية يجب أن تكون θ هي السعة الرئيسة

مثال5:

إذا كان:

$$z_1 = 10\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{7}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{7}\right)\right)$$

وكان: $z_2 = 2\left(\cos\frac{6\pi}{7} + i\sin\frac{6\pi}{7}\right)$

فأجد ناتج كل مما يأتي بالصورة المثلثية:

1) $z_1 z_2$

الحل:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right)$$

$$= 2\times 10\left(\cos\left(\frac{-2\pi}{7}+\frac{6\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{-2\pi}{7}+\frac{6\pi}{7}\right)\right)$$

$$= 20\left(\cos\frac{4\pi}{7} + i\sin\frac{4\pi}{7}\right)$$

2) $\frac{z_1}{z_2}$

الحل:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right)$$

$$= \frac{10}{2}\left(\cos\left(\frac{-2\pi}{7}-\frac{6\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{-2\pi}{7}-\frac{6\pi}{7}\right)\right)$$

$$= 5\left(\cos\left(-\frac{8\pi}{7}\right) + i\sin\left(-\frac{8\pi}{7}\right)\right)$$

بحساب السعة الرئيسة

$$= 5\left(\cos\left(-\frac{8\pi}{7}+2\pi\right) + i\sin\left(-\frac{8\pi}{7}+2\pi\right)\right)$$

$$= 5\left(\cos\frac{6\pi}{7} + i\sin\frac{6\pi}{7}\right)$$

ملاحظة:

تقع السعة الرئيسة في الفترة $-\pi < \theta \le \pi$ ويمكن تحديدها بطرح $2\pi n$ أو إضافته الى الزاوية الناتجة من الجمع أو الطرح

مثال :

أجد ناتج كل مما يأتي بالصورة المثلثية:

1) $6\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\times 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

الحل:

$$= 6\times 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$= 12\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

2) $6\left(\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right) \div 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

الحل:

$$= \frac{6}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

$$= \cos\left(-\frac{\pi}{10}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)$$

3) $12\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \div 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

الحل:

$$= \frac{12}{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

4) $11\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right) \times 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

الحل:

$$= 22\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}\right)\right)$$

$$= 22\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 22\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3} - 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3} - 2\pi\right)\right)$$

$$= 22\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 3\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right)$$

$$= 3\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi\right)\right)$$

$$= 3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

أتذكر:

θ	0°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

θ	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\theta$	$\frac{1}{2}$	0	-1

مثال :

أجد ناتج كلّ مما يأتي بالصورة المثالية :

1) $6(\cos\pi + i\sin\pi) \times 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

الحل:

$$= 12\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= 12\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

2) $\left(\cos\frac{3\pi}{10} + i\sin\frac{3\pi}{10}\right) \div \left(\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}\right)$

الحل:

$$= \cos\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{2\pi}{5}\right)$$

❖ الجذر التربيعي للعدد المركب:

خلافا للأعداد الحقيقية يوجد لكل عدد مركب جذران تربيعيان وهما عددان مركبان أيضا فإذا كان: $\sqrt{z}=x+iy$ فإن: $z=(x+iy)^2$ ومن ثم يمكن إيجاد قيمة كل من x,y الحقيقيتين بتربيع الطرفين، ثم المقارنة بين الأجزاء الحقيقية والأجزاء التخيلية في طرفي المعادلة

مثال :

أجد الجذرين التربيعين لأعداد المركبة الآتية:

1) $z=21-20i$

الحل:

أفترض أن: $\sqrt{z}=x+iy$ حيث x,y عددان حقيقيان

$$\sqrt{z}=x+iy$$

$$z=(x+iy)^2$$

$$21-20i=(x+iy)^2$$ عوض قيمة z

$$21-20i=x^2+2ixy+i^2y^2$$ بفك الاقواس

$$21-20i=x^2-y^2+2ixy$$

$$21=x^2-y^2$$

$$-20=2xy$$

إذن، ينتج النظام الآتي الذي يحوي معادلتين بمتغيرين ويمكن حله بطريقة التعويض:

$$x^2-y^2=21\ldots(1)$$

$$2xy=-20\ldots(2)$$

بحل المعادلة الثانية لـ y

$$y=-\frac{10}{x}$$

بتعويض $y=-\frac{10}{x}$ في المعادلة (1)

$$x^2-\left(-\frac{10}{x}\right)^2=21$$

$$x^4-100=21x^2$$

$$x^4-21x^2-100=0$$

$$(x^2-25)(x^2+4)=0$$

$$x^2 25 \quad or \quad x^2=-4$$

بما أن x عدد حقيقي، فإن: $x=\pm 5$

وبتعويض قيمتي x في المعادلة: $y=-\frac{10}{x}$ فإن الناتج

$$x=5\Rightarrow y=-2$$

$$x=-5\Rightarrow y=2$$

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب: $21-20i$ هما: $-5+2i\,,5-2i$

يتساوى العددان المركبان: $a+bi, c+di$ إذا وفقط إذا كان: $a=c, b=d$

2) $-5-12i$

الحل:

$$\sqrt{-5-12i} = x+iy$$

$$-5-12i = x^2+2ixy+i^2y^2$$

$$-5-12i = x^2-y^2+2ixy$$

$$-5 = x^2-y^2 \quad , \quad -12 = 2xy$$

$$y = -\frac{6}{x}$$

$$x^2-y^2 = -5 \Rightarrow x^2 - \frac{36}{x^2} = -5$$

$$x^4-5x^2-36=0$$

$$(x^2+9)(x^2-4)=0 \Rightarrow x=\pm 2$$

عندما $x=2$ فإن $y=-3$

عندما $x=-2$ فإن $y=3$

اذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $-5-12i$ هما:

$$2-3i \quad , \quad -2+3i$$

3) $-9i$

الحل:

$$\sqrt{-9i} = x+iy$$

$$-9i = x^2+2ixy+i^2y^2$$

$$-9i = x^2-y^2+2ixy$$

$$0 = x^2-y^2 \quad , \quad -9 = 2xy$$

$$y = -\frac{9}{2x}$$

$$x^2-y^2 = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{81}{4x^2} = 0$$

$$4x^4-81=0$$

$$(2x^2+9)(2x^2-9)=0 \Rightarrow x=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}$$

عندما $x=\frac{3}{\sqrt{2}}$ فإن $y=-\frac{3}{\sqrt{2}}$

عندما $x=-\frac{3}{\sqrt{2}}$ فإن $y=\frac{3}{\sqrt{2}}$

اذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $-9i$ هما:

$$\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}}i \quad , \quad -\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}}i$$

4) $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

الحل:

$$\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i} = x+iy$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i = x^2+2ixy+i^2y^2$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i = x^2-y^2+2ixy$$

$$-\frac{1}{2} = x^2-y^2 \quad , \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = 2xy$$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{4x}$$

$$x^2-y^2=-\frac{1}{2}\Rightarrow x^2-\frac{3}{16x^2}=-\frac{1}{2}$$

$$16x^4+8x^2-3=0$$

$$(4x^2-1)(4x^2+3)=0\Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}$$

عندما $x=\frac{1}{2}$ فإن $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$

عندما $x=-\frac{1}{2}$ فإن $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

اذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $-5-12i$ هما:

$$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad , \quad -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

❖ الجذور المركبة لمعادلات كثيرات الحدود:

تعلمت سابقاً حل بعض المعادلات التربيعية في صورة: $ax^2+bx+c=0$ حيث a,b,c أعداد حقيقية باستعمال القانون العام الذي صيغته:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

استعملت أيضا المميز $(\Delta=b^2-4ac)$ لتحدد إذا كان للمعادلة التربيعية جذران حقيقيان أم لا، وإذا كان الجذران متساويين أم لا كما في الجدول الآتي:

$\triangle=b^2-4ac$	جذرا المعادلة التربيعية
$\triangle>0$	حقيقيان مختلفان
$\triangle=0$	حقيقيان متساويان
$\triangle<0$	لا توجد جذور حقيقية

ألاحظ أنه إذا كان المميز سالبا فإنه ينتج عددان مركبان مترافقان من تعويض القيم: a,b,c في القانون العام

ولكن، وبعد تعرف الأعداد المركبة في هذه الوحدة يمكن القول إنه إذا كان المميز سالبا فإن للمعادلة التربيعية جذرين مركبين ومن ثم يمكن تعديل الجدول السابق على النحو الآتي:

$\triangle=b^2-4ac$	جذرا المعادلة التربيعية
$\triangle>0$	حقيقيان مختلفان
$\triangle=0$	حقيقيان متساويان
$\triangle<0$	مُركَّبان مُترافِقان في صورة: $f\pm ig,\ g\neq 0$

*يبين مما سبق أنه إذا كان: $f+ig$ جذرا لمعادلة تربيعية ذات عوامل حقيقية فإن مرافقه: $f-ig$ هو أيضا جذر للمعادلة نفسها ويمكن تعميم هذا الاستنتاج ليشمل أيا من معادلات كثيرات الحدود

*إذا كانت درجة معادلة كثير حدود أكبر من الصفر، فقد لا توجد لها جذور حقيقية وإنما توجد لها جذور مركبة

*عند التعامل مع الأعداد المركبة فإن أي معادلة كثير حدود درجتها أكبر من الصفر لها –على الاقل– جذر مركب واحد في ما يُعرف باسم النظرية الأساسية في الجبر

النظرية الأساسية في الجبر:

يوجد جذر مركب واحد –على الأقل– لأي معادلة كثير حدود درجتها أكبر من الصفر

صحيح أن النظرية الأساسية في الجبر تؤكد وجود صفر مركب واحد –على الأقل– لأي معادلة كثير حدود درجتها أكبر من الصفر لكنها لا تساعد على إيجاد هذا الصفر

فمثلا: إذا كانت: $p(x)=0$ معادلة كثير حدود من الدرجة $n\ge 1$ فإن النظرية الأساسية في الجبر تضمن وجود جذر مركب واحد –على الأقل– للمعادلة وليكن: z_1

ثم إن نظرية العوامل التي تعلمتها سابقا تضمن إمكانية تحليل $p(x)$ في صورة: $p(x)=(x-z_1)q_1(x)$ حيث $q_1(x)$ كثير الحدود درجته $n-1$

ملاحظة:

$q_1(x)$ هو ناتج قسمة $p(x)$ على $(x-z_1)$

فإذا كانت درجة $q_1(x)$ لا تساوي صفرا فإنه يمكن تطبيق النظرية الأساسية في الجبر عليه لإثبات وجود n جذر مركب آخر لكثير الحدود وهكذا حتى لإثبات وجود (n) من الجذور المركبة لـ $p(x)$

التحليل المركب:

لأي معادلة كثير حدود من الدرجة n حيث $n\neq 0$ يوجد n من الجذور المركبة بما في ذلك الجذور المكررة

أمثلة:

ستة جذور $z^6+2z^5-z+7=0$

ثلاث جذور $5z^2-z^3+z-19=0$

اربع جذور $z^4-4z^2+z^3=0$

ملاحظة:

للمعادلة: $x^2=0$ جذران هما: $x=0\,,x=0$ أي إن لها جذراً مكرراً مرتين

تستعمل نظرية التحليل المركب وحقيقة أن الجذر المركبة تأتي في صورة أزواج من الأعداد المركبة المترافقة لتحديد أنواع الجذور الممكنة لمعادلة كثير الحدود كما في الجدول الآتي:

درجة معادلة كثير الحدود	عدد الجذور	أنواع الجذور الممكنة
1	1	جذر حقيقي واحد
2	2	جذران حقيقيان أو جذران مركبان مترافقان
3	3	3 جذور حقيقية أو جذر حقيقي واحد وجذران مركبان مترافقان
4	4	4 جذور حقيقية أو جذران حقيقيان وجذران مركبان مترافقان أو 4 جذورة (زوجان من الجذور المركبة المترافقة)

ينطبق الجدول على كثيرات الحدود ذات المعادلات الحقيقية فقط.

يمكن استعمال نظريتي الباقي والعوامل لتحليل كثير الحدود وحل معادلته كما في المثال الآتي:

مثال :

أجد جميع الجذور الحقيقية والجذور المركبة

للمعادلة: $z^3+4z^2+z=26$

الحل:

أجعل الطرف الأيمن صفراً بطرح 26 من طرفي المعادلة: $z^3+4z^2+z-26=0$

بحسب نظرية الأصفار النسبية إذا كان لهذه المعادلة جذر نسبي فإنه يكون أحد عوامل الحد الثابت (-26) وهي: $\pm1, \pm2, \pm13, \pm26$

بالتعويض أجد أن العدد 2 يحقق هذه المعادلة:

$$2^3+4(2)^2+2-26=0$$

إذن $z-2$ هو أحد عوامل كثير الحدود

أقسم z^3+4z^2+z-26 على $z-2$ لإيجاد العامل التربيعي باستعمال طريقة الجدول على النحو الآتي:

$\times$	z^2	$6z$	13	
z	z^3	$6z^2$	$13x$	0
-2	$-2z^2$	$-12z$	-26	

إذن يمكن كتابة المعادلة في صورة حاصل ضرب المعامل الخطي والمعامل التربيعي كما ياتي:

$$z^3+4z^2+z-26=(z-2)(z^2+6z+13)=0$$

باستعمال خاصية الضرب الصفري فإن:

$$z^2+6z+13=0 \quad or \quad z-2=0$$

باستعمال القانون العام فإن جذور المعادلة التربيعية هي:

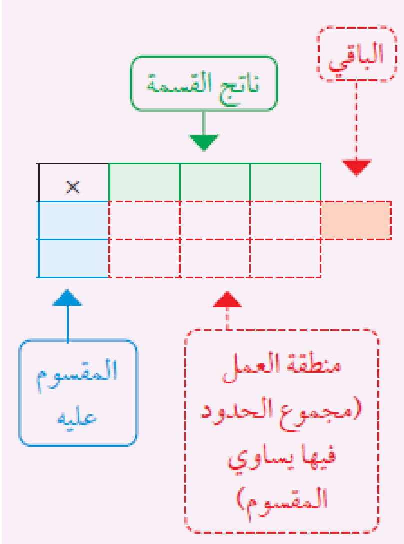
$$z=\frac{-6\pm\sqrt{36-52}}{2}=\frac{-6\pm\sqrt{-16}}{2}=-3\pm2i$$

إذن لهذه المعادلة 3 جذور، هي:

$$2, -3+2i, -3-2i$$

أتذكر:

تعلمت طريقة الجدول وهي تعتمد بشكل أساسي على ضرب كثيرات الحدود بوصفها عملية عكسية لعملية القسمة



مثال :

أجد جميع الجذور الحقيقية والجذور المركبة للمعادلة: $z^3-z^2-7z+15=0$

الحل:

$$z^3-z^2-7z+15=0$$

عوامل الحد الثابت: $\pm1,\pm3,\pm5,\pm15$

بالتعويض: نجد أن العدد -3 يحقق المعادلة لأن:

$$(-3)^3-(-3)^2-7(-3)+15=0$$

إذن $(z+3)$ هو أحد عوامل كثير الحدود، نجري عملية القسمة فنجد أن:

$$z^3-z^2-7z+15=0=(z+3)(x^2-4z+5)=0$$

$$z=-3$$

$$z=\frac{4\pm\sqrt{16-20}}{2}=2\pm i$$

إذا لهذه المعادلة 3 جذور هي: $-3\,,\,2+i\,,\,2-i$

ملاحظة :

* إذا عُلم أحد جذور المعادلة فإنه يمكن السير بخطوات عكسية (بدءاً بالجذر المعلوم) لإيجاد المعادلة الأصلية أو أحد عواملها

* تستعمل هذه الطريقة أحياناً لإيجاد قيم معاملات مجهولة في المعادلة

مثال:

إذا كان: $3+9i$ **هو أحد جذور المعادلة:** $x^2+ax+b=0$ **فأجد قيمة كل من** a,b

الحل:

بما أن: $3+9i$ هو أحد جذور المعادلة فإن مرافق هذا الجذر هو جذر آخر لهذه المعادلة

أتبع خطوات عكسية لإيجاد المعادلة التربيعية:

$3+9i$ هما جذران للمعادلة $\qquad x=3\pm9i$

بطرح 3 من طرفي المعادلة $\qquad x-3=\pm9i$

$$(x-3)^2=-81$$

$$x^2-6x+90=0$$

بعد مقارنة حدود المعادلة التربيعية الناتجة بالمعادلة المعطاة، أستنتج أن: $a=-6\ ,\ b=90$

ملاحظة:

يمكن كتابة معادلة تربيعية جذراها معروفان z_1, z_2 كما يأتي:

$$z^2-(z_1+z_2)z+(z_1z_2)=0$$

يمكن أيضا استعمال هذه الفكرة لحل هذا المثال بطريقة أخرى مباشرة

مثال :

إذا كان: $2-i$ هو أحد جذور المعادلة: $x^2+ax+b=0$ فأجد قيمة كل من a,b

الحل:

$$x=2\pm i$$
$$x-2=\pm i$$
$$(x-2)^2=-1$$
$$x^2-4x+4=-1$$
$$x^2-4x+5=0$$

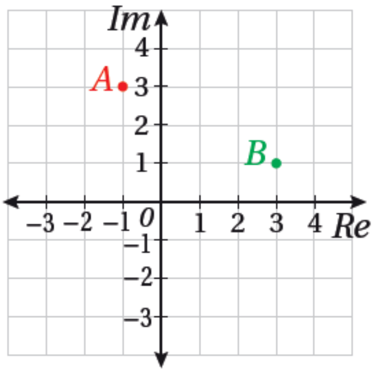
بمقارنة هذه المعادلة مع المعادلة المعطاة:

$x^2+ax+b=0$ نجد أن:

$$a=-4\quad ,\quad b=5$$

مثال :

معتمدا المستوى المركب المجاور الذي يبين العددين المركبين A, B أجد السعة والمقياس للعدد المركب AB



الحل:

$$z_1=-1+3i\quad ,\quad z_2=3+i$$
$$z_1z_2=(-1+3i)(3+i)$$
$$=-3-i+9i-3=-6+8i$$
$$|z_1z_2|=\sqrt{36+64}=10$$
$$Arg(z_1z_2)=\pi-\tan^{-1}\left(\frac{8}{6}\right)\approx 2.21$$

مثال :

أجد القيم الحقيقية للثابتين a و b في كلٍّ مما يأتي :

1) $(a+6i)+(7-ib)=-2+5i$

الحل:

$$a+7+(6-b)i=-2+5i$$
$$a+7=-2\quad ,\quad 6-b=5$$
$$a=-9\quad ,\quad b=1$$

2) $(11-ia)-(b-9i)=7-6i$

الحل:

$$11-b+(9-a)i=7-6i$$

$$11-b=7 \quad , \quad 9-a=-6$$

$$b=4 \quad , \quad a=15$$

3) $(a+ib)(2-i)=5+5i$

الحل:

$$2a+b+(2b-a)i=5+5i$$

$$2a+b=5 \quad , \quad 2b-a=5$$

$$b=3 \quad , \quad a=1$$

طريقة آخرى للحل:

$$a+ib=\frac{5+5i}{2-i}=\frac{5+5i}{2-i}\times\frac{2+i}{2+i}$$

$$=\frac{10+5i+10i-5}{4+1}$$

$$=\frac{5+15i}{5}=1+3i$$

$$b=3 \quad , \quad a=1$$

4) $\dfrac{a-6i}{1-2i}=b+4i$

الحل:

$$\frac{a-6i}{1-2i}\times\frac{1+2i}{1+2i}=b+4i$$

$$\frac{a+2ai-6i+12}{1+4}=b+4i$$

$$\frac{a+12}{5}+\frac{2a-6}{5}i=b+4i$$

$$\frac{a+12}{5}=b \quad , \quad \frac{2a-6}{5}=4\Rightarrow a=13$$

بتعويض قيمة a في المعادلة الاولى ينتج أن:

$$b=5$$

طريقة آخرى للحل:

$$a-6i=(b+4i)(1-2i)$$

$$a-6i=b+8+(-2b+4)i$$

$$a=b+8 \quad , \quad -6=-2b+4$$

$$b=5 \quad , \quad a=13$$

مثال :

أَضرِب العدد المُركب $8\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ في مُرافِقه

الحل:

$$z=8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$=8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\bar{z}=8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$z\bar{z} = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\times 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= 64\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 64$$

حل ثاني:

نكتب كلا من العددين بالصورة المثلثية اولا ثم نطبق القاعدة:

$$z = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= 8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\bar{z} = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$z\bar{z} = 64\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = 64$$

حل ثالث:

كتابة العددين بالصورة القياسية اولا ثم اجراء عملية الضرب

$$z = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= 8\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$$

$$\bar{z} = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$$

$$z\bar{z} = \left(4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i\right)\left(4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i\right)$$

$$= 32 + 32 = 64$$

مثال :

إذا : $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i \,, z_2 = \sqrt{5} - \sqrt{15}i$ ، $z_3 = 2 - 2i$ فأجد المقياس والسعة والسعة الرئيسية لكلٍّ ممّا يأتي :

1) $\frac{z_2}{z_1}$

الحل:

$$|z_1| = \sqrt{12+4} = 4$$

$$|z_2| = \sqrt{5+15} = 2\sqrt{5}$$

$$|z_3| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

$$Arg(z_1) = -\tan^{-1}\left(\frac{2}{2\sqrt{3}}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

$$Arg(z_2) = -\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}\right) = -\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

$$Arg(z_3) = -\tan^{-1}\left(\frac{2}{2}\right) = -\tan^{-1}(1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{|z_2|}{|z_1|} = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$Arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = Arg(z_2) - Arg(z_1)$$

$$= -\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

2) $\frac{1}{z_3}$

الحل:

$$\left|\frac{1}{z_3}\right| = \frac{|1|}{|z_3|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$Arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)=Arg(1)-Arg(z_2)$$

$$=0-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$$

3) $\frac{z_3}{z_2}$

الحل:

$$\overline{z_2}=\sqrt{5}+i\sqrt{15}$$

$$\left|\overline{z_2}\right|=|z_2|=2\sqrt{5}$$

$$Arg\left(\overline{z_2}\right)=-Arg(z_2)=\frac{\pi}{3}$$

$$\left|\frac{z_3}{z_2}\right|=\frac{|z_3|}{|z_2|}=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

$$Arg\left(\frac{z_3}{z_2}\right)=Arg(z_3)-Arg(z_2)$$

$$=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}=-\frac{7\pi}{12}$$

مثال :

إذا كــان: $z=8\left(\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا :

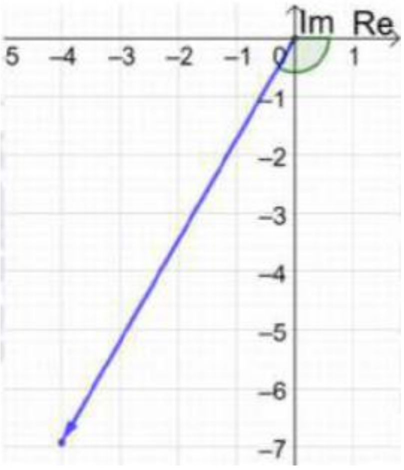
1) أُمثِّل العدد z بيانيًا في المستوى المُركب

الحل:

$$z=8\left(\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$z=8\left(\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right)$$

اذن مقياس x يساوي 8 وسعته $\frac{-2\pi}{3}$



2) أجد الجذرين التربيعيين للعدد z

الحل:

$$z=8\left(\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=8\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}i\right)=-4-4\sqrt{3}i$$

$$\sqrt{-4-4\sqrt{3}i}=x+iy$$

$$-4-4\sqrt{3}i=x^2+2ixy+i^2y^2$$

$$-4-4\sqrt{3}i=x^2-y^2+2ixy$$

$$-4=x^2-y^2 \quad , \quad -4\sqrt{3}=2xy$$

$$y=\frac{-2\sqrt{3}}{x}$$

$$x^2-y^2=-4$$

$$x^2-\frac{12}{x^2}=-4$$

$x^4+4x^2-12=0$

$\left(x^2+6\right)\left(x^2-2\right)=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$

عندما $x=\sqrt{2}$ فإن $y=-\sqrt{6}$

وعندما $x=-\sqrt{2}$ فإن $y=\sqrt{6}$

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب z هما:

$\sqrt{2}-i\sqrt{6} \quad , \quad -\sqrt{2}+i\sqrt{6}$

مثال :

أجد الجذرين التربيعيين لكلٍّ من الأعداد الآتية :

1) $3-4i$

الحل:

$\sqrt{3-4i}=x+iy$

$3-4i=x^2+2ixy+i^2y^2$

$3-4i=x^2-y^2+2ixy$

$3=x^2-y^2 \quad , \quad -4=2xy$

$y=-\dfrac{2}{x}$

$x^2-y^2=3$

$x^2-\dfrac{4}{x^2}=3$

$x^4-3x^2-4=0$

$\left(x^2+1\right)\left(x^2-4\right)=0 \Rightarrow x=\pm 2$

عندما $x=2$ فإن $y=-1$

وعندما $x=-2$ فإن $y=1$

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $3-4i$ هما:

$2-i \quad , \quad -2+i$

2) $-15+8i$

الحل:

$\sqrt{-15+8i}=x+iy$

$-15+8i=x^2+2ixy+i^2y^2$

$-15+8i=x^2-y^2+2ixy$

$-15=x^2-y^2 \quad , \quad 8=2xy$

$y=\dfrac{4}{x}$

$x^2-y^2=-15$

$x^2-\dfrac{16}{x^2}=-15$

$x^4+15x^2-16=0$

$\left(x^2+16\right)\left(x^2-1\right)=0 \Rightarrow x=\pm 1$

عندما $x=1$ فإن $y=4$

وعندما $x=-1$ فإن $y=-4$

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $-15+8i$ هما: $-1-4i \quad , \quad 1+4i$

3) $5-12i$

الحل:

$\sqrt{5-12i} = x+iy$

$5-12i = x^2+2ixy+i^2y^2$

$5-12i = x^2-y^2+2ixy$

$5 = x^2-y^2 \quad , \quad -12 = 2xy$

$y = -\dfrac{6}{x}$

$x^2-y^2 = 5$

$x^2-\dfrac{36}{x^2} = 5$

$x^4-5x^2-36 = 0$

$(x^2+4)(x^2-9) = 0 \Rightarrow x = \pm 3$

عندما $x=3$ فإن $y=-2$

وعندما $x=-3$ فإن $y=2$

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $5-12i$

هما: $-3+2i \quad , \quad 3-2i$

4) $-7-24i$

الحل:

$\sqrt{-7-24i} = x+iy$

$-7-24i = x^2+2ixy+i^2y^2$

$-7-24i = x^2-y^2+2ixy$

$-7 = x^2-y^2 \quad , \quad -24 = 2xy$

$y = -\dfrac{12}{x}$

$x^2-y^2 = -7$

$x^2-\dfrac{144}{x^2} = -7$

$x^4+7x^2-144 = 0$

$(x^2+16)(x^2-9) = 0 \Rightarrow x = \pm 3$

عندما $x=3$ فإن $y=-4$

وعندما $x=-3$ فإن $y=4$

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $-7-24i$

هما: $-3+4i \quad , \quad 3-4i$

مثال :

إذا كان: $(a-3i)$ و $(b+ic)$ هما الجذرين التربيعيين للعدد المركب: $55-48i$ ، فأجد قيمة كلٍّ من الثوابت الحقيقية : a، b و ، c

الحل:

بما أن $a-3i$ هو جذر للعدد المركب $55-48i$

اذن:

$(a-3i)^2 = 55-48i$

$a^2-6ia-9 = 55-48i$

$a^2-9 = 55 \quad , \quad -6a = -48i \Rightarrow a = 8$

بما أن $b+ic$ هو جذر للعدد المركب $55-48i$

اذن:

$$(b+ic)^2=55-48i$$

$$b^2-2ibc-c^2=55-48i$$

$$b^2-c^2=55 \quad , \quad 2bc=-48$$

$$c=-\frac{24}{b} \Rightarrow b^2-\frac{576}{b^2}=55$$

$$b^4-55b^2-576=0$$

$$(b^2-64)(b^2+9)=0 \Rightarrow b=\pm 8$$

عندما $b=8$ فإن $c=-3$

وعندما $b=-8$ فإن $c=3$

جذرا هذا العدد المركب هما: $8-3i,-8+3i$

وبمقارنة هذين الجذرين مع الجذرين المعطيين $(a-3i,b+ic)$ نلاحظ أن:

$$a=8\,,\,b=-8\,,\,c=3$$

الحل الأسهل هو:

بما أن $a-3i$ جذر للعدد المركب $55-48i$ إذن $-a+3i$ هو ايضا جذر له ومنه:

بالمقارنة مع الجذرين $a-3i$ و $b+ic$ نجد أن: $b=-a$ و $c=3$ ومنه:

$$(a-3i)^2=55-48i$$

$$a^2-6ia-9=55-48i$$

$$a^2-9=55\,,\,-6a=-48 \Rightarrow a=8 \Rightarrow b=-8$$

مثال9:

إذا كـــان: $w=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$z=2\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ فأجـد كُـلًا ممّـا يأتي بالصورة المثلية :

1) zw

الحل:

$$z=2\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$w=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$zw=4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$=4\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

2) $\frac{z}{w}$

الحل:

$$\frac{z}{w}=1\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$=\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)$$

$$5iz = 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \times 2\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)$$

$$= 10\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{-\pi}{4}\right)\right)$$

$$= 10\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

مثال :

أحُلُّ كُلًا من المعادلات الآتية :

1) $z^2 + 104 = 20z$

الحل:

$$z^2 + 20z + 104 = 0$$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{20 \pm \sqrt{400 - 416}}{2} = \frac{20 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$z = \frac{20 \pm 4i}{2} = 10 \pm 2i$$

اذن لهذه المعادلة جذران هما:

$10 - 2i \quad , \quad 10 + 2i$

2) $z^2 + 18z + 202 = 0$

الحل:

$$z^2 + 18z + 202 = 0$$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-18 \pm \sqrt{324 - 808}}{2} = \frac{-18 \pm \sqrt{-484}}{2}$$

3) $\frac{w}{z}$

الحل:

$$\frac{w}{z} = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{-\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$

4) $\frac{1}{z}$

الحل:

$$1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(0 - \frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(0 - \frac{-\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

5) w^2

الحل:

$$w^2 = ww$$

$$= 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

6) $5iz$

الحل:

$$5i = 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$z=\frac{-18\pm 22i}{2}=-9\pm 11i$$

اذن لهذه المعادلة جذران هما:

$-9-11i \quad , \quad -9+11i$

3) $9z^2+68=0$

الحل:

$$z^2=-\frac{68}{9}\Rightarrow z=\pm\sqrt{-\frac{68}{9}}=\pm i\frac{\sqrt{68}}{3}$$

اذن لهذه المعادلة جذران هما:

$-i\frac{\sqrt{68}}{3} \quad , \quad i\frac{\sqrt{68}}{3}$

4) $3z^3-2z^2+2z+1=0$

الحل:

الاصفار النسبية المحتملة هي: $\pm 1, \pm\frac{1}{3}$

بالتعويض نجد أن العدد $z=-\frac{1}{3}$ يحقق المعادلة

لأن:

$$3\left(-\frac{1}{3}\right)^3-2\left(-\frac{1}{3}\right)^2+2\left(-\frac{1}{3}\right)+1=0$$

$$z=-\frac{1}{3}\Rightarrow 3z=-1\Rightarrow 3z+1=0$$

اذن $(3z+1)$ هو أحد عوامل كثير الحدود نجري عملية القسمة فنجد أن:

$$3z^3-2z^2+2z+1=(3z+1)(z^2-z+1)=0$$

$$z=-\frac{1}{3}$$

$$z=\frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

اذن لهذه المعادلة 3 حلول (جذور) هما:

$-\frac{1}{3} \quad , \quad \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

5) $z^3+4z+10=5z^2$

الحل:

$$z^3-5z^2+4z+10=0$$

الاصفار النسبية المحتملة هي:

$\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$

بالتعويض نجد أن العدد $z=-1$ يحقق المعادلة

لأن:

$$(-1)^3-5(-1)^2+4(-1)+10=0$$

اذن $(z+1)$ هو أحد عوامل كثير الحدود نجري عملية القسمة فنجد أن:

$$z^3-5z^2+4z+10=(z+1)(z^2-6z+10)=0$$

$$z=-1$$

$$z=\frac{6\pm\sqrt{36-40}}{2}=\frac{6\pm 2i}{2}=3\pm i$$

اذن لهذه المعادلة 3 حلول (جذور) هما:

$-1 \quad , \quad 3+i \quad , \quad 3-i$

6) $2z^3 = 8z^2 + 13z - 87$

الحل:

الاصفار النسبية المحتملة هي:

$$\pm1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm3, \pm29, \pm\frac{29}{2}, \pm\frac{87}{2}, \pm87$$

بالتعويض نجد أن العدد $z = -3$ يحقق المعادلة

لأن:

$$2(-3)^3 - 8(-3)^2 - 13(-3) + 87 = 0$$

اذن $(z+3)$ هو أحد عوامل كثير الحدود نجري

عملية القسمة فنجد أن:

$$2z^3 - 8z^2 - 13z + 87 = (z+3)(2z^2 - 14z + 29) = 0$$

$$z = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 232}}{4}$$

$$z = -3$$

$$z = \frac{14 \pm \sqrt{-36}}{4} = \frac{14 \pm 6i}{4} = \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2}i$$

اذن لهذه المعادلة 3 حلول (جذور) هما:

$$-3 \quad , \quad \frac{7}{2} + \frac{3}{2}i \quad , \quad \frac{7}{2} - \frac{3}{2}i$$

مثال :

أجد معادلة تربيعية لها الجذران المُركَّبان المُعطيان في كُلٍّ ممّا يأتي :

1) $2 \pm 5i$

الحل:

$$x = 2 \pm 5i$$

$$x - 2 = \pm 5i$$

$$(x-2)^2 = -25$$

$$x^2 - 4x + 4 = -25$$

$$x^2 - 4x + 29 = 0$$

طريقة آخرى للحل:

نعلم أنه اذا كان h و k هما جذرا المعادلة التربيعية

$$x^2 - bx + c = 0$$

فإن: $b = h + k \quad , \quad c = hk$

مجموع الجذرين يساوي: 4

وناتج ضربهما يساوي: $4 + 25 = 29$

اذن المعادلة هي: $x^2 - 4x + 29 = 0$

2) $7 \pm 4i$

الحل:

$$x = 7 \pm 4i$$

$$x - 7 = \pm 4i$$

$$(x-7)^2 = -16$$

$$x^2 - 14x + 49 = -16$$

$$x^2 - 14x + 65 = 0$$

طريقة آخرى للحل:

مجموع الجذرين يساوي: 14

وناتج ضربهما يساوي: $49 + 16 = 65$

اذن المعادلة هي: $x^2 - 14x + 65 = 0$

3) $-8 \pm 20i$

الحل:

$$x = -8 \pm 20i$$

$x+8=\pm 20i$

$(x+8)^2=-400$

$x^2+16x+64=-400$

$x^2+16x+464=0$

طريقة آخرى للحل:

مجموع الجذرين يساوي: -16

وناتج ضربهما يساوي: $64+400=464$

اذن المعادلة هي: $x^2+16x+464=0$

4) $-3\pm 2i$

الحل:

$x=-3\pm 2i$

$x+3=\pm 2i$

$(x+3)^2=-4$

$x^2+6x+9=-4$

$x^2+6x+13=0$

طريقة آخرى للحل:

مجموع الجذرين يساوي: -6

وناتج ضربهما يساوي: $9+4=13$

اذن المعادلة هي: $x^2+6x+13=0$

مثال:

أحُلُّ المعادلة المعطى أحد جذورها في كُلٍّ مما يأتي :

1) $x^3+x^2+15x=225, 5$

الحل:

$x^3+x^2+15x=225$

$x^3+x^2+15x-225=0$

بما أن 5 جذر لهذه المعادلة اذن $(x-5)$ عوامل كثير الحدود بالقسمة عليه نحصل على:

$x^3+x^2+15x-225=(x-5)(x^2+6x+45)=0$

$x=5$

$x=\frac{-6\pm\sqrt{36-180}}{2}$

$=\frac{-6\pm\sqrt{-144}}{2}=\frac{-6\pm 12i}{2}=-3\pm 6i$

حلول هذه المعادلة هي:

$x=5\,,\, x=-3+6i\,,\, x=-3-6i$

2) $x^3+7x^2-13x+45=0, -9$

الحل:

$x^3+7x^2-13x+45=0$

بما أن -9 جذر لهذه المعادلة اذن $(x+9)$ عوامل كثير الحدود بالقسمة عليه نحصل على:

$x^3+7x^2-13x+45=(x+9)(x^2-2x+5)=0$

$x=-9$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-20}}{2}$$

$$=\frac{2\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{2\pm4i}{2}=1\pm2i$$

حلول هذه المعادلة أي:

$x=-9\,,\ x=1+2i\,,\ x=1-2i$

3) $3x\left(x^2+45\right)=2\left(19x^2+37\right),6-i$

الحل:

$3x\left(x^2+45\right)=2\left(19x^2+37\right)$

$3x^3-38x^2-135x-74=0$

بما أن $(6-i)$ جذر لهذه المعادلة اذن مرافقه

$(6+i)$ هو ايضا جذر لهذه المعادلة

نكون المعادلة التربيعية التي جذراها:

$(6+i),(6-i)$

$x=6\pm i$

$x-6=\pm i$

$(x-6)^2=-1$

$x^2-12x+36=-1$

$x^2-12x+37=0$

ثم نقسم كثير الحدود $3x^3-38x^2-135x-74$ على $x^2-12x+37$ فنجد أن:

$3x^3-38x^2-135x-74=$

$\left(x^2-12x+37\right)(3x-2)=0$

$x=\frac{2}{3}\quad,\quad x=6\pm i$

حلول هذه المعادلة هي:

$x=\frac{2}{3}\quad,\quad x=6+i\quad,\quad x=6-i$

4) $x^3+10x^2+29x+30=0,-2+i$

الحل:

$x^3+10x^2+29x+30=0$

بما أن $(-2+i)$ جذر لهذه المعادلة اذن مرافقه

$(-2-i)$ هو ايضا جذر لهذه المعادلة

نكون المعادلة التربيعية التي جذراها:

$(-2-i),(-2+i)$

$x=-2\pm i$

$x+2=\pm i$

$(x+2)^2=-1$

$x^2+4x+4=-1$

$x^2+4x+5=0$

ثم نقسم كثير الحدود $x^3+10x^2+29x+30$ على x^2+4x+5 فنجد أن:

$x^3+10x^2+29x+30=$

$\left(x^2+4x+5\right)(x+6)=0$

$x=-6\quad,\quad x=-2\pm i$

حلول هذه المعادلة هي:

$x=-6\quad,\quad x=-2+i\quad,\quad x=-2-i$

مثال:

إذا كان : $(4+11i)$ هو أحد جذري المعادلة:
$z^2-8z+k=0$ ، حيث k عدد حقيقي ،
فأُجيب عن السؤالين الآتيين تِباعًا :

1) أجد الجذر الآخر للمعادلة

الحل:

الجذر الآخر هو مرافق الجذر الأول، أي $4-11i$

2) أجد قيمة الثابت k

الحل:

$$k=(4-11i)(4+11i)$$
$$=16-121i^2=16+121=137$$

مثال :

أجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا ، مُبرِّرًا إجابتي :

1) أجد ناتج : $(p+iq)^2$ ، حيث p و q عددان حقيقيان

الحل:

$$(p+iq)^2=p^2+2ipq+i^2q^2$$
$$=p^2+2ipq-q^2$$

2) إذا كان: $(p+iq)^2=45+im$ ، حيث p و q عددان صحيحان موجبان ، و $p>q$ ، فأجد ثلاث قيم مُمكنة للعدد الحقيقي m

الحل:

$$(p+iq)^2=45+im=p^2-q^2+2ipq$$
$$p^2-q^2=45 \quad , \quad m=2pq$$
$$p^2-q^2=45 \Rightarrow (p+q)(p-q)=45$$

بما أن p و q عددان صحيحان موجبان و $p>q$ فإن $(p+q)$ و $(p-q)$ عددان صحيحان موجبان ايضا و $(p+q)>(p-q)$ ومنه يكفي تحليل العدد 45 الى عاملين صحيحين موجبين احدهما اكبر من الآخر، لدينا 3 حالات لتحليل 45 الى عاملين صحيحين موجبين هي:

الحالة الاولى: $45=45\times1$

فإن: $p+q=45 \quad , \quad p-q=1$

ومنه: $p=23 \quad , \quad q=22$

أي أن: $m=2pq=1012$

الحالة الثانية: $45=15\times3$

فإن: $p+q=15 \quad , \quad p-q=3$

ومنه: $p=9 \quad , \quad q=6$

أي أن: $m=2pq=108$

الحالة الثالثة: $45=9\times5$

فإن: $p+q=9 \quad , \quad p-q=5$

ومنه: $p=7 \quad , \quad q=2$

أي أن: $m=2pq=28$

قيم m المطلوبة هي: 1012 , 108 , 28

3) أستعمل إجابة السؤال السابق لإيجاد الجذرين التربيعيين للعدد المُركب : $45-108i$

الحل:

المطلوب ايجاد الجذرين التربيعيين للعدد المركب

$45-108i$

بما أن $m=2pq=-108$

اذن العددان p و q مختلفان بالاشارة ، من السؤال السابق نجد أن:

$p=9\,,\,q=-6$ أو $p=-9\,,\,q=6$

الجذران المطلوبان هما: $9-6i\,,\,-9+6i$

مثال:

أُثبت أنّ: $z\bar{z}=|z|^2$ لأي عدد مُركب z .

الحل:

ليكن $z=z+iy$ اذن $\bar{z}=x-iy$

$$z\bar{z}=(x+iy)(x-iy)$$

$$=x^2-y^2i^2$$

$$=x^2+y^2$$

$$=\sqrt{(x^2+y^2)^2}=|z|^2$$

مثال:

إذا كان z عددًا مُركبًا ، حيث:

$$|z|=5\sqrt{5}\,,\,Arg(z)=\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

وكان: $\frac{z}{3+4i}=p+q$ ، فأُثبت أن:

$$p+q=1$$

الحل:

ليكن $z=x+iy$

بما أن $Arg(z)=\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

اذن يقع العدد المركب z في الربع الاول ويكون

$$x=2y$$

$$z=2y+iy$$

$$|z|=5\sqrt{5}$$

$$(2y)^2+y^2=125$$

$$y^2=25\Rightarrow y=5,x=10$$

اذن $z=10+5y$

$$\frac{z}{3+4i}=\frac{10+5i}{3+4i}=\frac{10+5i}{3+4i}\times\frac{3-4i}{3-4i}$$

$$p+iq=\frac{30-40i+15i+20}{9+16}$$

$$=\frac{50-25i}{25}=2-i$$

اذن $p=2,q=-1$ ويكون $p+q=1$

مثال:

العدد المُركب: $z=(10-i)-(2-7i)$ **هو أحد جذور المعادلة:**

$$z^3-20z^2+164z-400=0$$

أجد بقية جذور هذه المعادلة، ثم أحل المعادلات الآتية: $x^6+164x^2=20\left(x^4+20\right)$

الحل:

$$z^3-20z^2+164z-400=0$$

بما أن $(8+6i)$ جذر لهذه المعادلة اذن مرافقه $(8-6i)$ هو ايضا جذر لهذه المعادلة

نكون المعادلة التربيعية التي جذراها:

$$(8-6i),(8+6i)$$

$$(8+6i)+(8-6i)=16$$

$$(8+6i)\times(8-6i)=64+36=100$$

$$z^2-16z+100=0$$

ثم نقسم كثير الحدود $z^3-20z^2+164z-400$ على $z^2-16z+100$ فنجد أن:

$$z^3-20z^2+164z-400=$$

$$\left(z^2-16z+100\right)(z-4)=0$$

$$z=4 \quad , \quad z=8\pm6i$$

حلول هذه المعادلة هي:

$$z=4 \quad , \quad z=8+6i \quad , \quad z=8-6i$$

المعادلة الجديدة هي:

$$x^6-20x^4+164x^2-400=0$$

اذا عوضنا $z=x^2$ تتحول هذه المعادلة الى

$$z^3-20z^2+164z-400=0$$

اذن حلول المعادلة $x^6-20x^4+164x^2-400=0$ هي الجذور التربيعية لحلول المعادلة

$$x^3-20z^2+164z-400=0$$

اذن حلول هذه المعادلة هي:

$$x=\pm\sqrt{8-6i}\ ,\ x=\pm\sqrt{8+6i}\ ,\ x=\pm2$$

نجد الجذرين التربيعيين للعدد $8+6i$

$$\sqrt{8+6i}=h+ik$$

$$8+6i=h^2-k^2+2ihk$$

$$8=h^2-k^2 \quad , \quad 6=2hk$$

$$h=\frac{3}{k}$$

$$h^2-k^2=8$$

$$h^2-\frac{9}{k^2}=8$$

$$h^4-8h^2-9=0$$

$$\left(h^2+1\right)\left(h^2-9\right)=0$$

$$h=\pm3 \Rightarrow k=\pm1$$

اذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $8-6i$ هما:

$3+i \quad , \quad -3-i$

بالمثل نجد أن الجذرين التربيعيين للعدد المركب $8-6i$ هما:

$3-i \quad , \quad -3+i$

ويكون للمعادلة $x^6-20x^4+164x^2-400=0$ ستة حلول هي:

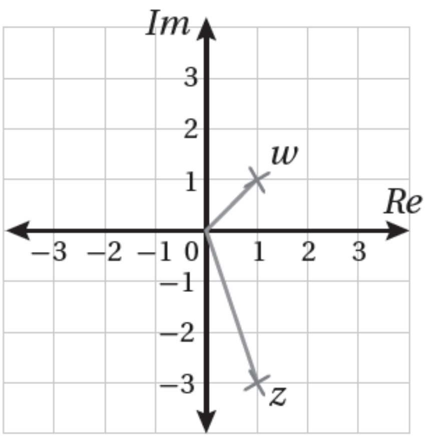
$x=2 \quad , \quad x=-2$

$x=3+i \quad , \quad x=3-i$

$x=-3+i \quad , \quad x=-3-i$

مثال :

معتمداً المستوى المركب المجاور الذي يبين العددين المركبين z و w أجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعاً:



1) أكتب كلا من العددين z و w بالصورة القياسية

الحل:

$z=1-3i \quad , \quad w=1+i$

2) أجد السعة والمقياس لكل من العددين المركبين wz و $\frac{w}{z}$

الحل:

$wz=4-2i$

$|wz|=\sqrt{16+4}=2\sqrt{5}$

$Arg(wz)=-\tan^{-1}\frac{1}{2}\approx -0.46$

$\frac{w}{z}=\frac{1+i}{1-3i}\times\frac{1+3i}{1+3i}=\frac{-2+4i}{10}=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$

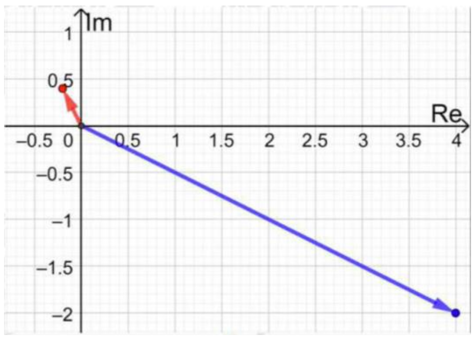
$\left|\frac{w}{z}\right|=\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{4}{25}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$Arg\left(\frac{w}{z}\right)=\pi-\tan^{-1}2\approx 2.03$

3) أمثل العددين wz و $\frac{w}{z}$ في المستوى المركب

الحل:

$wz=4-2i \quad , \quad \frac{w}{z}=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$



مثال :

إذا كـــان: $z=-3+3i\sqrt{3}$ وكـــان: $|w|=18, \operatorname{Arg}(w)=-\frac{\pi}{6}$ فأجد نـاتج كل مما يأتي:

1) $\operatorname{Arg}(z)$

الحل:

$$Arg(z)=\pi-\tan^{-1}\sqrt{3}=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$$

2) $|z|$

الحل:

$$|z|=\sqrt{(-3)^2+\left(3\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{9+27}=6$$

3) $\operatorname{Arg}(zw)$

الحل:

$$Arg(zw)=Arg(z)+Arg(w)=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$$

4) $|zw|$

الحل:

$$|zw|=|z|\times|w|=6\times18=108$$

مثال :

أجد الجذرين التربيعين لكل عدد مركب مما يأتي:

1) $-15+8i$

الحل:

$$\sqrt{-15+8i}=x+iy$$

$$-15+8i=(x+iy)^2$$

$$-15+8i=x^2-y^2+2ixy$$

$$x^2-y^2=-15\,,\,2xy=8\Rightarrow y=\frac{4}{x}$$

$$x^2-\frac{16}{x^2}=-15$$

$$x^4+15x^2-16=0$$

$$\left(x^2+16\right)\left(x^2-1\right)=0\Rightarrow x=\pm1\,,\,y=\pm4$$

$$\sqrt{-15+8i}=\pm(1+4i)$$

2) $-7-24i$

الحل:

$$\sqrt{-7-24i}=x+iy$$

$$-7-24i=(x+iy)^2$$

$$-7-24i=x^2-y^2+2ixy$$

$$x^2-y^2=-7\,,\,2xy=-24\Rightarrow y=-\frac{12}{x}$$

$$x^2-\frac{144}{x^2}=-7$$

$$x^4+7x^2-144=0$$

$$\left(x^2+16\right)\left(x^2-9\right)=0\Rightarrow x=\pm3\,,\,y=\pm4$$

$$\sqrt{-7-24i}=\pm(3-4i)$$

3) $105+88i$

الحل:

$$\sqrt{105+88i}=x+iy$$

$$105+88i=(x+iy)^2$$

$$105+88i=x^2-y^2+2ixy$$

$$x^2-y^2=105\,,\,2xy=88\Rightarrow y=\frac{44}{x}$$

$$x^2-\frac{1936}{x^2}=105$$

$$x^4+105x^2-1936=0$$

$$(x^2+16)(x^2-121)=0\Rightarrow x=\pm 11\,,y=\pm 4$$

$$\sqrt{105+88i}=\pm(11+4i)$$

مثال :

إذا كان: $\omega=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ فأكتبه بالصورة المثلثية

مبيناً أن $\omega^3=-1$

الحل:

$$Arg(\omega)=\tan^{-1}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right)=\tan^{-1}(\sqrt{3})$$

$$|\omega|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$$

$$\omega=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=1\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$|\omega^3|=|\omega|\times|\omega|\times|\omega|=1\times1\times1=1$$

$$Arg(\omega^3)=Arg(\omega)+Arg(\omega)+Arg(\omega)=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\pi$$

$$\omega^3=1(\cos\pi+i\sin\pi)=1$$

مثال6:

إذا كـــان: $z_1=3\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)$ وكـــان: $z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ فأجد كلا مما يأتي بالصورة المثلثية:

1) z_1z_2

الحل:

$$z_1z_2=3\times2\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$=6\left(\cos\frac{8\pi}{15}+i\sin\frac{8\pi}{15}\right)$$

2) $z_1(\overline{z_1})$

الحل:

$$z_1=3\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)$$

$$\overline{z_1}=3\left(\cos\frac{-\pi}{5}+i\sin\frac{-\pi}{5}\right)$$

$$z_1\overline{z_1}=3\times3\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{5}\right)\right)$$

$$=9(\cos 0+i\sin 0)=9$$

3) z_2^3

الحل:

$$z_2^3=z_2^2\times z_2$$

$$=2^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)\right)\times z_2$$

$$=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\times 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=8\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$=8\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)=-8$$

4) $\frac{z_2}{z_1}$

الحل:

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{2}{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{5}\right)\right)$$

$$=\frac{2}{3}\left(\cos\frac{2\pi}{15}+i\sin\frac{2\pi}{15}\right)$$

مثال :

إذا كان: $\left|\frac{u-9i}{3+i}\right|=5$ فما قيمة u علما بأنها سالبة؟

الحل:

$$\left|\frac{u-9i}{3+i}\right|=5\Rightarrow\frac{|u-9i|}{|3+i|}=5$$

$$\frac{\sqrt{u^2+81}}{\sqrt{9+1}}=5$$

$$\sqrt{u^2+81}=5\sqrt{10}$$

$$u^2+81=250\Rightarrow u^2=169\Rightarrow u=\pm 13$$

لكن u سالبة حسب المعطيات، إذن $u=-13$

حل آخر:

يمكن كتابة الصورة القياسية للعدد $\frac{u-9i}{3+i}$ وهي $\frac{3u-9}{10}-\frac{u+27}{10}i$ ثم ايجاد مقياس هذا العدد

$$\left|\frac{u-9i}{3+i}\right|=\left|\frac{3u-9}{10}-\frac{u+27}{10}i\right|$$

$$\sqrt{\left(\frac{3u-9}{10}\right)^2+\left(-\frac{u+27}{10}\right)^2}=5$$

$$\left(\frac{3u-9}{10}\right)^2+\left(-\frac{u+27}{10}\right)^2=25$$

$$(3u-9)^2+(u+27)^2=2500$$

$$9u^2-54u+81+u^2+54u+729=2500$$

$$10u^2=1690\Rightarrow u^2=169\Rightarrow u=\pm 13$$

لكن u سالبة حسب المعطيات، إذن $u=-13$

مثال :

إذا كان: $(1+4i)$ جذراً للمعادلة: $x^3+5x^2+ax+b=0$ فأجد قيمة كل من العددين الحقيقيين a,b والجذرين الآخرين لهذه المعادلة

الحل:

بما أن $(1+4i)$ جذر للمعادلة $x^3+5x^2+ax+b=0$ فإنه يحقق المعادلة، أي أن:

$$(1+4i)^3+5(1+4i)^2+a(1+4i)+b=0$$

$$\left(1+8i+16i^2\right)\left(1+4i\right)+5\left(1+8i+16i^2\right)+a\left(1+4i\right)+b=0$$

$$\left(-15+8i\right)\left(1+4i\right)+5\left(-15+8i\right)+a\left(1+4i\right)+b=0$$

$$-15+52i-32-75+40i+a+4ia+b=0$$

$$-122+a+b+i\left(4a-12\right)=0$$

$$-122+a+b=0\,,\,4a-12=0$$

$$a=3 \quad , \quad b=119$$

فالمعادلة هي: $x^3+5x^2+3x+119=0$

بما أن $\left(1+4i\right)$ جذر للمعادلة فإن $1-4i$ جذر آخر لها

نكون معادلة تربيعية لها هذان الجذران:

$$\left(x-\left(1+4i\right)\right)\left(x-\left(1-4i\right)\right)=\left(x-1-4i\right)\left(x-1+4i\right)$$

$$=x^2-2x+17$$

ثم نقسم كثير الحدود $x^3+5x^2+3x+119$ على $x^2-2x+17$ ، فنحصل على:

$$x^3+5x^2+3x+119=\left(x^2-2x+17\right)\left(x+7\right)$$

الجذران الآخران لهذه المعادلة هما:

$$x=-7 \quad , \quad x=1-4i$$

مثال :

أجد قيمتي الجذر التربيعي: $\sqrt{\dfrac{362-153i}{2-3i}}$

الحل:

نبسط $\dfrac{362-153i}{2-3i}$

$$\frac{362-153i}{2-3i}=\frac{362-153i}{2-3i}\times\frac{2+3i}{2+3i}$$

$$=\frac{1183-780i}{13}=91-60i$$

$$\sqrt{\frac{362-153i}{2-3i}}=\sqrt{91-60i}=x+iy$$

$$91-60i=x^2-y^2+2ixy$$

$$x^2-y^2=91\,,\,2xy=60\Rightarrow y=-\frac{30}{x}$$

$$x^2-\frac{900}{x^2}=91$$

$$x^4-91x^2-900=0$$

$$\left(x^2+9\right)\left(x^2-100\right)=0\Rightarrow x=\pm10\,,\,y=\pm3$$

$$\sqrt{\frac{362-153i}{2-3i}}=\pm\left(10+3i\right)$$

مثال :

أثبت أن أحد الجذرين التربيعيين للعدد: $\left(7+24i\right)$ هو $\left(4+3i\right)$ ثم أجد الجذر التربيعي الآخر

الحل:

اذا كان $\left(4+3i\right)$ جذرا تربيعيا للعدد $\left(7+24i\right)$

فيجب أن تكون العبارة الآتية صحيحة:

$$\left(4+3i\right)^2=7+24i$$

نستطيع التأكد من ذلك بالحساب:

$$\left(4+3i\right)^2=16+24i-9=7+24i$$

إذن هو فعلاً أحد جذري $(7+24i)$ ويكون الجذر الآخر هو: $-4-3i$

مثال:

أثبت أن سعة $(7+24i)$ تساوي ضعف سعة $(4+3i)$

الحل:

$$\theta_1 = Arg(7+24i) = \tan^{-1}\frac{24}{7} \approx 1.287$$

$$\theta_2 = Arg(4+3i) = \tan^{-1}\frac{3}{4} \approx 0.6435$$

$$2\times\theta_2 = 2(0.6435) = 1.287 = \theta_1$$

$$\therefore Arg(7+24i) = Arg(4+3i)$$

مثال:

أثبت أن مقياس $(7+24i)$ يساوي مربع مقياس $(4+3i)$

الحل:

$$|7+24i| = \sqrt{49+576} = \sqrt{625} = 25$$

$$|4+3i| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\Rightarrow |7+24i| = |4+3i|^2$$

مثال:

إذا كان: $\frac{a}{3+i}+\frac{b}{1+2i}=1-i$ **فأجد قيمة كل من العددين الحقيقيين** a,b

الحل:

$$\frac{a}{3+i}+\frac{b}{1+2i}=1-i$$

$$\frac{a}{3+i}\times\frac{3-i}{3-i}+\frac{b}{1+2i}\times\frac{1-2i}{1-2i}=1-i$$

$$\frac{3a-ia}{10}+\frac{b-2ib}{5}=1-i$$

$$\frac{3}{10}a-i\frac{a}{10}+\frac{b}{5}-i\frac{2b}{5}=1-i$$

$$\frac{3}{10}a+\frac{b}{5}=1 \quad , \quad \frac{a}{10}+\frac{2b}{5}=1$$

$$3a+2b=10 \quad , \quad a+4b=10$$

$$b=2 \quad , \quad a=2$$

مثال:

أحل كل معادلة مما يأتي:

1) $2z^3 = 8z^2 + 13z - 8z$

الحل:

$$2z^3 - 8z^2 - 13z + 87 = 0$$

الاصفار النسبية المحتملة هي:

$$\pm1, \pm3, \pm29, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{29}{2}, \pm87, \pm\frac{87}{2}$$

بالتعويض نجد أن العدد $z=-3$ يحقق المعادلة لأن:

$$2(-3)^3 - 8(-3)^2 - 13(-3) + 87 = 0$$

إذن $(z+3)$ هو أحد العوامل، نجري عملية القسمة فنجد أن:

$$2z^3-8z^2-13z+87=(z+3)(2z^2-14z+29)=0$$

$$z=-3$$

$$z=\frac{14\pm\sqrt{-36}}{4}=\frac{3\pm 6i}{4}=\frac{3}{4}\pm\frac{3}{2}i$$

إذن لهذه المعادلة 3 حلول هي:

$$-3\ ,\ \frac{3}{4}+\frac{3}{2}i\ ,\ \frac{3}{4}-\frac{3}{2}i$$

2) $x^3+4z^2-10z+12=0$

الحل:

$$z^3+4z^2-10z+12=0$$

الاصفار النسبية المحتملة هي:

$$\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm12$$

بالتعويض نجد أن العدد $z=-6$ يحقق المعادلة لأن:

$$(-6)^3+4(-6)^2-10(-6)+12=0$$

إذن $(z+6)$ هو أحد العوامل، نجري عملية القسمة فنجد أن:

$$z^3+4z^2-10z+12=(z+6)(z^2-2z+2)=0$$

$$z=-6$$

$$z=\frac{2\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{2\pm 2i}{2}=1\pm i$$

إذن لهذه المعادلة 3 حلول هي:

$$-6\ ,\ 1+i\ ,\ 1-i$$

مثال:

إذا كان: $-2+i$ هو أحد جذور المعادلة: $z^4+az^3+bz^2+10z+25=0$ فأجد قيمة a وقيمة b ثم أجد جميع الجذور الحقيقية والجذور المركبة للمعادلة

الحل:

بما أن $(-2+i)$ جذر للمعادلة $z^4+az^3+bz^2+10z+25=0$ فإن:

$$(-2+i)^4+a(-2+i)^3+b(-2+i)^2+10(-2+i)+25=0$$

$$-7-24i+a(-2+11i)+b(3-4i)-20+10i+25=0$$

$$-7-2a+3b-20+25+i(-24+11a-4b+10)=0$$

$$-2-2a+3b=0\quad ,\quad -14+11a-4b=0$$

$$a=2\quad ,\quad b=2$$

المعادلة هي: $z^4+2z^3+2b^2+10z+25=0$

بما أن $(-2+i)$ جذر لهذه المعادلة فإن $(-2-i)$ جذر آخر لها . نكون معادلة لها هذان الجذران:

$$(z-(-2+i))(z-(-2-i))=(z+2-i)(z+2+i)$$
$$=z^2+4z+5$$

ثم نقسم $z^4+2z^3+2z^2+10z+25$ على z^2+4z+5 فنحصل على:

$$z^4+2z^3+2z^2+10z+25=\left(z^2+4z+5\right)\left(z^2-2z+5\right)$$

$$z^2-2z+5=0$$

$$z=\frac{2\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{2\pm 4i}{2}=1\pm 2i$$

جذور المعادلة هي:

$$x=1-2i\ ,\ x=1+2i\ ,\ x=-2+i\ ,\ x=-2-i$$

الدرس3: المحل الهندسي في المستوى المركب

❖ فكرة الدرس:

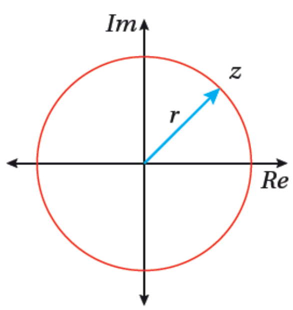
تعرُّف المحل الهندسي في المستوى المُركب ، ورسمُهُ ، وتمثيل منطقة حل مُتباينات في هذا المُستوى .

❖ المصطلحات:

المحل الهندسي ، المُنصِّف العمودي لقطعة مستقيمة ، الشعاع .

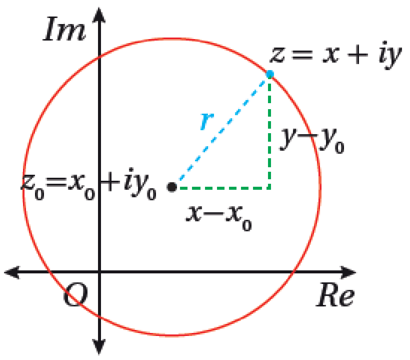
❖ الدائرة:

المحل الهندسي: هو مجموعة النقاط في المستوى المُركب التي يُمكن لنقطة مُتحركة ضمن شرط أو شروط (معادلة، متباينة) أن تكون منها. فمثلًا الدائرة هي محل هندسي لنقطة تتحرك في مسار يبعد مسافة مُحددة عن نقطة ثابتة هي مركز الدائرة.



في المستوى المُركب، تبعد الأعداد المُركبة التي تُحقق المعادلة: $|z| = r$ مسافة r وحدة عن نقطة الأصل؛ لأن مقياس كلٍّ منها هو r وحدة. ومن ثم، فإن المحل الهندسي الذي تُمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها نقطة الاصل، وطول نصف قطرها r كما هو في الشكل المجاور.

إذا كان مركز دائرة مرسومة في المستوى المُركب هو العدد z_0 (ليس نقطة الأصل)، وطول نصف قطرها r وحدة كما في الشكل المجاور، فإنه يُمكن استعمال نظرية فيثاغورس لكتابة معادلة تمثل هذا المحل الهندسي على النحو الآتي:



نظرية فيثاغورس

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=r$$

ألاحظ أن طرف المعادلة الأيسر يساوي $|z-z_0|$، حيث:

$$z-z_0=(x-x_0)+i(y-y_0)$$

بتعويض $|z-z_0|$ في المعادلة $|z-z_0|=r$

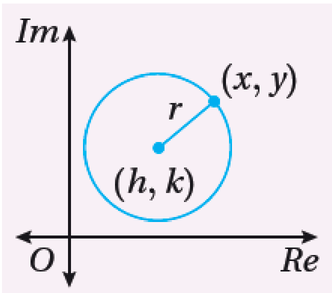
إذن المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة: $|z-z_0|=r$ هو دائرة مركزها z_0 ، وطول نصف قُطرها r

❖ معادلة الدائرة في المستوى المركب:

المحل الهندسي في المستوى المركب الذي تمثله المعادلة: $|z-(a+ib)|=r$ هو دائرة مركزها (a,b)، وطول نصف قطرها r وحدة

• الصيغة القياسية (الديكارتية) لمعادلة الدائرة التي مركزها (h,k) ونصف قطرها r هي:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$



مثال2:

أجد المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة: $|z-2+8i|=3$ ثم أكتب المعادلة بالصيغة الديكارتية

الحل:

أجد المحل الهندسي:

عندما أكتب المعادلة في صورة:

$$|z-(a+ib)|=r$$

فإن $|z-(2-8i)|=3$

وهذه معادلة دائرة مركزها $(2,-8)$، وطول نصف قطرها 3 وحدات

أكتب المعادلة بالصيغة الديكارتية

$$|z-(2-8i)|=3$$

$$|z-2+8i|=3$$

باستبدال z بالصيغة $x+iy$

$$|z-iy-2+8i|=3$$

$$|(x-2)+(y+8)i|=3$$

$$\sqrt{(x-2)^2+(y+8)^2}=3$$

ألاحظ أن المعادلة $(x-2)^2+(y+8)^2=9$ هي أيضًا معادلة دائرة مركزها $(2,-8)$، وطول نصف قطرها 3 وحدات

مثال3:

أجد المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة: $|z+5-4i|=7$ ثم أكتب المعادلة بالصيغة الديكارتية

الحل:

$$|z+5-4i|=7$$

$$|z-(-5+4i)|=7$$

وهذه معادلة دائرة في المستوى المركب مركزها $(-5,4)$ وطول نصف قطرها 7

$$|z+5-4i|=7$$

$$|x+iy+5-4i|=7$$

$$|(x+5)+(y-4)i|=7$$

$$\sqrt{(x+5)^2+(y-4)^2}=7$$

$$(x+5)^2+(y-4)^2=49$$

وهذه معادلة دائرة مركزها $(-5,4)$ وطول نصف قطرها 7

- **يُمكن استعمال بعض الخصائص الهندسية للدائرة ومماساتها في إيجاد القيمة العظمى لسعة الأعداد المُركبة التي تُحقق معادلة دائرة معطاة .**

مثال4:

إذا كانت: $|z-5-3i|=3$ فأجيب عن السؤاليين الآتيين تباعًا :

1) أرسم المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة في المستوى المُركب.

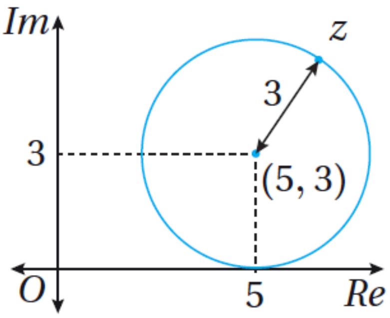
الحل:

عندما أكتب المعادلة في صورة:

$$|z-(a+bi)|=r$$

فإن: $|z-(5+3i)|=3$

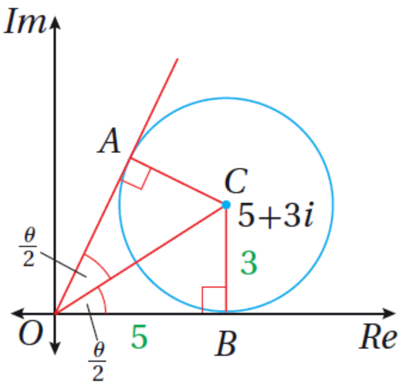
وهذه معادلة دائرة مركزها $(5,3)$ وطول نصف قطرها 3 وحدات، ويُمكنني تمثيلها في المستوى المُركب كما في الشكل المجاور.



2) أجد القيمة العظمى لسعة الأعداد المُركبة z التي تُحقق المعادلة

الحل:

أكبر سعة للعدد المركب z تساوي قياس الزاوية $\angle BOA$ المحصورة بين مماس الدائرة $\overline{OA}$ والمحور الحقيقي الموجب كما في الشكل المجاور



يُمكنني إيجاد $m\angle BOA$ باستعمال خصائص المثلثات على النحو الآتي:

بما أن ΔOAC و ΔOBC متطابقان في ثلاثة أضلاع، فإن $\overline{OC}$ يُنصف $\angle BOA$. وبما أنَّ

المماس $\overline{OB}$ عمودي على نصف القُطر $\overline{BC}$ ،

فإن ΔOBC قائم الزاوية في B

وبذلك، فإن:

تعريف ظل الزاوية $\frac{\theta}{2}$ $\qquad \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{3}{5}$

معكوس ظل الزاوية $\frac{\theta}{2}$

$$\frac{\theta}{2}=\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$$

بضرب طرفي المعادلة في 2

$$\theta=2\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\approx 1.08$$

إذن القيمة العظمى لسعة الأعداد المركبة z التي تحقق المعادلة هي: 1.08 rad تقريبا

مثال5:

إذا كانت: $\left|z+4-4\sqrt{3}i\right|=4$ ، **فأجيب عن السؤاليين الآتيين تباعًا:**

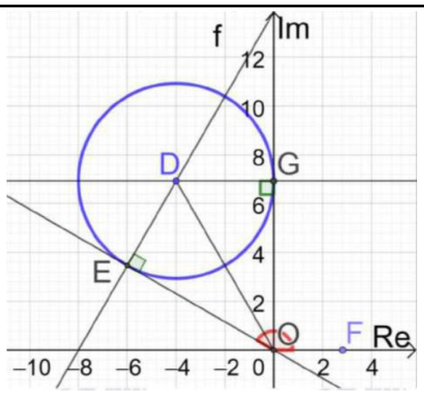
1) أرسم المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة في المستوى المركب .

الحل:

$$\left|z+4-4\sqrt{3}i\right|=4$$

$$\left|z-\left(-4+4\sqrt{3}i\right)\right|=4$$

وهذه معادلة دائرة في المستوى المركب مركزها $\left(-4,4\sqrt{3}\right)$ وطول نصف قطرها 4



2) أجد القيمة العظمى لسعة الأعداد المركبة z التي تحقق المعادلة

الحل:

اكبر سعة للعدد المركب z تساوي قياس الزاوية $\angle FOE$ المحصورة بين مماس الدائرة OE والمحور الحقيقي الموجب

مماسا الدائرة OG و OE عموديان على الترتيب على نصفي القطرين DG و DE

المثلثان OGD و OED متطابقان بثلاثة اضلاع

اذن الزاويتان $\angle GOD$ و $\angle EOD$ متطابقتان

$$\tan\angle GOD=\frac{4}{4\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

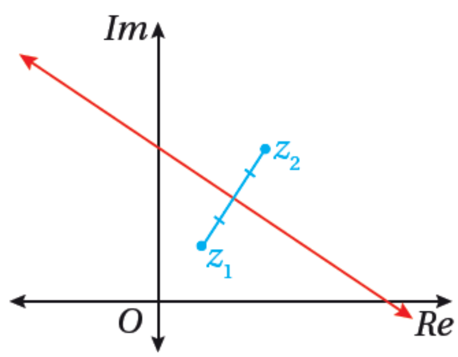
$$\angle GOD=\frac{\pi}{6}$$

$$Arg\left(z\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$$

القيمة العظمى لسعة الاعداد المركبة z التي تحقق المعادلة المعطاة هي $\frac{5\pi}{6}$

المنصف العمودي على القطعة المستقيمة:

يُطلق على المحل الهندسي للنقطة z التي تتحرك في المستوى المُركب، وتظل على بعدين متساويين من النقطتين الثابتتين: z_1 , z_2 ، اسم المُنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين هاتين النقطتين الثابتتين كما في الشكل المجاور



تُمثل $|z-z_1|$ المسافة بين z و z_1 ، وتمثل $|z-z_2|$ المسافة بين z و z_1 وبما أن هاتين المسافتين متساويتان بصرف النظر عن موقع z ، فإنهُ يُعبر عن ذلك بالمعادلة الآتية:

$$|z-z_1|=|z-z_2|$$

❖ المنصف العمودي:

المُنصف العمودي: المحل الهندسي في المُستوى المُركب للنقطة z التي تُحقق المعادلة: $|z-(a+ib)|=|z-(c+id)|$ هو المُنصف العمودي للقطعة المُستقيمة الواصلة بين النقطتين: $(c,d),(a,b)$

مثال6:

أجد المحل الهندسي الذي تُمثِّله المعادلة: $|z-3|=|z-2i|$ ثُم أكتب المعادلة بالصيغة الديكارتية

الحل:

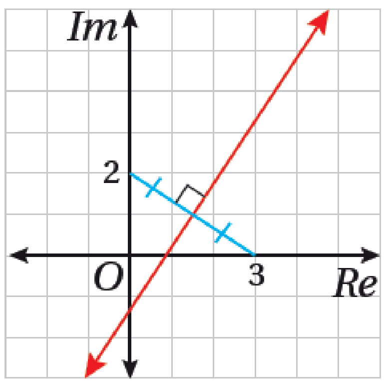
أجد المحل الهندسي

عندما أكتب المعادلة في صورة:

$$|z-(a+ib)|=|z-(c+id)|$$

فإنَّ: $|z-(3+0i)|=|z-(0+2i)|$

وهذه معادلة المُنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي تصل بين النقطتين: $(3,0)$ و $(0,2)$ ، وهو يظهر باللون الأحمر في الشكل المجاور



لكتابة المعادلة بالصيغة الديكارتية، أُعوض $z=x+iy$ ثم أجد مقياس العدد المُركب، ثم أبسِّط:

$$|z-3|=|z-2i|$$

باستبدال z بالصيغة $x+iy$

$$|(x-3)+iy| = |x+(y-2)i|$$

صيغة مقياس العدد المركب

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-2)^2}$$

بتربيع الطرفين وفك الاقواس

$$x^2-6x+9+y^2 = x^2+y^2-4y+4$$

بطرح $y^2 x^2$ من الطرفين

$$-6x+9 = -4y+4$$

نكتب المعادلة على صورة $Ax+By+C=0$

$$6x-4y-5=0$$

إذن ، معادلة المُنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $6x-4y-5=0$

مثال7:

أجـد المحـل الهندسـي الـذي تمثلـه المعادلـة: $|z+1| = |z-5i|$ ، ثـم أكتب المعادلة بالصيغة الديكارتية

الحل:

$$|z+1| = |z-5i|$$

$$|z-(-1)| = |z-(5i)|$$

هـذه معادلـة المنصـف العمـودي للقطـعة المسـتقيمة الواصلة بين النقطتين $(-1,0),(0,5)$

$$|z+1| = |z-5i|$$

$$|x+iy+1| = |x+iy-5i|$$

$$|(x+1)+iy| = |x+i(y-5)|$$

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-5)^2}$$

$$(x+1)^2+y^2 = x^2+(y-5)^2$$

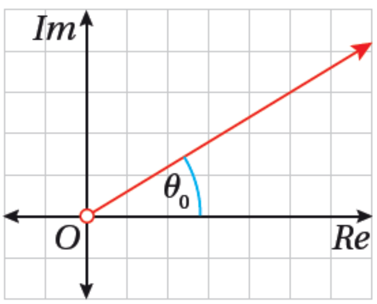
$$x^2+2x+1+y^2 = x^2+y^2-10y+25$$

$$2x+10y-24=0$$

اذن معادلـة المنصـف العمـودي للقطـعة المسـتقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $x+5y-12=0$

❖ الشعاع الذي يبدأ بالنقطة (0,0):

إنَّ سعة جميع الأعداد المُركبة التي تُحقِّق المعادلة: $Arg(z)=\theta_0$ هـي θ_0 ؛ لـذا فإنهـا تقـع علـى شـعاع يصـنع زاويـة قياسـها θ_0 راديان مـع المحـور الحقيقي الموجب ، ويبدأ (الشعاع) بنقطة الأصل ، ويمتد بصـورة لانهائيـة فـي أحـد اتجاهيـه كمـا فـي الشكل المجاور



ومن ثم فإن المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة: $Arg(z)=\theta_0$ هو شعاع يبدأ بنقطة الأصل ، وليس له نهاية .

بما أنَّ سعة العدد المُركب: $z=0$ غير مُعرَّفة، فإن الشـعاع لا يحـوي نقطـة الأصـل، ويُعبِّر عـن ذلـك بدائرة مُفرغة في بداية الشُعاع .

ملاحظة:

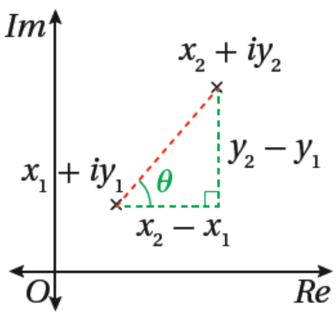
تكون سعة الأعداد المُركبة الواقعة على الطرف الآخر من المستقيم: $\theta_0 \pm \pi$ ، لذا استُثنيت هذه الأعداد من المحل الهندسي للمعادلة: $Arg(z) = \theta_0$ فهي لا تُحقق المعادلة.

❖ الشعاع الذي يبدأ بالنقطة (a,b):

إذا كان: $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ عددين مُركبين، فإن:

$$z_2 - z_1 = (x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1)$$

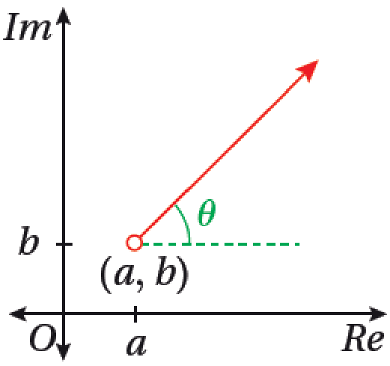
يُمكن حساب سعة العدد المركب: $z_2 - z_1$ المُوضح في الشكل المجاور على النحو الآتي:



$$Arg(z_2 - z_1) = \tan^{-1}\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) = 0$$

أُلاحظ من الشكل المجاور أنَّ سعة العدد المُركب: $(z_2 - z_1)$ تساوي قياس الزاوية θ التي يصنعها المستقيم الواصل بين العددين : z_1 و z_2 مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي.

ومن ثم ، فإن الأعداد المُركبة z التي تحقق المعادلة: $Arg(z-(a+ib)) = 0$ تقع جميعها على الشعاع الذي نقطة بدايته (a,b) وهو يصنع زاوية قياسها θ راديان مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي كما في الشكل المجاور. وبما أنَّ ناتج تعويض نقطة بداية الشعاع في المعادلة هو $Arg(0)$ (قيمة غير مُعرَّفة)، فإنَّ نقطة بداية الشعاع تُستثنى ، ويُعبر عنها بدائرة مُفرغة.



❖ الشعاع:

المحل الهندسي في المستوى المُركب الذي تُمثلهُ المعادلة: $Arg(z-(a+ib)) = \theta$ هو شعاع يبدأ بالنقطة (a,b) ، ويصنع زاوية قياسها θ راديان مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي

مثال 8:

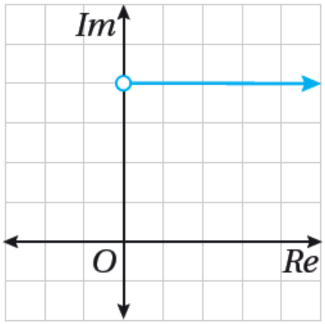
أجد المحل الهندسي الذي تمثله كل معادلة ممّا يأتي ، ثم أرسمه في المستوى المُركب:

1) $Arg(z-4i) = 0$

الحل:

تُمثل هذه المعادلة شعاعًا يبدأ بالنقطة (0,4) ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها 0 مع المستقيم الذي

يوازي المحور الحقيقي؛ أي إنه يوازي المحور الحقيقي كما في الشكل المجاور



2) $Arg(z+1+2i)=\frac{3\pi}{4}$

الحل:

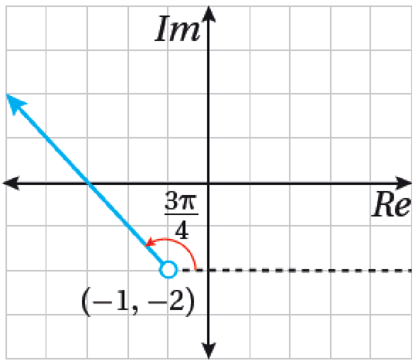
عندما أكتب المعادلة في صورة:

$$Arg(z-(a+ib))=\theta$$

فإن:

$$Arg(z-(-1-2i))=\frac{3\pi}{4}$$

وهذه معادلة شعاع يبدأ بالنقطة $(-1,-2)$ ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{3\pi}{4}$ مع المستقيم الذي يوازي المحور الحقيقي كما في الشكل المجاور

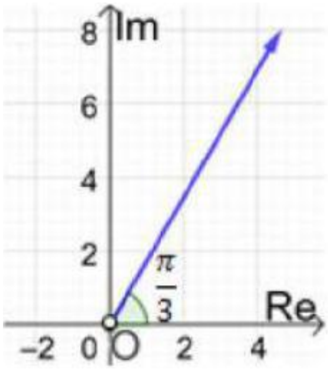


3) $Arg(z)=\frac{\pi}{3}$

الحل:

$$Arg(z-(0))=\frac{\pi}{3}$$

هذه معادلة شعاع يبدأ بالنقطة $(0,0)$ ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{3}$ مع المحور الحقيقي

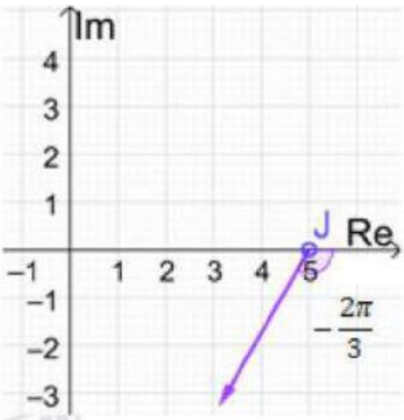


4) $Arg(z-5)=-\frac{2\pi}{3}$

الحل:

$$Arg(z-(5))=-\frac{2\pi}{3}$$

هذه معادلة شعاع يبدأ بالنقطة $(5,0)$ ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها $-\frac{2\pi}{3}$ مع المحور الحقيقي



❖ تمثيل المتباينات في المستوى المركب:

يُعد حل المتباينة في المستوى المُركب محلًا هندسيًا يُمكن تمثيله بيانيًا بصورة مُتشابهة لتمثيل حل المتباينة في المستوى الإحداثي .

بدايةً ، يُرسم منحنى المعادلة المرتبطة بالمتباينة بعد استعمال رمز المساواة (=) بدلًا من رمز المُتباينة $(\geq, \leq, >, <)$ ، حيث تُمثل المعادلة الناتجة منحنًى يُسمى المنحنى الحدودي؛ وهو منحنى يُقسم المستوى المُركب إلى جزأين، أحدهما يحوي جميع الأعداد المُركبة التي تُحقق المُتباينة.

*قد يكون المنحنى الحدودي مستقيمًا ، أو شُعاعًا أو دائرة أو أي منحنى آخر

*قد يكون المنحنى الحدودي جزءًا من المحل الهندسي إذا تضمَّنت المتباينة الرمز $\geq$ ، أو الرمز $\leq$ ؛ فيُرسم المنحنى الحدودي متصلًا . وقد لا يكون المنحنى الحدودي جزءًا من المحل الهندسي إذا تضمنت المتباينة الرمز $>$ ، أو الرمز $<$ ؛ فيَرسم المنحنى الحدودي مُتقطِعًا.

مثال9:

أُمثل في المستوى المُركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق كل متباينة مما يأتي:

1) $|z-3|>5$

الحل:

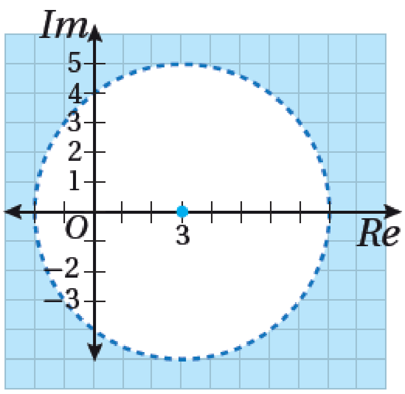
أحدد المنحنى الحدودي:

يمثل منحنى المعادلة: $|z-3|=5$ المنحنى الحدودي للمتباينة: $|z-3|>5$ ؛ وهو دائرة مركزها $(3,0)$ وطول نصف قطرها 5 وحدات.

وبما أنَّهُ لا توجد مساواة في رمز المتباينة ، فإنني أرسم المنحنى الحدودي مُتقطعًا

أحدد منطقة الحلول الممكنة:

تبعد الأعداد المُركبة التي تُحقِّق المتباينة: $|z-3|>5$ مسافة تزيد على 5 وحدات عن مركز الدائرة . إذن منطقة الحلول المُمكنة للمتباينة تقع خارج محيط الدائرة: $|z-3|=5$ كما في الشكل المجاور .



2) $|z-7|\leq|z+3i|$

الحل:

أُحدد المنحنى الحدودي:

يُمثل منحنى المعادلة: $|z-7|=|z+3i|$ المنحنى الحدودي للمتباينة: $|z-7|\leq|z+3i|$ ؛ وهو المُنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين

$(7,0),(0,-3)$. وبما أنَّه توجد مساواة في رمز المتباينة، فإنني أرسم المنحنى الحدودي متصلًا.

أُحدد منطقة الحلول المُمكنة:

تتحقق المتباينة: $|z-7|\le|z+3i|$ في إحدى جهتي المنحنى الحدودي، ويُمكن تحديدها باختبار عدد مُركب عشوائيًا في المتباينة

أختار العدد: $z=0+0i$ الذي تمثله نقطة الأصل:

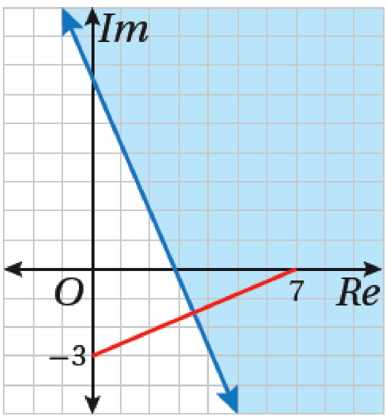
$$|z-7|\le|z+3i|$$

بتعويض $z=0+0i$

$$|0-7|\overset{?}{\le}|0+3i|$$

$$\sqrt{49}\overset{?}{\le}\sqrt{9}\Rightarrow 7\overset{?}{\le}3 \quad \otimes$$

بما أنَّ العدد: $z=0+0i$ لا يُحقق المتباينة ، فإنَّ منطقة الحلول المُمكنة هي المنطقة التي لا تحوي نقطة الأصل كما في الشكل المجاور.



3) $\frac{\pi}{6}\le Arg(z)\le\frac{\pi}{2}$

الحل:

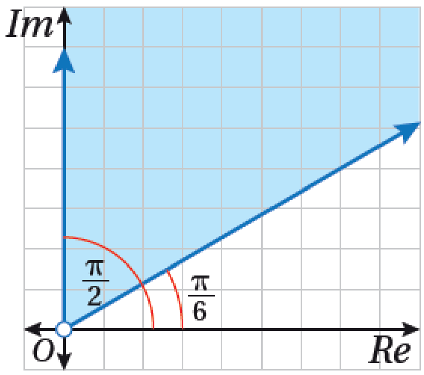
أُحدد المنحنى الحدودي:

يُمثل منحنى المعادلة: $Arg(z)=\frac{\pi}{6}$ شُعاعًا يبدأ بنقطة الأصل، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{6}$ مع المحور الحقيقي الموجب. ويمثل منحنى المعادلة: $Arg(z)=\frac{\pi}{2}$ شعاعًا آخر يبدأ بنقطة الأصل، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{2}$ مع المحور الحقيقي الموجب.

إذن، يُمثل الشعاعان معًا منحنى حدوديًا للمتباينة: $\frac{\pi}{6}\le Arg(z)\le\frac{\pi}{2}$ وبما أنَّه توجد مساواة في رمزي المتباينة، فإنني أرسم المنحنى الحدودي متصلًا.

أُحدد منطقة الحلول المُمكنة:

المنطقة التي تُمثلها المتباينة: $\frac{\pi}{6}\le Arg(z)\le\frac{\pi}{2}$ هي جزء من المستوى المُركب محدود بشعاعين كما في الشكل المجاور



ملاحظة:

تُستثنى نقطة الأصل بدائرة مُفرغة في بداية الشعاع

4) $|z+3+i| \le 6$

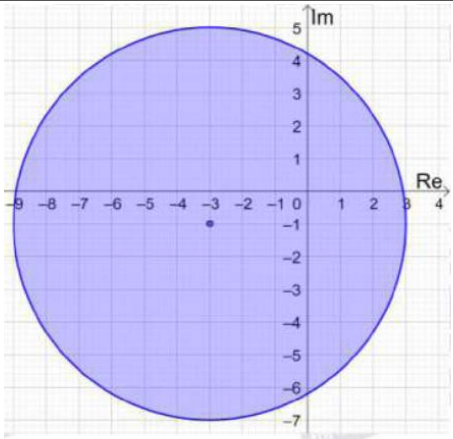
الحل:

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته
$|z+3+i| = 6$

وهو دائرة مركزها $(-3,-1)$ وطول نصف قطرها 6 وحدات

وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة فإننا نرسم المنحنى الحدودي متصلا

أما منطقة المحل الهندسي فهي داخل الدائرة وعلى محيطها وليس خارجها لأن الاعداد المركبة التي تحقق المتباينة تبعد مسافة تقل عن 6 وحدات عن مركز الدائرة او تساويها



5) $|z+3+i| < |z-4|$

الحل:

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته
$|z+3+i| = |z-4|$

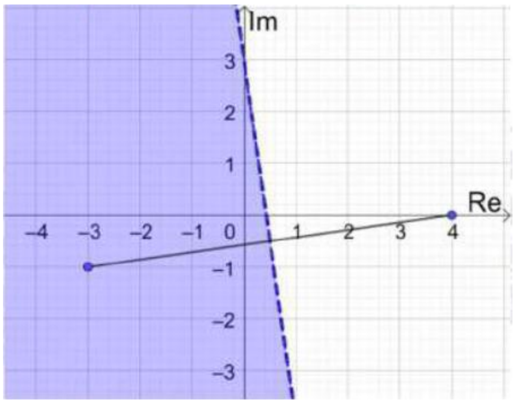
وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين
$(4,0),(-3,-1)$

وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعا

نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختيار نقطة الاصل مثلا وتعويضها في المتباينة

$$|0+3+i| < |0-4| \Rightarrow \sqrt{10} < 4$$

بما ان نقطة الاصل تحقق المتباينة فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي تحوي نقطة الاصل



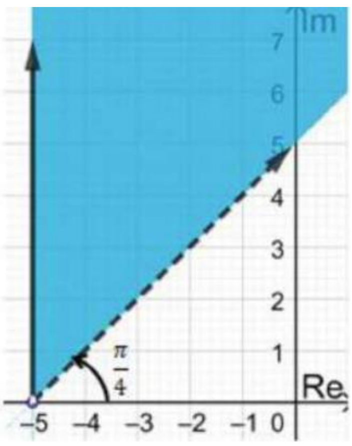
6) $\frac{\pi}{4} < Arg(z+5) \le \frac{\pi}{2}$

الحل:

يمثل منحنى المعادلة $Arg(z+5) = \frac{\pi}{2}$ شعاعا (نرسمه متصلا بسبب وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(-5,0)$ ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{2}$ مع المحور الحقيقي

ويمثل منحنى المعادلة $Arg(z+5) = \frac{\pi}{4}$ شعاعا (نرسمه متقطعا بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(-5,0)$ ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع المحور الحقيقي

المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة المطلوبة هو الجزء المظلل من المستوى المركب كالآتي:



- **يُمكن أيضًا تمثيل منطقة حلّ نظام متباينات بيانيًا في المستوى المُركب بصورة مُشابهة لتمثيل أنظمة المتباينات في المستوى الإحداثي**

مثال10:

أُمثل في المستوى المُركب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقق المتباينة: $|z-1-2i| \le 5$ والمُتباينة: $\frac{\pi}{4} < Arg(z-1-2i) < \frac{2\pi}{3}$

الحل:

أُحدد المُنحنى الحدودي لكل متباينة :

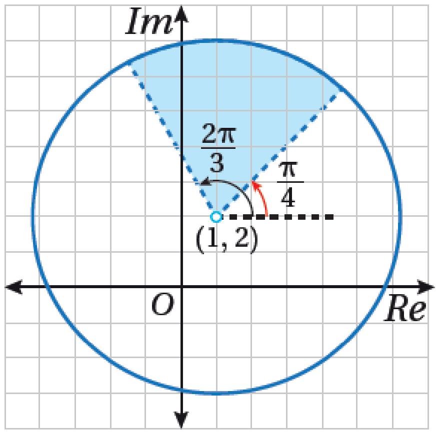
- تُمثل المعادلة: $|z-1-2i| = 5$ دائرة مركزها النقطة $(1,2)$ ، وطول نصف قُطرها 5 وحدات . وبما أنَّه توجد مساواة في رمز المُتباينة ، فإنني أرسم المنحنى الحدودي مُتصلًا .
- تُمثل المعادلة: $Arg(z-1-2i) = \frac{\pi}{4}$ شُعاعًا يبدأ بالنقطة $(1,2)$ ، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي. وبما أنَّهُ لا توجد مساواة في رمز المُتباينة، فإنني أرسم الشعاع مُتقطعًا.
- تُمثل المعادلة: $Arg(z-1-2i) = \frac{2\pi}{3}$ شُعاعًا يبدأ بالنقطة $(1,2)$ ، ويصنع زاوية قياسها $\frac{2\pi}{3}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي. وبما أنَّهُ لا توجد مساواة في رمز المُتباينة، فإنني أرسم الشعاع مُتقطعًا.

أُحدد منطقة الحلول الممكنة:

تُمثِّل المُتباينة: $|z-1-2i| \le 5$ النقاط الواقعة داخل الدائرة ، وتُمثل المُتباينة:

$\frac{\pi}{4} < Arg(z-1-2i) < \frac{2\pi}{3}$ النقاط الواقعة بين الشعاعين

إذن المحل الهندسي للنقاط التي تُحقق المتباينتين معًا هو الجزء الواقع داخل القطاع الدائري كما في الشكل المجاور



مثال 11:

أُمثل في المستوى المُركب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقِّق المتباينة: $|z+3-2i| \geq 4$

والمُتباينة: $-\frac{\pi}{2} < Arg(z-2+i) < \frac{\pi}{4}$

الحل:

تمثل المعادلة $|z+3-2i| = 4$ دائرة مركزها $(-3, 2)$ وطول نصف قطرها 4 وحدات

وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة فإننا نرسم المنحنى الحدودي متصلا

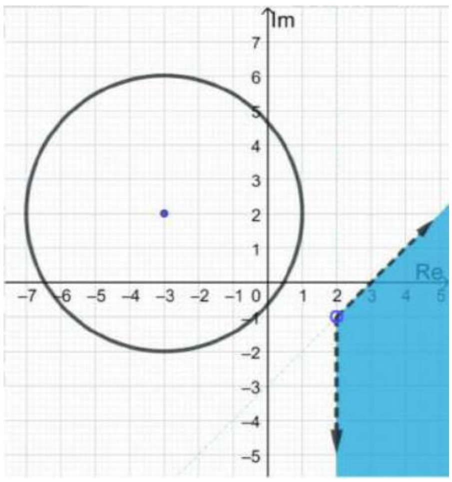
تمثل المعادلة $Arg(z-2+i) = \frac{\pi}{4}$ شعاعا يبدأ من النقطة $(2, -1)$ ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة فإننا نرسم الشعاع متقطعا

تمثل المعادلة $Arg(z-2+i) > -\frac{\pi}{2}$ شعاعا يبدأ من النقطة $(2, -1)$ ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{2}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة فإننا نرسم الشعاع متقطعا

تمثل المتباينة $|z+3-2i| \geq 4$ النقاط الواقعة على الدائرة او خارجها

تمثل المتباينة $-\frac{\pi}{2} < Arg(z-2+i) < \frac{\pi}{4}$ النقاط الواقعة بين الشعاعين

المنطقة التي تحقق المتباينتين هي الجزء المظلل في الرسم ادناه



أتدرب وأحل المسائل

مثال 1:

أجد المحل الهندسي الذي تُمثِّله كل معادلة ممّا يأتي، ثم أُمثِّله في المستوى المُركب، ثم أجد معادلته الديكارتية :

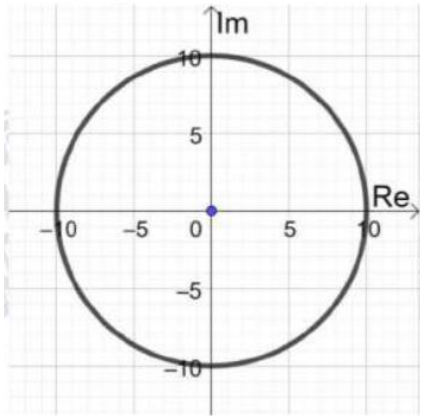
1) $|z|=10$

الحل:

$|x+iy|=10$

$x^{2}+y^{2}=100$

المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(0,0)$ وطول نصف قطرها 10 وحدات



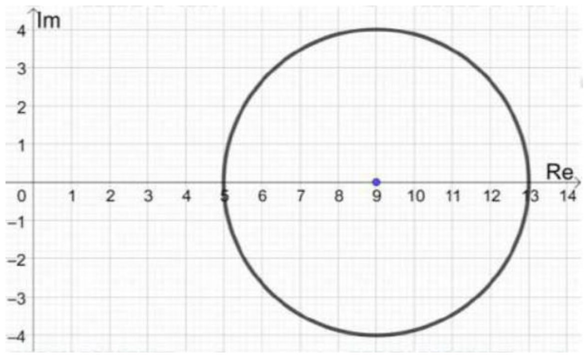
2) $|z-9|=4$

الحل:

$|(x-9)+iy|=16$

$(x-9)^{2}+y^{2}=16$

المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(9,0)$ وطول نصف قطرها 4 وحدات



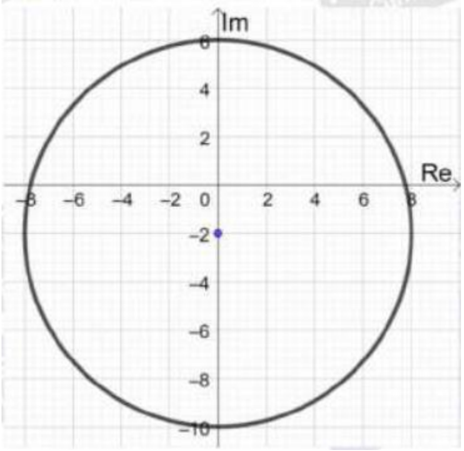
3) $|z+2i|=8$

الحل:

$|x+i(y+2)|=8$

$x^{2}+(y+2)^{2}=64$

المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(0,-2)$ وطول نصف قطرها 8 وحدات



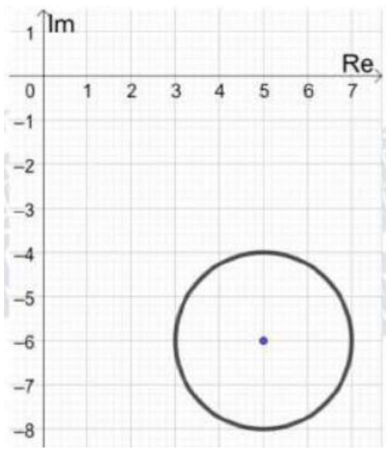
4) $|z-5+6i|=2$

الحل:

$|(x-5)+i(y+6)|=2$

$(x-5)^{2}+(y+6)^{2}=4$

المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(5,-6)$ وطول نصف قطرها وحدتان



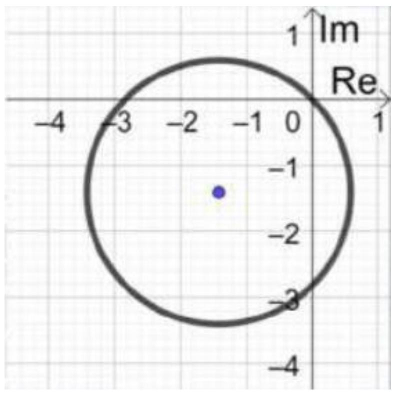
5) $\left|z+\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right|=2$

الحل:

$$\left|\left(x+\sqrt{2}\right)+i\left(y+\sqrt{2}\right)\right|=2$$

$$\left(x+\sqrt{2}\right)^2+\left(y+\sqrt{2}\right)^2=4$$

المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ وطول نصف قطرها وحدتان



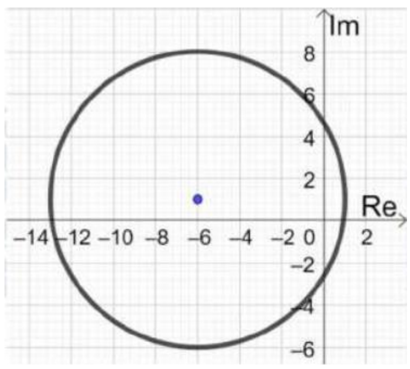
6) $|z+6-i|=7$

الحل:

$$\left|(x+6)+i(y-1)\right|=7$$

$$(x+6)^2+(y-1)^2=49$$

المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(-6,1)$ وطول نصف قطرها 7 وحدات



7) $|z-5|=|z-3i|$

الحل:

$$|z-(5)|=|z-(3i)|$$

هذه معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(5,0),(0,3)$

$$|z-5|=|z-3i|$$

$$|(x-5)+iy|=|x+i(y-3)|$$

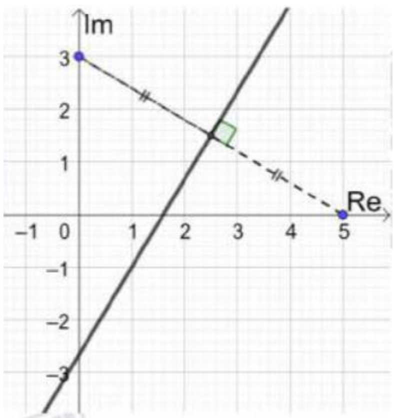
$$\sqrt{(x-5)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y-3)^2}$$

$$(x-5)^2+y^2=x^2+(y-3)^2$$

$$x^2-10x+25+y^2=x^2+y^2-6y+9$$

$$10x-6y-16=0$$

اذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $5x-3y-8=0$



8) $|z+3i|=|z-3i|$

الحل:

$$|z-(-3i)|=|z-(7i)|$$

هذه معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(0,-3),(0,7)$

$$|z+3i|=|z-7i|$$

$$|x+i(y+3)|=|x+i(y-7)|$$

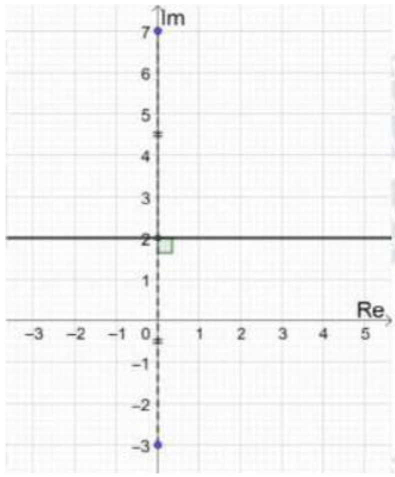
$\sqrt{x^2+(y+3)^2}=\sqrt{x^2+(y-7)^2}$

$x^2+(y+3)^2=x^2+(y-7)^2$

$x^2+y^2+6y+9=x^2+y^2-14y+49$

$20y-40=0$

اذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $y=2$



9) $|z+5+2i|=|z-7|$

الحل:

$|z-(-5-2i)|=|z-(7)|$

هذه معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(-5,-2),(7,0)$

$|z+5+2i|=|z-7|$

$|x+5+i(y+2)|=|(x-7)+iy|$

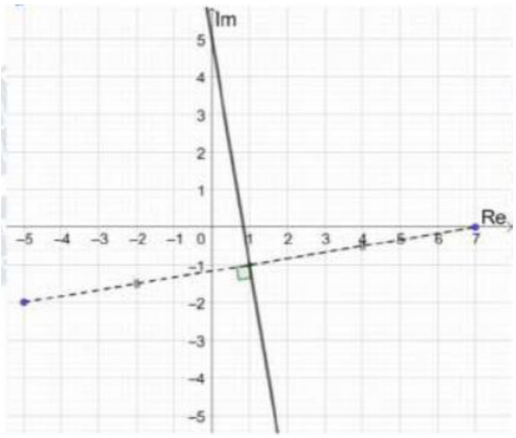
$\sqrt{(x+5)^2+(y+2)^2}=\sqrt{(x-7)^2+y^2}$

$(x+5)^2+(y+2)^2=(x-7)^2+y^2$

$x^2+10x+25+y^2+4y+4=x^2-14y+49+y^2$

$24x+4y-20=0$

اذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $6x+y-5=0$



10) $|z-3|=|z-2-i|$

الحل:

$|z-(3)|=|z-(2+i)|$

هذه معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(3,0),(2,1)$

$|z-3|=|z-2-i|$

$|(x-3)+iy|=|(x-2)+i(y-1)|$

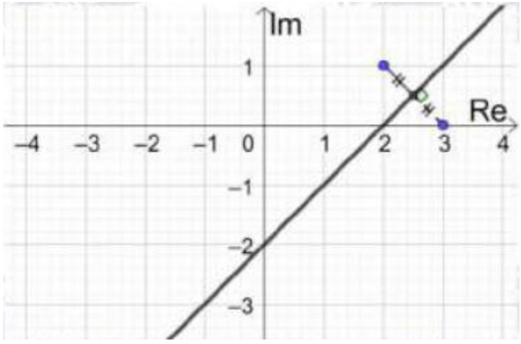
$\sqrt{(x-3)^2+y^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}$

$(x-3)^2+y^2=(x-2)^2+(y-1)^2$

$x^2-6x+9+y^2=x^2-4x+4+y^2-2y+1$

$2x-2y-4=0$

اذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $x-y-2=0$



11) $\frac{|z+6-i|}{|z-10-5i|}=1$

الحل:

$|z+6-i|=|z-10-5i|$

هـذه معادلـة المنصـف العمـودي للقطعـة المسـتقيمة الواصلة بين النقطتين $(-6,1),(10,5)$

$|z+6-i|=|z-10-5i|$

$|(x+6)-i(y-1)|=|(x-10)+i(y-5)|$

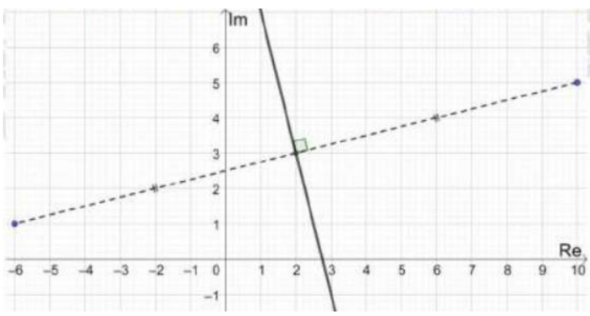
$\sqrt{(x+6)^2-(y-1)^2}=\sqrt{(x-10)^2+(y-5)^2}$

$(x+6)^2-(y-1)^2=(x-10)^2+(y-5)^2$

$x^2+12x+36+y^2-2y+1=x^2-20x+100+y^2-10y+25$

$32x+8y-88=0$

اذن معادلـة المنصـف العمـودي للقطعـة المسـتقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $4x-y-11=0$



12) $|z+7+2i|=|z-4-3i|$

الحل:

$|z-(-7-2i)|=|z-(4+3i)|$

هـذه معادلـة المنصـف العمـودي للقطعـة المسـتقيمة الواصلة بين النقطتين $(-7,-2),(4,3)$

$|z+7+2i|=|z-4-3i|$

$|(x+7)+i(y+2)|=|(x-4)+i(y-3)|$

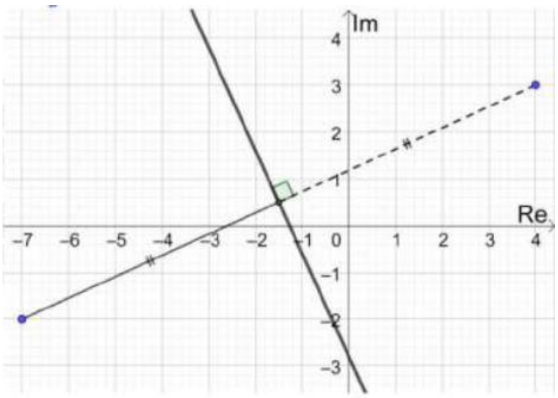
$\sqrt{(x+7)^2+(y+2)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}$

$(x+7)^2+(y+2)^2=(x-4)^2+(y-3)^2$

$x^2+14x+49+y^2+4y+4=x^2-8x+16+y^2-6y+9$

$22x+10y+28=0$

اذن معادلـة المنصـف العمـودي للقطعـة المسـتقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $11x+5y+14=0$



مثال2:

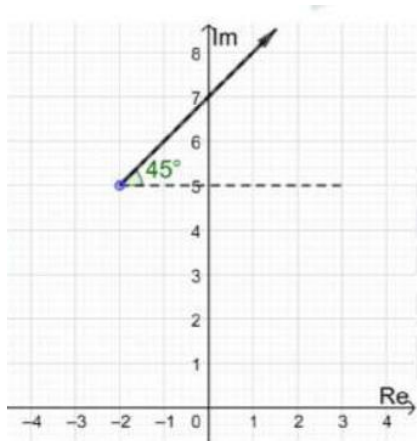
أجد المحل الهندسي الذي تمثله كل من المعادلات الآتية، ثم أرسمه في المستوى المُركب:

1) $Arg(z+2-5i)=\frac{\pi}{4}$

الحل:

$Arg(z-(2+5i))=\frac{\pi}{4}$

المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $(-2,5)$ ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي

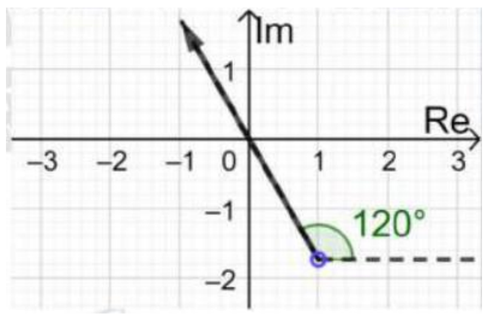


$$2)\quad Arg\left(z-1+i\sqrt{3}\right)=\frac{2\pi}{3}$$

الحل:

$$Arg\left(z-\left(1-i\sqrt{3}\right)\right)=\frac{2\pi}{3}$$

المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $\left(1,-\sqrt{3}\right)$ ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها $\frac{2\pi}{3}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي

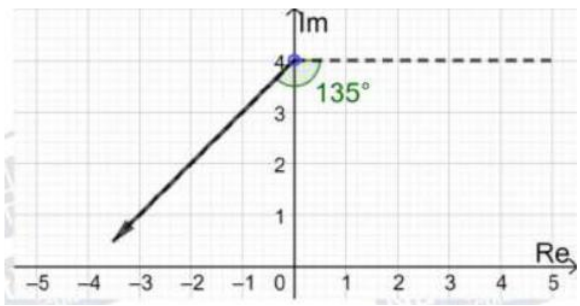


$$3)\quad Arg\left(z-4i\right)=-\frac{3\pi}{4}$$

الحل:

$$Arg\left(z-(4i)\right)=-\frac{3\pi}{4}$$

المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $(0,4)$ ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها $-\frac{3\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي



مثال3:

أُمثِّل في المُستوى المُركب المنطقة التي تُحددها كل مُتباينة ممّا يأتي :

$$1)\quad |z-2|<|z+2|$$

الحل:

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته

$$|z-2|=|z+2|$$

وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين

$$(2,0),(-2,0)$$

وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعا

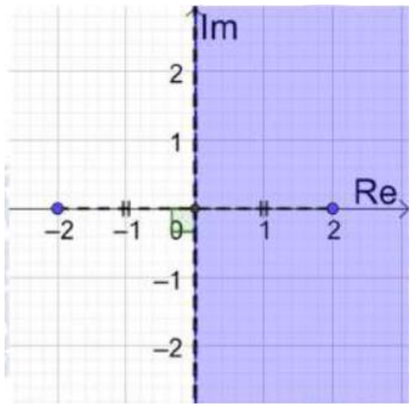
نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختيار $z=1+i$ وتعويضه في المتباينة

$$|1+i-2|<|1+i+2|$$

$$|-1+i|<|3+i|\Rightarrow\sqrt{2}<\sqrt{10}$$

بما ان $z=1+i$ حقق المتباينة فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي تحوي $z=1+i$

اي نختار الجهة التي يكون فيها بعد النقاط عن النقطة $(2,0)$ أقل من بعدها عن النقطة $(-2,0)$



2) $|z-4-2i|\le 2$

الحل:

$|z-(4+2i)|\le 2$

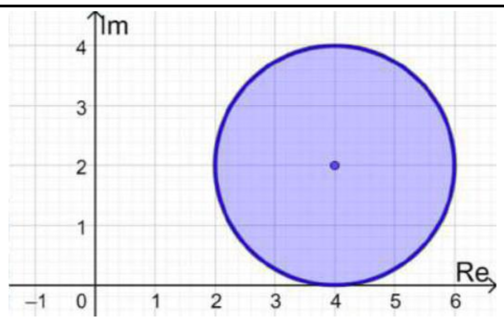
المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته

$|z-4-2i|=2$

وهو دائرة مركزها $(4,2)$ وطول نصف قطرها وحدتان

وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة فإننا نرسم المنحنى الحدودي متصلا

اما منطقة المحل الهندسي فهي داخل الدائرة وعلى محيطها وليس خارجها لان الاعداد المركبة التي تحقق المتباينة تبعد عن مركز الدائرة مسافة تقل عن طول نصف القطر او تساويها



3) $|z-4|>|z-6|$

الحل:

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته

$|z-4|=|z-6|$

وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين $(4,0),(6,0)$

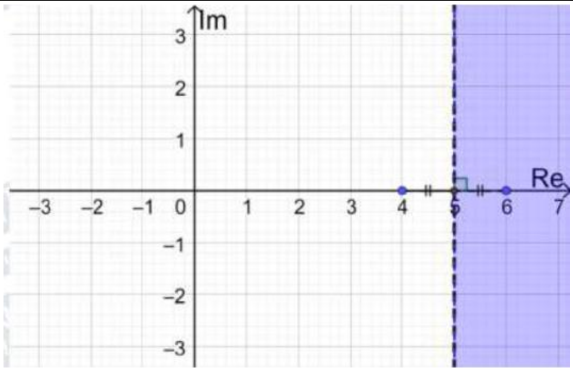
وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعا

نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختيار $z=0$ وتعويضه في المتباينة

$|0-4|>|0-6|\Rightarrow 2>\sqrt{6}$

بما ان العدد لا يحقق المتباينة فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي تحوي $z=0$

اي نختار الجهة التي يكون فيها بعد النقاط عن النقطة $(4,0)$ اكبر من بعدها عن النقطة $(6,0)$



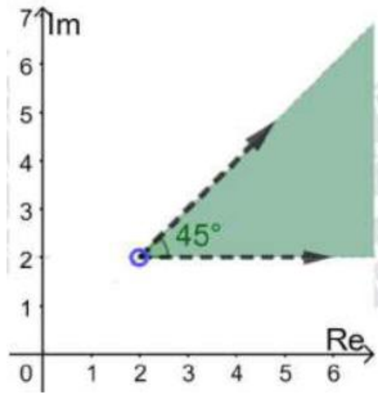
4) $0 < Arg\left(z-2-2i\right) < \dfrac{\pi}{4}$

الحل:

تمثل المعادلة $Arg\left(z-2-2i\right) = \dfrac{\pi}{4}$ شعاعا (نرسمه متقطعا بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $\left(2,2\right)$ ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها $\dfrac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي

ويمثل منحنى المعادلة $Arg\left(z-2-2i\right) = 0$ شعاعا (نرسمه متقطعا بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $\left(2,2\right)$ ولا يشملها ويوازي المحور الحقيقي

المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة المطلوبة هو الجزء من المستوى المركب المحصور بين هذين الشعاعين



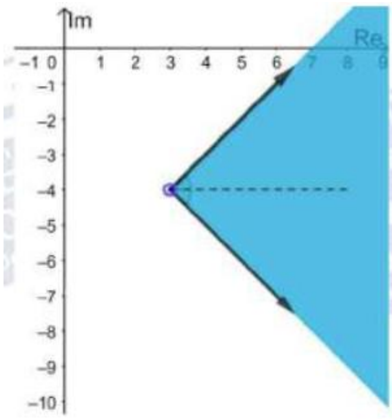
5) $-\dfrac{\pi}{4} \leq Arg\left(z-3+4i\right) \leq \dfrac{\pi}{4}$

الحل:

تمثل المعادلة $Arg\left(z-3+4i\right) = \dfrac{\pi}{4}$ شعاعا (نرسمه متصلا بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $\left(3,-4\right)$ ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها $\dfrac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي

ويمثل منحنى المعادلة $Arg\left(z-3+4i\right) = -\dfrac{\pi}{4}$ شعاعا (نرسمه متصلا بسبب وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $\left(3,-4\right)$ ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها $-\dfrac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي

المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة المطلوبة هو الجزء من المستوى المركب



6) $2 \leq \left|z-3-4i\right| \leq 4$

الحل:

$2 \leq \left|z-\left(3+4i\right)\right| \leq 4$

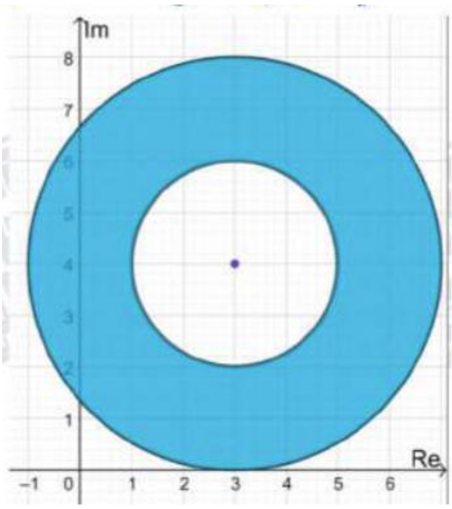
يمثل منحنى المعادلة $|z-(3+4i)|=2$ وهو دائرة مركزها $(3,4)$ وطول نصف قطرها وحدتان

وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة فإننا نرسم المنحنى الحدودي متصلا

يمثل منحنى المعادلة $|z-(3+4i)|=4$ وهو دائرة مركزها $(3,4)$ وطول نصف قطرها 4 وحدات

وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة فإننا نرسم المنحنى الحدودي متصلا

اما منطقة المحل الهندسي فهي المنطقة التي تحوي جميع الاعداد الواقعة على الدائرتين او بينهما



مثال4:

إذا كانت: $|z-\sqrt{5}-2i|=2$ **، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا :**

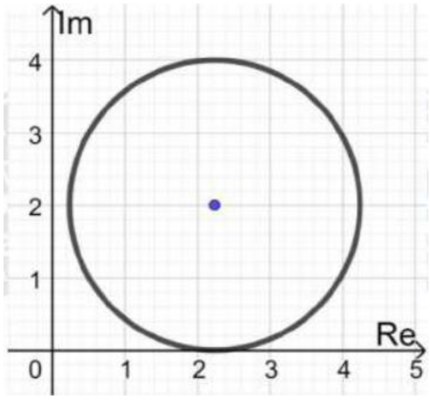
1) أرسم المحل الهندسي الذي تُمثِّله المعادلة في المُستوى المُركب

الحل:

$$|z-\sqrt{5}-2i|=2$$

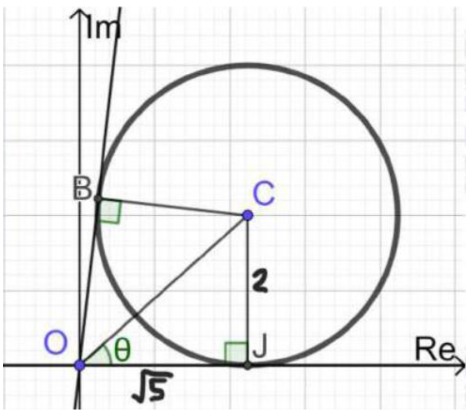
$$\left|z-\left(\sqrt{5}+2i\right)\right|=2$$

المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $\left(\sqrt{5},2\right)$ وطول نصف قطرها وحدتان



2) أجد القيمة العظمى لسعة الأعداد المُركبة z التي تحقّق المعادلة

الحل:



اكبر سعة للعدد المركب z تساوي قياس الزاوية $\angle JOB$ المحصورة بين مماس الدائرة OB والمحور الحقيقي الموجب

مماسا الدائرة OJ و OB عموديان على الترتيب على نصفي القطرين CJ و CB

المثلثان OJC و OBC متطابقان بثلاثة اضلاع

اذن الزاويتان $\angle JOC$ و $\angle BOC$ متطابقتان

$$\tan\angle\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}\Rightarrow\theta=\tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\angle JOB=2\times\tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}\approx1.46$$

القيمة العظمى لسعة الاعداد المركبة z التي تحقق المعادلة المعطاة هي 1.46

مثال5:

أُمثِّل في المستوى المُركب نفسه المحل الهندسي الذي تُمثِّله كلٌّ من المعادلة: $|z-3+2i|=\sqrt{10}$، والمعادلة: $|z-6i|=|z-7+i|$، ثم أجد الأعداد المُركبة التي تُحقق المعادلتين معًا

الحل:

المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة $|z+3+2i|=\sqrt{10}$ هو دائرة مركزها $(3,-2)$ وطول نصف قطرها $\sqrt{10}$ وحدات

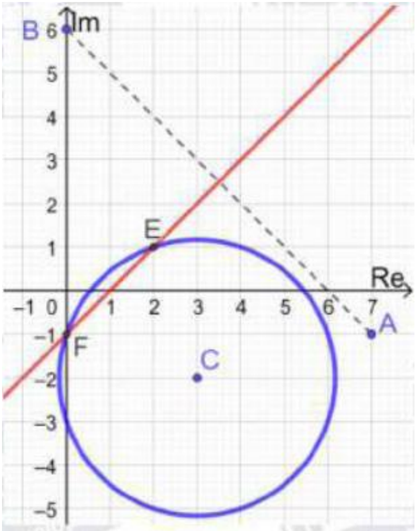
ومعادلتها الديكارتية هي:

$$(x-3)^2+(y+2)^2=10$$

المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة $|z-6i|=|z-7+i|$ هو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي طرفاها $(7,-1),(0,6)$

نستطيع ايجاد معادلته الديكارتية عن طريق ميل العمودي ونقطة منتصف القطعة المستقيمة

$$m=1\Rightarrow y-\frac{5}{2}=x-\frac{7}{2}\Rightarrow y=x-1$$



لايجاد الاعداد المركبة التي تحقق المعادلتين معا نجد نقاط تقاطع المنحنيين:

$$(x-3)^2+(y+2)^2=10\,,\,y=x-1$$

بالتعويض

$$(x-3)^2+(y+2)^2=10$$

$$(x-3)^2+(x-1+2)^2=10$$

$$2x^2-4x=0$$

$$2x(x-2)=0$$

$$x=0,x=2\Rightarrow y=1,y=-1$$

العددان المركبان الذان يحققان المعادلتين معا هما:

$$z_1=-i\quad,\quad z_2=2+i$$

مثال6:

أجد العدد المُركب الذي يُحقِّق كُلًا من المحل الهندسي: $|z-3|=|z+2i|$، والمحل الهندسي: $|z+3-i|=|z-1+5i|$

الحل:

$$|z-3|=|z+2i|$$

$$|(x-3)+iy|=|x+i(y+2)|$$

$$(x-3)^2+y^2=x^2+(y+2)^2$$

$$-6x+9=4y+4$$

$$6x+4y=5\ldots(1)$$

$$|z+3-i|=|z-1+5i|$$

$$|(x+3)+i(y-1)|=|(x-1)+i(y+5)|$$

$$(x+3)^2+(y-1)^2=(x-1)^2+(y+5)^2$$

$$x^2+6x+9+y^2-2y+1=x^2-2x+1+y^2+10y+25$$

$$8x-12y-16=0$$

$$2x-3y=4\ldots(2)$$

بحل المعادلتين (1) و(2) نجد:

$$x=\frac{31}{26}\quad , \quad y=-\frac{7}{13}$$

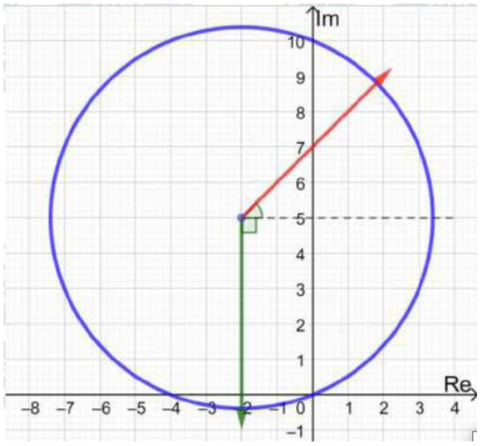
ويكون العدد المركب الذي يحقق كلا من المعادلتين هو:

$$z=\frac{31}{26}-\frac{7}{13}i$$

يمثل منحنى المعادلة $Arg(z+2-5i)=\frac{\pi}{4}$ شعاعا يبدأ من النقطة $(-2,5)$ ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي

ويمثل منحنى المعادلة $Arg(z+2-5i)=-\frac{\pi}{2}$ شعاعا يبدأ من النقطة $(-2,5)$ ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي

ويمثل منحنى المعادلة $|z+2-5i|=\sqrt{29}$ هو دائرة مركزها $(-2,5)$ وطول نصف قطرها $\sqrt{29}$



مثال7:

أُمثِّل في المستوى المُركب نفسه المحل الهندسي الذي تُمثِّله كلٌّ من المعادلات الآتية:

$$Arg(z+2-5i)=\frac{\pi}{4}$$

$$Arg(z+2-5i)=-\frac{\pi}{2}$$

$$|z+2-5i|=\sqrt{29}$$

الحل:

مثال 8:

أُمثِّل في المُستوى المُركَّب المحل الهندسي للنقاط التــــي تُحقِّـــقُ المتباينـــــة: $|z-3|>|z+2i|$

والمتباينة: $|z+3-i|<|z-1+5i|$

الحل:

$|z-3|>|z+2i|$

المنحنـــــى الحـــــدودي لهـــذه المتباينـــة معادلتـــه

$|z-3|=|z+2i|$

وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي طرفاها

$(3,0),(0,-2)$

وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعا

نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختيار $z=0$ مثلا وتعويضه في المتباينة

$|0-3|>|0+2i|\Rightarrow 3>2$

بما ان العدد 0 يحقق المتباينة فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي تحوي $z=0$

$|z+3-i|<|z-1+5i|$

المنحنـــــى الحـــــدودي لهـــذه المتباينـــة معادلتـــه

$|z+3-i|=|z-1+5i|$

وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي طرفاها

$(-3,1),(1,-5)$

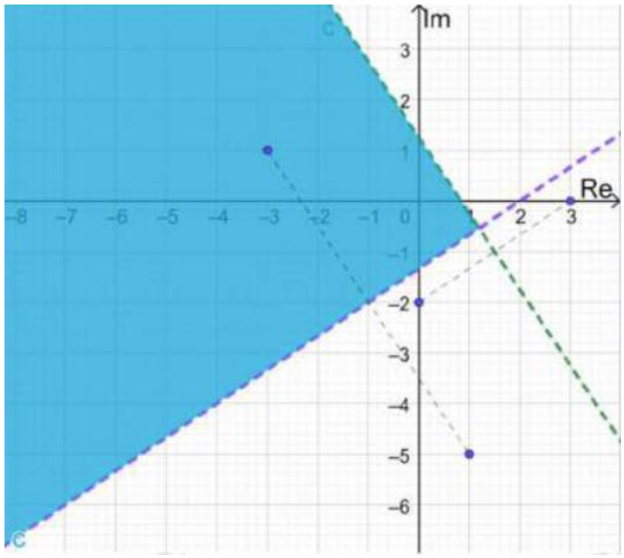
وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعا

نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختيار $z=0$ مثلا وتعويضه في المتباينة

$$|0+3-i|<|0-1+5i| \Rightarrow \sqrt{10}<\sqrt{26}$$

بما ان العدد 0 يحقق المتباينة فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي تحوي $z=0$ (نقطة الاصل)

المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينتين معا هو المنطقة المظللة في الشكل أدناه



مثال9:

أُمثِّلُ في المستوى المُركب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقِّق المُتباينة:

$-\frac{\pi}{2} \le Arg(z+2-5i) < \frac{\pi}{4}$ **والمُتباينة:**

$$|z+2-5i|>\sqrt{29}$$

الحل:

اولا:

$$-\frac{\pi}{2} < Arg(z+2-5i) < \frac{\pi}{4}$$

يمثل منحنى المعادلة $Arg(z+2-5i)=\frac{\pi}{4}$ شعاعا (نرسمه متقطعا بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(-2,5)$ ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم مواز للمحور الحقيقي

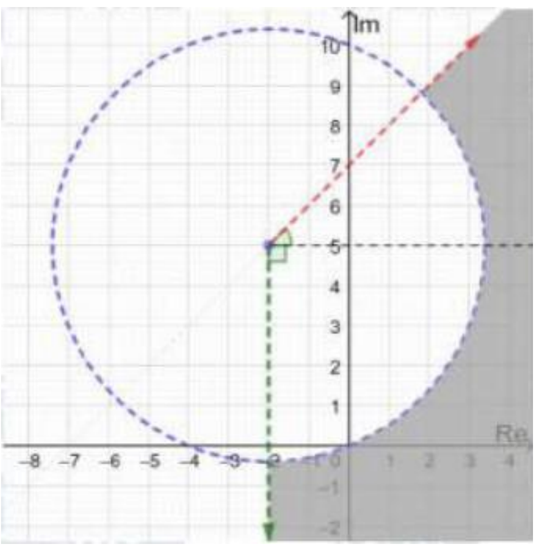
ويمثل منحنى المعادلة $Arg(z+2-5i)=-\frac{\pi}{2}$ شعاعا (نرسمه متقطعا بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(-2,5)$ ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{2}$ مع مستقيم مواز للمحور الحقيقي

ثانيا:

$$|z+2-5i|>\sqrt{29}$$

يمثل منحنى المعادلة $|z+2-5i|=\sqrt{29}$ دائرة مركزها $(-2,5)$ وطول نصف قطرها $\sqrt{29}$ نرسمها متقطعة بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة

المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينتين معا هو المنطقة المظللة في الشكل.



مثال10:

أُمثِّل في المُستوى المُركَّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقِّق المُتباينة: $-\frac{\pi}{4} \le Arg(z-2i) \le \frac{\pi}{3}$ والمُتباينة: $2<|z-3+i|\le 5$

الحل:

اولا:

$$-\frac{\pi}{4} \le Arg(z-2i) \le \frac{\pi}{3}$$

يمثل منحنى المعادلة $Arg(z-2i)=-\frac{\pi}{4}$ شعاعا (نرسمه متصلا بسبب وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(0,2)$ ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم موازٍ للمحور الحقيقي

ويمثل منحنى المعادلة $Arg(z-2i)=\frac{\pi}{3}$ شعاعا (نرسمه متصلا بسبب وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(0,2)$ ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{3}$ مع مستقيم موازٍ للمحور الحقيقي

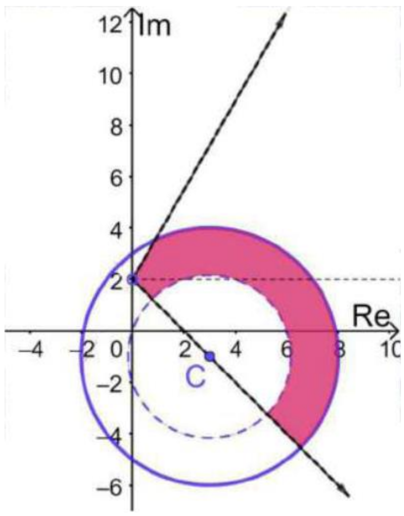
ثانيا:

$$2<|z-3+i|\le 5$$

يمثل منحنى المعادلة $|z-3+i|=5$ دائرة مركزها $(3,-1)$ وطول نصف قطرها 5 وحدات نرسمها متصلة بسبب وجود مساواة في المتباينة

ويمثل منحنى $|z-3+i|=2$ دائرة مركزها $(3,-1)$ وطول نصف قطرها 2 وحدات نرسمها متقطعة بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة

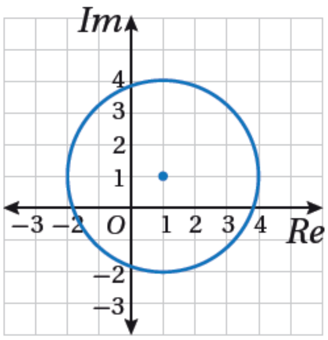
المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة المطلوبة هو الجزء المظلل من المستوى المركب كالآتي:



مثال11:

أكتب (بدلالة z) معادلة المحل الهندسي المُمثل بيانيًا في كُلٍّ ممّا يأتي:

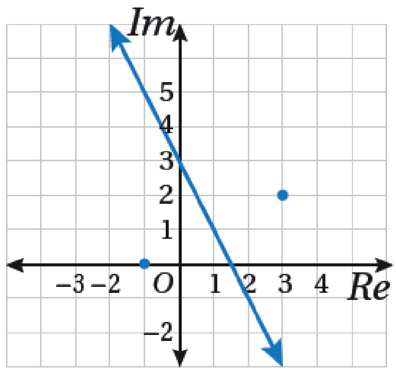
1)



الحل:

$$|z-(1+i)|=3$$

2)



الحل:

نبدأ بالتحقق من ان المستقيم المرسوم هو فعلا العمود المنصف للقطعة المستقيمة التي طرفاها $(-1,0),(3,2)$

ميل القطعة المستقيمة يساوي $\frac{1}{2}$ وميل المستقيم يساوي -2 فهما متعامدان

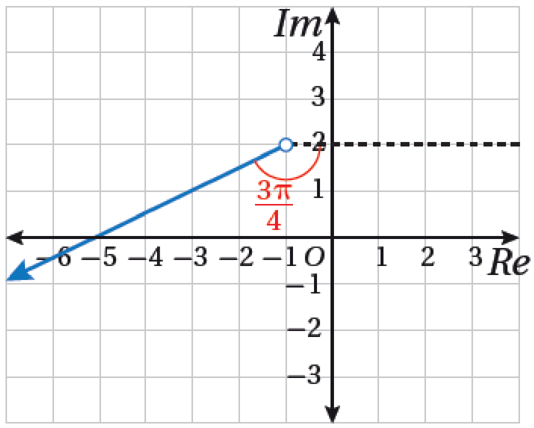
معادلة المستقيم هي $y=3-2x$ ونقطة منتصف القطعة المستقيمة هي $(1,1)$ وهي واقعة على المستقيم لان احداثييها يحققان معادلته

اذن المستقيم المرسوم هو المنصف العمودي للقطعة ومعادلته

$$|z-(3+2i)|=|z-(-1)|$$

مثال12:

أكتب معادلة في صورة: $Arg(z-a)=\theta$ حيث a عدد مُركب، و $-\pi<\theta\leq\pi$ تُمثِّل المحل الهندسي المُبين في الشكل المجاور



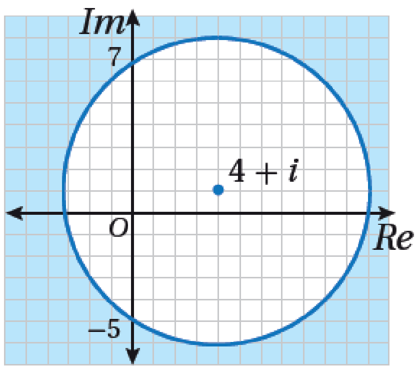
الحل:

$$Arg(z+1-2i)=-\frac{3\pi}{4}$$

مثال13:

أكتب (بدلالة z) متباينة المحل الهندسي الذي تمثله المنطقة المُظللة في كل ممّا يأتي:

1)

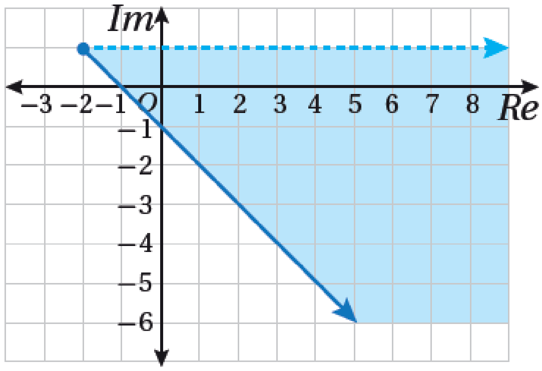


الحل:

$$r=\sqrt{(4-0)^2+(1-7)^2}=\sqrt{52}$$

$$|z-(4+i)|\geq\sqrt{52}$$

2)



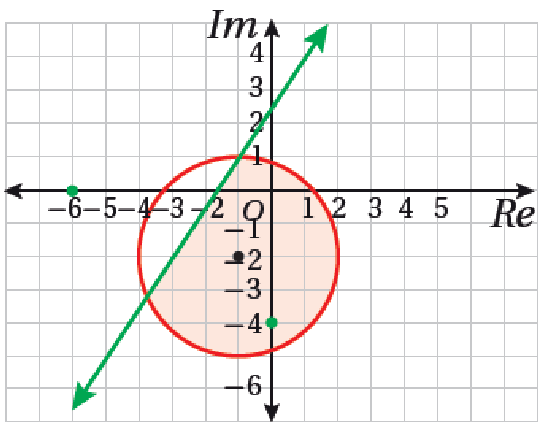
الحل:

قياس الزاوية بين الشعاع والمستقيم الموازي للمحور الحقيقي هو $-\frac{\pi}{4}$ لأن ميل الشعاع -1

$$-\frac{\pi}{4} \le Arg\left(z+2-i\right) < 0$$

مثال14:

أكتب (بدلالة z) نظام متباينات يُمثِّل المحل الهندسي المُبين في الشكل المجاور



الحل:

$$\left|z+2+i\right| \le 3$$

$$\left|z+6\right| \ge \left|z+4i\right|$$

مثال15:

أجد (بدلالة الثابت الحقيقي a) العددين المُركبين اللذين يُحقِّقان المعادلة: $\left|z-a\right| = 2a$ والمعادلة:

$$\left|z-a\right| = \left|z+a\left(2+i\right)\right|$$

الحل:

نفرض ان $a \ne 0$

$$\left|z-a\right| = \left|z+a\left(2+i\right)\right|$$

$$\left|x-a+iy\right| = \left|x+2a+i\left(y+a\right)\right|$$

$$\left(x-a\right)^2 + y^2 = \left(x+2a\right)^2 + \left(y+a\right)^2$$

$$y = -3x-2a \ldots (1)$$

$$\left|z-a\right| = 2a$$

$$\left|x-a+iy\right| = 2a$$

$$\left(x-a\right)^2 + y^2 = 4a^2 \ldots (2)$$

$$\left(x-a\right)^2 + \left(-3x-2a\right)^2 = 4a^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + 9x^2 + 12ax + 4a^2 = 4a^2$$

$$10x^2 + 10ax + a^2 = 0$$

$$x = \frac{-10a \pm \sqrt{100a^2 - 40a^2}}{20}$$

$$x = \frac{-10a \pm \sqrt{60a^2}}{20} = \frac{-10a \pm 2a\sqrt{15}}{20}$$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \frac{a\sqrt{15}}{10}$$

$$y = -3\left(\frac{-a}{2} \pm \frac{a\sqrt{15}}{10}\right) - 2a = \frac{a}{2} \mp \frac{3a\sqrt{15}}{10}$$

اذا كان $a \neq 0$ فإن العددين المطلوبين هما:

$$-\frac{a}{2}+\frac{a\sqrt{15}}{10} - \left(\frac{a}{2}+\frac{3a\sqrt{15}}{10}\right)i$$

$$-\frac{a}{2}-\frac{a\sqrt{15}}{10} - \left(\frac{a}{2}-\frac{3a\sqrt{15}}{10}\right)i$$

أما اذا كان $a = 0$ فيوجد عدد مركب وحيد يحقق المعادلتين وهو: $z = 0$

مثال16:

إذا كان العدد المُركب z يُحقِّق المعادلة: $|z-3+4i| = 2$ ، فأجد أكبر قيمة لـ $|z|$ وأقل قيمة له، مُبرِّرًا إجابتي.

الحل:

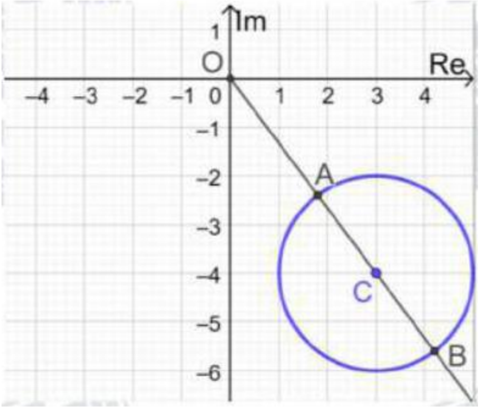
$$|z-3-4i| = 2$$

$$|z-(3-4i)| = 2$$

z يقع على الدائرة التي مركزها $(3,-4)$ وطول نصف قطرها 2

نفرض $z = x+iy$ فإن: $|z|$ يساوي $\sqrt{x^2+y^2}$

وهو يمثل البعد بين النقطة (x, y) ونقطة الاصل في المستوى الديكارتي



من الشكل اعلاه نجد أن:

$$OC = \sqrt{9+16} = 5$$

أقل قيمة لـ $|z|$ هي:

$$|z| = OC - r = 5-2 = 3$$

أكبر قيمة لـ $|z|$ هي:

$$|z| = OC + r = 5+2 = 7$$

مثال17:

إذا كانت: $z = 5+2i$ ، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا :

1) أُبين أنَّ: $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{1}{29}(21+20i)$

الحل:

$$z = 5+2i \Rightarrow \bar{z} = 5-2i$$

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{5+2i}{5-2i} \times \frac{5+2i}{5+2i}$$

$$= \frac{25+20i-4}{25+4} = \frac{21+20i}{29}$$

$$= \frac{1}{29}(21+20i)$$

2) بناءً على البحث في سعة كلٍّ من الأعداد المُركبة: z , $\bar{z}$, $\frac{z}{\bar{z}}$ أُثبت أنَّ:

$$2\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{20}{21}\right)$$

الحل:

$$Arg(z)=\tan^{-1}\frac{2}{5}$$

$$Arg(\bar{z})=-\tan^{-1}\frac{2}{5}$$

$$Arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)=-\tan^{-1}\frac{20}{21}$$

$$Arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)=Arg(z)-Arg(\bar{z})$$

$$\tan^{-1}\frac{20}{21}=\tan^{-1}\frac{2}{5}-\left(-\tan^{-1}\frac{2}{5}\right)$$

$$\tan^{-1}\frac{20}{21}=2\tan^{-1}\frac{2}{5}$$

مثال18:

أُثبت أنَّ المعادلة: $|z-6|=2|z+6-9i|$ تُمثِّل دائرة، ثُم أجد مركزها وطول نصف قُطرها.

الحل:

$$|z-6|=2|z+6-9i|$$

$$|x-6+iy|=2|(x+6)+i(y-9)|$$

$$(x-6)^2+y^2=4\left((x+6)^2+(y-9)^2\right)$$

$$x^2-12x+36+y^2=4\left(x^2+12x+36+y^2-18y+81\right)$$

$$x^2+y^2+20x-24y+144=0$$

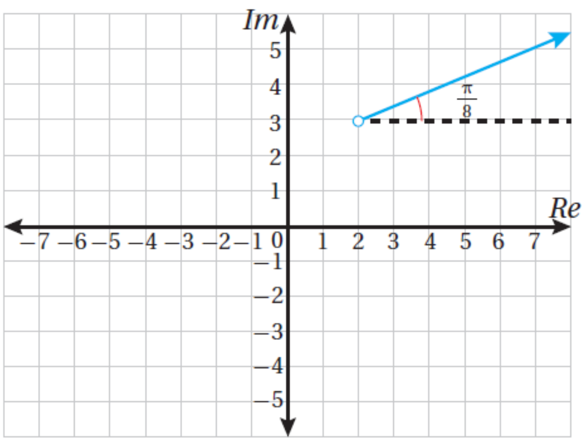
$$(x+10)^2+(y-12)^2=100$$

وهي معادلة دائرة مركزها $(-10,12)$ وطول نصف قطرها 10

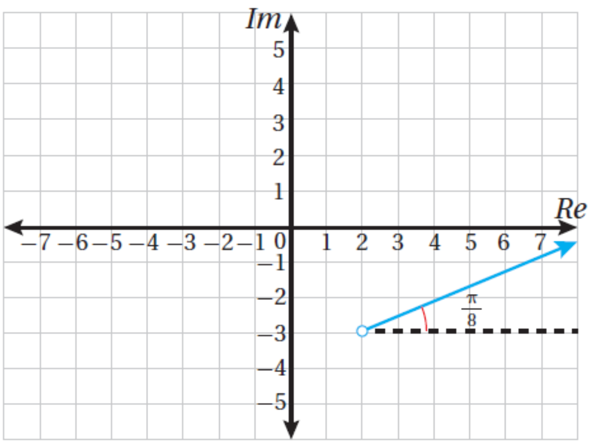
مثال19:

أيُّ الآتية هو المحل الهندسي الذي معادلته: $Arg(z-2+3i)=\frac{\pi}{8}$ ، مُبرِّرًا إجابتي

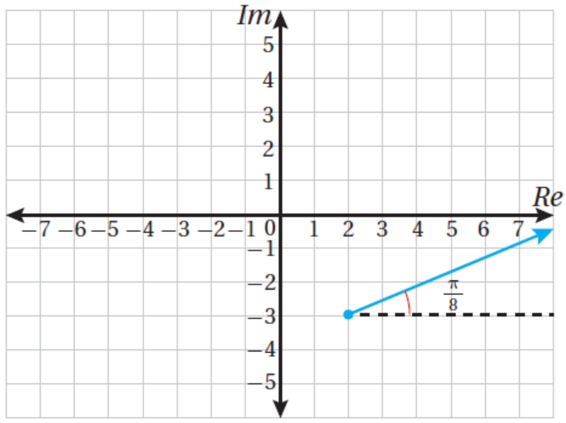
a)



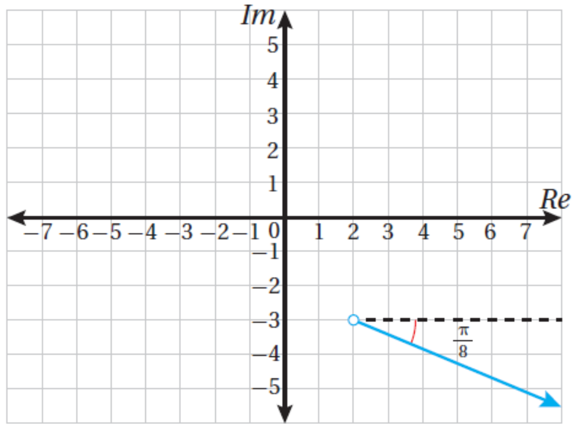
b)



c)



d)



الحل:

$$Arg\left(z-2+3i\right)=\frac{\pi}{8}$$

المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $(2,-3)$ ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي وهو الممثل بالشكل b

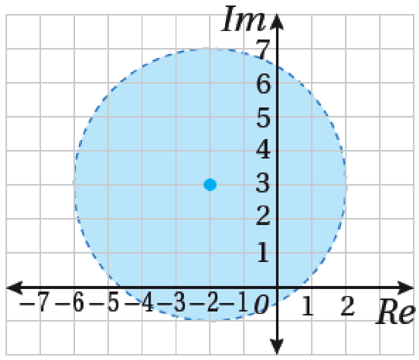
اما الشكل a فالنقطة بداية الشعاع ليست صحيحة

والشكل c فالنقطة بداية الشعاع مشمولة وهو ليس صحيحا

والشكل d فسعة العدد المركب هي $-\frac{\pi}{8}$ وهو مخالف للسعة المعطاة بالمعادلة

مثال:

أكتب متباينة بدلالة z ، تُحققها جميع الأعداد المُركبة التي تقع في المنطقة المُظللة المُبينة في المستوى المُركب في الشكل المجاور.



الحل:

المنطقة المظللة تمثل الاعداد المركبة التي تبعد عن العدد $2+3i$ مسافة تقل عن 4 وحدات فتكون المتباينة المطلوبة هي:

$$\left|z-\left(2+3i\right)\right|<4$$

كتاب التمارين

مثال 1:

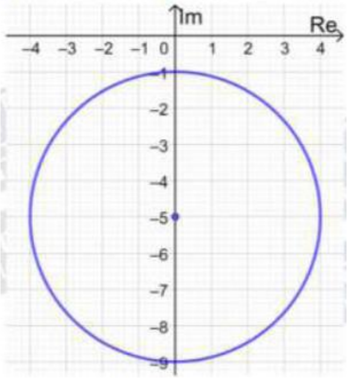
أجد المحل الهندسي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي ثم أمثله في المستوى المركب وأجد معادلته الديكارتية:

1) $|z+5i|-3=1$

الحل:

$$|z+5i|-3=1 \to |z-(-5i)|=4$$

المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(0,-5)$ وطول نصف قطرها 4 وحدات



المعادلة الديكارتية:

$$|z+5i|-3=1 \to |x+i(y+5)|=4$$

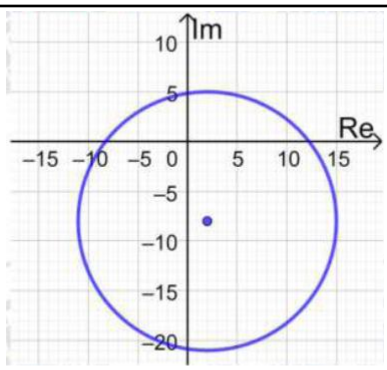
$$\to x^2+(y+5)^2=16$$

2) $|z-2+8i|=13$

الحل:

$$|z-2+8i|=13 \to |z-(2-8i)|=13$$

المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(2,-8)$ وطول نصف قطرها 13 وحدة



المعادلة الديكارتية:

$$|z-2+8i|=13 \to |x-2+i(y+8)|=13$$

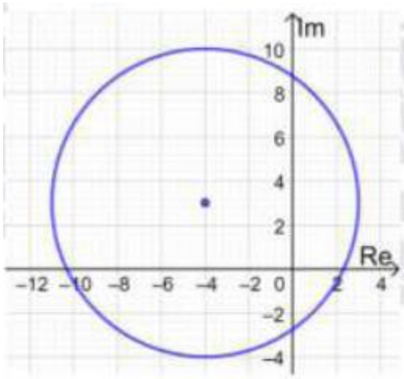
$$\to (x-2)^2+(y+8)^2=169$$

3) $|z+4-3i|=7$

الحل:

$$|z+4-3i|=7 \to |z-(-4+3i)|=7$$

المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(-4,3)$ وطول نصف قطرها 7 وحدات



المعادلة الديكارتية:

$$|z+4-3i|=7 \to |x+4+i(y-3)|=7$$

$$\to (x+4)^2+(y-3)^2=49$$

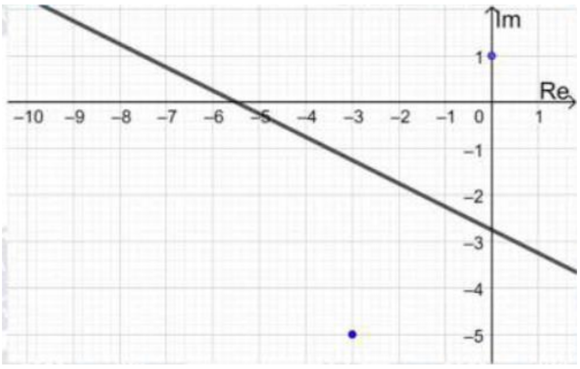
4) $|z+3+5i|=|z-i|$

الحل:

$$|z+3+5i|=|z-i|$$

$$|z-(-3-5i)|=|z-i|$$

هذه معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(-3,-5),(0,1)$



$$|z+3+5i|=|z-i|$$

$$|(x+3)+i(5+y)|=|x+i(y-1)|$$

$$\sqrt{(x+3)^2+(5+y)^2}=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$$

$$(x+3)^2+(5+y)^2=x^2+(y-1)^2$$

$$x^2+6x+9+y^2+10y+25=x^2+y^2-2y+1$$

$$6x+12y+33=0$$

اذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي:

$$2x+4y+11=0$$

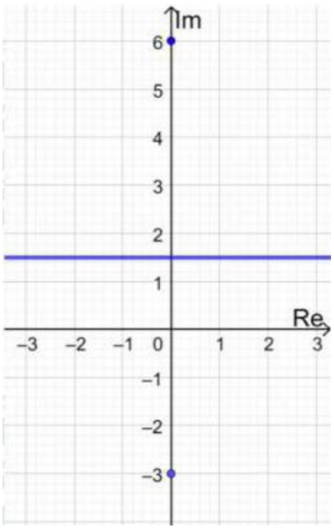
5) $\dfrac{|z+3i|}{|z-6i|}=1$

الحل:

$$\frac{|z+3i|}{|z-6i|}=1\rightarrow|z+3i|=|z-6i|$$

$$|z-(-3i)|=|z-6i|$$

هذه معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(0,-3),(0,6)$



$$|z+3i|=|z-6i|$$

$$|x+i(3+y)|=|x+i(y-6)|$$

$$\sqrt{x^2+(3+y)^2}=\sqrt{x^2+(y-6)^2}$$

$$x^2+(3+y)^2=x^2+(y-6)^2$$

$$x^2+6y+9+y^2=x^2+y^2-12y+36$$

$$18y-27=0$$

اذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي:

$$2y-3=0 \Rightarrow y=1.5$$

6) $|6-2i-z|=|z+4i|$

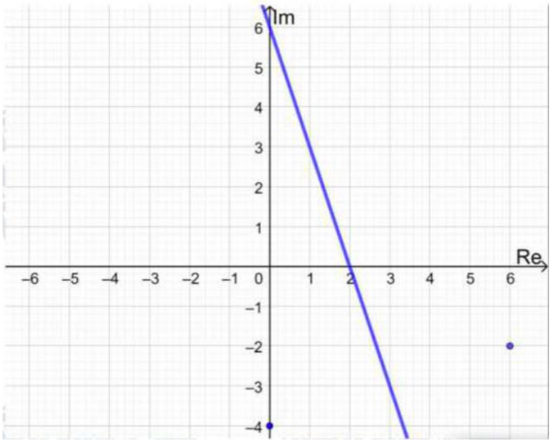
الحل:

$$|6-2i-z|=|z+4i|$$

$$|z-6+2i|=|z+4i|$$

$$|z-(6-2i)|=|z-(-4i)|$$

هذه معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(6,-2),(0,-4)$



$$|z-6+2i|=|z+4i|$$

$$|x-6+i(y+2)|=|x+i(y+4)|$$

$$\sqrt{(x-6)^2+(y+2)^2}=\sqrt{x^2+(y+4)^2}$$

$$(x-6)^2+(y+2)^2=x^2+(y+4)^2$$

$$x^2-12x+36+y^2+4y+4=x^2+y^2+8y+16$$

$$3x+y-6=0$$

اذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي:

$$3x+y-6=0$$

مثال2:

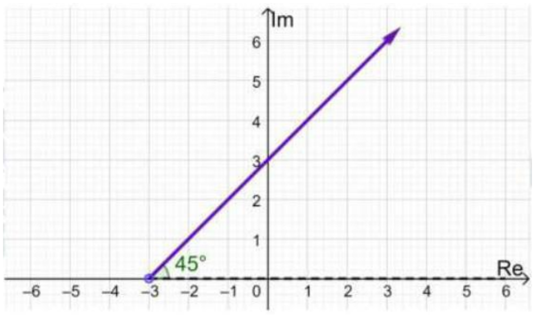
أجد المحل الهندسي الذي تمثله كل من المعادلات الآتية ثم أمثله في المستوى المركب:

1) $\text{Arg}(z+3)=\frac{\pi}{4}$

الحل:

$$Arg(z+3)=\frac{\pi}{4} \to Arg(z-(-3))=\frac{\pi}{4}$$

المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $(-3,0)$ ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع المحور الحقيقي الموجب

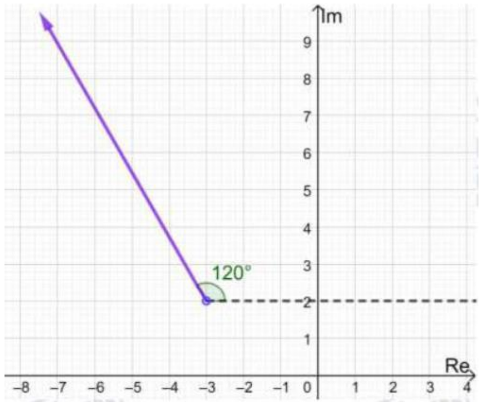


2) $\text{Arg}(z+3-2i)=\frac{2\pi}{3}$

الحل:

$$Arg(z+3-2i)=\frac{2\pi}{3} \to Arg(z-(-3+2i))=\frac{2\pi}{3}$$

المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $(-3,2)$ ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها $\frac{2\pi}{3}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي الموجب

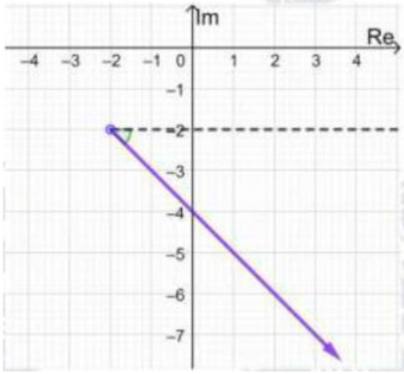


3) $\operatorname{Arg}(z+2+2i)=-\dfrac{\pi}{4}$

الحل:

$Arg(z+2+2i)=-\dfrac{\pi}{4}\rightarrow Arg(z-(-2-2i))=-\dfrac{\pi}{4}$

المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $(-2,-2)$ ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها $-\dfrac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي الموجب



مثال3:

أمثل في المستوى المركب المحل الهندسي الذي تمثله كل متباينة مما يأتي:

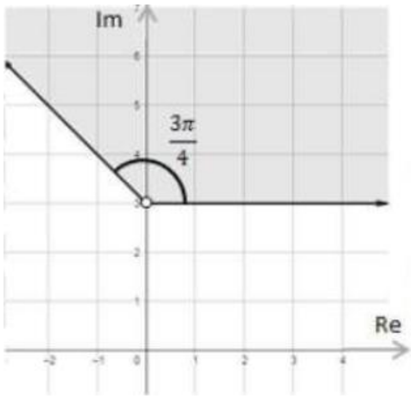
1) $0\le \operatorname{Arg}(z-3i)\le \dfrac{3\pi}{4}$

الحل:

يمثل منحنى المعادلة $Arg(z-3i)=\dfrac{3\pi}{4}$ شعاعا (نرسمه متصلا بسبب وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(0,3)$ ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها $\dfrac{3\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي الموجب

يمثل منحنى المعادلة $Arg(z-3i)=0$ شعاعا (نرسمه متصلا بسبب وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(0,3)$ ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها 0 مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي الموجب

المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة المطلوبة هو الجزء المظلل من المستوى المركب كما في الشكل



2) $|z-2i|>2$

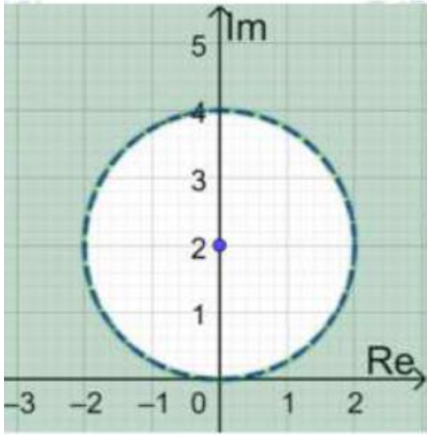
الحل:

$|z-2i|>2\rightarrow |z-(2i)|>2$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z-2i|=2$ وهو دائرة مركزها $(0,2)$ وطول نصف قطرها وحدتان

وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعا

أما منطقة المحل الهندسي فهي خارج الدائرة لأن الأعداد المركبة التي تحقق المتباينة تبعد عن مركز الدائرة مسافة أكبر من طول نصف القطر



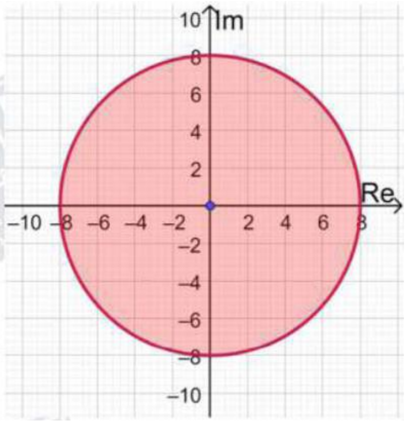
3) $|z| \le 8$

الحل:

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z| = 8$ وهو دائرة مركزها $(0,0)$ وطول نصف 8 وحدات

وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة فإننا نرسم المنحنى الحدودي متصلا

أما منطقة المحل الهندسي فهي داخل الدائرة وعلى محيطها وليس خارجها لأن الأعداد المركبة التي تحقق المتباينة تبعد عن مركز الدائرة مسافة تقل عن طول نصف القطر أو تساويها



مثال4:

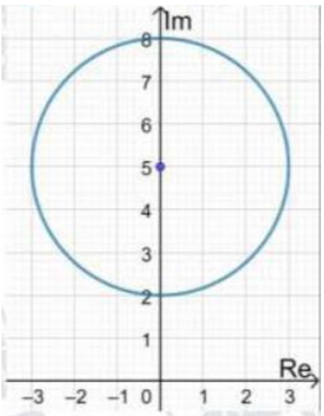
إذا كانت: $|z-5i| = 3$ **فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:**

1) أرسم المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة في المستوى المركب

الحل:

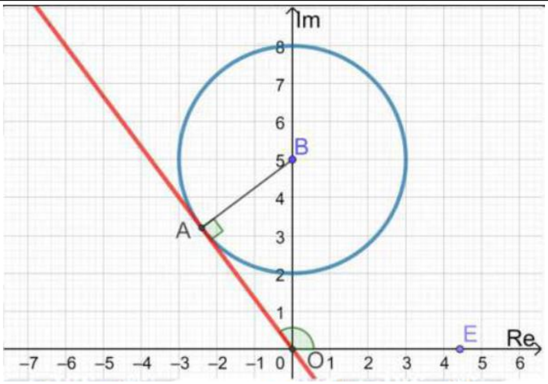
$$|z-5i| = 3 \rightarrow |z-(5i)| = 3$$

المحل الهندسي لهذه المعادلة هو دائرة مركزها $(0,5)$ وطول نصف قطرها 3 وحدات



2) أجد القيمة العظمى لسعة الأعداد المركبة التي تحقق المعادلة

الحل:



أكبر سعة للعدد المركب z تساوي قياس الزاوية $\angle EOA$ المحصورة بين مماس الدائرة OA والمحور الحقيقي الموجب

نصف قطر الدائرة AB عمودي على المماس OA في نقطة التماس A

$$OA=\sqrt{(OB)^2-(AB)^2}=\sqrt{25-9}=4$$

$$\tan\angle BOA=\frac{3}{4}$$

$$\angle BOA=\tan^{-1}\frac{3}{4}\approx 0.64$$

$$m\angle EOB\approx\frac{\pi}{2}+0.64\approx 2.21$$

القيمة العظمى لسعة الأعداد المركبة z التي تحقق المعادلة المعطاة هي 2.21

مثال5:

أمثل في المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة: $|z-1+i|\le 1$ والمتباينة:

$$-\frac{\pi}{3}\le \operatorname{Arg}(z)<0$$

الحل:

$$|z-1+i|\le 1$$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z-1+i|=1$ وهو دائرة (ترسم بخط متصل) مركزها $(1,-1)$ وطول نصف قطرها وحدة واحدة

أما منطقة المحل الهندسي لمجموعة النقاط التي تحقق هذه المتباينة فهي داخل الدائرة وعلى محيطها

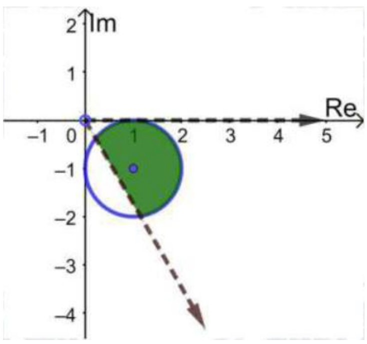
$$\frac{-\pi}{3}<Arg(Z)<0$$

يمثل منحنى المعادلة $Arg(z)=-\frac{\pi}{3}$ شعاعا (بخط متقطع) يبدأ من النقطة $(0,0)$ ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{3}$ مع المحور الحقيقي الموجب

يمثل منحنى المعادلة $Arg(z)=0$ شعاعا (نرسمه متقطعا بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(0,0)$ ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها 0 مع المحور الحقيقي الموجب

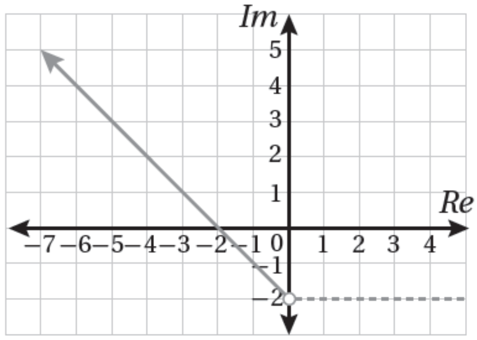
المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة المطلوبة هو الجزء من المستوى المركب المحصور بين هذين الشعاعين

أما المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينتين معا فهو كما في الشكل المجاور :



مثال6:

أكتب (بدلالة z) معادلة المحل الهندسي لمجموعة النقاط الممثلة في المستوى المركب المجاور



الحل:

$$Arg\left(z+2i\right)=\frac{3\pi}{4}$$

مثال7:

إذا كانت: $u=-7+7i$ وكانت: $v=7+7i$

فأجد بصيغة: $|z-z_1|=r$ معادلة الدائرة التي تمر بنقطة الأصل، والنقطتين اللتين تمثلان العددين المركبين u,v

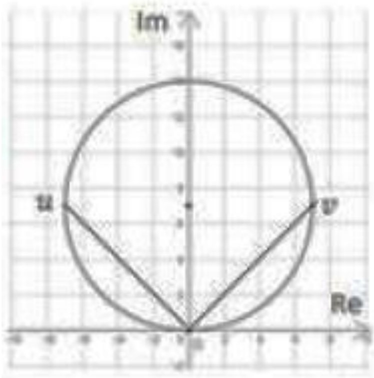
الحل:

$$u=-7+7i \quad , \quad v=7+7i$$

$$Arg\left(u\right)=\pi-\tan^{-1}\left(\frac{7}{7}\right)$$

$$=\pi-\tan^{-1}\left(1\right)=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$$

$$Arg\left(v\right)=\tan^{-1}\left(\frac{7}{7}\right)=\tan^{-1}\left(1\right)=\frac{\pi}{4}$$



الزاوية بين u و v تساوي $\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}$ فالقطعة المستقيمة uv قطر لهذه الدائرة ومركزها هو نقطة منتصف هذه القطعة وهي $\left(\frac{-7+7}{2},\frac{7+7}{2}\right)$ أي $\left(0,7\right)$ وطول نصف قطرها يساوي

$$\sqrt{(7-0)^2+(7-7)^2}=7$$

إذن معادلة الدائرة المطلوبة هي: $|z-7i|=7$

مثال8:

إذا كانت: $u=-1-i$ فأجد u^2 ثم أمثل في المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة: $|z|<2$ والمتباينة: $|z-u^2|<|z-u|$

الحل:

$$u=-1-i \quad \to u^2=\left(1+i\right)^2=2i$$

$$|z|<2$$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z|=2$ وهو دائرة مركزها $\left(0,0\right)$ وطول نصف قطرها وحدتان

وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعا

أما منطقة المحل الهندسي لمجموعة النقاط التي تحقق هذه المتباينة فهي داخل الدائرة لأن الأعداد المركبة التي تحقق المتباينة تبعد عن مركز الدائرة مسافة تقل عن طول نصف القطر

$$\left|z-u^2\right|<|z-u|$$

$$|z-2i|<|z-(-1-i)|$$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته

$$|z-2i|=|z-(-1-i)|$$

وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي طرفاها $(0,2),(-1,-1)$

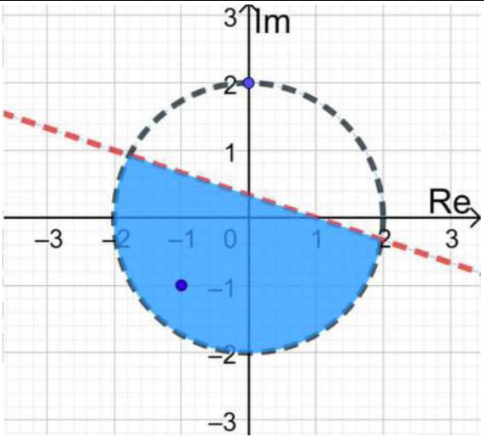
وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعا

نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختيار $z=0$ مثلا وتعويضه في المتباينة

$$|0-2i|<|0+1+i| \rightarrow 2>\sqrt{2}$$

صحيحة

وبما أن العدد 0 يحقق المتباينة فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي تحوي $z=0$ المظللة في الرسم ادناه



مثال9:

أمثل في المستوى المركب المعادلة: $|z-3i|=13$

والمعادلة: $\text{Arg}(z-4)=\dfrac{\pi}{4}$ **ثم أجد العدد المركب** z **الذي يحققهما معا**

الحل:

$$|z-3i|=13$$

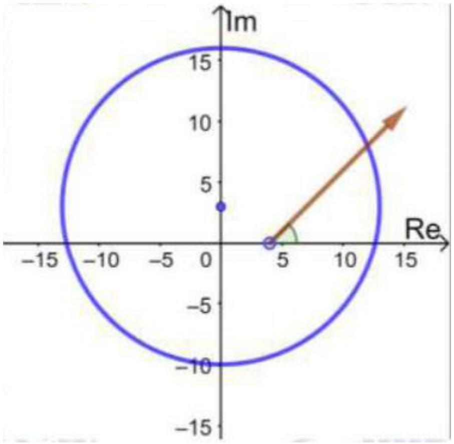
المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(0,3)$ وطول نصف قطرها 13 وحدة

$$Arg\,(z-4)=\frac{\pi}{4}$$

المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $(4,0)$ ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها $\dfrac{\pi}{4}$ مع المحور الحقيقي الموجب أي أن ميله يساوي 1 ومعادلته هي:

$$y-0=1(x-4)$$

أي أن: $y=x-4$



لايجاد الاعداد المركبة التي تحقق المعادلتين معا نجد نقاط تقاطع المنحنيين

$$y = x - 4 \,,\, y \geq 0 \,,\, x \geq 0$$

و $x^2 + (y-3)^2 = 169$ بالتعويض:

$$x^2 + (x-4-3)^2 = 169$$

$$2x^2 - 14x + 49 = 169$$

$$x^2 - 7x - 60 = 0$$

$$(x+5)(x-12) = 0 \Rightarrow x = 12 \Rightarrow y = 8$$

العدد المركب الذي يحقق المعادلتين معا هو:

$$z = 12 + 8i$$

مثال10:

أمثل في المستوى المركب المعادلة: $|z-3-2i| = 5$ والمعادلة: $|z-6i| = |z-7+i|$ ثم أجد العددين المركبين اللذين يحققان المعادلتين معا

الحل:

$$|z-3-2i| = 5$$

المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(3,2)$ وطول نصف قطرها 5 وحدات ومعادلتها

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$$

$$|z-6i| = |z-7+i|$$

هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(0,6),(7,-1)$ الذي يمر بالنقطة $(3.5, 2.5)$ وميله 1 ومعادلته هي:

$$y - 2.5 = 1(x - 3.5)$$

أي أن: $y = x - 1$

لايجاد الاعداد المركبة التي تحقق المعادلتين معا نجد نقاط تقاطع المنحنيين:

$$y = x - 1$$

و $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$ بالتعويض:

$$(x-3)^2 + (x-1-2)^2 = 25$$

$$2x^2 - 12x + 18 = 25$$

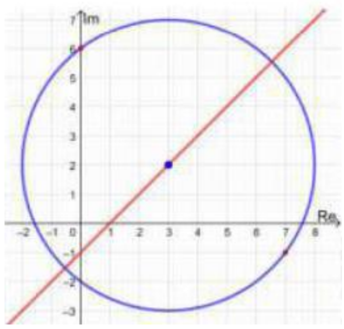
$$2x^2 - 12x - 7 = 0$$

$$x = \frac{6 \pm 5\sqrt{2}}{2} \quad , \quad y = \frac{4 \pm 5\sqrt{2}}{2}$$

العددان المركبان الذان يحققان المعادلتين معا هما:

$$z_1 = \frac{6+5\sqrt{2}}{2} + \frac{4+5\sqrt{2}}{2}i$$

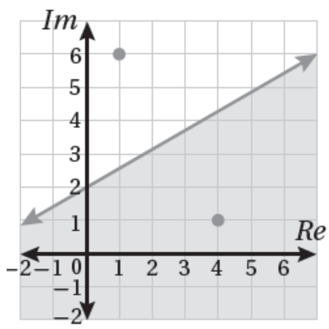
$$z_2 = \frac{6-5\sqrt{2}}{2} + \frac{4-5\sqrt{2}}{2}i$$



مثال11:

أكتب (بدلالة z) متباينة المحل الهندسي الذي تمثله المنطقة المظللة في كل مما يأتي:

1)



الحل:

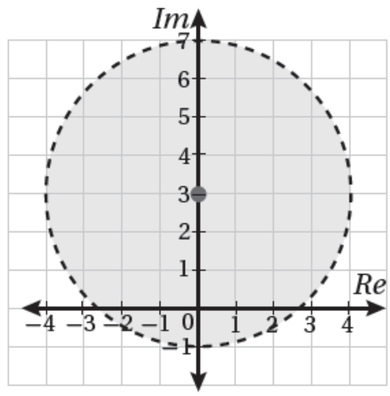
المنحنى الحدودي هنا هو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(4,1),(1,6)$ ومعادلته هي:

$|z-4-i| = |z-1-6i|$

ولأن المنطقة المظللة تشمل النقاط الأقرب إلى النقطة $(4,1)$ والخط الحدودي متقطع فإن المتباينة هي:

$|z-4-i| < |z-1-6i|$

2)



الحل:

المنحنى الحدودي هنا هو دائرة مركزها $(0,3)$ وطول نصف قطرها 4 وحدات ومعادلتها هي:

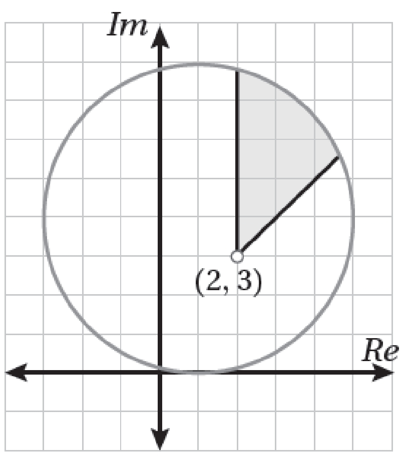
$|z-3i| = 4$

ولأن المنطقة المظللة تشمل النقاط الواقعة داخل الدائرة ولأن المنحنى الحدودي متقطع فإن المتباينة هي:

$|z-3i| < 4$

مثال12:

أكتب (بدلالة z) نظام متباينات يمثل المحل الهندسي الذي تمثله المنطقة المظللة في الشكل الآتي:



الحل:

مركز الدائرة هو $(1,4)$ وطول نصف قطرها 4 وحدات والتظليل داخلها وهي مرسومة متصلة فالمتباينة التي تصفها هي:

$$|z-1-4i|\leq 4$$

ولدينا شعاعان متصلان منطلقان من النقطة $(2,3)$ السفلي يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع الخط الأفقي والعلوي يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{2}$ مع الخط الأفقي وتم تظليل المنطقة المحصورة بينهما فالمتباينة التي تصف هذه المنطقة هي:

$$\frac{\pi}{4}\leq Arg(z-2-3i)\leq\frac{\pi}{2}$$

اذن نظام المتباينات الذي تمثله المنطقة المظللة هو:

$$|z-1-4i|\leq 4$$

$$\frac{\pi}{4}\leq Arg(z-2-3i)\leq\frac{\pi}{2}$$

اختبار نهاية الوحدة

سؤال 1:

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كُلٍّ ممّا يأتي :

1) إذا كان: $i=\sqrt{-1}$ ، فإنَّ i^{343} تُساوي :

a) -1 b) 1

c) $-i$ d) i

2) ناتج $(1-i)^3$ هو :

a) $-2+2i$ b) $-2-2i$

c) $2-2i$ d) $2+2i$

3) إذا كان: $2i$ هو أحد جذور المعادلة: $az^3+5z^2+8z+20=0$ فإن قيمة a هي :

a) -8 b) -2

c) 2 d) 8

4) الصورة المثلثية للعدد المُركب: $z=-1+i\sqrt{3}$ هي:

a) $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

b) $2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

c) $2\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

d) $2\left(\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

5) الصورة القياسية لناتج:

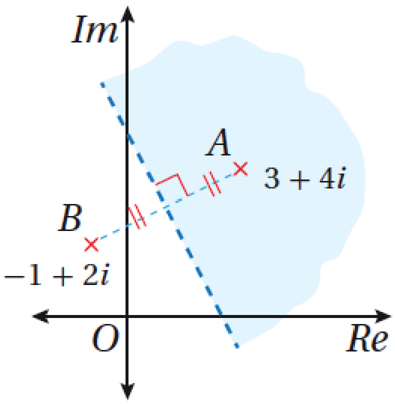
$$8\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\div 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

هي:

a) $4i$ b) -4

c) $-4+4i$ d) $4-4i$

6) إحدى الآتية نصف المنطقة المُظللة في الشكل المجاور:



a) $|z-1+2i|<|z+3+4i|$

b) $|z-1+2i|>|z+3+4i|$

c) $|z+1-2i|<|z-3-4i|$

d) $|z+1-2i|>|z-3-4i|$

الحل:

1	2	3	4	5	6
C	b	c	b	a	d

سؤال2:

أجد الجذرين التربيعيين للعدد المُركب:

$z = 45 - 28i$

الحل:

$$\sqrt{45-28i} = x + iy$$

$$45 - 28i = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$x^2 - y^2 = 48 \quad , \quad 2xy = -28$$

$$y = -\frac{14}{x}$$

$$x^2 - \frac{196}{x^2} = 45$$

$$x^4 - 45x^2 - 196 = 0$$

$$\left(x^2 - 49\right)\left(x^2 + 4\right) = 0$$

$$x = 7, y = -2 \quad or \quad x = -7, y = 2$$

الجذران التربيعيان للعدد $45 - 28i$ هما:

$-7 + 2i \,,\, 7 - 2i$

سؤال3:

أجد مقياس العدد المُركب: $w = -\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}i$ وسعته

الحل:

$$|w| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{7}{12}}$$

$$Arg(w) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}\right)\right)$$

$$= -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = -2.28$$

سؤال4:

إذا كان: $z = -8 + 8i$ ، وكان: $w = a + 2i$ ، حيث $a < 0$ ، فأجد قيمة a ، علمًا بأنَّ:

$|z + w| = 26$

الحل:

$$z + w = a - 8 + 10i$$

$$|z + w| = \sqrt{(a-8)^2 + 100} = 26$$

$$(a-8)^2 + 100 = 676$$

$$(a-8)^2 = 576$$

$$a - 8 = -24 \Rightarrow a = -16$$

سؤال5:

إذا كان: $w = \frac{14 - 21i}{3 - 2i}$ ، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

1) أكتب العدد w في صورة : $x + iy$

الحل:

$$w = \frac{14 - 31i}{3 - 2i} \times \frac{3 + 2i}{3 + 2i}$$

$$=\frac{104-65i}{9+4}=8-5i$$

2) إذا كان العدد w هو أحد جذور المعادلة: $z^2+cz+d=0$ ، فأجد قيمة كلٍّ من العددين الحقيقيين c,d

الحل:

$$(8-5i)^2+c(8-5i)^2+d=0$$

$$64-80i-25+8c-5ci+d=0$$

$$39+d+8c-i(80+5c)=0$$

$$39+d+8c=0 \quad , \quad 80+5c=0$$

$$c=-16 \quad , \quad d=89$$

حل آخر:

$$w=8-5i \Rightarrow \overline{w}=8+5i$$

$$c=-(w+\overline{w})=-16$$

$$d=w\times\overline{w}=64+25=89$$

سؤال6:

أُمثِّل في المُستوى المُركب المنطقة التي تُحدِّدها كل متباينة ممّا يأتي :

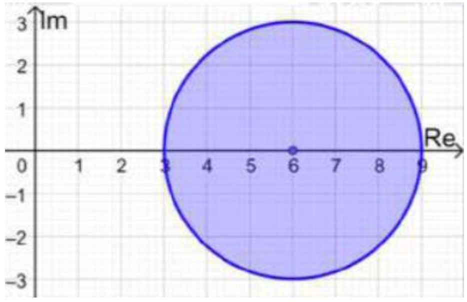
1) $|z-6|\le 6$

الحل:

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z-6|=6$ وهو دائرة مركزها $(6,0)$ وطول نصف قطرها 3 وحدات

وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة فإننا نرسم المنحنى الحدودي متصلا

أما منطقة المحل الهندسي فهي داخل الدائرة وعلى محيطها وليس خارجها لأن الأعداد المركبة التي تحقق المتباينة تبعد عن مركز الدائرة مسافة تقل عن طول نصف القطر أو تساويها



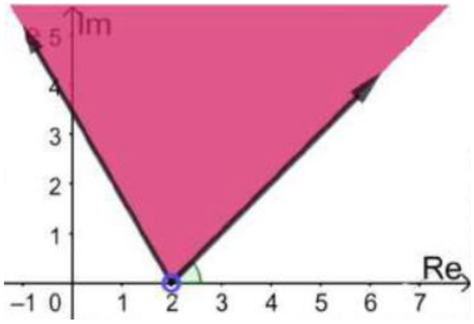
2) $\frac{\pi}{4}\le Arg(z-2)\le\frac{2\pi}{3}$

الحل:

يمثل منحنى المعادلة $Arg(z-2)=\frac{\pi}{4}$ شعاعاً (نرسمه متصلاً بسبب وجود المساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(2,0)$ ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع المحور الحقيقي

ويمثل منحنى المعادلة $Arg(z-2)=\frac{2\pi}{3}$ شعاعاً (نرسمه متصلاً بسبب وجود المساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(2,0)$ ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها $\frac{2\pi}{3}$ مع المحور الحقيقي

المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة هو المنطقة المظللة في الشكل أدناه:



3) $|z+1+i|>|z-3-3i|$

الحل:

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته

$|z+1+i|=|z-3-3i|$

وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي طرفاها

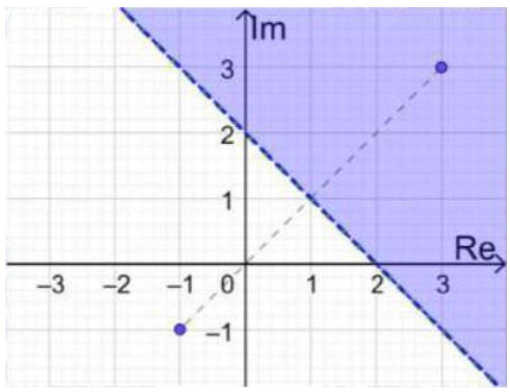
$(-1,-1),(3,3)$

وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعاً

نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختيار $z=0$ مثلا وتعويضه في المتباينة:

$|0+1+i|>|0-3-3i| \Rightarrow \sqrt{2}>\sqrt{18}$ d

بما أن العدد لا يحقق المتباينة فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي لا تحوي $z=0$



سؤال7:

إذا مثَّلت النقطة M العدد: $z_1=1-8i$ ، ومثلت النقطة N العدد: $z_2=4+7i$ ، وكانت O هي نقطة الأصل ، فأجيب عن الأسئلة الآتية تباعًا:

1) أبين أنَّ المثلث OMN متطابق الضلعين.

الحل:

$$NO=\sqrt{16+49}=\sqrt{65}$$

$$MO=\sqrt{1+64}=\sqrt{65}$$

اذن المثلث OMN متطابق الضلعين

2) أُبين أنَّ جيب تمام الزاوية MON يساوي $-\dfrac{4}{5}$

الحل:

باستخدام قانون جيوب التمام في المثلث OMN

$$(NM)^2=(NO)^2+(MO)^2-2(NO)(MO)\cos\angle MON$$

$$\cos\angle MON=-\frac{234-130}{130}=-\frac{4}{5}$$

3) أجد مساحة المثلث OMN

الحل:

$$A=\frac{1}{2}(NO)(MO)\sin\angle MON$$

$$=\frac{1}{2}\times 65\times\frac{3}{5}=\frac{39}{2}$$

سؤال8:

أمثل في المستوى المُركب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقق المُتباينة: $|z-8|>|z+2i|$

والمُتباينة: $-\frac{\pi}{4}<Arg(z+3-6i)<\frac{\pi}{4}$

الحل:

$$|z-8|>|z+2i|$$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته

$$|z-8|=|z+2i|$$

وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي طرفاها $(8,0),(0.-2)$

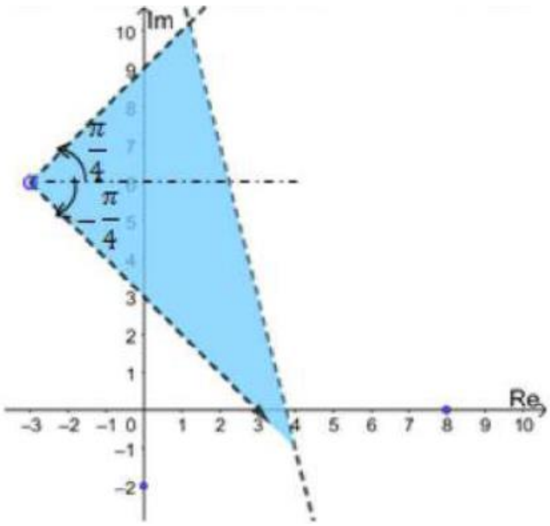
وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعاً

$$-\frac{\pi}{4}<Arg(z+3-6i)<\frac{\pi}{4}$$

يمثل منحنى المعادلة $Arg(z+3-6i)=\frac{\pi}{4}$ شعاعاً (نرسمه متصلاً بسبب وجود المساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(-3,6)$ ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم مواز للمحور الحقيقي

يمثل منحنى المعادلة $Arg(z+3-6i)=\frac{2\pi}{3}$ شعاعاً (نرسمه متصلاً بسبب وجود المساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(-3,6)$ ولا يشملها **ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم مواز للمحور الحقيقي**

المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينتين هو المنطقة المظللة في الشكل أدناه:



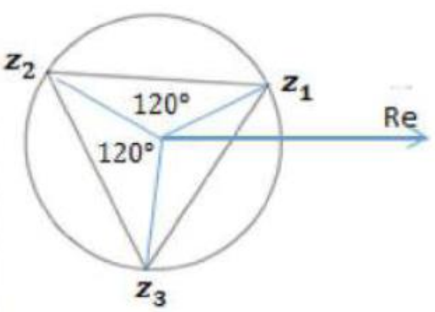
سؤال9:

تقع رؤوس مثلث متطابق الأضلاع على دائرة مركزها نقطة الأصل في المستوى المُركب. إذا كان أحد هذه الرؤوس يُمثِّل العدد المُركب: $(4+2i)$ ، فأجد العددين المُركبين اللذين يُمثِّلهما الرأسان الآخران، ثم أكتب الإجابة في صورة: $x+iy$ حيث x, y عددان حقيقيان

الحل:

$$r=|4+2i|$$

$$=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=|z_1|=|z_2|=|z_3|$$



اذا وقعت رؤوس مثلث متطابق الاضلاع على دائرة فإن قياس الزاوية المركزية التي ضلعاها يمران برأسين من رؤوس هذا المثلث يساوي $\frac{2\pi}{3}$

نفرض z_1, z_2, z_3 الأعداد المركبة التي تمثل هذه الرؤوس حيث $z_1 = 4+2i$ وهو في الربع الأول

فإن العدد z_2 يقع في الربع الثاني والعدد z_3 يقع في الربع الثالث

$$Arg(z_2) = Arg(z_1) + \frac{2\pi}{3}$$

$$Arg(z_3) = Arg(z_1) - \frac{2\pi}{3}$$

بما أن:

$$Arg(z_2) = Arg(z_1) + \frac{2\pi}{3}$$

$$|z_1| = |z_2|$$

فإن z_2 هو ناتج ضرب z_1 في العدد المركب الذي مقياسه 1 وسعته $\frac{2\pi}{3}$ وهو:

$$z = 1\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = (4+2i)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -2 + 2i\sqrt{3} - i - 2\sqrt{3}$$

$$= -\left(2+2\sqrt{3}\right) + \left(2\sqrt{3}-1\right)i$$

بما أن:

$$Arg(z_3) = Arg(z_1) - \frac{2\pi}{3}$$

$$|z_1| = |z_3|$$

فإن z_3 هو ناتج قسمة z_1 على العدد $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$z_3 = \frac{4+2i}{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{4+2i}{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} \times \frac{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{-2-2i\sqrt{3}-i+\sqrt{3}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{-2-2i\sqrt{3}-i+\sqrt{3}}{1}$$

$$= -2+\sqrt{3} - \left(2\sqrt{3}+1\right)i$$

سؤال10:

تُمثِّل النقاط: A, B, C, D جذور المعادلة:

$$z^2 - 6z^3 + 14z2 - 64z + 680 = 0$$

1) إذا كان العدد: $(-2+4i)$ هو أحد هذه الجذور فأجد الجذور الثلاثة الأخرى لهذه المعادلة.

الحل:

$$z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 64z - 680 = 0$$

بما أن العدد $-2+4i$ هو حل لهذه المعادلة

إذن مرافقه $-2-4i$ يكون حلاً ايضا لها

ويكون ناتج ضربهما أحد عوامل كثير الحدود المرتبط بهذه المعادلة

$$\left(z-(-2+4i)\right)\left(z-(-2-4i)\right)=z^2+4z+20$$

نقسم $z^4-6z^3+14z^2-64z-680$ على $z^2+4z+20$ فنجد أن:

$$z^4-6z^3+14z^2-64z-680=$$

$$\left(z^2+4z+20\right)\left(z^2-10z+34\right)=0$$

لايجاد جذور المعادلة $z^2-10z+34=0$ نستخدم القانون العام لحل المعادلة التربيعية

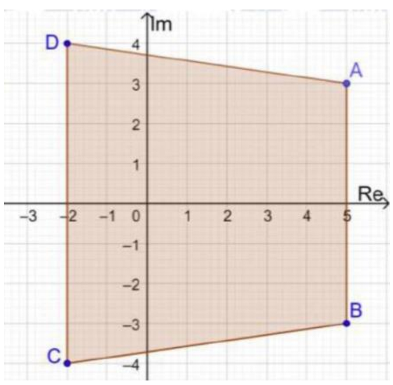
$$z=\frac{10\pm\sqrt{-36}}{2}=\frac{10\pm 6i}{2}=5\pm 3i$$

فتكون الجذور الثلاثة المطلوبة هي:

$$5+3i\,,\,5-3i\,,\,-2-4i$$

2) أُمثِّل الجذور الأربعة في المستوى المُركب ، ثم أجد مساحة الشكل الرباعي $ABCD$.

الحل:

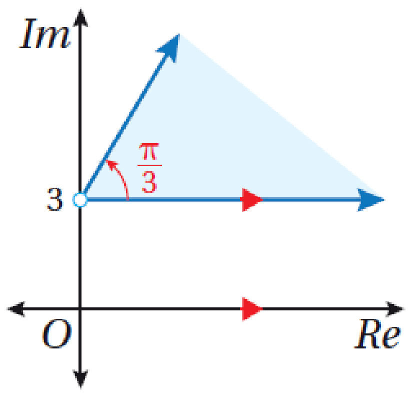


الرباعي $ABCD$ هو شبه منحرف مساحته بالوحدات المربعة تساوي:

$$A=\frac{1}{2}(7)(6+8)=49$$

سؤال 11:

أكتب (بدلالة z) متباينة تُمثل المحل الهندسي المعطى في الشكل الآتي :



الحل:

$$0\le Arg\left(z-3i\right)\le\frac{\pi}{3}$$

سؤال 12:

إذا كان: $z^2+2z+10=0$ ، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

1) أُبين أنَّ لجذري المعادلة المقياس نفسه .

الحل:

$$z^2+2z+10=0$$

$$\Delta=4-40=-36$$

مميز المعادلة التربيعية سالب، إذن لهذه المعادلة جذران مركبان مترافقان وحسب النظرية فإن العددان المركبان المترافقان لهما المقياس نفسه

2) أجد سعة كل جذر من جذري المعادلة .

الحل:

$$z_1 = \frac{-2+\sqrt{-36}}{2} = -1+3i$$

$$Arg(z_1) = \pi - \tan^{-1}(3)$$

$$z_2 = \frac{-2-\sqrt{-36}}{2} = -1-3i$$

$$Arg(z_2) = -(\pi - \tan^{-1}(3))$$

سؤال 13:

إذا كان: $w = \dfrac{22+4i}{(2-i)^2}$ **فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:**

1) أبين أن الصورة القياسية لهذا العدد هي:

$$w = 2+4i$$

الحل:

$$w = \frac{22+4i}{(2-i)^2} = \frac{22+4i}{3-4i} \times \frac{3+4i}{3+4i}$$

$$= \frac{50+100i}{25} = 2+4i$$

2) إذا كان: $\dfrac{\pi}{4} \le Arg(w-p) \le \dfrac{3\pi}{4}$ ، فأجد مجموعة القيم المُمكنة للعدد الثابت p

الحل:

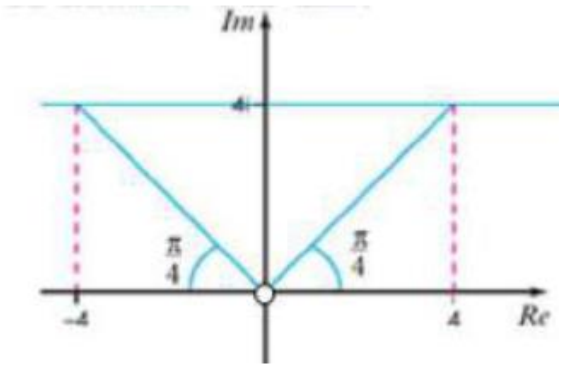
$$\frac{\pi}{4} \le Arg(w+p) \le \frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} \le Arg(2+4i+p) \le \frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} \le Arg(2+p+4i) \le \frac{3\pi}{4}$$

نفرض أن العدد $2+p+4i$ هو z

فيكون التمثيل البياني للمتباينة $\dfrac{\pi}{4} \le Arg(z) \le \dfrac{3\pi}{4}$ كما في الشكل المجاور



والاعداد التي تحقق هذه المتباينة هي الاعداد الواقعة بين الشعاعين المارين بنقطة الاصل ونلاحظ من الرسم ان الجزء الحقيقي للعدد z الذي يحقق هذه المتباينة ينحصر بين -4 و4

اذن: $-4 \le 2+p \le 4 \Rightarrow -6 \le p \le 2$

سؤال 14:

يُحقق العددان المُركبان u,v المعادلة:
$iu+v=3$ والمعادلة، : أحل المعادلتين لإيجاد العدد u والعدد v

الحل:

$$u+2v=2i\ldots(1)$$

$$iu+v=3\ldots(3)$$

$$i\times(2)+(1)v(2+i)=5i$$

$$v = \frac{5i}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i} = \frac{10i+5}{4+1} = 1+2i$$

$$u = 2i - 2(1+2i) = -2-2i$$

سؤال15:

أمثل في المستوى المُركب المحل الهندسي للنقاط التــي تُحقـق المتباينــة: $\frac{\pi}{2} \le Arg\ z \le \frac{2\pi}{3}$

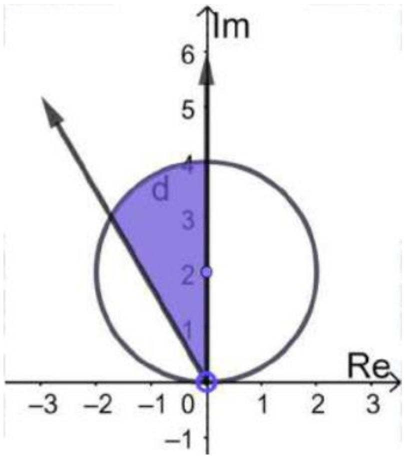
والمتباينة: $|z-2i| \le 2$

الحل:

المتباينة الاولى تمثلها المنطقة بين الشعاعين المنطلقين من نقطة الاصل يصنع احدهما زاوية قياسها $\frac{\pi}{2}$ مع المحور الحقيقي الموجب ويصنع الاخر زاوية قياسها $\frac{2\pi}{3}$ مع المحور الحقيقي الموجب

والمتباينة الثانية تمثلها النقاط الواقعة على دائرة مركزها النقطة $(0,2)$ وطول نصف قطرها وحدتان مع النقاط الواقعة داخل الدائرة

فالمحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينتين هو الجزء المظلل في الرسم المجاور



قوانين حفظ

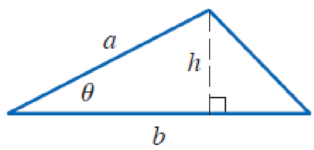
الهندسة

صيغ هندسية (المساحة A ، المحيط C، الحجم V)

❖ المثلث

$$A=\frac{1}{2}bh$$

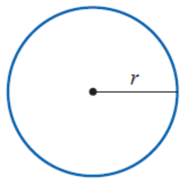
$$=\frac{1}{2}ab\sin\theta$$



❖ الدائرة

$$A=\pi r^2$$

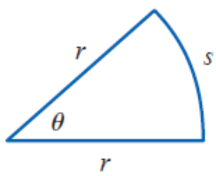
$$C=2\pi r$$



❖ القطاع الدائري

$$A=\frac{1}{2}r^2\theta$$

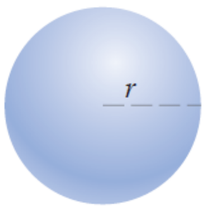
$$s=r\theta\left(\theta\ \text{radian}\right)$$



❖ الكرة

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$

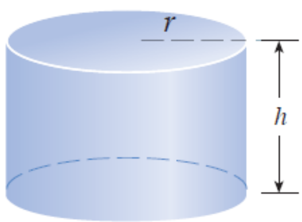
$$A=4\pi r^2$$



❖ الاسطوانة

$$V=\pi r^3 h$$

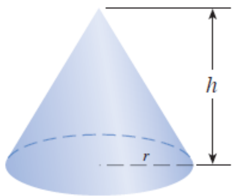
$$A=2\pi rh+2\pi r^2$$



❖ المخروط

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$A=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$$



❖ الاقترانات المثلثية في المثلث القائم الزاوية

$$\sin\theta=\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

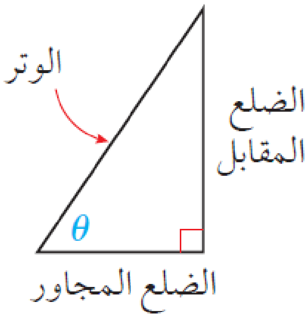
$$\cos\theta=\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$\tan\theta=\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\csc\theta=\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$\sec\theta=\frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$$

$$\cot\theta=\frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$$

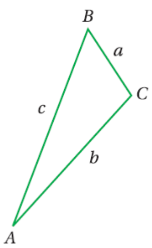


❖ قانون جيوب التمام

$$a^2=b^2+c^2-2bc\left(\cos A\right)$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\left(\cos B\right)$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\left(\cos C\right)$$



المعدلات المرتبطة في الزمن

خطوات حل السؤال:

1- رسم الشكل ان امكن
2- تحديد المتغيرات والثوابت
3- اختيار العلاقات المناسبة
4- استخدام علاقات مساعدة في الحل
5- الاشتقاق بالنسبة الى الزمن والتعويض في العلاقة

ملاحظة :

في المعدلات المرتبطة نقوم باشتقاق جميع المتغيرات بالنسبة الى الزمن .

مثال : اشتق المعادلة التالية بالنسبة الى الزمن

$$A = \frac{1}{2} \times X \times Y$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2} X \times \frac{dy}{dt} + y \frac{1}{2} \frac{dx}{dt}$$

مسائل على المعدلات المرتبطة بالزمن

مثال (1):

مستطيل متغير الابعاد بحيث يتناقص الطول بمعدل $3\, cm/s$ ويزداد العرض بمعدل $2\, cm/s$ احسب معدل التغير في المساحة والمحيط عندما يكون الطول $50\, cm$ والعرض $30\, cm$

الحل :

مثال 2:

طريقان مستقيمان متعامدان ملتقيان في A تحرك شخص من A على أحد الطريقين بسرعة 4 m/s وفي نفس الوقت تحرك شخص آخر من A على الطريق الثاني بسرعة 3 m/s

أ)احسب معدل تغير المسافة بين الشخصين بعد مرور 5 ثواني

ب) حل المثال اذا كانت الزاوية بين الطريقين $\frac{\pi}{3}$

الحل :

3) صفيحة مثلثة الشكل ارتفاعها $= \frac{1}{2}$ طول القاعدة ، تتمدد فتزداد مساحتها بمعدل $(0.09) cm^2/s$ ، احسب معدل التغير في طول قاعدة الصفيحة عندما طولها $9\, cm$

الحل :

$A = \frac{1}{2} \times$ القاعدة $\times$ الارتفاع

$A = \frac{1}{2} \times b \times w$

$A = \frac{1}{2} \times s \times \frac{1}{2} s$

$A = \frac{1}{4} s^2$

$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2} s \frac{ds}{dt}$

$$\frac{ds}{dt}=\frac{0.09}{4.5} \Leftarrow 0.09=\frac{1}{2}\times 9\times\frac{ds}{dt}$$

4) يرتكز سلم طوله $(h)cm$ على حائط ، اذا انزلق الطرف السفلي بمعدل $(\frac{1}{5})m/s$ ، احسب معدل هبوط الطرف المرتكز على الحائط عندما يكون السلم مائل عن الارض بزاوية (60)

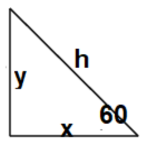
الحل :

$$y=\sqrt{h^2-x^2}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{-2x\frac{dx}{dt}}{2\sqrt{h^2-x^2}}$$

$$=\frac{-2\times\frac{h}{2}\times\frac{1}{5}}{2\sqrt{h^2-\frac{h^2}{4}}}$$

$$=\frac{-1}{5\sqrt{3}}$$



$$\frac{1}{5}=\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{x}{h}=\cos 60$$

$$\frac{h}{2}=x \Leftarrow \frac{x}{h}=\frac{1}{2}$$

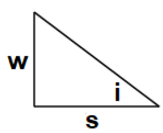
تدريب:

5) تحركت السيارة A و السيارة B في الوقت نفسه، ومن النقطة نفسها، بحيث اتجهت السيارة A نحو الشمال بسرعة $45km/h$ ، واتجهت السيارة B نحو الشرق بسرعة $40km/h$. أجد معدل تغير البعد بين السيارتين بعد ساعتين من انطلاقهما.

6) في المثلث المجاور اذا كان معدل تزايد (s) هو $(1)cm/h$ ومعدل تناقص (w) هو (0.25) ، احسب سرعة تغير الزاوية (i) عندما يكون $2=w=s$

الحل :

$$\frac{w}{s}=\tan i$$



$$0.25-=\frac{dw}{dt}$$

$$1=\frac{ds}{dt}$$

$$2=w=s$$

$$\frac{\pi}{4}=i \Leftarrow$$

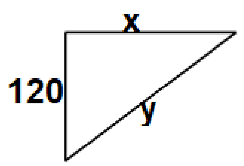
$$\sec^2 i\,\frac{di}{dt}=\frac{s\times\frac{dw}{dt}-w\frac{ds}{dt}}{s^2}$$

$$\sec^2\frac{\pi}{4}\times\frac{di}{dt}=\frac{2\times 0.25-1\times 2}{16}$$

$$=\frac{1.5-}{16}$$

7) يمسك خالد بيده خيط طائرة ورقية ارتفاعها $(120)m$ وتتحرك افقي بمعدل $(8)m/s$ ، كم السرعة التي يعطي بها خالد للخيط عندما تبعد الطائرة عنه $(200)m$

الحل :



$$(120)^2+x^2=(200)^2$$

$$160=x$$

$$8=\frac{dx}{dt}$$

$$y=\sqrt{x^2+(120)^2}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{2x\frac{dx}{dt}}{2\sqrt{(120)^2+x^2}}$$

$$=\frac{2\times 160\times 8}{2\times\sqrt{(120)^2+(160)^2}}$$

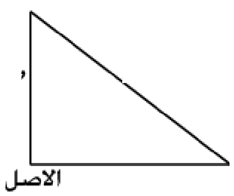
$$=\frac{32}{5}$$

8) سلك طوله $(10)m$ يتحرك بحيث طرفاه A,B على المحاور ، اذا كان (A) يتحرك مبتعدا عن الاصل بسرعة $(2)m/s$ ، احسب ما يلي :

أ) سرعة الطرف y عندما $8=x$

ب) معدل تغير المساحة بين السلك والمحاور

الحل :



أ) $$y=\sqrt{(10)^2-x^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{0-2x\frac{dx}{dt}}{2\times\sqrt{(10)^2-x^2}}$$

$$\frac{8-}{3}=\frac{32-}{12}=\frac{2\times8\times2-}{6\times2}=$$

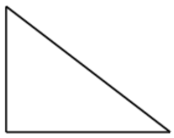
ب) $A=\frac{1}{2}\times X\times Y$

$$=\frac{dx}{dt}\,\frac{1}{2}\times y+\frac{dy}{dt}\,x\times\frac{1}{2}$$

$$=2\times\frac{1}{2}\times6+\frac{8-}{3}\times8\times\frac{1}{2}=\frac{14-}{3}$$

9) سفينتان تسير الاولى شمالا بسرعة (30km/h) والأخرى للشرق بسرعة (20) ، احسب معدل البعد بينهم بعد ساعتين

الحل :



$20=\frac{dx}{dt}$

بعد ساعتين :

$40=2\times20=x$

$60=2\times30=y$

$$w=\sqrt{x^2+y^2}$$

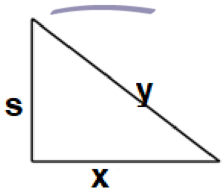
$$\frac{dw}{dt}=\frac{2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}}{2\times\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\frac{30\times60\times2+20\times40\times2}{2\times\sqrt{(60)^2+(40-)^2}}$$

$$=\frac{4400}{2\times\sqrt{120}}$$

10) تحركت كرتان على شارع مستقيم بحيث تحركت الاولى بسرعة $(15)m/s$ والأخرى قذفت حسب العلاقة : $s(t)=40t-5t^2$ ، احسب معدل تغير المسافة بين الكرتين عندما تصل الكرة الثانية لأقصى ارتفاع

الحل :



عند اقصى ارتفاع :

$0=\frac{ds}{dt}$

$$y=\sqrt{x^2+s^2}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{2x\frac{dx}{dt}+2s\frac{ds}{dt}}{2\sqrt{x^2+s^2}}$$

عندما $4=t \Leftarrow$

$60=4\times15=x$

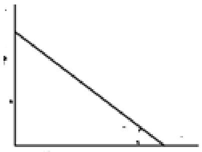
$80=s(4)$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{15\times60\times2}{200}=9$$

$40-10t=0$

$4=t\Leftarrow$

11) سقط جسيم من برج ارتفاعه $(90)m$ ، بحيث كانت المسافة $s(t)=5t^2$ ، في نفس اللحظة تحرك رجل يبعد $(22)m$ عن قاعدة البرج نحوه بسرعة $(3)m/s$ ، احسب معدل تغير زاوية ارتفاع الجسيم بالنسبة للرجل عندما $4=t$



الحل :

$$\tan\theta=\frac{90-5t^2}{22-3t}$$

$$\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt}=\frac{(22-3t)\times-10t-(90-5t^2)\times-3}{(22-3t)^2}$$

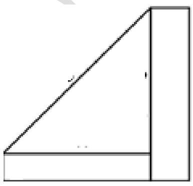
لكن $\tan\theta=1$ عندما t=4

$$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$$
$$1+1=2$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{37-}{20}$$

12) مصعدان واقفان في الطابق الارضي من عمارة والمسافة بينهما $(8)m$ ، بدأ المصعد الاول يرتفع بسرعة $(2)m/s$ وبعد ثانيتين بدأ المصعد الثاني يرتفع عموديا بسرعة $(1)m/s$ ، احسب معدل تغير المسافة بين المصعدين بعد مرور ثانيتين من تحرك المصعد الثاني

الحل :



$\frac{dy}{dt}=2$ $\quad \frac{dx}{dt}=1$

$2=1\times2=x$ $\quad 8=2\times4=y$

$$v=\sqrt{(8)^2+(y-x)^2}$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{2(y-x)(\frac{dy}{dx}-\frac{dx}{dt})}{2\sqrt{(8)^2+(y-x)^2}}$$

$$=\frac{2(8-2)(2-1)}{20}=0.6$$

13) من نقطة تبعد مسافة $(50)m$ عن رجل ، انطلق بـالون للأعلـى بسـرعة $(4)m/s$ وكانـت الريـاح تأخـذ البـالون افقيـا مبتعـدا عـن الرجـل بسـرعة $(6)m/s$ ، احسب معدل التغير في زاوية ارتفاع البـالون بالنسـبة للرجـل بعـد مـرور (5) ثـواني مـن الحركة

14) يرتفـع بـالون رأسـيا إلـى الأعلـى بمعـدل ثابت قدره $40\,m/\min$ ورصده مشاهد يقف على الأرض ويبعد 120m عـن موقـع البـالون علـى الأرض جـد معـدل تغير زاوية نظر المشاهد للبالون بعد مرور 3 دقائق

15) أمسك ولد ببكرة خيط طائرة ورقية تحلق على ارتفاع 50m فوق سطح الأرض، وتتحرك أفقيا : بسرعة 2m/s

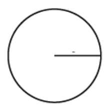
أجد معدل تغير الزاوية بين الخيط والمستوى الأفقي عندما يكون طول الخيط 100m. علما بأن ارتفاع يد الولد عن الأرض 1.5 m

16) قرص دائري يتمدد بـالحرارة بحيث تـزداد مساحته بمعدل $(21\pi)m^2/s$ د، احسب معدل التغير في المحيط عندما يكون نصف القطر هو $(7)m$

الحل :

$$c=2\pi r$$

$$2\pi\frac{dr}{dt}$$



$$A=\pi r^2$$

$$\frac{da}{dt}=2\pi r\frac{dr}{dt}$$

$$21\pi=2\pi\times7\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt}=\frac{3}{2}$$

$$=\tfrac{3}{2}\times2\pi$$

$$3\pi\ m/s$$

17) ينفخ الهواء داخل بالون كروي الشكل بمعدل $1000\ cm^3/s$ احسب معدل التغير في نصف القطر وفي مساحة السطح عندما يكون نصف القطر 20 cm

18) مكعب يتمدد بالحرارة فيزدد ضلعه بمعدل $(0.01)\ cm/s$ ، اذا كان معدل التغير في الحجم هو $12\ cm^3/s$ ، احسب ما يلي :

أ) طول المكعب

ب) معدل التغير في المساحة الكلية للمكعب

الحل :

ا) $$v=x^3\Rightarrow\frac{dv}{dt}=3x^2\frac{dx}{dt}$$

$$12=0.01\times3x^2$$

$$\Rightarrow x=20$$

ب)

$$A=6x^2$$

$$\frac{da}{dt}=12x\frac{dx}{dt}$$

$$0.01\times20\times12=2.4$$

19) صندوق قاعدته مربعة الشكل الارتفاع يساوي ثلاث امثـال طـول الضـلع ، اذا كـان الضـلع يـزداد بمعـدل $(\frac{1}{4})$ ، احسـب معـدل التغيـر فـي الحجـم ومسـاحة السطح عندما طول الضلع (8) cm

الحل :

$$8=x\ /\ h=3x\ /\ \frac{dx}{dt}=\frac{1}{4}$$

$$v = x^2 h$$
$$v = 3x^3$$
$$\frac{dv}{dt} = 9x^2 \frac{dx}{dt}$$
$$= 9\times(8)^2\times\frac{1}{4}$$
$$144 =$$

$$A = 2x^2 + 4xh$$
$$= 2x^2 + 4x \times 3x$$
$$= 2x^2 + 12x^2$$
$$= 14x^2$$
$$\frac{da}{dt} = 28x\frac{dx}{dt}$$
$$= 28(8)(\frac{1}{4}) = 56$$

20) اسطوانة نصف قطرها ($\frac{5}{7}$) ارتفاعها ، يزداد ارتفاعها بمعدل $(0.0021)cm^3/s$ ، احسب معدل التغير في الحجم عندما الارتفاع (14) cm

الحل :

$$14 = h \qquad h\,\tfrac{5}{7} = r \qquad 0.0021 = \frac{dh}{dt}$$
$$v = \pi r^2 h$$
$$= \pi(\frac{5}{7}h)^2 h = \pi\frac{25}{49}h^3$$
$$\frac{dv}{dt} = \pi\times\frac{25}{49}\times 3h^2\times\frac{dh}{dt}$$
$$= 0.0021\times(14)^2\times 3\times\frac{25}{49}\times\pi = \pi 0.63$$

21) يزداد حجم بالون كروي بمعدل $(1000)cm^3/s$ ، احسب معدل الزيادة في مساحة السطح عندما يكون نصف القطر(10) cm

الحل :

$$\frac{dv}{dt} = 1000 \qquad \frac{da}{dt} = ?? \qquad r = 10$$

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$\frac{dv}{dt} = \frac{4}{3}\pi\times 3r^2\times\frac{dr}{dt}$$
$$1000 = \frac{4}{3}\pi\times 3(10)^2\times\frac{dr}{dt}$$
$$\frac{dr}{dt} = \frac{1000}{400\pi}$$

$$A = 4\pi r^2$$
$$\frac{da}{dt} = 8\pi r\frac{dr}{dt}$$
$$= 10\times\pi 8\times\frac{1000}{\pi 400}$$
$$= 200cm^2/s$$

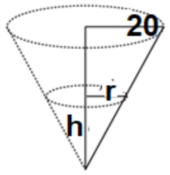
22) مخروط دائري رأسه للأسفل يخرج منه الماء بمعدل $(2)cm^3/s$ ، وكانت حنفية تصب الماء بمعدل $(6)cm^3/s$. في لحظة ما كان ارتفاع المخروط (8) cm ، احسب ما يلي :

أ) معدل التغير في ارتفاع الماء بالمخروط

ب) معدل التغير في نصف القطر الماء العلوي للمخروط

ج) معدل التغير في مساحة سطح الماء

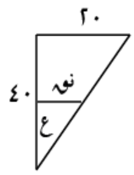
علما بان ارتفاع المخروط (40)cm ونصف القطر cm(20)



الحل :

$$\frac{dv}{dt} = 6 - 2 = 4$$

أ)
$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$
$$v = \frac{1}{3}\pi(\frac{h}{2})^2 h$$
$$v = \frac{\pi}{12}h^3$$



$$\frac{dh}{dt} = \frac{\pi}{12}\times 3h^3\frac{dh}{dt}$$
$$4 = \frac{\pi}{12}\times 3(8)^3\frac{dh}{dt}$$
$$4 = \pi 16\times\frac{dh}{dt}$$
$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{4\pi}$$

ب)
$$\boxed{r = \frac{1}{2}h = \frac{1}{2}(8) = 4}$$
$$r = \frac{1}{2}\times h$$
$$= \frac{1}{2}\times\frac{dh}{dt}$$
$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{4\pi} = \frac{1}{8\pi}$$

ج)
$$A = \pi r^2$$
$$\frac{da}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt}$$
$$2\pi\times 4\times\frac{1}{8\pi} = 1cm^2/s$$

23) يتساقط الرمل بمعدل $(1)m^3/s$ مكون كومة مخروط ارتفاعها يساوي قطرها ، احسب ما يلي :

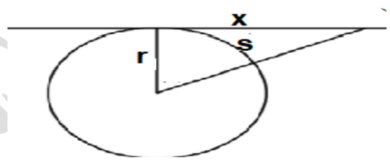
أ) معدل التغير في ارتفاع الكومة عندما $h=12$

ب) معدل التغير في محيط قاعدة المخروط عندما $h=12$

---

24) طريق للسباق دائري نصف قطره r وفي مركزه كشاف ضوئي ويوجد جدار مستقيم يمس الطريق في احدى النقاط وتسير السيارة على الطريق بسرعة (150) km/h وفي لحظة ما كانت السيارة عند نقطة التماس ، احسب سرعة ظل السيارة على الجدار عندما تكون السيارة قطعت $(\frac{1}{8})$ دورة

الحل :



$\theta=\frac{1}{8}\times2\pi=\frac{\pi}{4}$ والمطلوب $\frac{dx}{dt}$

$$\frac{dy}{dt}=(\frac{-\pi\sqrt{3}}{24})\div\sqrt{1-\frac{1}{16}}$$

$$\tan\theta=\frac{x}{r}=\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt}=\frac{\frac{dx}{dt}}{r}$$

لايجاد $\frac{d\theta}{dt}$: طول القوس = نصف القطر × الزاوية

$$s=r\times\theta\Rightarrow\frac{ds}{dt}=r\times\frac{d\theta}{dt}$$

$$150=r\times\frac{d\theta}{dt}\Rightarrow\frac{d\theta}{dt}=\frac{150}{r}$$

لكن

$$\sec^2\frac{\pi}{4}=2$$

$$2\times\frac{150}{r}=\frac{1}{r}\times\frac{dx}{dt}\Rightarrow\frac{dx}{dt}=300$$

مثال25:

تُستعمل المعادلة $S=\frac{\sqrt{hm}}{19}$ لحساب المساحة التقريبية لسطح جسم الإنسان ، حيث h طوله بالسنتميتر، و m كتلته بالكيلوغرام . يتَّبع خالد حمية غذائية تجعله يخسر من كتلته 2kg شهريًا. ما مُعدَّل النقصان في مساحة سطح جسمه عندما تصبح كتلته 70kg شهريًا، علمًا بان طوله 170 cm؟

الحل:

$$S=\frac{\sqrt{hw}}{60}=\frac{\sqrt{170w}}{60}=\frac{\sqrt{170}}{60}\sqrt{w}$$

$\frac{dw}{dt}=-2\text{ kg / month}$ معدل التغير المعطى

$\left.\frac{dS}{dt}\right|_{w=70}=?$ معدل التغير المطلوب

العلاقة بين الكتلة ومساحة سطح الجسم

$$S=\frac{\sqrt{170w}}{60}$$

$$\frac{dS}{dt}=\frac{\sqrt{170}}{120\sqrt{w}}\frac{dw}{dt}$$

$$\left.\frac{dS}{dt}\right|_{w=70}=\frac{\sqrt{170}}{120\sqrt{70}}\times-2$$

$$=-0.03\text{ cm}^3\text{ / month}$$

مثال26:

عند سقوط قطرة ماء مُسطَّح مائي ، تتكوَّن موجات دائرية مُتحدة المركز. إذا كان نصف قُطر إحدى الدوائر يزداد بمُعدل 3 cm/s، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1) مُعدل تغيُّر محيط الدائرة عندما يكون نصف قُطرُها 5cm.

الحل:

$$C = 2\pi r$$

مُعدَّل التغيُّر المعطى: $\frac{dr}{dt} = 3$

المطلوب: $\left.\frac{dC}{dt}\right|_{r=5}$

$$C = 2\pi r$$

$$\frac{dC}{dt} = 2\pi \times \frac{dr}{dt}$$

بتعويض $\frac{dr}{dt} = 3$

$$= 2\pi(3) = 6\pi$$

إذن ، يزداد محيط الدائرة بِمُعدَّل 6π cm/s عندما يكون نصف قطرها 5 cm.

2) مُعدل تغيُّر مساحة الدائرة عندما يكون نصف قُطرُها 9cm

$$A = \pi r^2$$

مُعدَّل التغيُّر المعطى: $\frac{dr}{dt} = 3$

المطلوب: $\left.\frac{dA}{dt}\right|_{r=9}$

$$A = \pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi \times \frac{dr}{dt}$$

بتعويض $r = 9, \frac{dr}{dt} = 3$

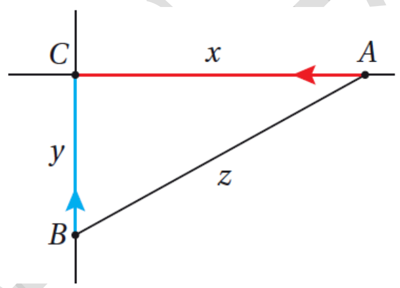
$$= 2\pi(9)(3) = 54\pi$$

إذن، تزداد مساحة الدائرة بمُعدل $54\pi \ \ cm^2/s$ عندما يكون نصف قُطرُها 9 cm

مثال27:

تتحرك السيّارة A في اتجاه الغرب بسرعة 80km/h وتتحرك السيارة B في اتجاه الشمال بسرعة 100km/h، وهما تتجهان نحو تقاطع مروري. أجد معدل تغير البعد بين السيارتين عندما تكون السيارة A والسيارة B على بعد 0.3km و 0.4 km (على الترتيب) من التقاطع.

الحل:



$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

معدل التغير المعطى:

$$\frac{dx}{dt} = -80, \frac{dy}{dt} = -100$$

المطلوب: $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{\substack{x=0.3\\y=0.4}}$

$$z=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

بتعويض $x=0.3, \frac{dx}{dt}=-80$

$$=\frac{2(0.3)(-80)+2(0.4)(-100)}{2\sqrt{(0.3)^2+(0.4)^2}}=-128$$

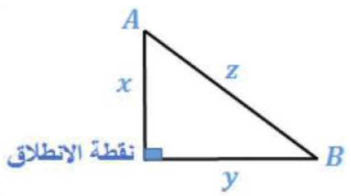
إذن، تقترب السيارتان إحداهما من الأخرى بمعدل 128km/h عندما تكون السيارة A والسيارة B على بعد 0.3 km و0.4 km (على الترتيب) من التقاطع

مثال28:

تحركت السيارة A والسيارة B في الوقت نفسه، ومن النقطة نفسها، بحيث اتجهت السيارة A نحو الشمال بسرعة 45 km/h، واتجهت السيارة B نحو الشرق بسرعة 40 km/h. أجد معدل تغير البعد بين السيارتين بعد ساعتين من انطلاقهما.

الحل:

ليكن بعد A عن نقطة الانطلاق يساوي x وبعد B عن نقطة الانطلاق يساوي y والبعد بين A و B يساوي z



معدلات التغير المعطاة:

$$\frac{dx}{dt}=45\ \text{km/h}\ ,\ \frac{dy}{dt}=40\ \text{km/h}$$

معدل التغير المطلوب $\left.\frac{dZ}{dt}\right|_{t=2}=?$

بعد ساعتين من الحركة يكون:

$$x=45\times 2=90\ \text{km}$$

$$y=40\times 2=80\ \text{km}$$

من نظرية فيثاغورس:

$$z^2=x^2+y^2$$

$$z=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=2}=\frac{x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\frac{90\times 45+80\times 40}{\sqrt{8100+6400}}$$

$$=\frac{7250}{10\sqrt{145}}=\frac{725}{\sqrt{145}}\approx 60.21\ \text{km/s}$$

الحل بطريقة آخرى:

بعد (t) ساعة من الحركة يكون:

$$x=45t\ \text{km}\ ,\ y=40t\ \text{km}$$

$$z^2=x^2+y^2$$

$$z=\sqrt{(45t)^2+(40t)^2}=\sqrt{3625}t$$

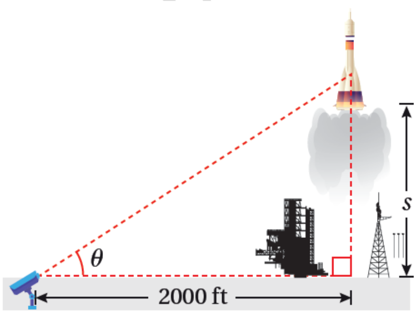
$$\frac{dz}{dt}=\sqrt{3625}\approx 60.21$$

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=2} \approx 60.21 \text{ km / h}$$

مثال29:

رصدت كاميرا مثبتة عند مستوى سطح الأرض لحظة إطلاق صاروخ رأسيًا إلى الأعلى، وفق الاقتران: $s(t) = 50t^2$ حيث s الموقع بالأقدام، و t الزمن بالثواني. إذا كانت الكاميرا تبعد مسافة 2000ft عن منصة الإطلاق، فأجد معدل تغير زاوية ارتفاع الصاروخ بعد 10 ثوان من انطلاقه.

الحل:



المعادلة: أفترض أن θ هي زاوية ارتفاع الصاروخ، وأن s موقع الصاروخ. ومن ثم، يمكن الربط بين s وθ باستعمال المعادلة الآتية:

$$\tan\theta = \frac{s}{2000}$$

مُعدل التغيُّر المعطى: بما أن موقع الصاروخ هو $s(t) = 50t^2$ ، فإن سرعته هي:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 100t$$

المطلوب: $\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{t=10}$

$$\tan\theta = \frac{s}{2000}$$

$$\sec^2\theta \times \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2000} \times \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\cos^2\theta}{2000} \times \frac{ds}{dt}$$

$$\cos\theta = \frac{2000}{\sqrt{s^2 + (2000)^2}}$$

بتعويض $s = 50t^2$

$$\cos\theta = \frac{2000}{\sqrt{(50t^2)^2 + (2000)^2}}$$

بتعويض $t = 10$

$$= \frac{2000}{\sqrt{\left(50(10)^2\right)^2 + (2000)^2}} = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

إذن، $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{29}}$ بعد 10ثوانٍ من انطلاق الصاروخ.

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\cos^2\theta}{2000} \times \frac{ds}{dt}$$

بتعويض $\cos^2\theta = \frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{ds}{dt} = 100t$

$$= \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\right)^2}{2000} \times 100t$$

بتعويض $t = 10$

$$= \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\right)^2}{2000} \times 100(10) = \frac{2}{29} \text{ rad / s}$$

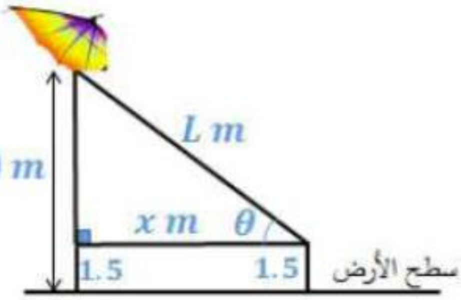
إذن، معدل تغير زاوية ارتفاع الصاروخ عندما $t=10$ هو: $\frac{2}{29}$

مثال30:

أمسك ولد ببكرة خيط ورقية تُحلق على ارتفاع 50m فوق سطح الأرض، وتتحرك أفقيًا بسرعة 2m/s. أجد معدل تغير الزاوية بين الخيط والمستوى الأفقي عندما يكون طول الخيط 100m، علمًا بأن ارتفاع يد الولد عن الأرض 1.5m.

الحل:

ليكن طول الخيط (L) وقياس الزاوية بين الخيط والأفقي (θ) وبُعد الطائرة أفقيا هو (x)



المعطى $\frac{dx}{dt}=2\text{ m/s}$

المطلوب $\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{L=100}=?$

$$\tan\theta=\frac{50-1.5}{x}=\frac{48.5}{x}$$

$$\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt}=-\frac{48.5\frac{dx}{dt}}{x^2}$$

$$\frac{L^2}{x^2}\times\frac{d\theta}{dt}=-\frac{48.5\frac{dx}{dt}}{x^2}$$

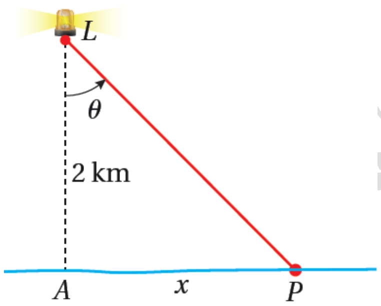
$$\frac{d\theta}{dt}=-\frac{48.5\frac{dx}{dt}}{x^2}\times\frac{x^2}{L^2}=\frac{48.5\frac{dx}{dt}}{L^2}$$

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{L=100}=-\frac{48.5(2)}{(100)^2}\approx-0.0097\text{ rad/s}$$

مثال31:

أُنشِئت منارة على جزيرة صغيرة ، بحيث كانت على مستوى سطح البحر، وهي تبعد مسافة 2km عن أقرب نقطة على ساحل مستقيم . إذا كان مصباح المنارة يُكمل 3 دورات في الدقيقة ، فأجد سرعة تحرك بقعة الضوء على خط الساحل عند نقطة تبعد مسافة 4km. عن أقرب نقطة إلى المنارة.

الحل:



المعادلة : أفترض أنَّ بقعة الضوء p تبعد مسافة x عن A وأن θ هي الزاوية ALP . ومن ثم، يمكن الربط بين x وθ باستعمال المعادلة الآتية:

$$\tan\theta=\frac{x}{2}\Rightarrow x=2\tan\theta$$

معدَّل التغيُّر المعطى: مُعدَّل تغيُّر الزاوية θ بالنسبة إلى الزمن يُمثِّل السرعة الزاوية.

نستعمل معطيات السؤال لإيجاد السرعة الزاوية كالآتي:

قياس الدورة الكاملة 2π ، وهذا يعني أن كل 3 دورات تُقابل زاوية الدوران التي قياسها $3\times 2\pi$ أو 6π راديان:

السرعة الزاوية $\dfrac{d\theta}{dt}=w=\dfrac{\theta}{t}$

بتعويض $\theta=6\pi, t=1\,\text{min}$

$$=\frac{6\pi}{1\,\text{min}}$$

إذن، السرعة الزاوية لبقعة الضوء: $\dfrac{d\theta}{dt}=6\pi\ \text{rad}/1\,\text{min}$ وهي تمثِّل مُعدَّل التغيُّر المُعطى.

المطلوب: $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{x=4}$

$$x=2\tan\theta$$

$$\frac{dx}{dt}=2\sec^2\theta\times\frac{d\theta}{dt}$$

أستعمل متطابقات لإيجاد $2\sec^2\theta$ عندما $x=4$:

بتعويض $x=4$

$$x=2\tan\theta$$

$$4=2\tan\theta$$

$$\tan\theta=2$$

$$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$$

بتعويض $\tan\theta=2$

$$=1+2^2=5$$

$$\frac{dx}{dt}=2\sec^2\theta\times\frac{d\theta}{dt}$$

بتعويض $\sec^2\theta=5, \dfrac{d\theta}{dt}=6\pi$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=4}=2(5)\times 6\pi=60\pi$$

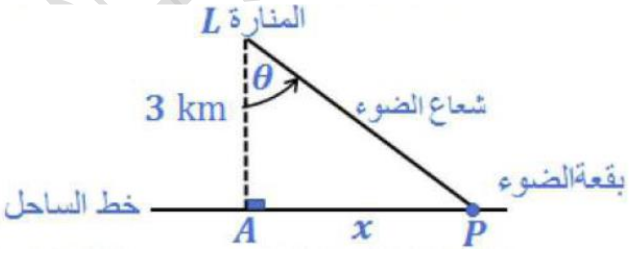
إذن، تتحرك بقعة الضوء بمعدل 60π km/min عندما تبعد مسافة 4km عن A.

مثال32:

أنشِئت منارة على جزيرة صغيرة، بحيث كانت على مستوى سطح البحر، وهي تبعد مسافة 3km. عن أقرب نقطة على ساحل مستقيم إذا كان مصباح المنارة يكمل 4 دورات في الدقيقة، فأجد سرعة تحرك بقعة الضوء على خط الساحل عندما تبعد مسافة 1km عن أقرب نقطة إلى المنارة.

الحل:

لتكن الابعاد والقياسات كما في الشكل



المعطى $\omega = \frac{d\theta}{dt} = 4(2\pi) = 8\pi \text{ rad / s}$

المطلوب $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=1} = ?$

$$\tan\theta = \frac{x}{3}$$

$$\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{3}\frac{dx}{dt}$$

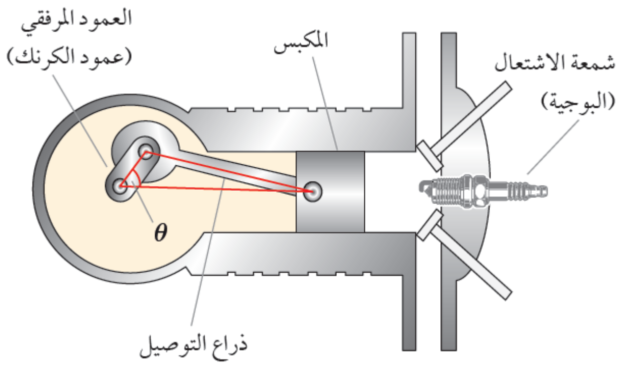
$$\frac{(x^2+9)}{3}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{3}\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{x^2+9}{1}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=1} = (1+9)(8\pi) = 80\pi \text{ km / min}$$

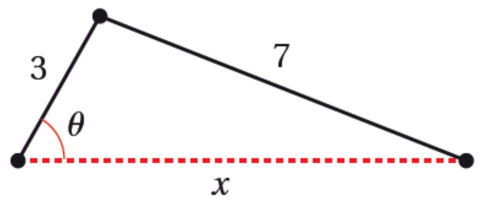
سرعة بقعة الضوء على الساحل 80π km / min عندما تبعد 1 km عن A

مثال 33:

يُبيّن الشكل الآتي مُحرِّك سيارَة يحتوي على ذراع توصيل طولها 7 in، وهي مُثبَّتة بعمود مرفقي طوله 3 in. إذا دار العمود المرفقي عكس اتجاه دوران عقارب الساعة 200 دورة في الدقيقة، فما سرعة المكبس عندما $\theta = \frac{\pi}{3}$؟



الحل:



المعادلة: أفترض أن x هو المسافة بين المكبس ورأس العمود المرفقي. ومن ثمَّ يُمكن الاستعانة بقانون جيوب التمام للربط بين x وθ باستعمال المعادلة الآتية:

$$7^2 = 3^2 + x^2 - 6(x)\cos\theta$$

معدل التغيُّر المعطى: بما أن مُعدَّل تغيُّر الزاوية θ بالنسبة إلى الزمن يُمثِّل السرعة الزاوية فإنَّه يُمكِن إيجاد السرعة الزاوية من معطيات السؤال كالأتي:

قياس الدورة الكاملة 2π ، وهذا يعني أنَ كل 200 دورة تقابل زاوية الدوران التي قياسها $200\times2\pi$ أو 400π راديان:

السرعة الزاوية: $\frac{d\theta}{dt} = w = \frac{\theta}{t}$

بتعويض $\theta = 6\pi, t = 1\,\text{min}$

$$= \frac{400\pi}{1\,\text{min}}$$

إذن، معدل التغير المعطى هو:

$$\frac{d\theta}{dt} = 400\pi \text{ rad / min}$$

المطلوب: $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{\theta=\frac{\pi}{3}}$

$$49 = 9 + x^2 - 6x\cos\theta$$

$$0 = 2x\frac{dx}{dt} + 6x\sin\theta\frac{d\theta}{dt} - 6\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$(6\cos\theta - 2x)\frac{dx}{dt} = 6x\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{6x\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}{6\cos\theta - 2x}$$

أعوض $\theta = \frac{\pi}{3}$ في المعادلة الأصلية لإيجاد قيمة x :

$$49 = 9 + x^2 - 6x\cos\theta$$

بتعويض $\theta = \frac{\pi}{3}$

$$49 = 9 + x^2 - 6x\cos\frac{\pi}{3}$$

$$49 = 9 + x^2 - 6x\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$x^2 - 3x - 40 = 0$$

$$(x-8)(x+5) = 0$$

$$x - 8 = 0 \quad or \quad x + 5 = 0$$

$$x = 8 \quad or \quad x = -5$$

بما أنَّ x يُعبِّر عن مسافة، فإنني أختار الحلّ الموجب، وهو $x = 8$:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{6x\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}{6\cos\theta - 2x}$$

بتعويض $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{d\theta}{dt} = 400\pi, x = 8$

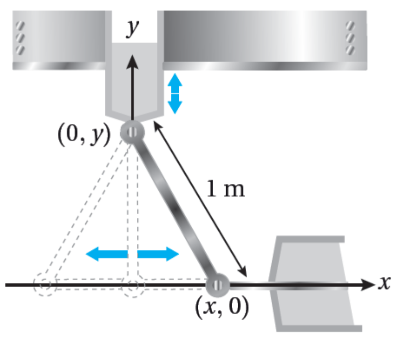
$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{\theta=\frac{\pi}{3}} = \frac{6(8)\sin\frac{\pi}{3}(400\pi)}{6\cos\frac{\pi}{3} - 2(8)}$$

$$= \frac{9600\pi\sqrt{3}}{-13} \approx -4018$$

إذن، سرعة المكبس عندما $\theta = \frac{\pi}{3}$ هي: 4018 in/m في اتجاه اليسار

مثال34:

هندسة ميكانيكية: يبين الشكل المجاور ذراعًا معدنية مُتحركة طولها 1m وإحداثيات نهايتها $(0, y), (x, 0)$



ويُمثِّل الاقتران: $x(t) = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi t}{6}$ موقع طرف الذراع على المحور x حيث t الزمن بالثواني

1) أجد أعلى نقطة على المحور y يصلها طرف الذراع

2) أجد سرعة طرف الذراع الواقع على المحور y عندما يكون الطرف الآخر عند النقطة $\left(\frac{1}{4},0\right)$

الحل:

1) يصل الطرف العلوي للذراع إلى أعلى نقطة عندما يكون وضع الذراع رأسيا وتكون النقطة المطلوبة هي $(0,1)$

2) المعطى $x(t)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}t$

المطلوب $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=\frac{1}{4}}=?$

عندما $x=\frac{1}{4}$ ، فإن:

$$\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}t=\frac{1}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{6}t=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\pi}{6}t=\frac{\pi}{6}\Rightarrow t=1$$

$$x(t)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}t$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{6}t$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=\frac{1}{4}}=\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=1}=\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}\pi}{24}$$

من نظرية فيثاغورس $x^2+y^2=1$

$$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0$$

$$2x\frac{dx}{dt}+2\sqrt{1-x^2}\,\frac{dy}{dt}=0$$

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{x\frac{dx}{dt}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=\frac{1}{4}}=-\frac{\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{24}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{16}}}$$

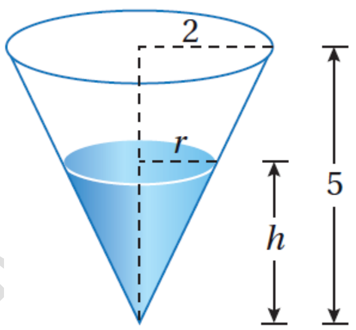
$$=\frac{\sqrt{3}\pi}{96}\times\frac{4}{\sqrt{15}}=-\frac{\pi}{24\sqrt{5}}\text{ m/s}$$

اذن يتحرك طرف الذراع الواقع على المحور y للاسفل بمعدل $\frac{\pi}{24\sqrt{5}}$ m/s عندما $x=\frac{1}{4}$

مثال35:

خزّان ماء على شكل مخروط دائري قائم، ارتفاعه 5m، ونصف قُطر قاعدته 2m، ورأسه إلى الأسفل. تسرَّب الماء من الخزان بِمُعدَّل $\frac{1}{12}$ m^3/min . ما مُعدَّل تغيُّر ارتفاع الماء في الخزّان عندما يكون ارتفاعه 4m؟

الحل:



المعادلة: أفترض أن r هو نصف قُطر سطح الماء في الخزان وh ارتفاع الماء في الخزّان، وV حجم الماء في

الخزّان. ومن ثَمَّ، يُمكِن الربط بين r و h و V باستعمال المعادلة الآتية:

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

مُعدَّل التغيُّر المعطى:

$$\frac{dV}{dt}=-\frac{1}{12}$$

المطلوب: $\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=4}$

باستعمال تشابه المثلثات:

$$\frac{r}{h}=\frac{2}{5}\to r=\frac{2h}{5}$$

وبذلك، ويمكن كتابة المعادلة على النحو الآتي:

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{2h}{5}\right)^2 h=\frac{4\pi}{75}h^3$$

$$V=\frac{4\pi}{75}h^3$$

$$\frac{dV}{dt}=\frac{4\pi}{75}\times 3h^3\times\frac{dh}{dt}$$

بتعويض $h=4$, $\frac{dV}{dt}=-\frac{1}{12}$

$$-\frac{1}{12}=\frac{4\pi}{75}\times 3(4)^2\times\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt}=-\frac{25}{768\pi}$$

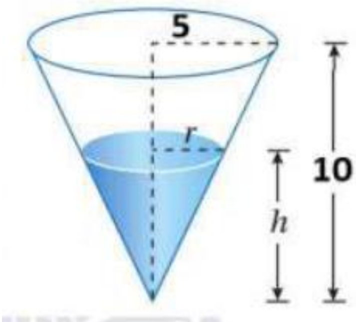
إذن، يتناقص ارتفاع الماء في الخزان بِمُعدل $\frac{25}{768\pi}$ m/min عندما يكون ارتفاع الماء 4m

مثال36:

خزّان ماء على شكل مخروط دائري قائم رأسه إلى الأسفل، وارتفاعه 10m، ونصف قُطر قاعدته 5m. صُبَّ الماء في الخزان بِمُعدَّل π m^3/min. ما مُعدَّل تغيُّر ارتفاع الماء الخزان عندما يكون ارتفاعه 8m ؟

الحل:

ليكن حجم الماء في الخزان (V) ونصف قطر قاعدته (r) وارتفاعه (h)



المعطى $\frac{dV}{dt}=\pi\ \text{m}^3/\text{min}$

المطلوب $\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=8}=?$

من التشابه $\frac{r}{h}=\frac{5}{10}\Rightarrow r=\frac{1}{2}h$

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}h\right)^2 h$$

$$V=\frac{\pi}{12}h^3$$

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$$

$$\pi=\frac{\pi}{4}(8)^2\frac{dh}{dt}$$

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=8} = \frac{1}{16}\ \text{m/min}$$

اذن يزداد ارتفاع الماء في الخزان بمعدل $\frac{1}{16}\ \text{m/min}$ عندما يكون ارتفاعه $8\ \text{m}$

مثال37:

يزداد طول أحد أضلاع مستطيل بِمُعدَّل 2cm/s ، ويقل طول ضلعه الآخر بمُعدل 3cm/s، بحيث يحافظ المستطيل على شكله ، وفي لحظة مُعينة بلغ طول الضلع الأول 20cm، وطول الضلع الثاني 50cm:

1) ما مُعدَّل تغيُّر مساحة المُستطيل في تِلكَ اللحظة؟

الحل:

ليكن طول المستطيل (x) وعرضه (y) ومساحته (A) ومحيطه (C) وطول قطره (R)

المعطى: $\frac{dy}{dt} = -3\ \text{cm/s}, \frac{dx}{dt} = 2\ \text{cm/s}$

المطلوب $\left.\frac{dA}{dt}\right|_{x=20, y=50} = ?$

$$A = xy$$

$$\frac{dA}{dt} = x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}$$

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{x=20, y=50} = 20(-3) + 50(2)$$

$$= 40\ \text{cm}^2/\text{s}$$

2) ما مُعدَّل تغيُّر محيط المُستطيل في تِلكَ اللحظة؟

الحل:

$$C = 2x + 2y$$

$$\frac{dC}{dt} = 2\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt}$$

$$\left.\frac{dC}{dt}\right|_{x=20, y=50} = 2(2) + 2(-3) = -2\ \text{cm/s}$$

3) ما مُعدَّل تغيُّر طول قُطر المستطيل في تِلكَ اللحظة؟

الحل:

$$R^2 = x^2 + y^2$$

$$2R\frac{dR}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\sqrt{(20)^2 + (50)^2}\left.\frac{dR}{dt}\right|_{x=20, y=50} = 20(2) + 50(-3)$$

$$\left.\frac{dR}{dt}\right|_{x=20, y=50} = -\frac{110}{10\sqrt{29}} = -\frac{11}{\sqrt{29}}\ \text{cm/s}$$

4) أي الكميات في المسألة مُتزايدة؟ أيُّها مُتناقصة؟ أُبَرِّر إجابتي .

الحل:

في اللحظة المذكورة تكون المساحة متزايدة (لأن معدل تغيرها موجب) بينما يتناقص كل من المحيط وطول القطر (لأن معدل تغير كل منهما سالب)

مثال38:

مُكعب طول ضلعه 10cm. بدأ المُكعب يتمدَّد. فزاد طول ضلعه بِمُعدَّل 6cm/s. وَظَلَّ مُحافِظًا على شكله:

1) أجد مُعدَّل تغيُّر حجم المُكعَّب بعد 4s من بِدء تمدُّدِه.

الحل:

ليكن حجم المكعب $\left(V\right)$ وطول ضلعه (حرفه) x

المعطى $\frac{dx}{dt}=6\text{ cm}/\text{s}$

المطلوب $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=4}=?$

بعد مرور $\left(t\right)$ ثانية يصبح طول ضلع المكعب

$$x=10+6t$$

$$V=x^3=\left(10+6t\right)^3$$

$$\frac{dV}{dt}=3\left(10+6t\right)^2\times 6$$

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=4}=3\left(34\right)^2\left(6\right)=20808\text{ cm}^3/\text{s}$$

2) أجد مُعدَّل تغيُّر مساحة سطح المُكعّب بعد 6s من بِدء تمدُّده.

الحل:

ليكن مساحة سطح المكعب $\left(A\right)$

بعد مرور $\left(t\right)$ ثانية تصبح مساحة سطح المكعب

$$A=6x^2=6\left(10+6t\right)^2$$

$$\frac{dA}{dt}=12\left(10+6t\right)\times 6$$

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{t=6}=12\left(46\right)\left(6\right)=3312\text{ cm}^2/\text{s}$$

مثال39:

خزّان أسطواني الشكل، ارتفاعه 15m، وقُطْر قاعدته 2m. مُلِئَ الخزّان بالوقود بِمُعدَّل 500L/min

1) أجد مُعدَّل ارتفاع الوقود في الخزان عند أي لحظة.

الحل:

ليكن ارتفاع الوقود في الخزان $\left(h\right)$ سيكون طول نصف قطر قاعدته $\left(1\text{ m}\right)$ ويكون حجمه

$$V=\pi r^2h=\pi h$$

المعطى

$$\frac{dV}{dt}=500\text{ L}/\text{min}=0.5\text{ m}^3/\text{min}$$

المطلوب $\frac{dh}{dt}=?$

العلاقة التي تربط الحجم بالارتفاع

$$V=\pi h$$

$$\frac{dV}{dt}=\pi\frac{dh}{dt}$$

$$0.5=\pi\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt}=\frac{1}{2\pi}\text{ m}/\text{min}$$

2) أجد مُعدَّل تَغيُّر المساحة الجانبية للوقود عند أيِّ لحظة.

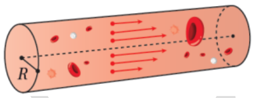
الحل:

$$A = 2\pi rh = 2\pi h$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi \frac{dh}{dt}$$

$$= 2\pi \times \frac{1}{2\pi} = 1\text{m}^2 / \min$$

مثال40:



طب: تُمثِّل المعادلة:

$$V = \frac{3125}{6}\left(R^2 - (0.0005)^2\right)$$

سرعة الدم في أحد الأوعية الدموية بالمليمتر لكل ثانية، حيث R طول نصف قُطر الوعاء بالمليمتر. إذا كان الوعاء ينقبض بحيث ينقص نصف قطره بمُعدل 0.0002mm/s، فأجِد مُعدَّل تغيُّر سرعة الدم في الوعاء في اللحظة التي يكون فيها طول نصف قطره 0.075mm.

الحل:

المعطى $$\frac{dR}{dt} = -0.0002 \text{ mm/s}$$

المطلوب $$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{R=0.075} = ?$$

العلاقة المعطاة

$$V = \frac{3125}{6}\left(R^2 - (0.0005)^2\right)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{3125}{6}\left(2R\frac{dR}{dt}\right)$$

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{R=0.075} = \frac{3125}{6}\left(2(0.075)(-0.0002)\right)$$

$$\approx -0.0156 \text{ mm/s}^2$$

مثال41:

يُمثِّل الاقتران: $T(x) = \frac{200}{1+x^2}$ درجة الحرارة (بالسيليسيوس) التي يشعر بها شخص على بُعد x مترًا من النار. إذا كان الشخص يبتعد عن النار بِمُعدَّل 2m/s، فأجد سرعة تغيُّر درجة الحرارة التي يشعُر بها الشخص عندما يكون على بُعد 5m من النار.

الحل:

المعطى $$\frac{dx}{dt} = 2 \text{ m/s}$$

المطلوب $$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{x=5} = ?$$

$$T(x) = \frac{200}{1+x^2}$$

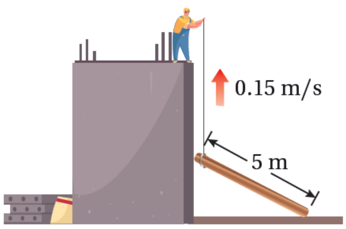
$$\frac{dT}{dt} = -\frac{400x\frac{dx}{dt}}{(1+x^2)^2}$$

$$\left.\frac{dT}{dt}\right|_{x=5} = -\frac{400(5)(2)}{\left(1+(5)^2\right)^2} = -5.9\ ^\circ\text{C/s}$$

أي أن درجة الحرارة التي يشعر بها ستقل بمعدل $6\ ^\circ\text{C/s}$ تقريبا عندما يكون على بعد 5 أمتار من مصدر النار

مثال42:

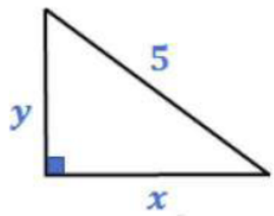
يسحب عامل بناء لوحًا خشبيًا طوله 5m إلى الأعلى بجانب مبنى لم يكتمل إنشاؤه بعد، وذلك



باستعمال حبل رُبِطَ به أحد طرفي اللوح كما في الشكل المجاور. إذا افترضت أنّ طرف اللوح المربوط بالحبل يتبع مسارًا عموديًا على جدار المبنى، وأنَّ العامل يسحب الحبل بِمُعدَّل 0.15m/s، بحيث يَظَلُّ الطرف العلوي من اللوح مُلامِسًا للجِدار، فما سرعة انزلاق الطرف الآخر للوح على الأرض عندما يكون على بُعد 3m من جدار المبنى؟

الحل:

نفرض أن بعد الطرف السفلي عن الجدار هو (x) وأن بعد الطرف العلوي عن الارض هو (y)



المعطى $\dfrac{dy}{dt}=0.15\text{ m/s}$

المطلوب $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{x=3}=?$

من نظرية فيثاغورس $x^2+y^2=25$

$$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0$$

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{y\frac{dy}{dt}}{x}$$

عندما $x=3$ يكون

$$y^2=25-9=16\Rightarrow y=4$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=3}=-\frac{4(0.15)}{3}=-0.2\text{ m/s}$$

اذن يتحرك الطرف السفلي في تلك اللحظة بسرعة 0.2 m/s نحو اليسار مقتربا من الجدار

مثال43:

يسقط الرمل من حزام ناقل بمُعدل $10\text{m}^3/\text{min}$ على قِمَّة كومة مخروطية الشكل. إذا كان ارتفاع الكومة يساوي دائِمًا ثلاثة أثمان طول قُطر قاعدتها ، فأجد كُلًا ممّا يأتي :

1) سرعة تغيُّر ارتفاع الكوّمة عندما يكون ارتفاعها 4m

الحل:

ليكن حجم كومة الرمل (V) وارتفاعها (h) وطول نصف قطر قاعدتها (r)

المعطى

$$\frac{dV}{dt}=10\text{ m}^3/\text{min}\quad,\quad h=\frac{3}{8}(2r)$$

المطلوب $\left.\dfrac{dh}{dt}\right|_{h=4}=?$

$$h=\frac{3}{8}(2r)\Rightarrow r=\frac{4}{3}h$$

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{4}{3}h\right)^2h$$

$$V=\frac{16}{27}\pi h^3$$

$$\frac{dV}{dt}=\frac{16}{9}\pi h^2\frac{dh}{dt}$$

$$10=\frac{16}{9}\pi(4)^2\frac{dh}{dt}$$

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=4}=\frac{45}{128\pi}\ \text{m / min}$$

اذن يـزداد ارتفـاع الكومـة المخروطيـة عنـد تلـك اللحظـة بمعدل (0.112) متر لكل ثانية تقريبا

2) سرعة تغيّر طول نصف قُطر قاعدة الكومة عندما يكون ارتفاعها 4m .

الحل:

$$r=\frac{4}{3}h$$

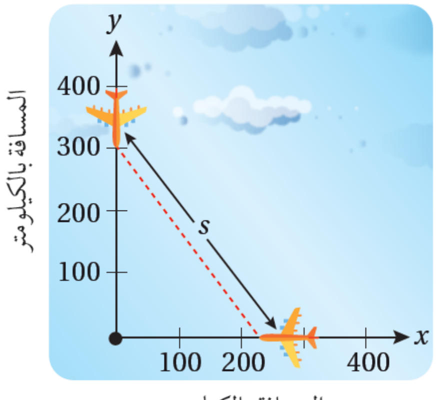
$$\frac{dr}{dt}=\frac{4}{3}\frac{dh}{dt}$$

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{h=4}=\frac{4}{3}\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=4}=\frac{4}{3}\times\frac{45}{128\pi}=\frac{15}{32\pi}\ \text{m / min}$$

اذا يزداد نصف القطر عند تلك اللحظة بمعدل (0.149) متر لكل ثانية تقريبا

مثال44:

رصد مُراقب الحركة الجوية في أحد المطارات طائرتين تُحلِقان على الارتفاع نفسه ، وتقتربان من نقطة التقاء مسار حركتيهما في زاوية قائمة كما في الشكل المجاور. كانت إحدى الطائرتين تبعد مسافة 225km عن النقطة، وتسير بسرعة 450km/h، في حين كانت الطائرة الأُخرى تبعد مسافة 300km عن النقطة، وتسير بسرعة 600km/h :



1) أجد مُعدل تغير المسافة بين الطائرتين في تلك اللحظة

الحل:

ليكن بعد الطائرة الاولى عن نقطة التقاء المسارين في لحظة ما هو (x) وبعد الطائرة الثانية عن نقطة التقاء المسارين في تلك اللحظة هو (y) والبعد بين الطائرتين هو (s)

المعطى

$$\frac{dx}{dt}=-450\ \text{km / h}\quad,\quad\frac{dy}{dt}=-600\ \text{km / h}$$

المطلوب $\left.\frac{ds}{dt}\right|_{x=225, y=300} = ?$

$$s^2 = x^2 + y^2$$

$$2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}}{s} = \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{x=225, y=300} = \frac{225(-450) + 300(-600)}{\sqrt{(225)^2 + (300)^2}}$$

$$= -750 \ \text{km/h}$$

اذن في تلك اللحظة تقل المسافة بين الطائرتين بمعدل (750) كيلومتر في الساعة

2) هل يجب على مُراقب الحركة الجوية توجيه إحدى الطائرتين لاتخاذ مسار مختلف ؟ أبرّر إجابتي.

الحل:

نحسب الوقت الذي تحتاجه كل من الطائرتين للوصول لنقطة التقاء المسارين

$$t_1 = \frac{x}{v_x} = \frac{225}{450} = 0.5h$$

$$t_2 = \frac{y}{v_y} = \frac{300}{600} = 0.5h$$

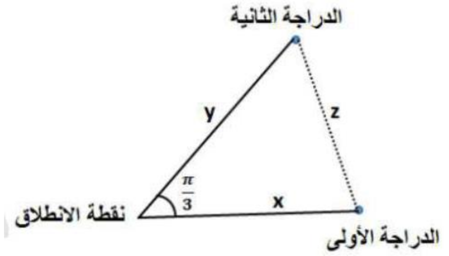
بما أن الطائرتين ستصلان لنقطة التقاء المسارين بعد نصف ساعة من لحظة رصدهما من قبل المراقب الجوي فإن اصطدامهما متوقع، ويجب على مراقب الحركة الجوية التوجيه بالتغيير اللازم في مسار احداهما أو في سرعتها على الاقل حتى لا تصلان إلى نقطة التقاء المسارين معا في الوقت نفسه

مثال45:

تحرَّكت درّاجتان في الوقت نفسه، ومن النقطة نفسها، على طريقين مستقيمين، قياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{3}$ rad.
إذا كانت سرعة الدرّاجة الأولى 15km/h، وسرعة الدرّاجة الثانية 20km/h، فأجد سرعة ابتعاد كلّ منهما عن الأُخرى بعد ساعتين من انطلاقهما.

الحل:

لتكن المسافات كما في الشكل ادناه



المعطى

$$\frac{dx}{dt} = 15 \text{ km/h} \quad , \quad \frac{dy}{dt} = 20 \text{ km/h}$$

المطلوب $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=2} = ?$

بعد t ساعة من انطلاقهما يكون $x = 15t, y = 20t$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos\frac{\pi}{3}}$$

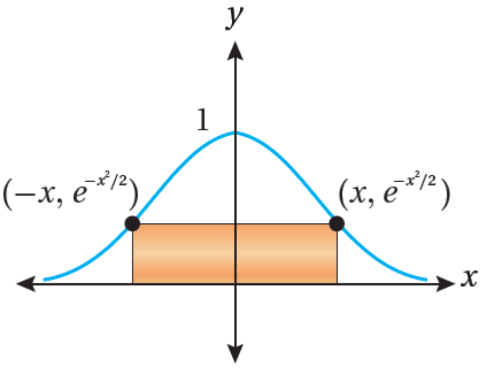
$$z = \sqrt{(15t)^2 + (20t)^2 - 2(15t)(y)\left(\frac{1}{2}\right)} = 5\sqrt{13}t$$

$$\frac{dz}{dt} = 5\sqrt{13} \text{ km/h}$$

اذن بعد ساعتين من انطلاقهما تتباعد الدراجتان كل منهما عن الاخرى بسرعة $5\sqrt{13}$ km / h

مثال46:

يُبين الشكل المجاور مستطيلًا مرسومًا داخل منحنى الاقتران: $f(x)=e^{-x^2/2}$ إذا كان x يتغيّر مع الزمن، مُغيّرًا معه موضع المستطيل، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:



1) أجد مساحة المستطيل بدلالة x .

الحل:

$$f(x)=e^{\frac{-x^2}{2}}$$

$$A=2xe^{\frac{-x^2}{2}}$$

2) أجد مُعدل تغيُّر مساحة المستطيل عندما $x=4$ وعندما $\frac{dx}{dt}=4$ cm/min .

الحل:

المعطى $\frac{dx}{dt}=4$

المطلوب $\left.\frac{dA}{dt}\right|_{x=4}=?$

$$A=2xe^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\frac{dA}{dt}=(2x)\left(-xe^{\frac{x^2}{2}}\frac{dx}{dt}\right)+\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\left(2\frac{dx}{dt}\right)$$

$$=2e^{\frac{x^2}{2}}\left(1-x^2\right)\frac{dx}{dt}$$

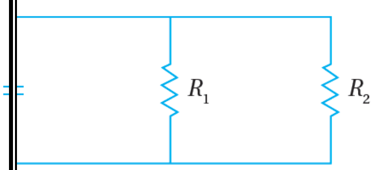
$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{x=4}=2e^{\frac{(4)^2}{2}}\left(1-(4)^2\right)(4)$$

$$=-120e^{-8}\ \text{cm}^2/\text{min}$$

مثال48:

تعطى المقاومة المكافئة R بالأوم (Ω) للمقاومتين R_1 و R_2 الموصولتين على التوازي ، كما في الشكل المجاور ، بالعلاقة الآتية:

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$$



إذا كانت R_1 و R_2 تزدادان بِمُعدّل $0.3\Omega/s$ و $0.2\Omega/s$ على الترتيب، فأجد مُعدّل تغيُّر R عندما $R_1=80\ \Omega$ و $R_2=100\ \Omega$

الحل:

عندما $R_1=80$, $R_2=100$ يكون

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{1}{80}+\frac{1}{100}=\frac{180}{8000}$$

$$R=\frac{800}{18}=\frac{400}{9}\Omega$$

المعطى $\frac{dR_1}{dt}=0.3$, $\frac{dR_2}{dt}=0.2$

المطلوب $\left.\frac{dR}{dt}\right|_{R_1=80, R_2=100} = ?$

العلاقة المعطاة : $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

$$\frac{\frac{-dR}{dt}}{R^2} = \frac{\frac{-dR_1}{dt}}{R_1^2} + \frac{\frac{-dR_2}{dt}}{R_2^2}$$

$$\frac{dR}{dt} = R^2\left(\frac{\frac{dR_1}{dt}}{R_1^2} + \frac{\frac{dR_2}{dt}}{R_2^2}\right)$$

$$\left.\frac{dR}{dt}\right|_{R_1=80, R_2=100} = \frac{160000}{81}\left(\frac{0.3}{6400} + \frac{0.2}{10000}\right)$$

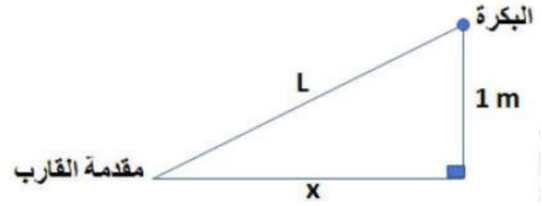
$$\approx 0.132\ \Omega / s$$

مثال49:

يسحب جمال قاربه إلى رصيف الاصطفاف باستعمال بكرة سحب ترتفع 1m عن مقدمة القارب. إذا طوت البكرة حبل السحب بسرعة 1m/s، وكان القارب يبعد عن الرصيف مسافة 8m في لحظة ما، فما سرعة اقتراب القارب من الرصيف عندئذٍ؟

الحل:

لتكن الابعاد كما في الشكل



المعطى $\frac{dL}{dt} = -1\ \text{m/s}$

المطلوب $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=8} = ?$

$$L^2 = x^2 + 1$$

$$2L\frac{dL}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$$

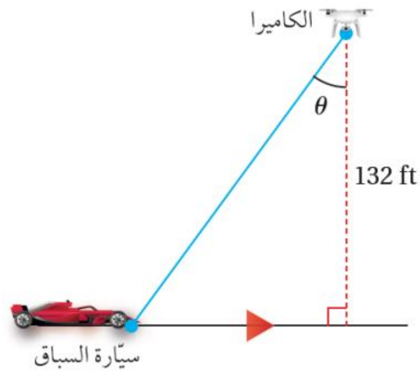
$$\frac{dx}{dt} = \frac{L}{x} \times \frac{dL}{dt} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \times \frac{dL}{dt}$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=8} = \frac{\sqrt{8^2+1}}{8} \times -1 = -\frac{\sqrt{65}}{8}\ \text{m/s}$$

اذن في تلك اللحظة يقترب القارب من الرصيف لسرعة $\frac{\sqrt{65}}{8}\ \text{m/s}$

مثال50:

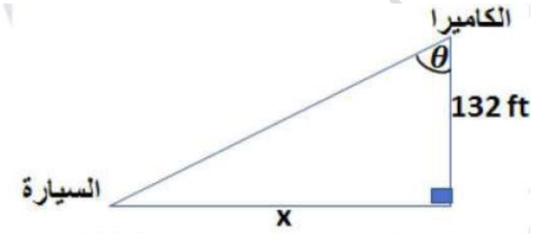
ترتفع كاميرا عن الأرض مسافة 132ft وترصد سيّارة تتحرك على مضمار سباق، وتبلغ سرعتها 264ft/s كما في الشكل المجاور :



1) أجد سرعة تغيّر الزاوية θ عندما تكون السيّارة أسفل الكاميرا تمامًا.

الحل:

لتكن الابعاد كما في الشكل



المعطى $\dfrac{dx}{dt} = -264 \text{ ft/s}$

المطلوب $\left.\dfrac{d\theta}{dt}\right|_{\theta=0} = ?$

$$\tan\theta = \frac{x}{132}$$

$$\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132}\frac{dx}{dt}$$

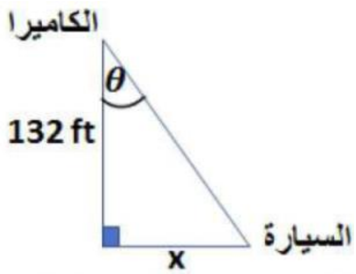
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132}\frac{dx}{dt} \times \cos^2\theta$$

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{\theta=0} = \frac{1}{132}(-264)\cos^2 0 = -2 \text{ rad/s}$$

2) أجد سرعة تغيّر الزاوية θ بعد نصف ثانية من مرور السيّارة أسفل الكاميرا.

الحل:

لتكن x كما في الشكل



بعد تجاوز السيارة الكاميرا تتزايد المسافة x حيث يصبح

$$\frac{dx}{dt} = 264 \text{ ft/s}$$

المطلوب $\left.\dfrac{d\theta}{dt}\right|_{t=0.5} = ?$

بعد نصف ثانية

$$x = 0.5 \times 264 = 132$$

$$\tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\tan\theta = \frac{x}{132}$$

$$\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132}\frac{dx}{dt}$$

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{t=0.5} = \frac{1}{132}(264) \times \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 \text{ rad/s}$$

اذن قياس الزاوية θ بسرعة في تلك اللحظة 1 rad/s تلك اللحظة

مثال51:

يتحرك جُسيم على منحنى الاقتران: $f(x) = 2\sin\dfrac{\pi x}{2}$ وعند مروره بالنقطة $\left(\dfrac{1}{3}, 1\right)$ فإن الإحداثي x لموقعه يزداد بمعدل $\sqrt{10}$ وحدة طول لكل ثانية. أجد مُعدل تغيُّر المسافة بين الجُسيم ونقطة الأصل في هذه اللحظة.

الحل:

ليكن الجسيم عند النقطة $P\left(x, 2\sin\frac{\pi}{2}x\right)$ في أي لحظة ، O نقطة الاصل وليكن $PO = L$

المعطى $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=\frac{1}{3}} = \sqrt{10}\ \text{units/s}$

المطلوب $\left.\frac{dL}{dt}\right|_{x=\frac{1}{3}} = ?$

$$L^2 = (x-0)^2 + \left(2\sin\frac{\pi}{2}x - 0\right)^2$$

$$L^2 = x^2 + 4\sin^2\frac{\pi}{2}x$$

$$2L\frac{dL}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 8\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)\left(\cos\frac{\pi}{2}x\right)\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{L}\left(x + 2\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\pi x\right)\frac{dx}{dt}$$

عندما $x = \frac{1}{3}$ فإن

$$L = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$\left.\frac{dL}{dt}\right|_{x=\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{10}}{3}}\left(\left(\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\sqrt{10}$$

$$= 1 + \frac{3\sqrt{3}\pi}{2}$$

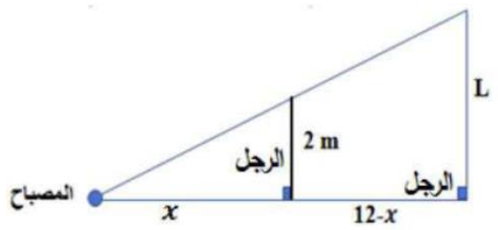
اذن يزداد بعد الجسيم عن نقطة الاصل في تلك اللحظة بسرعة $1 + \frac{3\sqrt{3}\pi}{2}$ وحدة/ثانية

مثال 52:

مصباح مُثبت بالأرض، وهو يضيئ على جدار يبعد عنه مسافة 12m. إذا سار رجل طوله 2m من موقع المصباح إلى الجدار بسرعة 1.6m/s فأجد معدّل تغيّر طول ظلّه على الجدار عندما يكون على بُعد 4m من الجدار.

الحل:

ليكن بعد الرجل عن المصباح أفقيا x وطول ظله على الجدار L



المعطى $\frac{dx}{dt} = 1.6\ \text{m/s}$

المطلوب $\left.\frac{dL}{dt}\right|_{x=8} = ?$

من تشابه المثلثات

$$\frac{L}{2} = \frac{12}{x} \Rightarrow L = \frac{24}{x}$$

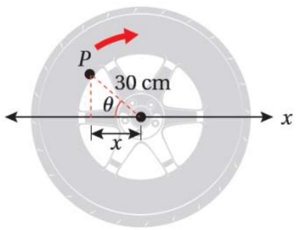
$$\frac{dL}{dt} = \frac{-24\frac{dx}{dt}}{x^2}$$

$$\left.\frac{dL}{dt}\right|_{x=8} = \frac{-24(1.6)}{64} = -0.6\ \text{m/s}$$

اذن يتناقص طول ظل الرجل عند تلك اللحظة بمعدل 0.6 متر كل ثانية

مثال 53:

عجلة سيّارة طول نصف قُطرها الداخلي 30cm، وهي تدور بمعدل 10 دورات في الثانية. رُسمت النقطة P على حافة العجلة كما في الشكل المجاور:



1) أجد $\frac{dx}{dt}$ بدلالة θ

الحل:

المعطى

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = 10 \times 2\pi = 20\pi \text{ rad / s}$$

المطلوب $\frac{dx}{dt} = ?$

$$\cos\theta = \frac{x}{30} \Rightarrow x = 30\cos\theta$$

$$\frac{dx}{dt} = -30\sin\theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$= -30(20\pi)\sin\theta = -600\pi\sin\theta$$

2) أجد $\frac{dx}{dt}$ بدلالة $\theta = 45$

الحل:

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{\theta=45^\circ} = -600\pi\sin 45^\circ$$

$$= \frac{-600\pi}{\sqrt{2}} \text{ cm / s}$$

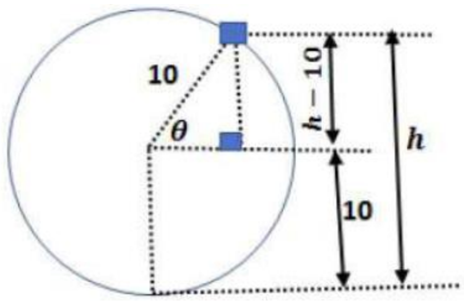
مثال54:

عجلة دوّارة في مدينة الألعاب، طول نصف قُطرها 10m، وهي تدور بمُعدل دورة

واحدة كل دقيقتين، أجد سرعة تغير ارتفاع راكب فيها عندما يكون على ارتفاع 16m فوق سطح الأرض (أُهمِل ارتفاع العربة عن الأرض)

الحل:

ليكن L ارتفاع الراكب عن سطح الارض



المعطى $\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ rad / min}$

المطلوب $\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=16} = ?$

بما أن $\sin\theta = \frac{h-10}{10}$

فعندما $h = 16$

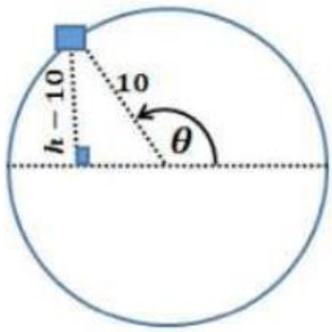
يكون $\sin\theta = 0.6$

ومنه $\cos\theta = 0.8$

$$h = 10 + 10\sin\theta$$

$$\frac{dh}{dt} = 10\cos\theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=16} = 10 \times 0.8 \times \pi = 8\pi \text{ m / min}$$



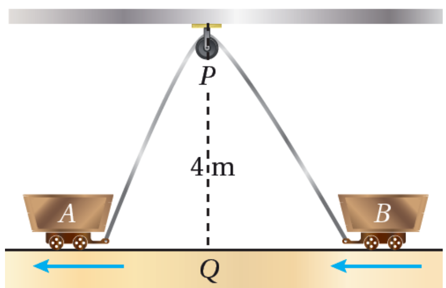
ويمكن أن يكون الارتفاع 16 m والعربة نازلة بعد اكمال نصف دورة، عندئذ يكون $\cos\theta = -0.8$ لأن تكون زاوية منفرجة ويكون:

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=16} = 10\times -0.8\times\pi = -8\pi \text{ m/min}$$

اذن على ارتفاع 16 m يكون الراكب في حالة صعود أو في حالة هبوط بسرعة مقدارها 8π m/min

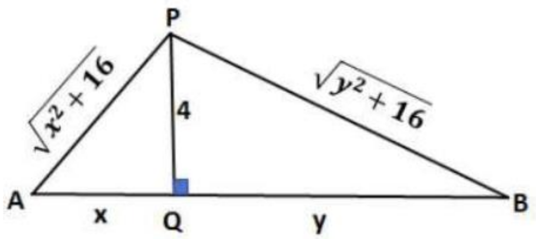
مثال55:

رُبطت العربتان A و B بحبل طوله 12m، وهو يمرّ بالبكرة P كما في الشكل المجاور. إذا كانت النقطة Q تقع على الأرض بين العربيتين أسفل P مباشرة، وتبعد عنها مسافة 4m، وكانت العربة A تتحرك بعيدًا عن النقطة Q بسرعة 0.5m/s، فأجد سرعة اقتراب العربة B من النقطة Q في اللحظة التي تكون فيها العربة A على بُعد 3m من النقطة Q، مُبررًا إجابتي.



الحل:

لتكن الابعاد كما في الشكل



المعطى $\frac{dx}{dt} = 0.5$ m/s

المطلوب $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=3} = ?$

طول الجبل

$$AP + BP = \sqrt{x^2+16} + \sqrt{y^2+16} = 12$$

عندما $x = 3$ فإن

$$\sqrt{9+16} + \sqrt{y^2+16} = 12$$

$$\sqrt{x^2+16} = 7 \Rightarrow y = \sqrt{33}$$

$$\frac{x\frac{dx}{dt}}{\sqrt{x^2+16}} + \frac{y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{y^2+16}} = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{x\sqrt{y^2+16}}{y\sqrt{x^2+16}}\frac{dx}{dt}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=3} = \frac{3\sqrt{33+16}}{\sqrt{33}\sqrt{25}}\times 0.5 = -\frac{21}{10\sqrt{33}} \text{ m}/s$$

اذن تقترب العربة B من النقطة Q بسرعة مقدارها

$$\frac{21}{10\sqrt{33}} \text{ m}/s$$

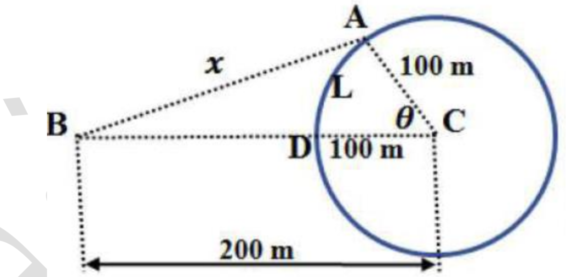
مثال56:

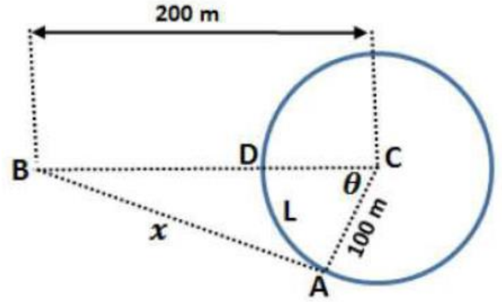
يركض عداء في مضمار دائري، طول نصف قطره 100m، بسرعة ثابتة مقدارها 7m/s، ويقف عداء آخر على بُعد 200m من مركز مضمار الركض. أجد معدل تغيُّر المسافة بين العداءين عندما تكون المسافة بينهما 200m .

الحل:

ليكن العداء الاول A والعداء الثاني B والبعد بينهما x كما في الشكل وليكن L هو طول القوس الاصغر AD

توجد حالتان لموقع العداء A كما في الرسمين الآتيين





الحالة الأولى: العداء A الى يمين B

المعطى (تكون L متناقصة) ويكون:

$$\frac{dL}{dt} = -7 \text{ m/s}$$

المطلوب $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=200} = ?$

$$L = r\theta = 100\theta$$

$$\frac{dL}{dt} = 100\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -0.07 \text{ rad/s}$$

$$x^2 = (200)^2 + (100)^2 - 2(200)(100)\cos\theta$$

$$x^2 = 50000 - 40000\cos\theta$$

$$2x\frac{dx}{dt} = 40000\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{20000\sin\theta}{2x}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\cos\theta = \frac{50000 - x^2}{40000}$$

عندما $x = 200$ فإن

$$\cos\theta = \frac{50000 - 40000}{40000} = \frac{1}{4}$$

ومنه $\sin\theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=200} = \frac{20000\frac{\sqrt{15}}{4}}{200} \times -0.07$$

$$= -\frac{7\sqrt{15}}{4} \text{ m/s}$$

الحالة الثانية: العداء A الى يسار B

عندئذ يتزايد طول القوس L ويكون $\frac{dL}{dt} = 7$

ويكون $\frac{d\theta}{dt} = 0.07 \text{ rad/s}$ وعليه فإن:

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=200} = \frac{20000\dfrac{\sqrt{15}}{4}}{200}\times 0.07$$

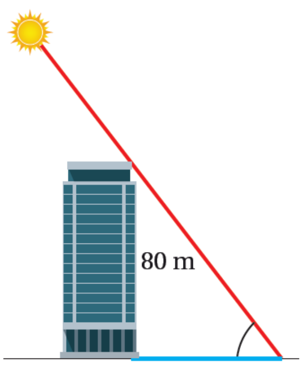
$$= \frac{7\sqrt{15}}{4}\ \mathrm{m/s}$$

اذن عندما تكون المسافة بين العدائين 200m فإنهما يقتربان من بعضهما أو يتباعدان عن بعضهما بسرعة مقدارها $\frac{7\sqrt{15}}{4}\ \mathrm{m/s}$

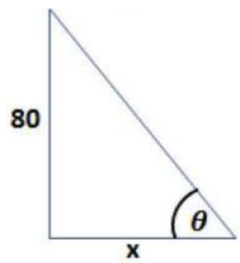
مثال57:

سطعت الشمس في أحد الأيام فوق مبنى ارتفاعه 80m فكان طول ظل المبنى في هذه اللحظة 60m كما في الشكل المجاور، أجد معدل تغير طول ظل المبنى في هذه اللحظة بوحدة cm/min مُقربًا إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة، علمًا بأن الشمس في هذا اليوم ستمر فوق المبنى تمامًا.

إرشاد: تُكمل الأرض دورة كاملة حول نفسها كل 24 ساعة



الحل:



ليكن طول ظل المبنى x

وزاوية ارتفاع الشمس θ

الشمس في هذا اليوم ستمر فوق المبنى تماما يعني أن الزاوية θ متزايدة

المعطى

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{2\pi\ \mathrm{rad}}{24h}=\frac{\pi}{12}\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{h}}=\frac{\pi\ \mathrm{rad}}{12\times 60\ \mathrm{min}}=\frac{\pi}{720}\mathrm{rad/min}$$

المطلوب $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=60}=?$

العلاقة التي تربط بين المتغيرين هي:

$$\tan\theta=\frac{80}{x}$$

$$\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt}=-\frac{80}{x^2}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{-x^2\sec^2\theta}{80}\times\frac{d\theta}{dt}$$

عندما $x=60$ فإن

طول وتر المثلث القائم في الشكل اعلاه يساوي

$$\sqrt{60^2+80^2}=100$$

ومنه $\sec\theta=\frac{100}{60}=\frac{5}{3}$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=60}=-\frac{60^2\left(\dfrac{25}{9}\right)}{80}\times\frac{\pi}{720}=-\frac{25\pi}{144}\mathrm{m/min}$$

لتحويل الوحدة الى $\mathrm{cm/min}$ نضرب السرعة في 100 فتكون

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=60}=-\frac{2500\pi}{144}\mathrm{cm/min}$$

اذن يتناقص طول ظل البناية في تلك اللحظة بسرعة مقدارها $54.5\ \text{cm}/\text{min}$ تقريبا

حلول كتاب التمارين: المعدلات المرتبطة بالزمن

مُلىء بالون كروي بالهيليوم بمعدل $8\text{cm}^3/\text{s}$ أجد معدل تغير نصف قطر البالون في كل من الحالات الآتية:

1 عندما يكون طول نصف قطره 12cm

الحل:

المعطى $\frac{dV}{dt}=8$

المطلوب $\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=12}$

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt}=4\pi r^2\frac{dr}{dt}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dV}{dt}\right|_{r=12}=576\pi\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=12}=8$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=12}=\frac{8}{576\pi}=\frac{1}{72\pi}\ \text{cm}/\text{s}$$

2 عندما يكون حجمه 1435cm^3 (أقرب إجابتي إلى أقرب جزء من مئة)

الحل:

المطلوب $\left.\frac{dr}{dt}\right|_{V=1435}$

$$r=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}=\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{V=1435}=\frac{1}{3}\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{-2}{3}}\times\frac{3}{4\pi}\left.\frac{dV}{dt}\right|_{r=12}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{3(1435)}{4\pi}\right)^{\frac{-2}{3}}\times\frac{3}{4\pi}\times 8$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{4305}{4\pi}\right)^{\frac{-2}{3}}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{4\pi}{4305}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{2}{\pi}\sqrt[3]{\left(\frac{4\pi}{4305}\right)^{2}}\approx 0.01\text{ cm / s}$$

حل آخر:

عندما يكون الحجم (1435 cm^3) يكون طول نصف القطر

$$\sqrt[3]{\frac{3(1435)}{4\pi}}\approx 7\text{ cm}$$

نستعمل العلاقة بين المعدلين من السؤال 1 السابق

$$\frac{dV}{dt}=4\pi r^2\frac{dr}{dt}$$

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{r=7}=196\pi\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=7}=8$$

$$=\frac{8}{196\pi}\approx 0.01\text{ cm / s}$$

3 إذا مُلىء مدة 33.5s

الحل:

$$t=33.5$$

$$V=8\times 33.5=238\text{ cm}^3$$

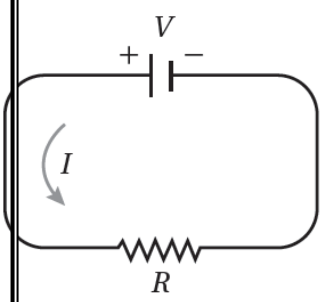
عندما يكون الحجم ($268\ \ \text{cm}^3$) يكون طول نصف القطر

$$\sqrt[3]{\frac{3(268)}{4\pi}}\approx 4\text{ cm}$$

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{r=4}=64\pi\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=4}=8$$

$$=\frac{8}{64\pi}=\frac{1}{8\pi}\approx 0.04\text{ cm / s}$$

4 تمثل المعادلة: $V=IR$ جهد الدارة الكهربائية (بالفولت) المبينة في الشكل المجاور، حيث I شدة التيار بالأمبير، و R المقاومة بالأوم إذا كان جهد الدارة يزداد بمعدل 1volt/sec ، وشدة التيار تقل بمعدل $\frac{1}{3}$ amp/sec ، أوجد معدل تغير R عندما $V=12$ ، و $I=2$



الحل:

$$V=IR$$

$$\frac{dV}{dt}=I\frac{dR}{dt}+R\frac{dI}{dt}$$

المعطى $\frac{dV}{dt}=1\,,\ \frac{dI}{dt}=-\frac{1}{3}$

المطلوب $\frac{dR}{dt}$ عندما $I=2\,,V=12$

عندما $I=2\,,V=12$ ، فإن: $R=6$

بالتعويض في المعادلة أعلاه ينتج أن:

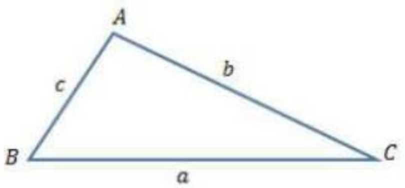
$$1 = 2\frac{dR}{dt} + 6\left(-\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \frac{dR}{dt} = 1.5\,\Omega/s$$

إذا كانت θ الزاوية المحصورة بين الضلعين اللذين طول كل منهما s في مثلث متطابق الضلعين، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

5 أثبت أن مساحة المثلث تعطى بالمعادلة:

$$A = \frac{1}{2}s^2 \sin\theta$$

الحل:



معلوم أن مساحة المثلث تساوي نصف ناتج ضرب طولي أي ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما

$$A = \frac{1}{2}ab\sin C$$

اذا كان $a = b = s\ ,\ C = \theta$ فإن:

$$A = \frac{1}{2}s^2 \sin\theta$$

6 اذا كانت الزاوية θ تزداد بمعدل $\frac{1}{2}$ rad/min، فأجد معدل تغير مساحة المثلث عندما $\theta = \frac{\pi}{6}$ علماً بأن طول الضلعين المتطابقين ثابت

الحل:

المعطى $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}$

المطلوب $\left.\frac{dA}{dt}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}}$ حيث s ثابت

$$A = \frac{1}{2}s^2 \sin\theta$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}s^2 \cos\theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}s^2\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{8}s^2$$

7 يتحرك جسيم على منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{10}{1+x^2}$ إذا كان معدل تغير الاحداثي x هو 3cm/s فأجد معدل تغير الاحداثي y عندما $x = 20$

الحل:

المعطى $\frac{dx}{dt} = 3$

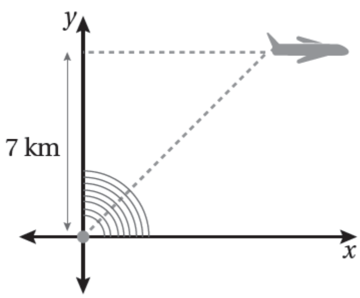
المطلوب $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=20}$

$$y = \frac{10}{1+x^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-20x}{(1+x^2)^2}\frac{dx}{dt}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=20} = \frac{-1200}{(401)^2} \approx -0.007\ \text{cm/s}$$

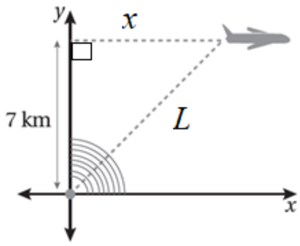
8 حلقت طائرة على ارتفاع 7km ومرت في أثناء تحليقها مباشرة فوق رادار كما في الشكل المجاور وعندما أصبح البعد بينها وبين الرادار 10km رصد الرادار معدل تغير البعد بينه وبين الطائرة، فكان 300km/h أجد سرعة الطائرة في هذه اللحظة



الحل:

المعطى $\dfrac{dL}{dt} = 300$

المطلوب $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{L=10}$



$$L^2 = x^2 + 49$$

$$x = \sqrt{L^2 - 49}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{L\dfrac{dL}{dt}}{\sqrt{L^2 - 49}}$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{L=10} = \frac{10 \times 300}{\sqrt{100-49}} = \frac{3000}{\sqrt{51}} \approx 420 \text{ km/h}$$

تمارين وتدريبات :

(1
خزان مخروطي رأسه للأسفل وزاوية رأسه (60) يتسرب منه الماء الى حوض اسطواني دائري قائم نصف قطر قاعدته (4)cm ، احسب معدل ارتفاع الماء في الاسطوانة عندما يكون معدل هبوط سطح الماء (1) cm/s وارتفاع الماء في المخروط (3) cm

---

2) مخروط نصف قطر قاعدته (80) سم وارتفاعه (160) سم يتسرب الماء في اسطوانة نصف قطرها (50) سم ، احسب ارتفاع الماء في المخروط في اللحظة التي يكون فيها معدل هبوط الماء في المخروط مساويا لمعدل ارتفاع الماء في الاسطوانة

---

3) ماسورة مجوفة طولها ثابت ونصف قطرها الداخلي والخارجي يتغيران بحيث يبقى الحجم ثابت ، اذا كان نصف قطرها الداخلي يزداد بمعدل $(\frac{1}{2})$ cm/s ، احسب معدل التغير في نصف القطر الخارجي عندما يكون نصف القطر الداخلي (6) cm والخارجي (8) cm

---

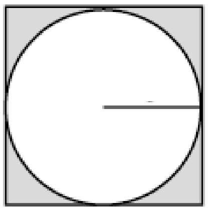
4) كرة حديدية قطرها (8) cm مغطاة بطبقة من الجليد يذوب بمعدل (10) cm^3/s ، احسب ما يلي :

a) ما سرعة نقصان سمك الجليد عندما السمك (2)

b) ما سرعة نقصان مساحة السطح الخارجي

5) مخروط ارتفاعه يساوي نصف القطر ، احسب طول نصف القطر عندما يكون معدل زيادة نصف القطر يساوي $\left(\frac{3}{4}\right)$ ومعدل زيادة الحجم يساوي $\left(\pi 2\right)$

6) مربع يتمدد بحيث يزداد طول ضلعه بمعدل (4) cm/s مرسوم داخله دائرة تتمدد معه ، احسب معدل التغير في المساحة بين المربع والدائرة عندما طول ضلع المربع (20) cm



7) كرة نصف قطرها (10) cm وضع داخلها مخروط بحيث رأسه ومحيطه يلامس الكرة ، اذا كان ارتفاع المخروط يزداد بمعدل $\left(\frac{1}{32}\right)$ cm/s ، احسب معدل تغير حجم المخروط في اللحظة التي يكون فيها ارتفاعه (8) cm

8) مثلث متساوي الاضلاع يقع داخل دائرة بحيث تقع رؤوسه على الدائرة ، تتمدد الدائرة بحيث يزداد نصف قطرها بمعدل (2) cm/s ، احسب معدل التغير في مساحة المثلث عندما يصبح نصف القطر (10) cm

9) تتمدد اضلاع مثلث متساوي الاضلاع بمعدل (2) cm/s رسمت داخله دائرة ، احسب معدل تمدد المساحة المحصورة بين المثلث والدائرة عندما يكون طول ضلع المثلث (12) cm

10) يمشي رجل طوله $(1,8)\ cm$ على رصيف بمعدل $(2)cm/s$ مبتعدا عن مصباح يرتفع (5) عن الرصيف ، احسب ما يلي :

أ) معدل التغير في ظل الرجل على الارض

ب) سرعة رأس الظل

11) مصباح معلق فوق منضدة دائرية افقية ارتفاعها عن الارض (90) cm ونصف قطرها (20) cm ، تحرك المصباح رأسيا للأسفل نحو المنضدة بسرعة $6\ cm/s$ ، احسب معدل التغير في نصف قطر دارة ظل المنضدة عندما يكون ارتفاع المصباح عن المنضدة (60) cm

12) طريقان متقاطعين الزاوية بينهما (60) بدأ شخص الحركة على احد الطريقين بسرعة $2cm/s$ وفي نفس الوقت بدأ شخص ثاني الحركة على الطريق الاخر مبتعدا بسرعة $3cm/s$ ، احسب معدل تغير المسافة بين الشخصين بعد (4) ثواني من الحركة

13) abc مثلث متساوي الساقين فيه $ab = bc = 8\ cm$ ، $ac = 12\ cm$ ، تحركت نقطة من (a) باتجاه (b) بسرعة (4)cm/s وفي نفس الوقت تحركت نقطة ثانية من (b) باتجاه c بسرعة (3) cm/s ، احسب معدل التغير في المسافة بين النقطتين بعد مرور ثانية واحدة

14) بدأت نقطة الحركة من الاصل على المستقيم $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ في الربع الاول بسرعة

(4) وحدات/s، احسب معدل التغير في المسافة بين النقطة المتحركة والنقطة الثابتة $(0,5)$ بعد مرور ثانيتين من الحركة

---

15) بدأ بالون بالصعود للأعلى بسرعة $2cm/s$ وبعد (10) ثواني انحرف مساره بزاوية تميل 30 عن الافق ، احسب معدل تغير المسافة بين البالون ونقطة البداية بعد مرور (5) ثواني عن انحرافه

15) بدأت نقطة الحركة على دائرة مركزها الاصل من النقطة $(0,10)$ بعكس اتجاه عقارب الساعة بحيث يزداد طول قوس الدائرة الذي ترسمه اثناء حركتها بمعدل $8cm/s$ ، احسب معدل ابتعاد النقطة المتحركة عن $(0,10)$ عندما يقابل القوس الذي ترسمه زاوية مركزها $(\frac{\pi}{3})$

---

16) اذا كانت A بدأت الحركة من $(10,0)$ على محور السينات بسرعة (4) وحدات في الثانية باتجاه الاصل وفي نفس الوقت تحركت اخرى من الاصل على منحنى $y=x$ في الربع الاول بسرعة $\sqrt{2}$ ، فما معدل تغير المسافة بين النقطتين بعد مرور ثانيتين

---

17) بدأت نقطة الحركة من الاصل في الاتجاه الموجب لمحور الصادات بسرعة (3)cm/s ، احسب معدل تغير البعد بينها وبين النقطة $(2,5)$ بعد مرور ثانيتين من الحركة

---

18) تتحرك نقطة على منحنى $f(x)=\sqrt{x^2+5}$ بحيث يزداد احداثي السيني بمعدل $3\sqrt{10}\ cm/s$ ، احسب معدل تغير البعد عن النقطة $(0,1)$ عندما $x=2$

القيم الحرجة

هي :

1) اصفار المشتقة الاولى

2) المشتقة غير موجودة

امثلة :

احسب القيم الحرجة للاقترانات التالية :

1) $f(x)=x^2-6x+12$ علــى الفتــرة $[0,5]$

الحل :

$$f'(x)=2x-6=0 \Rightarrow x=3$$

القيم الحرجة : $\{3\}$

2) $f(x)=\frac{x^3}{3}-4x-12$ علــى الفتــرة $[1,6)$

الحل :

$$f'(x)=x^2-4=0 \Rightarrow x=2,-2$$

تهمل x=-2

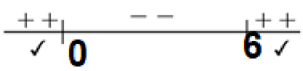
القيم الحرجة : $\{2\}$

3) $f(x)=\sqrt{x^2-6x}$

الحل :

نجد المجال :

$$x^2-6x=0$$
$$x(x-6)=0$$
$$x=0,\ 6$$



$(-\infty,0][6,\infty)$

$$f'(x)=\frac{2x-6}{2\times\sqrt{x^2-6x}}$$

البسط :

$$2x-6=0$$
$$x=3$$

تهمل

المقام :

$$x^2-6x=0$$
$$x=0\ ,6$$

القيم الحرجة : $\{0,6\}$

واجب

اذا كانت $f(x)=2x^3-2ax^2+6x+9$، وكان له قيمة حرجة عندما $x=2$ ، فما قيم (a)

التزايد و التناقص

1) نجد القيم الحرجة

2) نعين خط الاعداد

3) نختبر الاشارات على اقتران $f'(x)$

4) $+ \Leftarrow$ متزايد ، $- \Leftarrow$ متناقص ،
$0 \Leftarrow$ ثابت

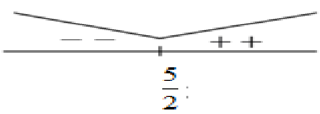
امثلة :

اوجد فترات التزايد و التناقص لكل مما يلي:

1) $f(x)=x^2-5x+18$

الحل :

$$f'(x)=2x-5=0 \Rightarrow x=\frac{5}{2}$$



متناقص $(-\infty,\frac{5}{2})$

متزايد $(\infty,\frac{5}{2})$

القيم القصوى

❖ يقصد بالقيم القصوى إذا لم يحدد السؤال هي القيم العظمى والصغرى المحلية و المطلقة .

❖ القيم المحلية تحدث في الداخل فقط والقيم المطلقة تحدث في الداخل وعلى الأطراف.

❖ عند القيم القصوى الداخلية تكون المشتقة تساوي صفر او غير موجودة

❖ أي أن نقط القيم القصوى المحلية هي نقط حرجة.

❖ نلاحظ أنه عندما يتحول الاقتران من متناقص إلى متزايد فإنه يمر بقيمة صغرى وعندما يتحول من متزايد إلى متناقص فإنه يمر بقيمة عظمى

❖ أي اقتران متصل على $[a,b]$ فإنه يوجد له قيم قصوى مطلقة.

❖ عند ايجاد القيم القصوى للاقتران f(x) نجد القيم الحرجة والتزايد والتناقص مع الانتباه لأطراف الفترة .

امثلة :

احسب القيم القصوى لكل مما يلي :

(1) $f(x)=x^2-2x+5$

$f'(x)=2x-2=0 \rightarrow x=1$

$1=s \Leftarrow 0=2-s2=(s)R$

$--\quad ++$

صغرى محلية عندما $x=1$

بحيث $f(1)=1-2+5=4$

$(2)\ f(x)=\dfrac{x^3}{3}-2x-15x-12,\ [-5,7]$

الحل :

$f'(x)=x^2-2x-15=0$
$(x-5)(x+3)=0$
$x=5,-3$

$++\quad --\quad ++$

-5   -3   5   7

متزايد $(5,7)$ $(-5,-3)$

متناقص $(-3,5)$

$(3)\ f(x)=x^3+3x+9$

الحل :

$f'(x)=3x^2+2=0$
$x^2=\dfrac{-3}{2}$
مرفوضة

$f(x)$ متزايد على $\mathbb{R}$

$++\ ++\ ++$

واجب

$(1)\ f(x)=x^3-6x^2$

$(2)\ f(x)=2x+\dfrac{1}{2x}\quad ,x\neq 0$

$(4)\ f(x)=5\cos x\quad ,[0,2\pi]$

الحل :

$f'(x)=-5\sin x=0$
$\sin x=0 \rightarrow x=\pi,2\pi$

$--\quad ++$

0   2π

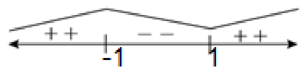
متزايد على $(\pi,2\pi)$

متناقص $(0,\pi)$

$(2) \quad f(x) = x^3 - 3x$

الحل :

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$
$x^2 = 1 \to x = 1, -1$



$x = -1$ عظمى محلية

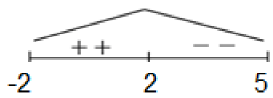
$f(-1) = 2$

$x = 1$ صغرى محلية ، $f(1) = -2$

3) $f(x) = 4x - x^2$ على $[-2, 5]$

الحل :

$f'(x) = 4 - 2x = 0 \to x = 2$



$f(2) = 4$ عظمى محلية مطلقة

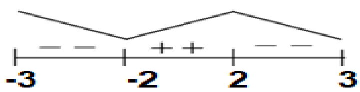
$f(-2) = -12$ صغرى مطلقة

$f(5) = -5$ صغرى

4) $f(x) = 12x - x^3 \quad , x \in [-3, 3]$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = 12 - 3x^2 = 0 \to x = \pm 2$$



$f(-3) = -9$ عظمى

$f(2) = 16$ عظمى محلية مطلقة

$f(-2) = -16$ صغرى محلية مطلقة

$f(3) = 9$ صغرى

$(5) \quad f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 4x)^2}$

الحل :

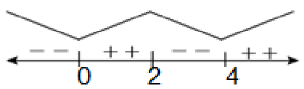
$f(x) = (x^2 - 4x)^{\frac{2}{3}}$

$f'(x) = \frac{2}{3}(x^2 + 4x)^{\frac{-1}{3}}(2x - 4)$

$= \dfrac{2(2x-4)}{3(x^2 - 4x)^{\frac{1}{3}}}$

البسط :
$2(2x - 4) = 0$
$x = 2$

المقام :
$x^2 + 4x = 0$
$x(x - 4) = 0$
$x = 0, 4$



$x = 0$ صغرى محلية $f(0) = 0$

$x = 2$ عظمى محلية $f(2) = \sqrt[3]{16}$

$x = 4$ صغرى محلية $f(4) = 0$

$(6) \quad f(x) = (x^3 - 9x)^{\frac{1}{3}}$

الحل :

$f'(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 9x)^{\frac{-2}{3}}(3x^2 - 9)$

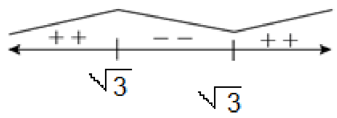
$f'(x) = \dfrac{3x^2 - 9}{3\sqrt[3]{(x^3 - 9x)^2}}$

البسط :
$3x^2 - 9 = 0$
$x = \pm\sqrt{3}$

المقام :
$x^3 - 9x = 0$
$x(x^2 - 9) = 0$
$x = 0, \pm 3$

القيم الحرجة $\{0,\pm 3,\pm\sqrt{3}\}$

لان المقام موجب ندرس اشارة البسط



متزايد $(\sqrt{3},\infty)$ $(-\infty,-\sqrt{3})$

متناقص $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$

عظمى محلية $x=-\sqrt{3}$

صغرى محلية $x=\sqrt{3}$

$(7)\ f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x-1}}\ ,x>1$

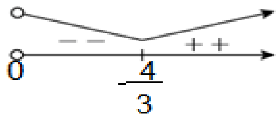
الحل :

$$f'(x)=\frac{2x\times\sqrt{x-1}-\dfrac{x^2}{2\sqrt{x-1}}}{x-1}$$

$$f'(x)=\frac{3x^2-4x}{2(x-1)^{\frac{3}{2}}}$$

اصفار البسط : $3x^2-4x=0$

$x=\frac{4}{3},0$



(حرجة) $x=\frac{4}{3}$

متزايد $(\frac{4}{3},\infty)$

متناقص $(1,\frac{4}{3})$

صغرى محلية $x=\frac{4}{3}$

$(8)\ \ f(x)=x^4-6x^2-8x+3$

الحل :

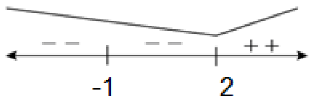
$f'(x)=4x^3-12x-8=0$

بالتجريب : $x=-1$ تركيبية :

$(x+1)(x^2-x-2)=0$

$(x+1)(x-2)(x+1)=0$

$x=2,-1$



متزايد $(2,\infty)$

متناقص $(-\infty,2)$

صغرى محلية مطلقة $x=2$ $f(2)=-21$

9) $f(x)=4x^2-bx$ يوجد قيمة صغرى عندما $x=1$ ، فما قيمة b

الحل :

$f'(x)=0$

$8-b=0\rightarrow b=8$

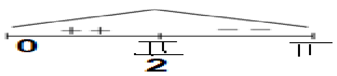
تدريب $f(x)=\cos x+\sin x,[0,2\pi]$

10) $f(x)=x\sin x+\cos x\quad [0,\pi]$

الحل:

$f'(x)=x\cos x+\sin x-\sin x$

$x\cos x=0\rightarrow x=0,\frac{\pi}{2}$



$f(2)=\frac{\pi}{2}$ عظمى محلية ومطلقة

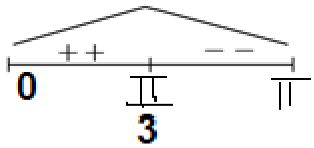
$f(0)=1$ صغرى

$f(\pi)=-1$ صغرى محلية ومطلقة

(11) $f(x)=\cos x+\sin^2 x$ $,[0,\pi]$

الحل:

$$f'(x) = -\sin x + 2\sin x\cos x$$
$$= \sin x(-1+2cisx) = 0$$
$$\sin x = 0 \rightarrow x = 0, \pi, 2\pi$$
$$2\cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$
$$x = 60^{\circ}$$



$f(\frac{\pi}{3}) = \frac{5}{4}$, عظمى محلية ومطلقة

$f(0) = 1$ صغرى

$f(\pi) = -1$ صغرى مطلقة

تدريب :

احسب القيم القصوى لكل مما يلي :

$(1)\ f(x) = x^3 - 6x^2 + 5 \quad ,[-3,5]$

$(2)\ f(x) = \sqrt[3]{x} \quad ,[-8,8]$

$(3) f(x) = \sin^2 x + \cos x \quad ,[0,2\pi]$

$(4) f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x}$

$(5) f(x) = \sqrt{6x - x^2}$

$(6) f(x) = \sqrt[3]{x - 3}$

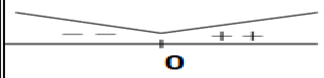
$(7) f(x) = \sqrt[3]{(x+3)^2} - 5 \quad ,[-3,3]$

$(8) f(x) = \frac{x^2}{x^2+1} \quad ,[-2,2]$

$(12) \quad f(x) = (x-1)e^x$

الحل:

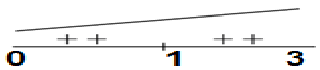
$$f'(x) = (x-1)e^x + e^x$$
$$f'(x) = e^x(x-1+1) = xe^x = 0$$
$$e^x = 0 \times \quad x = 0$$



$f(0) = (0-1)e^0 = -1$ قيمة صغرى محلية ومطلقة

$(13) \quad f(x) = \frac{e^x}{1+x^2} \quad [0,3]$

$$f'(x) = \frac{(1+x^2)e^x - e^x 2x}{(1+x^2)^2} = 0$$
$$(1+x^2)e^x - e^x 2x = 0$$
$$e^x((1+x^2) - 2x) = 0$$
$$e^x \neq 0, \qquad ((1+x^2) - 2x) = 0$$
$$x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$(x-1)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1$$



$f(0) = 1$ قيمة صغرى مطلقة

$f(3) = \frac{e^3}{10}$ قيمة عظمى مطلقة

$(14) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x^2} \quad ,\left[\frac{1}{2}, 4\right]$

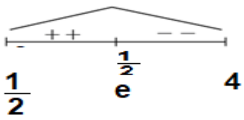
الحل :

$$f'(x)=\frac{x^2\times\frac{1}{x}-\ln x\,(2x)}{x^4}=0$$

$f'(x)=x-2x\ln x=0$

$x=0$ تهمل

$x(1-2\ln x)=0\Rightarrow \ln x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=e^{\frac{1}{2}}$



$f(e^{\frac{1}{2}})=2$ عظمى مطلقة

$f(\frac{1}{2})=\frac{-0.7}{0.25}$ صغرى مطلقة

$f(4)=\frac{\ln 4}{16}$ صغرى

$(15)\quad f(x)=x^2\ln x$

الحل :

نلاحظ ان المجال هو x>0

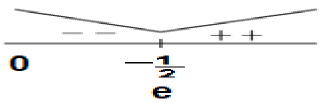
$f'(x)=x^2(\frac{1}{x})+\ln x\,(2x)=0$

$x+2x\ln x=0$

$x(1+2\ln x)=0$

$x=0$ تهمل

$1+2\ln x=0\Rightarrow \ln x=\frac{-1}{2}\Rightarrow x=e^{\frac{-1}{2}}$



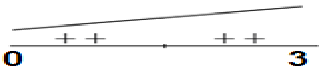
متناقص على $\left(0,e^{\frac{-1}{2}}\right)$ متزايد على $\left(e^{\frac{-1}{2}},\infty\right)$

$f(e^{\frac{-1}{2}})=\frac{-1}{2}e^{-1}$ قيمة صغرى محلية ومطلقة

$(16)\quad f(x)=x\ln(x+3),\ [0,3]$

الحل :

$f'(x)=\frac{x}{x+3}+\ln(x+3)\quad>0$



$f(0)=0$ صغرى مطلقة

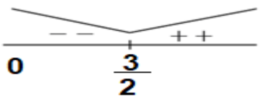
$f(3)=3\ln 6$ عظمى مطلقة

$(17)\quad f(x)=\ln(x^2-3x+4)$

الحل :

$f'(x)=\frac{2x-3}{x^2-3x+4}$

$2x-3=0\Rightarrow x=\frac{3}{2}$



$f(\frac{3}{2})=\ln\frac{7}{4}$ صغرى محلية ومطلقة

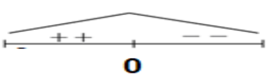
متناقص على $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$ متزايد على $\left(\frac{3}{2},\infty\right)$

$(18)\quad f(x)=e^{-x^2}$

الحل:

$f'(x)=-2xe^{-x^2}=0$

$x=0$



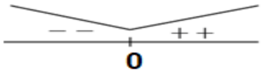
متزايد على $(-\infty,0)$. متناقص على $(0,\infty)$

$f(0)=1$ عظمى محلية مطلقة

$$(19)\quad f(x)=2^{x^2-3}$$

الحل:

$$f'(x)=2x(\ln 2)2^{x^2-3}=0\Rightarrow x=0$$



متزايد على $(0,\infty)$

متناقص على $(-\infty,0)$

$f(0)=\dfrac{1}{8}$ صغرى محلية ومطلقة

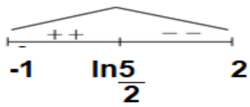
$$(20)\quad f(x)=5e^{x}-e^{x},[-1,2]$$

الحل :

$$f'(x)=5e^{x}-2e^{x}=e^{x}(5-2e^{x})=0$$

$$e^{x}\neq 0$$

$$5-2e^{x}=0\Rightarrow e^{x}=\frac{5}{2}\Rightarrow x=\ln\frac{5}{2}$$



$$f(\ln\frac{5}{2})=\frac{15}{2}$$

عظمى مطلقة

$$f(-1)=5e^{-1}-e^{-2}$$

$$f(2)=5e^{2}-e^{4}$$

صغرى مطلقة

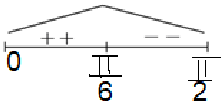
$$(21)\quad f(x)=2\cos x+\sin 2x\quad ,\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

الحل:

$$\begin{aligned}f'(x)&=-2\sin x+2\cos 2x\\&=-\sin x+\cos 2x=0\\&=-\sin x+1-2\sin^2 x=0\\&=2\sin^2 x+\sin x-1=0\\&=(2\sin x-1)(\sin x+1)=0\end{aligned}$$

$$2\sin x-1=0\Rightarrow \sin x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{6}$$

$$\sin x=-1\Rightarrow x=\frac{3\pi}{2}$$



$f(\frac{\pi}{2})=0$ صغرى مطلقة

$f(0)=2$ صغرى

$f(\frac{\pi}{6})=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ عظمى محلية ومطلقة

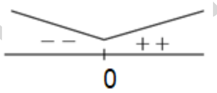
$$(22)\quad f(x)=\sec x\quad ,\left[\frac{-\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$$

الحل:

$$f'(x)=\sec x\tan x=0$$

$$\sec x=0$$

$$\tan x=0\Rightarrow x=0$$



$f(\frac{\pi}{3})=2$ عظمى مطلقة

$f(\frac{-\pi}{6})=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ عظمى

$f(0)=1$ صغرى مطلقة

تدريب :

احسب فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى المحلية والمطلقة ان وجدت لكل مما يلي :

(1) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 135$

(2) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+9}$

(3) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$

(4) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x-3)$

(5) $f(x) = \sin^2 x + \sin x \quad ,[0, 2\pi]$

(6) $f(x) = x + \sin x \quad ,[0, 2\pi]$

(7) $f(x) = 1 + \cos^2 x \quad ,\left[\dfrac{\pi}{4}, \pi\right]$

(8) $f(x) = (x^2 - 4)^3 \quad ,[-2, 3]$

(9) $f(x) = x - 2\sin x \quad ,[-2\pi, 2\pi]$

(10) $f(x) = x + \dfrac{4}{x} \quad ,[-8, -1]$

التقعر ونقاط الانعطاف

قاعدة:

اذا كانت $f''(x) > 0$ فإن الاقتران مقعر للاعلى

اذا كانت $f''(x) < 0$ فإن الاقتران مقعر للاسفل

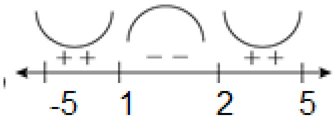
امثلة :

اوجد فترات التقعر للأعلى وللأسفل ونقاط الانعطاف لكل مما يلي :

$f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2$ (1 على $[-5, 5]$

الحل :

$$f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x$$
$$f''(x) = 12x^2 - 36x + 24 = 0$$
$$= x^2 - 3x + 2 = 0$$
$$= (x-2)(x-1) = 0$$



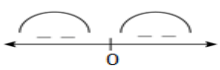
مقعر للأعلى $(-5, 1) \quad (2, 5)$

مقعر للأسفل $(1, 2)$

$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ (2

الحل :

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$$
$$f''(x) = \frac{-2}{9}x^{\frac{-4}{3}} = \frac{-2}{9\sqrt[3]{x^4}} = 0$$
$$x = 0$$



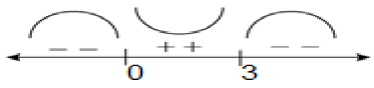
مقعر للأسفل

على $(-\infty, \infty)$

(3 $f(x) = 6x^3 - x^4$

الحل :

$$f'(x) = 18x^2 - 4x^3$$
$$f''(x) = 36x - 12x^2 = 0$$
$$12x(3-x) = 0 \Rightarrow x = 0,3$$

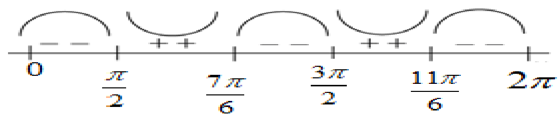


نقاط الانعطاف $(0,0)$ $(3,81)$

(4 على $f(x) = 2\cos x + \frac{1}{2}\sin 2x$

الحل :

$$f'(x) = -2\sin x + \frac{1}{2} 2\cos 2x$$
$$f''(x) = -2\cos x - 2\sin 2x = 0$$
$$= -2\cos x - 2(2\sin x \cos x) = 0$$
$$-2\cos x(1 + 2\sin x) = 0$$
$$-\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$
$$1 + 2\sin x = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{-1}{2}$$
$$x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$



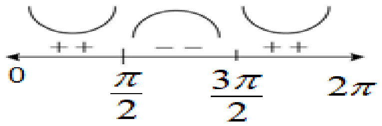
نقاط الانعطاف : $(\frac{\pi}{2},0)$ $(\frac{7\pi}{6}, \frac{-3\sqrt{3}}{4})$ $(\frac{3\pi}{2},0)$ $(\frac{11\pi}{6}, \frac{3\sqrt{3}}{4})$

---

(5) $f(x) = \sin^2\frac{x}{2} - \cos x \quad ,[0,2\pi]$

الحل :

$$f'(x) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}(\frac{1}{2}) + \sin x$$
$$= \frac{1}{2}\sin x + \sin x = \frac{3}{2}\sin x$$
$$f''(x) = \frac{3}{2}\cos x = 0$$
$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$



مقعر للأسفل $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

مقعر للأعلى $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

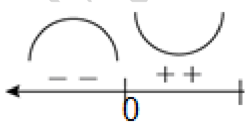
---

(6) $f(x) = \frac{4}{x} + x$

الحل:

f(x) غير معرف عند x=0

$$f'(x) = \frac{-4}{x^2} + 1$$
$$f''(x) = \frac{8x}{x^4} = \frac{8}{x^3}$$
$$\Rightarrow x = 0$$



مقعر للأسفل $(-\infty,0)$

مقعر للأعلى $(0,\infty)$

لا يوجد انعطاف

(7) $f(x)=\ln(1+x^2)$

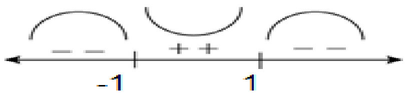
الحل :

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$$

$$f''(x)=\frac{(x^2+1)(2)-2x(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}=0$$

$$2-2x^2=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=1,-1$$



مقعر للأعلى $(-1,1)$

مقعر للأسفل $(1,\infty)$ $(-\infty,-1)$

الانعطاف $((1,\ln 2)$ $(-1,\ln 2)$

(8) $f(x)=e^{\frac{-x^2}{2}}$

الحل:

$$f'(x)=-xe^{\frac{-x^2}{2}}$$

$$f''(x)=(-x)(-x)e^{\frac{-x^2}{2}}+(-1)e^{\frac{-x^2}{2}}$$

$$=x^2e^{\frac{-x^2}{2}}-e^{\frac{-x^2}{2}}=e^{\frac{-x^2}{2}}(x^2-1)=0$$

$$e^{\frac{-x^2}{2}}\neq 0$$

$$x^2-1=0 \Rightarrow x=-1,1$$

مقعر للأعلى $(1,\infty)$ $(-\infty,-1)$

مقعر للأسفل $(-1,1)$

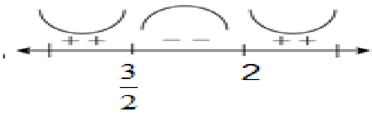
الانعطاف $(1,e^{\frac{-1}{2}})$ $(-1,e^{\frac{-1}{2}})$

(9) $f(x)=(x-2)^3(x-1)$

الحل :

$$f'(x)=(x-2)^3(1)+(x-1)\times 3(x-2)^2$$
$$=(x-2)^2(4x-5)$$

$$f''(x)=(x-2)^2(4)+(4x-5)2(x-2)$$
$$=(x-2)(x-2)(4)+(4x-5)\times 2$$
$$=(x-2)(12x-18)=0$$
$$x=2,\ \frac{3}{2}$$



مقعر للأعلى $(2,\infty)$ $(-\infty,\frac{3}{2})$

مقعر للأسفل $(\frac{3}{2},2)$

الانعطاف $(2,0)$ $(\frac{3}{2},\frac{-1}{16})$

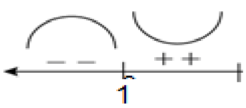
(10) $f(x)=\frac{x}{x-1}$

الحل :

$$f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$x=1$$



مقعر للأعلى $(1,\infty)$

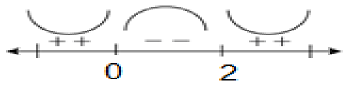
مقعر للأسفل $(-\infty,1)$

الانعطاف لا يوجد

(11) $f(x)=(2+2x-x^2)^2$

الحل:

$$f'(x)=2(2+2x-x^2)(2-2x)$$
$$f''(x)=2(2+2x-x^2)(-2)+(2-2x)(2)(2-x)$$
$$=12x^2-24x=0$$
$$=12x(x-2)=0$$
$$x=0\,,\ 2$$



مقعر لاعلى $(-\infty,0)$ $(2,\infty)$

مقعر للاسفل $(0,2)$

نقطة الانعطاف $(2,4)$ $(2,4)$

(12) $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$

الحل :

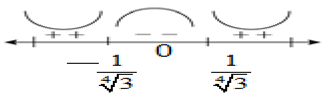
$$f(x)=x(4-x^2)^{\frac{-1}{2}}$$
$$f'(x)=x(\frac{1}{2})(4-x^2)^{\frac{-1}{2}}(-2x)+(4-x^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$=-x^2(4-x^2)^{\frac{-1}{2}}+(4-x^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$f''(x)=-x^2(-\frac{1}{2})(4-x^2)^{\frac{-3}{2}}(-2x)$$
$$+(4-x^2)^{\frac{-1}{2}}(-2x)+\frac{1}{2}(4-x^2)^{\frac{-1}{2}}=0$$
$$x=0,2,-2$$

الانعطاف $(0,0)$

(13) $f(x)=x^2-x^{-2}$

الحل :

$$f'(x)=2x+2x^{-3}$$
$$f''(x)=2-6x^{-4}$$
$$x=\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$$



مقعر للأعلى $(-\infty,-\frac{1}{\sqrt[4]{3}})$ $(0,\frac{1}{\sqrt[4]{3}})$

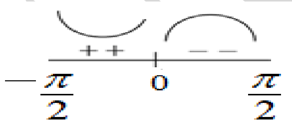
مقعر للأسفل $(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}},0)$ $(0,\frac{1}{\sqrt[4]{3}})$

الانعطاف $(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}},f(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}))$ $(\frac{1}{\sqrt[4]{3}},f(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}))$

(14) $f(x)=2x-\tan x \quad ,(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

الحل:

$$f'(x)=2-\sec^2 x$$
$$f''(x)=-2\sec^2 x\,\tan x=0$$
$$\sec x\neq 0 \quad < \tan x=0$$
$$x=0$$



مقعر للأسفل $(0,\frac{\pi}{2})$

مقعر للأعلى $(-\frac{\pi}{2},0)$

الانعطاف $(0,0)$

تدريب :

اوجد فترات التقعر للأعلى وللأسفل ونقاط الانعطاف لكل مما يلي :

$(1)\ f(x) = x^3 - 12x + 1$

الجواب :

مقعر للأعلى $(0, \infty)$

مقعر للأسفل $(-\infty, 0)$

الانعطاف $(0, 1)$

$(2)\ f(x) = \sqrt{\sin x} \quad , [0, \pi]$

الجواب :

مقعر للاسفل $(0, \pi)$

$(3)\ f(x) = \dfrac{3}{x^2 + 1}$

الجواب :

مقعر للأعلى $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$ $(-\infty, \frac{-1}{\sqrt{3}})$

مقعر للأسفل $(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

الانعطاف $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{9}{4})$ $(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{9}{4})$

$(4)\ f(x) = \ln(x^2 + 5)$

الجواب :

مقعر للأعلى $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$

مقعر للأسفل $(-\infty, -\sqrt{5})$ $(\sqrt{5}, \infty)$

الانعطاف $(\sqrt{5}, \ln 10)$ $(-\sqrt{5}, \ln 10)$

$(5)\ f(x) = \sqrt{x}\ (x + 3)$

الجواب :

مقعر للأعلى $(1, \infty)$

مقعر للأسفل $(0, 1)$

الانعطاف $(1, 4)$

$(6)\ f(x) = xe^x$

الجواب :

مقعر للأعلى $(-2, \infty)$

مقعر للأسفل $(-\infty, 2)$

الانعطاف $(-2, -2e^{-2})$

$(7)\ f(x) = x^6 - 4x^4$

الجواب :

مقعر للأعلى $(-\infty, -\sqrt{\frac{6}{5}})$ $(\sqrt{\frac{6}{5}}, \infty)$

مقعر للأسفل $(-\sqrt{\frac{6}{5}}, \sqrt{\frac{6}{5}})$

اختبار المشتقة الثانية لايجاد القيم القصوى

قاعدة:

اذا كانت $f'(a)=0$

- اذا كانت $f''(a)>0$ فان $f(a)$ قيمة صغرى محلية.
- اذا كانت $f''(a)<0$ فان $f(a)$ قيمة عظمى محلية.
- اذا كانت $f''(a)=0$, يفشل اختبار المشتقة الثانية ونلجأ الى المشتقة الاولى

مثال (1) :

$f(x)=x^3-12x+3$ ، فما القيم القصوى باستخدام اختبار المشتقة الثانية

الحل :

$$f'(x)=3x^2-12=0$$
$$x=\pm 2$$
$$f''(x)=6x$$
$$x=2 \rightarrow f''(2)=12>0$$

$\Leftarrow$ صغرى محلية للاقتران f عندما $x=2$ وهي $f(2)=-13$

$$x=-2 \rightarrow f''(-2)=-12<0$$

$\Leftarrow$ عظمى محلية للاقتران f وهي $f(-2)=19$

مثال (2) :

$f(x)=12x-x^3$ ، فما القيم القصوى باستخدام اختبار المشتقة الثانية

الحل :

$$f'(x)=12-3x^2=0 \rightarrow x=\pm 2$$
$$f''(x)=-6x$$
$$x=2 \rightarrow f''(2)=-12<0$$

$\Leftarrow$ عظمى محلية للاقتران f وهي $f(2)=-12$

$$x=-2 \rightarrow f''(-2)=12>0$$

$\Leftarrow$ صغرى محلية للاقتران f وهي $f(-2)=-16$

مثال (3) :

$f(x)=\sin x-\cos x$ ، فما القيم القصوى باستخدام المشتقة الثانية

الحل :

$$f'(x)=\cos x+\sin x=0$$
$$x=\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$$
$$f''(x)=-\sin x+\cos x$$
$$x=\frac{3\pi}{4} \rightarrow f''(\frac{3\pi}{4})=\frac{-2}{\sqrt{2}}$$

عظمى محلية عندما $x=\frac{3\pi}{4}$

$$f(\frac{3\pi}{4})=\frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$x=\frac{7\pi}{4} \rightarrow f''(\frac{7\pi}{4})=\frac{2}{\sqrt{2}}$$

صغرى محلية وهي $f(\frac{7\pi}{4})=\frac{-2}{\sqrt{2}}$

الاستاذ: محمد المجذوب
0799333306
الاستاذ: إياد عباد
0799366611

مثال (4) :

$f(x) = x^2 + \dfrac{128}{x}$ ، فما القيم القصوى باستخدام المشتقة الثانية

الحل :

$$f'(x) = 2x - \frac{128}{x^2} = 0$$
$$2x = \frac{128}{x^2} \to x = 4$$
$$f''(x) = 2 + \frac{128 \times 2x}{x^4}$$
$$f''(4) = 6 > 0$$

$\Leftarrow$ صغرى محلية عندما $x = 4$ وهي

$$f(4) = 48$$

مثال (5) :

$f(x) = xe^{-x}$ ، فما القيم القصوى باستخدام المشتقة الثانية

الحل :

$$f'(x) = -xe^{-x} + e^{-x}$$
$$= e^{-x}(1-x) = 0$$
$$e^{-x} \neq 0 \quad , x = 1$$
$$f''(x) = xe^{-x} + e^{-x}(-1) + -e^{-x}$$
$$= xe^{-x} - 2e^{-x}$$
$$f''(1) = e^{-1} - 2e^{-1} = -e^{-1} < 0$$
$$f(1) = e^{-1}$$

$\Leftarrow$ عظمى محلية عندما $x = 1$

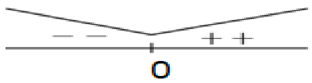
مثال (6) :

$f(x) = 2 + x^4$ ، فما القيم القصوى باستخدام المشتقة الثانية

الحل :

$$f'(x) = 4x^3 = 0 \to x = 0$$
$$f''(x) = 12x^2$$
$$f''(0) = 0$$

يفشل اختبار المشتقة الثانية ونستخدم المشتقة الاولى



صغرى محلية عند 0=x

مثال (7) :

$f(x) = x \ln x$ ، فما القيم القصوى باستخدام المشتقة الثانية

الحل :

$$f'(x) = x\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x = 1 + \ln x = 0$$
$$\ln x = -1 \to x = e^{-1}$$
$$f''(x) = \frac{1}{x}$$
$$f''(e^{-1}) = \frac{1}{e^{-1}} > 0$$

$\Leftarrow$ صغرى محلية عندما $x = e^{-1}$ وهي

$$f(e^{-1}) = \frac{-1}{e}$$

مثال (8) :

$f(x) = \dfrac{x}{2^x}$ ، فما القيم القصوى باستخدام المشتقة الثانية

الحل :

$$f'(x) = \frac{2^x - x(2^x)\ln 2}{(2^x)^2}$$
$$= \frac{2^x(1 - x\ln 2)}{(2^x)^2} = \frac{1 - x\ln 2}{(2^x)}$$
$$1 - x\ln 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\ln 2}$$

$$f''(x)=\frac{2^x(-\ln 2)-(1-x\ln 2)(\ln 2(2^x))}{2^{2x}}$$

$$f''(\frac{1}{\ln 2})<0$$

$\Leftarrow$ عظمى محلية عندما $x=\frac{1}{\ln 2}$

مثال (9) :

$f(x)=x^{\frac{2}{3}}-3$ ، فما القيم القصوى باستخدام المشتقة الثانية

الحل :

$f'(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$ لايوجد اصفار للمشتقة الاولى

يفشل اختبار المشتقة الثانية

تدريب :

ما القيم القصوى المحلية باستخدام المشتقة الثانية لكل اقتران مما يلي :

(1) $f(x)=xe^x$

(2) $f(x)=6x-x^2$

(3) $f(x)=\cos x-x \quad ,[0,4\pi]$

(4) $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$

(5) $f(x)=2\sin x+\cos 2x \quad ,[0,2\pi]$

(6) $f(x)=x^3+\frac{1}{x}$

(7) $f(x)=e^x(x^2-3)$

مسائل حياتية

مثال (1):

يمثل الاقتران

$$A(x)=305x^2-1830x^3 \quad ,0\le x\le 0.16$$

ضغط الدم المقيس بوحدة mmgh والناتج من تناول جرعة دواء مقدارها $x\ cm^3$

اوجد الحد الاقصى لضغط الدم الناتج من هذا الدواء محددا جرعة الدواء التي يحدث عندها .

الحل:

$$A'(x)=610x-5490x^2=0$$

$$x(610-5490x)=0$$

$$x=0 \quad ,x=0.11$$

عظمى عند $x=0.11\Rightarrow A(0.11)=1.25$

مثال (2) يمثل الاقتران

$$f(x)=\frac{1500}{x^2-6x+10}-150$$

الربح الاسبوعي لاحد المصانع من انتاجة .حيث x عدد مكبرات الصوت المبيعة . اجد عدد مكبرات الصوت الذي يحقق اكبر ربح ممكن .

الحل:

$$f'(x)=\frac{-1500(2x-6)}{(x^2-6x+10)^2}$$

$$\Rightarrow x=3$$

اكبر قيمة عند $x=3$

$$f(3)=1350$$

التطبيقات الفيزيائية

قاعدة:

- اذا كانت $v(t)>0$ فإن الجسم يتحرك في الاتجاه الموجب.
- اذا كانت $v(t)<0$ فإن الجسم يتحرك في الاتجاه السالب.
- اذا كانت $a(t)>0$ فإن السرعة المتجهه متزايدة
- اذا كانت $a(t)<0$ فإن السرعة المتجهه متناقصة

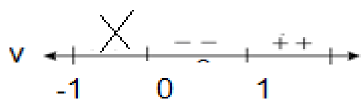
مثال (1) :

يمثل الاقتران $s(t)=t^3-3t+3 \quad ,t>0$ موقع جسم يتحرك فيمسار مستقيم ، حيث t الزمن بالثواني ،و s الموقع بالامتار:

أ) ما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه الموجب والسالب؟
ب) ما الفترات التي تتزايد و تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهه؟

الحل :

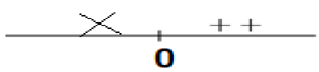
أ) $v(t)=3t^2-3=0$
$\rightarrow t=1 \rightarrow t=\pm 1$



في الاتجاه الموجب $(1,\infty)$

في الاتجاه السالب $(0,1)$

ب) $a(t)=v^{/}(t)=6t=0$
$\Rightarrow t=0$



السرعة متزايدة على $(0,\infty)$ ولايوجد فترات تتناقص فيها السرعة

مثال (2) :

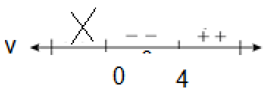
يمثل الاقتران $s(t)=t^3-6t^2+5$ موقع جسم يتحرك فيمسار مستقيم ، حيث t الزمن بالثواني ،و s الموقع بالامتار:

ما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاة الموجب والسالب؟

ما الفترات التي تتزايد و تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهه؟

الحل :

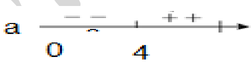
$$(1) \quad v(t)=3t^2-12t=0$$
$$3t(t-4)=0 \Rightarrow t=0,4$$



في الاتجاه الموجب $(4,\infty)$

في الاتجاه السالب $(0,4)$

$$(2) \quad a(t)=6t-12=0 \Rightarrow t=2$$



السرعة متزايدة على $(2,\infty)$

السرعة متناقصة على $(0,2)$

مثال (3) :

يمثل الاقتران $s(t)=t^3-5t^2+4t \quad ,t>0$ موقع جسم يتحرك فيمسار مستقيم ، حيث t الزمن بالثواني ، و s الموقع بالامتار:

1) ما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاة الموجب و السالب؟
2) ما الفترات التي تتزايد و تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهه؟

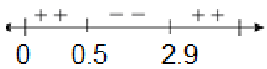
الحل :

$$(1)\;\; v(t)=3t^2-10t+4=0$$

المميز

$$p=100-4(3)(4)=52$$

$$t=\frac{10\pm\sqrt{52}}{6}=2.9 \;\;,0.5$$



الاتجاه الموجب $(0,0.5)\;(2.9,\infty)$

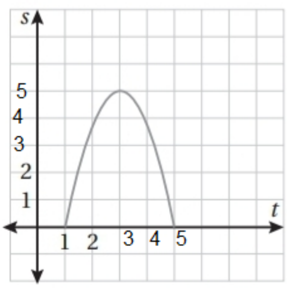
الاتجاه السالب $(0.5,2.9)$

$$(2)\;\; a(t)=6t-10=0 \Rightarrow t=\frac{5}{3}$$

السرعة متزايدة على $\left(\frac{5}{3},\infty\right)$

السرعة متناقصة على $\left(0,\frac{5}{3}\right)$

مثال(4):



يمثل الاقتران s(t) المبين في الشكل المجاور لموقع جسم يتحرك في مسار مستقيم

1- اوجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون.

الحل : t=3

2- ما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه الموجب و السالب

الحل:

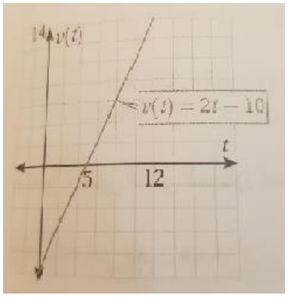
$(1,3)$ في $v(t)>0$ تكون الحركة في الاتجاه الموجب

$(3,5)$ في $v(t)<0$ تكون الحركة في الاتجاه السالب

3- ما الفترات التي تتزايد وتتناقص السرعة المتجهه؟

تتناقص على (5,1)

مثال (5) :



بين الاقتران $v(t)$ المبين منحناه في الشكل المجاور السرعة المتجهة لجسم يتحرك في مسارمستقيم ، حيث v السرعة المتجهة بالمتر لكل ثانية، و t الزمن بالثواني :

1- أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون.

الحل: عند t=5

2- ما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب؟

الحل:

في الاتجاه الموجب في (5, 12)

في الاتجاه السالب في (0, 5)

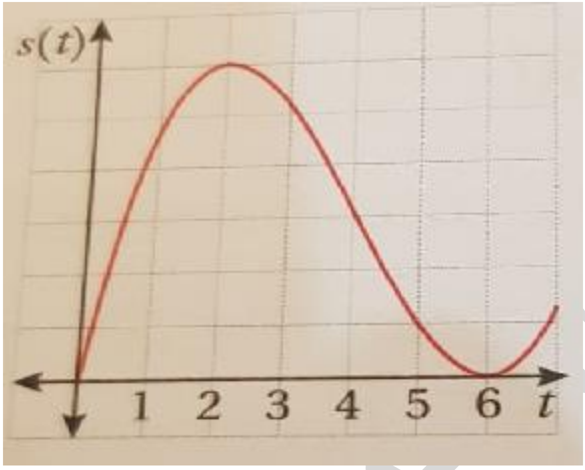
3- ما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة؟

وما الفترات التي تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهة؟

الحل:

السرعة المتجهة متزايدة في (0, 12)

مثال (6)



يمثل الاقتران s(t)

المبين منحناه في الشكل المجاور موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم حيث s الموقع بالأمتار،

t الزمن بالثواني:

1) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون

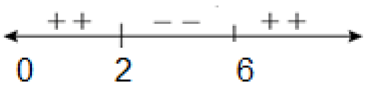
الحل:

سكون عند V(t) = 0

يعني المماس لمنحنى s(t) أفقي عند $t=6$, $t=2$

2)ما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب؟

الحل:

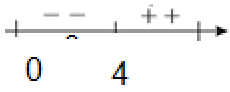


السرعة في الاتجاه الموجب في (0, 2) وفي $(6,\infty)$

عندما تكون s(t) متزايدة و تكون V(t) > 0

وفي اتجاه السالب في (2, 6) عندما تكون s(t) متناقصة فتكون V(t) < 0

3) إذا كان تسارع الجسم صفر عندما t = 4، فما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة؟ وما الفترات التي تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهة؟



$a(4)=0$

السرعة المتجهه متزايدة على $(4,\infty)$ ومتناقص

$(0,4)$

اسئلة الثوابت

قواعد:

❖ f(x) يمر بالنقطة (a,b) ⟵ $f(a)=b$

❖ نقطة حرجة أو قصوى أو صغرى أو عظمى

عند x=a فإن $f'(a)=0$ $f(a)=b$

❖ نقطة انعطاف (a, b) فإن

$f''(a)=0$ $f(a)=b$

❖ انعطاف أفقي عند x=a فإن

$f''(a)=0$ $f'(a)=0$

❖ إذا علمت معادلة المماس عند x = a فإن

$f(a)=y$, $f'(a)=y'$

❖ مماس أفقي عند x=a ⟵ $f'(a)=0$

مثال:

اذا كان $f(x)=4x^3+bx^2-7x$ فما قيم b التي تجعل له انعطاف عند x=-1

الحل

$$f'(x)=12x^2+2bx-7$$

$$f''(x)=24x+2b$$

$$f''(x)=-24+2b=0$$

مثال:

اذا كان $f(x)=2x^3-bx+8x$ فما قيم b اذا كان للاقتران قيمة صغرى عند x=2

الحل:

$$f'(x)=6x^2-2bx+8$$

$$f'(2)=24-4b+8=0 \Rightarrow b=8$$

مثال:

إذا كانت $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ الذي يمر بالنقطة $(1,5)$ ومعادلة المماس عند الانعطاف $(1,2)$ هي $y+3x-7=0$ فما قيم a,b,c,d .

الحل :

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$
$$f''(x)=6ax+2b$$

$f(1)=5 \Rightarrow$
$a+b+c+d=5.........(1)$

$f(2)=1 \Rightarrow$
$8a+4b+2c+d=1......(2)$

$\Rightarrow f''(2)=0$ انعطاف $(1,2)$
$12a+2b=0.......(3)$

المماس :

$y=7-3x \Rightarrow y'=3 \Rightarrow f'(2)=-3$
$12a+4b+c=-3.........(4)$

بحل المعادلات

$a=-1,\ b=6,\ c=-15,\ d=15$

$$f(x)=-x^3+6x^2-15x+15$$

مثال:

اذا كان للاقتران $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ قيمة عظمى محلية عندما x=-3 وقيمة صغرى محلية عند $(1,-14)$ فاوجد قيمة a,b,c .

الحل :

$f(1)=-14 \Rightarrow$
$a+b+c=-15.........(1)$

$$f'(x)=3x^2+2ax+b=0$$

$f'(-3)=0 \Rightarrow$
$-6a+b=-27......(2)$

$f'(1)=0 \Rightarrow$
$2a+b=-3......(3)$

بحل المعادلات

$$a=3,\ b=-9,\ c=-9$$

مثال:

اذا كان للاقتران $f(x)=\sqrt{x+1}+\frac{b}{x}$ نقطة انعطاف عندما $x=3$ احسب قيمة b

الحل:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{b}{x^2}$$
$$=\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}-bx^{-2}$$

$$f''(x)=\frac{1}{4}(x+1)^{-\frac{3}{2}}+2bx^{-3}$$

$$f''(3)=0 \Rightarrow b=\frac{27}{64}$$

مثال:

اذا كانت $f(x)=3x^4+ax^3+bx^2+cx+d$

فاجيب عن الاسئلة تباعا :

1- اذا كان لمنحنى الاقتران مماس افقي عند النقاط $(0,-9)$ $(-2,-73)$ فما قيم a,b,c,d

2- اذا وجدت نقطة ثالثة على منحنى الاقتران لها مماس افقي فما احداثياتها .

الحل:

1-

$f(0)=9 \Rightarrow d=-9$

$f(2)=-73 \Rightarrow -8a+4b=-112$

$f'(x)=12x^3+3ax^2+2bx+c$

$f'(0)=0 \Rightarrow c=0$

$f'(-2)=0 \Rightarrow 12a-4b=96$

$a=-4 \quad ,b=36$

2- اذا وجدت نقطة ثالثة على منحنى الاقتران لها مماس افقي فما احداثياتها .

$f'(x)=12x^3-12x^2-72x=0$

$12x(x^2-x-6)=0$

$12x(x-3)(x+2)=0$

$x=0\,,-2\,,3$

مثال:

اذا كان $f(x)=ax^2+bx+c$ للاقتران قيمة عظمى محلية عند $(3,12)$ وقطع محور y عند $(0,1)$ فما قيم a,b,c

الحل:

$f(0)=1 \Rightarrow c=1$

$f(3)=12 \Rightarrow 9a+3b+1=12$

$9a+3b=11.........(1)$

$f'(x)=2ax+b$

$f'(3)=6a+b=0.......(2)$

بحل المعادلات

$a=\frac{-11}{9} \quad ,b=\frac{22}{3}$

مثال:

اذا كان a,b عددين حقيقين موجبين و فاوجد القيمة العظمى المطلقة للاقتران :

$f(x)=x^a(1-x)^b$ في الفترة $[0,1]$

الحل:

نلاحظ ان $f(1)=f(0)=0$ ويوجد قيمة عظمى مطلقة على $[0,1]$

$f'(x)=x^a b(1-x)^{b-1}\times -1+(1-x)^b a x^{a-1}=0$

$x^{a-1}(1-x)^{b-1}(xb(-1))+(1-x)a=0$

$x^{a-1}(1-x)^{b-1}(a-(a+b)x)=0$

$x=0,1,\frac{a}{a+b}$

$0<a<a+b$

بقسمة الحدود المتباينة على $(a+b)$

$$0<\frac{a}{a+b}<1$$

اي ان العدد $\frac{a}{a+b}$ يقع ضمن مجال الاقتران على الفترة $[0,1]$

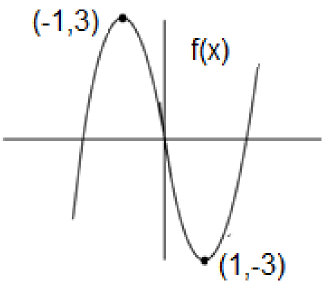
اذا القيمة الحرجة في الفترة $(0,1)$ هي $x=\frac{a}{a+b}$

اجد قيمة الاقتران عند الحرجة وطرفي المجال بتعويض قيمة x في السؤال .

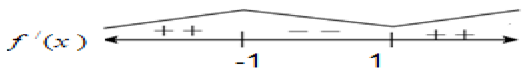
استنتاج الخواص من الرسم

1) الرسم المجاور يمثل $f\ (x\ )$ كثير حدود

اوجد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى وفترات التقعر ونقاط الانعطاف



الحل :

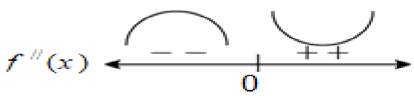


متزايد في $(1,\infty)$ $(-\infty,-1)$

متناقص $(-1,1)$

$f\ (-1)=3$ قيمة عظمى محلية

$f\ (1)=-3$ قيمة صغرى محلية



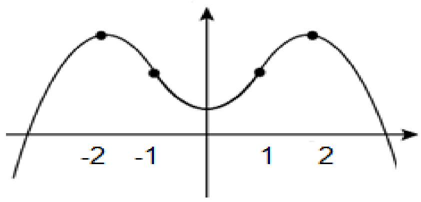
مقعر للاسفل $(-\infty,0)$

مقعر للاعلى $(0,\infty)$

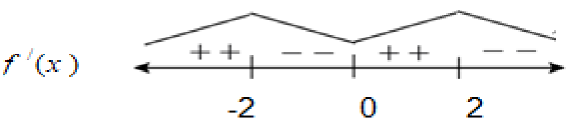
نقطة الانعطاف $(0,0)$

2) من الشكل المجاور والذي يمثل $f\ (x\ )$

اوجد فترات التزايد والتناقص والتقعر ونقاط الانعطاف



الحل :



أ) متزايد في $(1,\infty)$ $(-\infty,-2)$

متناقص $(2,\infty)$ $(-2,0)$

$f\ (0)$ قيمة صغرى محلية

مقعر للاسفل $(1,\infty)$ $(-\infty,-1)$

مقعر للاعلى $(-1,1)$

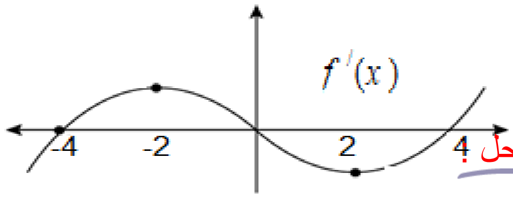
نقاط الانعطاف $(-1,f\ (-1))$ $(1,f\ (1))$

3) الشكل المجاور يمثل $f'(x)$

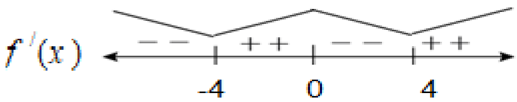
أ) ما القيم الحرجة

ب) اوجد فترات التزايد والتناقص

ج) فترات التقعر للأعلى وللأسفل



الحل :



أ) القيم الحرجة

$\{-4,0,4\}$

ب) متزايد في $(-4,0)$ $(4,\infty)$

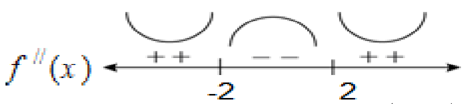
متناقص $(-\infty,-4)$ $(0,4)$

$f(-4)$ قيمة صغرى محلية

$f(4)$ قيمة صغرى محلية

$f(0)$ قيمة عظمى محلية

ج)



مقعر للاسفل $(-2,2)$

مقعر للأعلى $(-\infty,-2)$ $(2,\infty)$

نقاط الانعطاف $(2,f(2))$ $(-2,f(-2))$

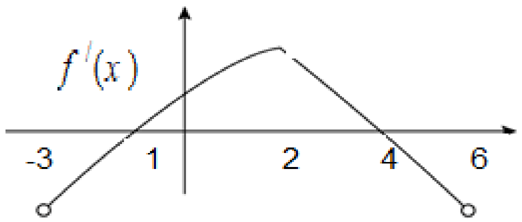
4) الشكل المجاور يمثل $f'(x)$ حيث R متصل

على $[-3,6]$

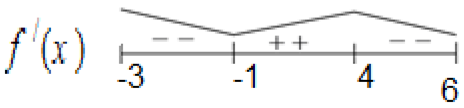
أ) ما القيم الحرجة

ب) اوجد فترات التزايد والتناقص

ج) فترات التقعر للأعلى وللأسفل



الحل :



أ) القيم الحرجة

$\{-3,6,-1,4\}$

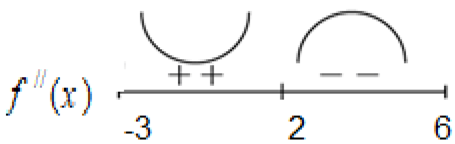
ب) متزايد في $(-1,4)$

متناقص $(-3,-1)$ $(4,6)$

قيمة صغرى محلية عندما $x=-1$

قيمة عظمى محلية عندما $x=4$

ج)



مقعر لأعلى $(-3,2)$

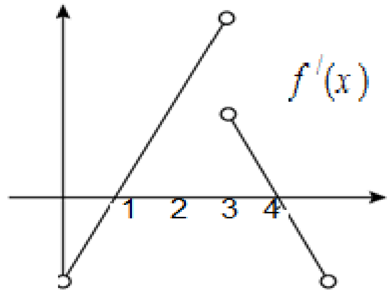
مقعر للأسفل $(2,6)$

نقاط الانعطاف $(2,f(2))$

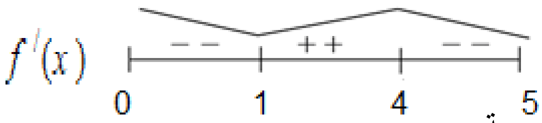
5) الرسم المجاور يمثل منحنى $f^{/}(x)$

أ) ما القيم الحرجة

ب) فترات التقعر ونقاط الانعطاف



الحل :



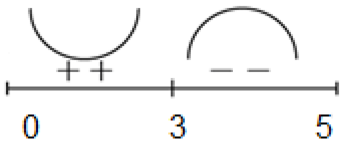
أ) القيم الحرجة

$\{0,1,4,5\}$

متزايد في $(1,4)$

متناقص $(4,5)$ $(0,1)$

ب)



مقعر لاعلى $(0,3)$

مقعر للاسفل $(3,5)$

نقاط الانعطاف $(3,f\ (3))$

الحل :

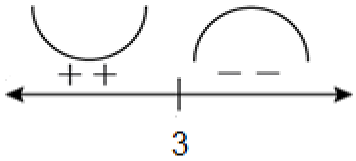
أ) مقعر لاعلى

$(-\infty,3)$

مقعر للاسفل

$(3,\infty)$

نقاط الانعطاف $(3,f\ (3))$



ب) $f^{///}(x)$ =ميل $f^{//}(x)$

$$f^{//}(x)=\frac{4-0}{0-3}=\frac{-4}{3}$$

ج) $f^{/}(1)=0$

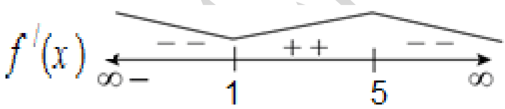
$f^{//}(1)=$ موجبة $\Leftarrow$ صغرى محلية عندما

$x=1$

$f^{/}(5)=0$

$f^{//}(5)=$ سالبة $\Leftarrow$ عظمى محلية عندما

$5=x$



متزايد في $(1,5)$

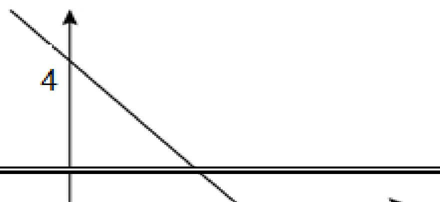
متناقص $(5,\infty)$ $(-\infty,1)$

6) الرسم المجاور يمثل منحنى $f^{//}(x)$ ، جد :

أ) فترات التقعر ونقاط الانعطاف

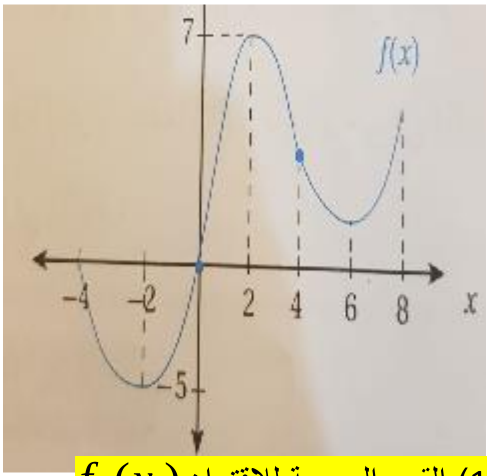
ب) اوجد $f^{///}(2)$

ج) اذا كانت $x=5, x=1$ ، فما القيم الحرجة والقيم القصوى وفترات التزايد والتناقص



تدريب:

يمثل الشكل منحنى الاقتران $f(x)$ جد :



1) القيم الحرجة للاقتران $f(x)$

2) فترات التزايد وفترات التناقص

3) قيم (x) التي يكون عندها للاقتران قيم قصوى محلية

4) فترات التقعر

5) قيم (x) التي يكون عندها للاقتران نقطة انعطاف

6) قيم x التي عندها مماس افقي

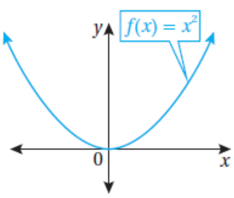
7) جد قيم x حيث $f'(x)>0$

8) جد قيم x حيث $f'(x)<0$

9) جد قيم x حيث $f'(x)$ متزايدة و متناقصة

10) اوجد $\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

تدريب



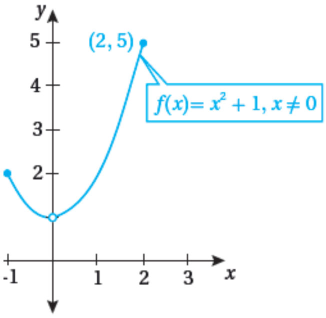
ألاحِظ من التمثيل البياني لمنحنى $f(x)$ أنَّه:

- توجد قيمة صغرى محلية ومُطلَقة للاقتران f، هي: $f(0)=0$.
- لا توجد قيمة عظمى (محلية، أو مُطلَقة) للاقتران f.

تدريب

ألاحِظ من التمثيل البياني لمنحنى $f(x)$ أنَّه:

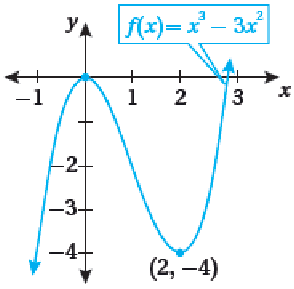
- توجد قيمة عظمى مُطلَقة للاقتران f، هي: $f(2)=5$.
- لا توجد قيمة صغرى (محلية، أو مُطلَقة) للاقتران f.

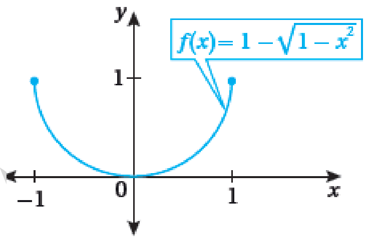


تدريب

أجد القِيَم القصوى المحلية والقِيَم القصوى المُطلَقة (إنْ وُجِدت)

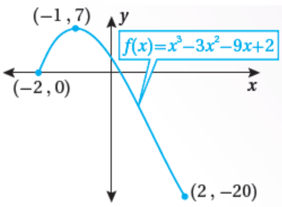
a)





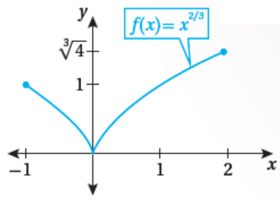
تدريب:

يُبيِّن التمثيل البياني المجاور لمنحنى الاقتران: $f(x)=x^3-3x^2-9x+2$ في الفترة $[-2,2]$ أنَّ القيمة العظمى المُطلَقة هي 7، وأنَّ القيمة الصغرى المُطلَقة هي -20.



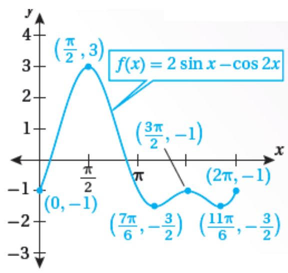
تدريب:

يُبيِّن التمثيل البياني المجاور لمنحنى الاقتران: $f(x) = x^{2/3}$ في الفترة $[-1, 2]$ أنَّ القيمة العظمى المُطلَقة هي $\sqrt[3]{4}$، وأنَّ القيمة الصغرى المُطلَقة هي 0.



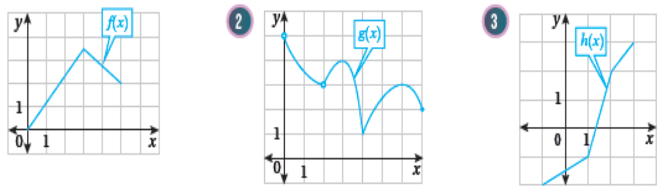
تدريب:

يُبيِّن التمثيل البياني المجاور لمنحنى الاقتران: $f(x) = 2\sin x - \cos 2x$ في الفترة $[0, 2\pi]$ أنَّ القيمة العظمى المُطلَقة هي 3، وأنَّ القيمة الصغرى المُطلَقة هي $-\frac{3}{2}$.

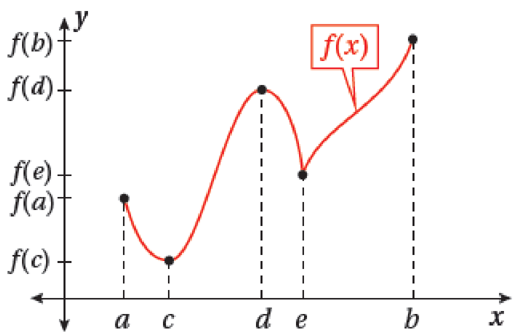


تدريب:

أجد القِيَم الحرجة والقِيَم القصوى المحلية والمُطلَقة (إنْ وُجِدت) للاقتران المُمثَّل بيانيًّا في كلٍّ ممّا يأتي:



تدريب :

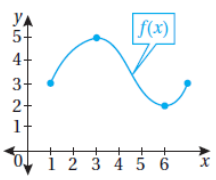


تكون $f(a)$ أكبر قِيَم $f(x)$ في هذه الفترة؛ لذا تُسمّى **قيمة عظمى محلية**

تكون $f(c)$ أصغر قِيَم $f(x)$ في هذه الفترة؛ لذا تُسمّى **قيمة صغرى**

تدريب:

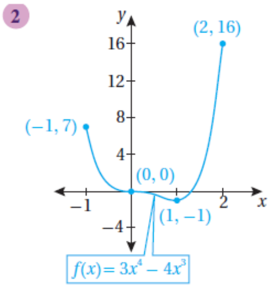
1



ألاحِظ من التمثيل البياني لمنحنى $f(x)$ وجود:

- قيمة عظمى محلية ومُطلَقة للاقتران f هي: $f(3) = 5$.
- قيمة صغرى محلية ومُطلَقة للاقتران f هي: $f(6) = 2$

2

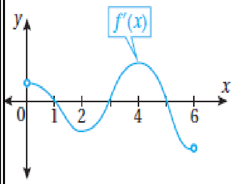


ألاحِظ من التمثيل البياني لمنحنى $f(x)$ وجود:

- قيمة صغرى محلية ومُطلَقة للاقتران f هي: $f(1) = -1$.
- قيمة عظمى مُطلَقة للاقتران f هي: $f(2) = 16$ (ليست قيمة عظمى محلية؛ لأنَّها ليست داخلية، فهي طرف فترة).

تدريب

يُبيِّن الشكل المجاور منحنى المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ المتصل على الفترة $[0, 6]$. أستعمل التمثيل البياني لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي:

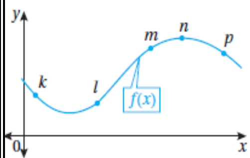


قِيَم x التي يكون عندها للاقتران f قِيَم قصوى محلية، مُبيِّنًا نوعها.

فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران f.

تدريب

تبرير: يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)$. أُحدِّد النقطة (النقاط) من بين مجموعة النقاط: $\{k, l, m, n, p\}$ على منحنى الاقتران التي تُحقِّق كلًّا من الشروط الآتية، مُبرِّرًا إجابتي:



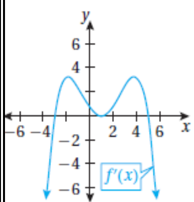
أنْ تكون إشارة كلٍّ من $f'(x)$ و $f''(x)$ موجبة.

أنْ تكون إشارة كلٍّ من $f'(x)$ و $f''(x)$ سالبة.

أنْ تكون إشارة $f'(x)$ سالبة، وإشارة $f''(x)$ موجبة.

تدريب

تبرير: أستعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f'(x)$ لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي، مُبرِّرًا إجابتي:



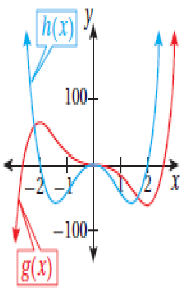
قِيَم x التي يكون عندها للاقتران f قِيَم قصوى محلية، مُبيِّنًا نوعها.

فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران f.

فترات التقعُّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران f.

الإحداثي x لنقاط الانعطاف.

تحدٍّ: أستعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنيي الاقترانين $h(x)$ و $g(x)$ لتحديد الاقتران الذي يُمثِّل مشتقة للآخر، مُبرِّرًا إجابتي.

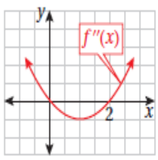


تدريب

أستعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f''(x)$ لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي:

فترات التقعُّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران f.

الإحداثي x لنقاط انعطاف منحنى الاقتران f.



الاستاذ: محمد المجذوب
0799333306

الوحدة الثانية : تطبيقات التفاضل

الفرع العلمي

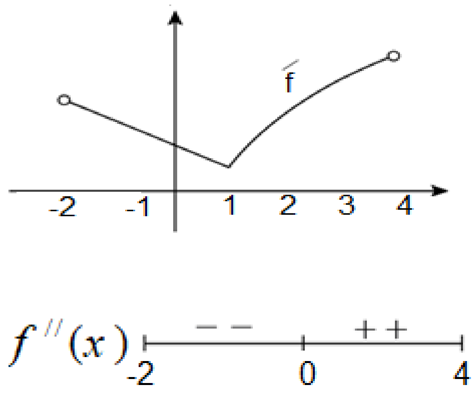
الاستاذ: إياد عباد
0799366611

ورقة عمل على رسم المنحنيات

1) اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى المشتقة الاولى للاقتران $f(x)$ المتصل على الفترة $[-2,4]$ ، فإن منحنى الاقتران $f(x)$ يكون مقعراً للأعلى في الفترة

أ) $[-2,1]$ ب) $\boxed{(1,4)}$

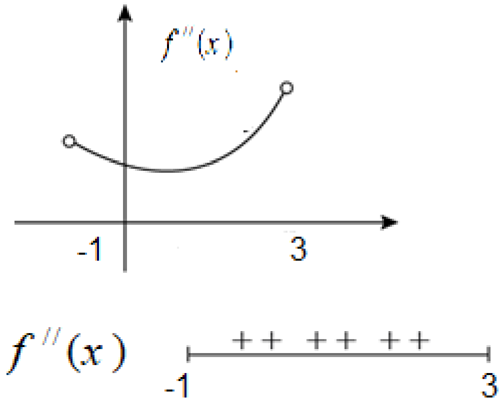
ج) $(0,4)$ د) $[-2,4]$



2) اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى المشتقة الثانية للاقتران $f(x)$ المتصل على الفترة $[-1,3]$ ، فإن الاقتران $f(x)$ يكون متزايداً في الفترة :

أ) $[-1,3]$ ب) $\boxed{(-1,3)}$

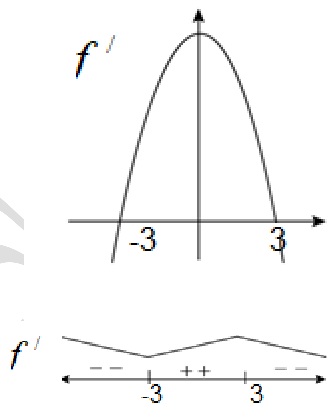
ج) $(-2,3)$ د) $\{1,3\}$



3) اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى المشتقة الاولى للاقتران f ، فإن مجال التزايد للاقتران f هو :

أ) $(0,\infty)$ ب) $(-\infty,0)$

ج) $\boxed{(-3,3)}$ د) $(3,9)$



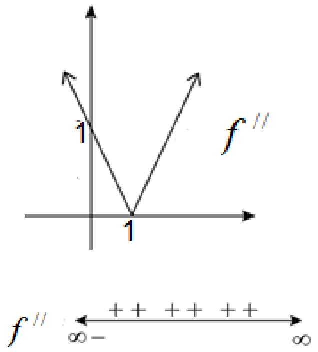
الاستاذ: محمد المجذوب
0799333306

الوحدة الثانية : تطبيقات التفاضل

الفرع العلمي

الاستاذ: إياد عباد
0799366611

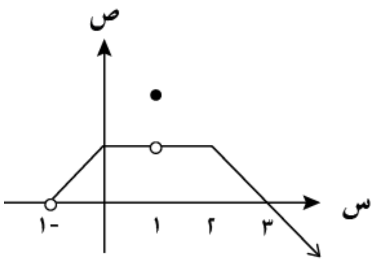
4) اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى $f''(x)$ ، فإن مجموعة قيم x التي يكون للاقتران عندها نقطة انعطاف هي :



أ) $\{1,0\}$ ب) $\{1\}$

ج) $\{0\}$ د) $\boxed{\phi}$

5) اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران $f(x)$ المعرف على الفترة $(-1,\infty)$ فإن مجموعة جميع القيم في مجال $f(x)$ والتي تكون عندها $f'(x)$ غير موجودة من المشتقة من اليمين لا تساوي المشتقة من اليسار هي :

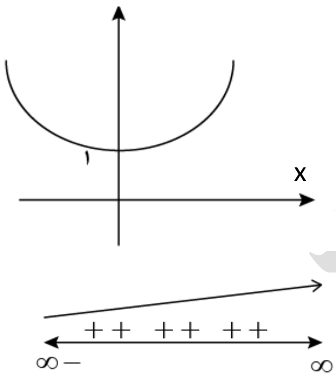


عند الرؤوس المدببة

أ) $\{1-\}$ ب) $\{0\}$

ج) $\{1,1-\}$ د) $\boxed{\{2,0\}}$

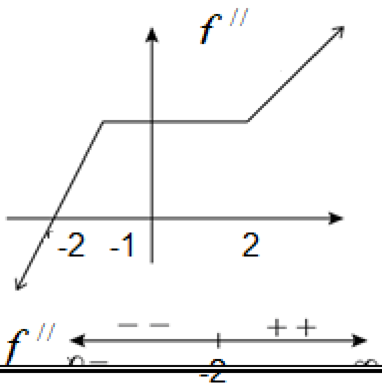
6) اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى المشتقة الاولى للاقتران $f(x)$ ، فإن فترة التزايد للاقتران $f(x)$ هي :



أ) $(0,\infty)$ ب) $(-\infty,0)$

ج) $(1,\infty)$ د) $\boxed{\mathbb{R}}$

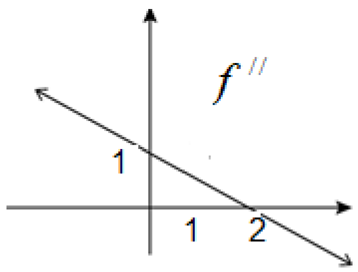
7) اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى المشتقة الثانية للاقتران f المعرف على $\mathbb{R}$ ، فإن مجموعة جميع قيم x التي يكون عندها للاقتران $f(x)$ نقطة انعطاف هي :



أ) $\boxed{\{2-\}}$ ب) $\{2,1-\}$

ج) $\{2\}$ د) $\{2,-1,2-\}$

8) اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى $f^{//}(x)$ للاقتران $f(x)$ المعرف على $\mathbb{R}$ وكان للاقتران $f(x)$ نقطة حرجة عند $x = 1$ ، فإن $f(1)$ له قيمة :



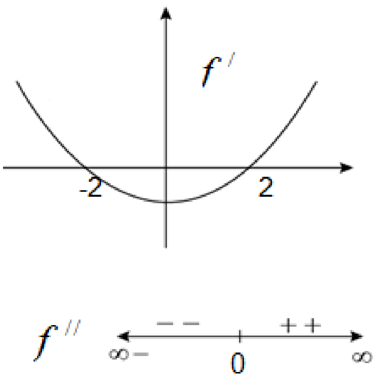
أ) $\boxed{\text{صغرى محلية}}$ ب) عظمى محلية

ج) صغرى مطلقة د) عظمى مطلقة

الحل :

$s = 1 \leftarrow$ حرجة $\leftarrow f^{//}(1) =$ موجب $\leftarrow$ صغرى

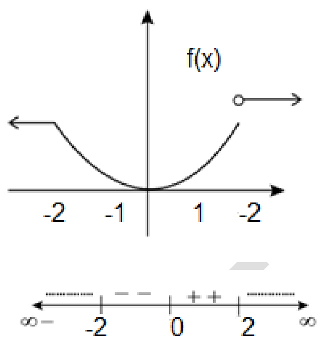
9) اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى $f^{/}(x)$ ، فإن منحنى الاقتران $f(x)$ المعرف على $\mathbb{R}$ مقعر للأعلى في الفترة



أ) $\boxed{(0,\infty)}$ ب) $(-\infty,0)$

ج) $(-2,2)$ د) $[-2,2]$

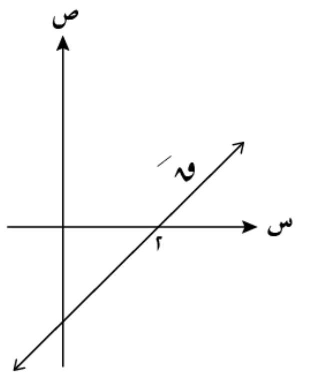
10) اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران $f(x)$ المعرف على $\mathbb{R}$ ، فإن الاقتران $f(x)$ متزايد في الفترة :



أ) $(2,\infty)$ ب) $\boxed{(0,2)}$

ج) $[-2,0]$ د) $(-\infty,2)$

11) اذا كان $f(x)$ اقتران كثير حدود وكان الشكل المجاور يمثل منحنى المشتقة الاولى للاقتران $f(x)$ ، فإن منحنى يكون متزايداً في الفترة : $R(s)$



أ) $(-\infty,\infty)$ ب) $(-\infty,2)$

ج) $\boxed{(2,\infty)}$ د) $(0,\infty)$

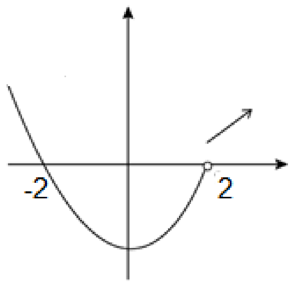
الاستاذ: محمد المجذوب
0799333306

الاستاذ: إياد عباد
0799366611

12) اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران $f(x)$ المعرف على $\mathbb{R}$ فإن الاقتران يكون متزايداً في الفترة :

أ) $(-\infty,-2)$ ب) $(-\infty,0)-\{2\}$

ج) $\boxed{(0,\infty)}$ د) $(0,2)$

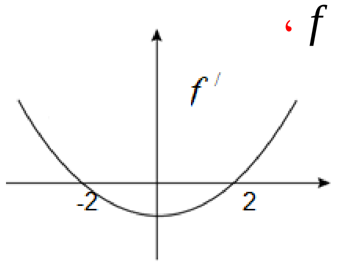


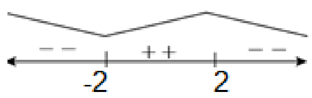
13) اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى المشتقة الاولى للاقتران كثير الحدود $f(x)$ ،

فإن منحنى $f(x)$ يكون متناقصاً في الفترة :

أ) $(-\infty,0)$ ب) $(0,\infty)$

ج) $(-2,0)$ د) $\boxed{(-2,2)}$



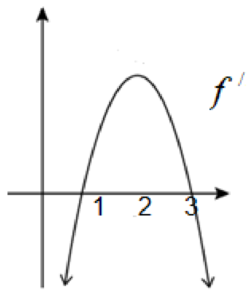


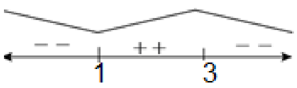
14) بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى $f'(x)$ حيث $f(x)$ كثير حدود ، جد ما يأتي :

أ) فترات التزايد والتناقص

ب) قيم x التي يكون عندها للاقتران قيم قصوى محلية

الحل :



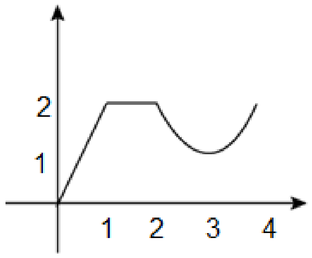


أ) متزايد : $(1,3)$ ، متناقص : $(-\infty,1)\ (3,\infty)$

ب) عندما $x=1$ قيمة صغرى محلية وهي $f(1)$

عندما $x=3$ قيمة صغرى محلية وهي $f(3)$

15) بالاعتماد على الشكل المجاور والذي يمثل منحنى الاقتران $f(x)$ المتصل على الفترة $[0,4]$ ، جد ما يأتي :



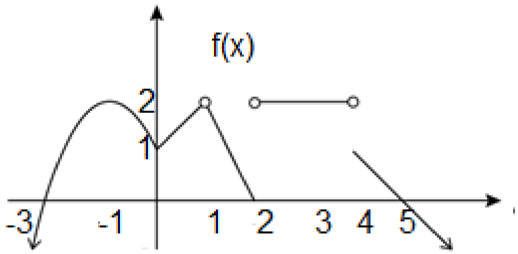
قيمة كلاً من : $f'(3)\ ,f'(1.5)\ ,f'(\frac{1}{2})$

الحل :

$f'(3)=0$ ($\quad f'(1.5)=0 \quad f'(\frac{1}{2})=2$

s = 3 قيمة صغرى محلية ⟵ المماس عندها افقي والميل = صفر

16) بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران $f(x)$ ، اجب عن كل مما يأتي :



أ) جد قيم x التي تكون عندها $f'(x)$ غير موجودة

ب) جد : $f'(-1),\ f'(3),\ f'(5)$

الحل :

أ) $\{0,1,2,4\}$

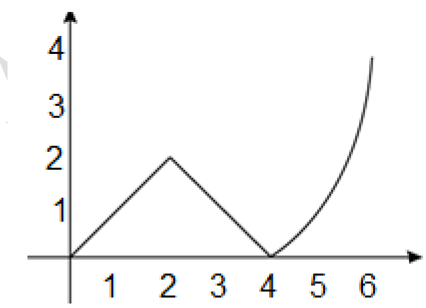
ب) $f'(-1)=0$

$f'(3)=0$

$f'(5)=$ الميل عند $x=5$ نختار النقاط $(4,1)$, $(5,0)$

$\frac{1-0}{4-5}=-1$

17) بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران $f(x)$ على $[0,6]$ ، جد ما يأتي :



أ) النقط الحرجة للاقتران $f(x)$

ب) مجموعة قيم (x) التي يكون عندها $0>f'(x)$

ج) جد : $x=3,\quad \frac{d}{dx}\sqrt{3x+f(x)}$

الحل :

أ) $(6,4)$ $(4,0)$ $(2,2)$ $(0,0)$

$(6,4)$ طرف ، $(2,2)$ رأس مدبب ، $(0,0)$ طرف

ب) $f^{/}(x) < 0 \leftarrow$ سالبة f متناقص $(2,4)$

$f^{/}(3) =$ الميل في $[2,4]$

$= -1$

ج) $\dfrac{d}{dx}\sqrt{3x + f(x)} = \dfrac{3 + f^{/}(x)}{2\sqrt{3x + f(x)}}$

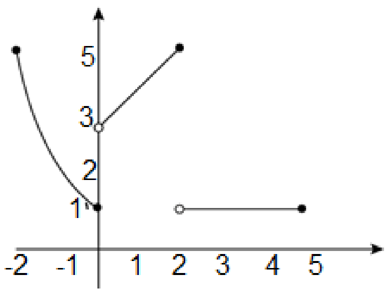
د $x = 3 \Leftarrow$ $= \dfrac{3 + f^{/}(3)}{2\sqrt{3(3) + f(3)}}$

$= \dfrac{3-1}{2\sqrt{10}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

18) يمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x) : x \in [-2,5]$ ، جد ما يأتي :

أ) $(f \times f^{/})^{/}(1)$

ب) فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى (ان وجدت)



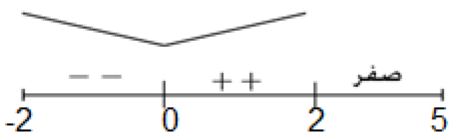
الحل :

أ) $(f \times f^{/})^{/}(1) =$

$= f(1) \times f^{//}(1) + f^{/}(1) \times f^{/}(1)$

$= 4 \times 0 + 1 \times 1 = 1$

ب)



متزايد : $(0,2)$ متناقص : $(-2,0)$ ثابت : $(2,5)$

عندما $x = -2$ قيمة عظمى مطلقة $f(-2) = 5$

عندما $x = 0$ قيمة صغرى محلية مطلقة $f(0) = 1$

عندما $x = 2$ قيمة عظمى محلية مطلقة $f(2) = 5$

تطبيقات القيم القصوى

امثلة :

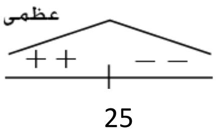
1) ما العددين الموجبين مجموعهما (50) وحاصل ضربهم اكبر ما يمكن

الحل :

نفرض : (x) العدد الاول ، (y) العدد الثاني

$$x + y = 50$$
$$y = 50 - x$$

$$p = x \times y$$
$$p = x \times (50 - x)$$
$$p = 50x - x^2$$
$$p'(x) = 50 - 2x = 0$$
$$x = 25$$



$$\Rightarrow y = 50 - 25 = 25$$

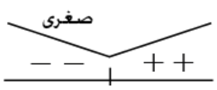
2) ما العددين مجموعهما (40) ومجموع مربعيهما اقل ما يمكن

الحل :

نفرض : (x) العدد الاول ، (y) العدد الثاني

$$x + y = 40$$
$$y = 40 - x$$

$$p = x^2 + y^2$$
$$p = x^2 + (40 - x)^2$$
$$p' = 2x + 2(40 - x)(-1)$$
$$\Rightarrow x = 20$$
$$\Rightarrow y = 20$$



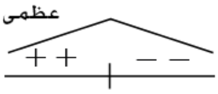
3) ارض مستطيلة الشكل طول سياجها (1000) متر ، ما اكبر مساحة ممكنة لهذه الارض

الحل :

المحيط $= 1000$

$$2x + 2y = 1000$$
$$y = 500 - x$$

$$A = x \times y$$
$$A = x(500 - x)$$
$$A = 500x - x^2$$
$$A' = 500 - 2x = 0$$
$$x = 250$$
$$y = 250$$

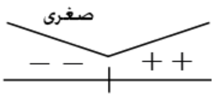


4) يراد انشاء حديقة مستطيلة الشكل مساحتها (900) متر واحاطتها بطريق خارجي عرضه (2) متر، ما ابعاد الحديقة التي تجعل للمساحة الكلية والطريق اقل ما يمكن

الحل :

$$900 = w \times s$$
$$\frac{900}{s} = w$$

$$A = (4 + w)(4 + s)$$
$$A = 16 + w4 + s4 + ws$$
$$= 16 + \frac{900}{s} \times 4 + s4 + \frac{900}{s} \times s$$
$$A' = 16 + \frac{3600}{s} + s4 + 900$$
$$0 = \frac{3600}{s^2} - 4$$
$$30 = s \Leftarrow 900 = s^2 \Leftarrow$$
$$30 = \frac{900}{30} = w$$

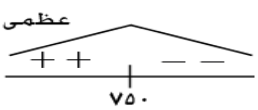


5) ارض مستطيلة الشكل يراد تسيجها ، تكلفة المتر من جانبين متوازيين هي (3) دنانير ومن الجانبين الاخرين (دينارين) ، احسب مساحة اكبر قطعة مستطيلة يمكن تسيجها بمبلغ (6000) دينار

الحل :

$$6000 = 6s + 4w$$
$$s = 1000 - \frac{2}{3}w$$

$$A = w \times s$$
$$A = w \times (1000 - \frac{2}{3}w)$$
$$A = 1000w - \frac{2}{3}w^2$$
$$A' = 1000 - \frac{4}{3}w = 0$$
$$w = 750$$
$$s = 500$$
$$A = 750 \times 500 = 375000$$



6) نريد صنع صندوق بدون غطاء قاعدته مربعة الشكل وحجمه (32) cm^3 ، احسب ابعاد الصندوق لتكون كمية المادة المستخدمة لصنعه اقل ما يمكن

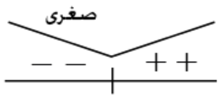
الحل :

كمية المادة = مادة القاعدة + الجوانب

$$c = x^2 + 4x \times h$$
$$c = x^2 + 4x \times \frac{32}{x^2}$$

$$v = x^2 \times h$$
$$32 = x^2 \times h$$
$$h = \frac{32}{x^2}$$

$$c = x^2 + \frac{128}{x}$$
$$c' = 2x - \frac{128}{x^2} = 0$$
$$x = 2$$



الطول $= 4$ ، العرض $= 4$

الارتفاع $= \frac{32}{16} = 2$

واجب

7) ورقة مستطيلة الشكل مساحتها cm^2 (50) يراد ترك هوامش ما اعلى واسفل الورقة (4)cm ومن الجانبين (2cm) ، فما بعدي الورقة لتكون المساحة المطبوعة اقل ما يمكن

8) مجموع محيطي مستطيلين (99) والنسبة بين بعدي المستطيل الاول (3 : 2) وبين بعدي المستطيل الثاني (3 : 4) ، فما اصغر قيمة لمجموع مساحتي المستطيلين

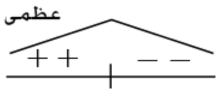
9) صفيحة معدنية مساحتها ($1200\ cm^2$) يراد صنع صندوق منها قاعدته مربعة الشكل ومفتوح من الاعلى ، اوجد اكبر حجم يمكن تكوينه للصندوق

الحل :

$$A = 1200$$
$$x^2 + 4x\,h = 1200$$
$$h = \frac{300}{x} - \frac{x}{4}$$

$$v = x^2 \times h$$
$$v = x^2\left(\frac{300}{x} - \frac{x}{4}\right)$$
$$v = 300x - \frac{x^3}{4}$$

$$v' = 300 - \frac{3x^2}{4} = 0$$
$$\Rightarrow x = 20$$



$$\Rightarrow v = 20 \times 20 \times 10 = 4000 cm^2$$

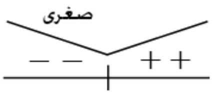
10) اوجد النقطة التي تقع على منحنى $y = \sqrt{x^2 + 6x + 10}$ وبعدها عن النقطة $(0,1)$ اقل ما يمكن

الحل :

$$y = \sqrt{x^2 + 6x + 10}$$
$$y^2 = x^2 + 6x + 10$$

$$w = \sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2}$$
$$w = \sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2}$$
$$w = \sqrt{2x^2 + 4x + 11}$$

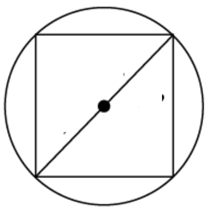
$$w' = \frac{4x + 4}{2 \times \sqrt{x^2 + 4x + 11}}$$
$$\Rightarrow x = -1$$
$$\Rightarrow y = \sqrt{17}$$



النقطة $\left(-1, \sqrt{17}\right)$

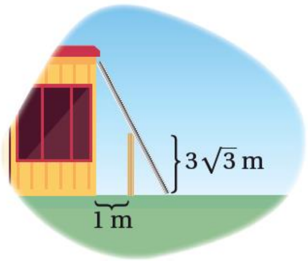
11) ما اكبر مساحة مستطيل يمكن رسمة داخل دائرة نصف قطرها (10)سم

الحل :



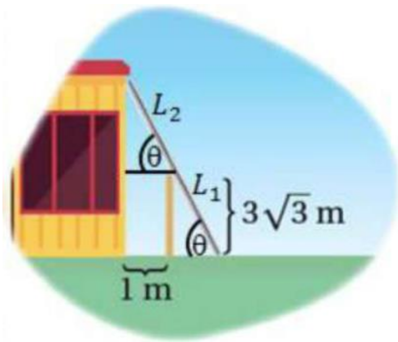
مثال1:

يحيط سياج ارتفاعه $3\sqrt{3}\ \text{m}$ بمبنى، ويبعد عنه مسافة 1m، كما في الشكل المجاور. أجد طول أقصر سُلَّم قد يصل من الأرض إلى المبنى، ويمر فوق السياج مُلامِسًا له



الحل:

ليكن θ قياس الزاوية بين السلم والارض ، L طول السلم، كما في الشكل



$$\sin\theta = \frac{3\sqrt{3}}{L_1}, \cos\theta = \frac{1}{L_2}, 0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

$$L = L_1 + L_2 = \frac{3\sqrt{3}}{\sin\theta} + \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\frac{dL}{d\theta} = \frac{-3\sqrt{3}\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

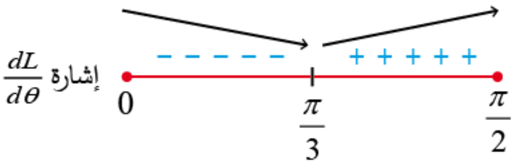
$$\frac{dL}{d\theta} = 0$$

$$3\sqrt{3}\cos^3\theta = \sin^3\theta$$

$$\tan^3\theta = 3\sqrt{3} = \left(\sqrt{3}\right)^3$$

$$\tan\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ قيمة حرجة وحيدة ، نستخدم اختبار المشتقة الاولى وندرس اشارة $\dfrac{dL}{d\theta}$



للاقتران قيمة صغرى محلية عندما $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

اذن أقل طول ممكن للسلم هو

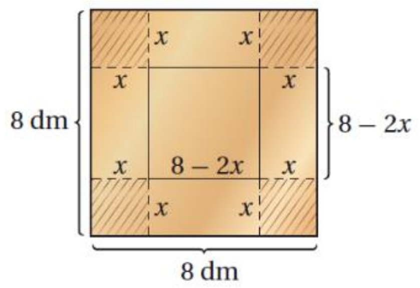
$$L\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} = 6+2 = 8\ \text{m}$$

مثال2:

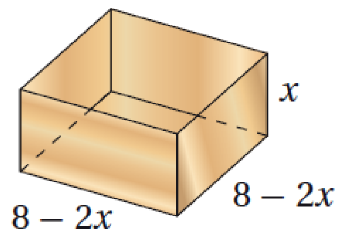
صندوق على شكل متوازي مستطيلات، صُنِعَ من قطعة كرتون رقيقة، مربعة الشكل، طولها 8dm وذلك بقطع 4 مربعات متطابقة من زواياها، وطيّ الجوانب إلى الأعلى. أجد أبعاد الصندوق ليكون حجمه أكبر ما يُمكن.

الحل:

أفترض أنَّ x هو طول كل مربع قُطع من زوايا قطعة الكرتون الأصلية . وبما أنَّ طول القطعة هو $8\ \text{dm}$ ، فإن طول كل جانب من جوانبها بعد قطع المربعات الصغيرة منها هو $(8-2x)\,\text{dm}$ كما يظهر في المخطط المجاور .



يُبين الشكل المجاور أبعاد الصندوق الناتج بعد إزالة المربعات الأربعة الصغيرة وطيّ الجوانب .



أجد حجم هذا الصندوق :

صيغة حجم متوازي المستطيلات

$$V = l \times w \times h$$

بتعويض $l = 8-2x, w = 8-2x, h = x$

$$V(x) = (8-2x)\times(8-2x)\times x$$

$$= 4x^3 - 32x^2 + 64x$$

إذن الاقتران الذي يمثل حجم الصندوق هو: $V(x) = 4x^3 - 32x^2 + 64x$ ، ومجاله هو: $0 \le x \le 4$

$$V'(x) = 12x^2 - 64x + 64$$

$$12x^2 - 64x + 64 = 0$$

$$3x^2 - 16x + 16 = 0$$

$$(3x-4)(x-4) = 0$$

$$3x-4=0 \quad or \quad x-4=0$$

$$x = \frac{4}{3} \qquad x = 4$$

توجد قيمة حرجة واحدة في الفترة $(0,4)$ ، هي $x = \frac{4}{3}$ ، وهذا يعني وجود 3 قيم يمكن المقارنة بينها بحسب نظرية القيم القصوى، وهي: القيمة الحرجة ، وقيمتا طرفي الفترة .

$$V(0) = 0$$

$$V\left(\frac{4}{3}\right) = 4\left(\frac{4}{3}\right)^3 - 32\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 64\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1024}{27}$$

$$V(4) = 0$$

إذن ، أكبر حجم للصندوق هو عند قطع 4 مربعات متطابقة من زواياه ، طول كلٍّ منها $\frac{4}{3}$ dm . ومن ثمَّ فإنَّ أبعاد الصندوق هي:

$$l = 8 - 2\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{3} \text{ dm}$$

$$w = 8 - 2\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{3} \text{ dm}$$

$$h = \frac{4}{3} \text{ dm}$$

طريقة بديلة:

يُمكنني استعمال اختبار المشتقة الثانية لتحديد نوع القيمة الحرجة عندما $x = \frac{4}{3}$.

بإيجاد المشتقة الثانية

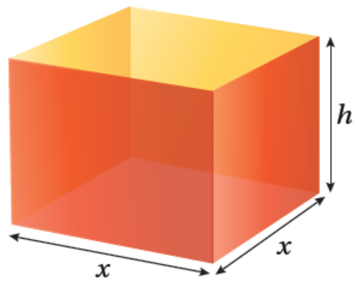
$$V''(x) = 24x - 64$$

بتعويض $x = \frac{4}{3}$

$$V''\left(\frac{4}{3}\right) = 24\left(\frac{4}{3}\right) - 64 = -32 < 0$$

مثال3:

ترغب شركة في تصميم صندوق مفتوح من الأعلى، وقاعدته مربعة الشكل ، ومساحة سطحه الكلية 1080cm^2 كما في الشكل المجاور . أجد أبعاد الصندوق ليكون حجمه أكبر ما يُمكن .



الحل:

ليكن حجم الصندوق V ومساحة سطحه الكلية A

$$A = 4xh + x^2 = 1080$$

$$h = \frac{1080 - x^2}{4x}$$

$$V = x^2 h$$

$$V(x) = x^2\left(\frac{1080 - x^2}{4x}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(1080x - x^3), 0 \le x \le \sqrt{1080}$$

$$V'(x) = \frac{1}{4}(1080 - 3x^2)$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{360}$$

القيمة الحرجة هي $\sqrt{360}$

اجد حجم الصندوق عند القيمة الحرجة وعند طرفي المجال

$$V(0) = 0$$

$$V\left(\sqrt{360}\right) = \frac{1}{4}\left(1080\sqrt{360} - 360\sqrt{360}\right)$$

$$= 180\sqrt{360} = 1080\sqrt{10}$$

$$V\left(\sqrt{1080}\right) = 0$$

اذن يكون الحجم اكبر ما يمكن عندما $x = 6\sqrt{10}$ cm وعندها يكون الارتفاع

$$h = 3\sqrt{10} \text{ cm}$$

مثال4:

عمودان طول أحدهما 8m ، وطول الآخر 4m ، والمسافة بينهما 9m. وهما مُثبتان بسلكين يصلان قمة كل عمود بوتد عند سطح الأرض كما في الشكل المجاور . أجد الموقع المناسب لتثبيت الوتد بين

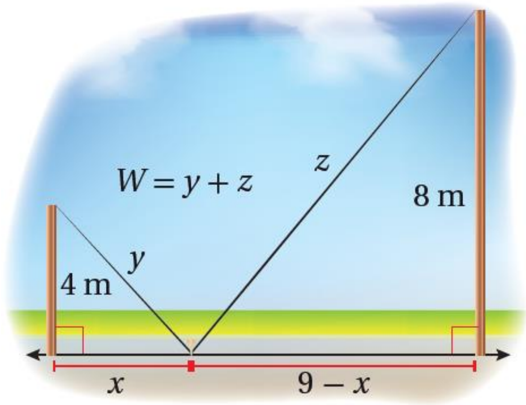
العمودين بحيث يكون طول السلك المُستعمل أقل ما يُمكن.

الحل:

أرسم مُخططًا للعمودين، والسلكين، والوتد، مُفترِضًا أنَّ w هو طول السلك الذي يصل العمودين بالوتد.

بناءً على الشكل المجاور، فإن:

$$W = y + z$$



بما أنَّ المسافة بين العمودين هي 9m ، فإن بُعد الوتد عن أحدهما (الأصغر مثلًا) هو x ، وبعده عن العمود الآخر هو: $9-x$

أكتب الاقتران W بدلالة متغير واحد

نظرية فيثاغوروس

$$y^2 = x^2 + 4^2$$

$$y = \sqrt{x^2+16}$$

$$z^2 = (9-x)^2 + 8^2$$

$$z = \sqrt{(9-x)^2+64}$$

$$W = y + z$$

$$W(x) = \sqrt{x^2+16} + \sqrt{(9-x)^2+64}$$

ومجاله هو: $0 \le x \le 9$

$$W'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+16}} + \frac{-(9-x)}{\sqrt{(9-x)^2+64}}$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+16}} + \frac{-(9-x)}{\sqrt{(9-x)^2+64}} = 0$$

$$x\sqrt{(9-x)^2+64} = (9-x)\sqrt{x^2+16}$$

$$x^2\left((9-x)^2+64\right) = (9-x)^2\left(x^2+16\right)$$

$$x^2(9-x)^2 + 64x^2 = x^2(9-x)^2 + 16(9-x)^2$$

$$4x^2 = (9-x)^2$$

$$4x^2 = 81 - 18x + x^2$$

$$3x^2 + 18x - 81 = 0$$

$$x^2 + 6x - 27 = 0$$

$$(x-3)(x+9) = 0$$

$$x - 3 = 0 \quad or \quad x + 9 = 0$$

$$x = 3 \qquad x = -9$$

بما أن $x = -9$ خارج المجال، فإنها تُهمل.

بناءً على ذلك، توجد 3 قيم يُمكن المقارنة بينها بحسب نظرية القيم القصوى، وهي: القيمة الحرجة، وقيمتا طرفي الفترة.

$$W(0)\approx 16$$

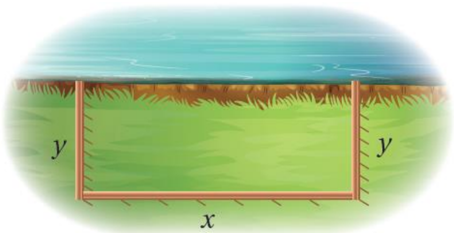
$$W(3)=15$$

$$W(9)\approx 17.8$$

إذن، يجب تثبيت الوتد على بُعد 3m من العمود الأقصر؛ ليكون طول السلك المُستعمل لتثبيت العمودين أقل ما يُمكن، وهو 15m.

مثال5:

خطط مزارع لتسييج حظيرة مستطيلة الشكل قرب نهر كما في الشكل المجاور، وحدد مساحة الحظيرة بـ $245000m^2$ لتوفير كمية عشب كافية لاغنامه أجد أبعاد الحظيرة التي تجعل طول السياج أقل ما يمكن علماً بأن الجزء المقابل للنهر لا يحتاج إلى تسييج



الحل:

ليكن طول السياج L ومساحة الحظيرة A

$$A=xy=245000$$

$$y=\frac{245000}{x}$$

$$L=x+2y$$

$$L(x)=x+\frac{490000}{x}, x>0$$

$$L'(x)=1-\frac{490000}{x^2}$$

$$L'(x)=0 \Rightarrow x=700$$

قيمة x الحرجة هي 700

$$L''(x)=\frac{980000}{x^3}$$

$$L''(700)=\frac{980000}{700^3}>0$$

اذن يكون طول سياج اقل ما يمكن عندما

$x=700 \text{ m}$ و $y=\frac{245000}{700}=350 \text{ m}$

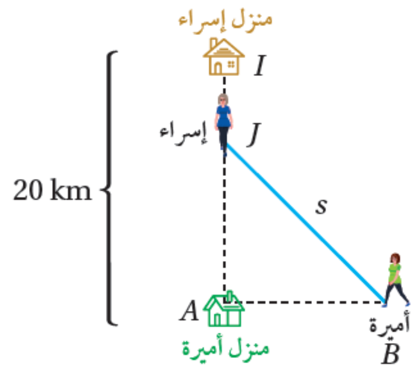
مثال6:

تتدرب إسراء وأميرة يومياً استعداداً لسباق العدو (المارثون) في أحد الأيام انطلقت إسراء من منزلها الذي يقع على بعد 20km شمال منزل أميرة الساعة 9:00a.m واتجهت جنوباً بسرعة 8km/h وفي الوقت نفسه انطلقت أميرة في اتجاه الشرق بسرعة 6km/h في أي ساعة تكون إسراء وأميرة أقرب ما يمكن إلى بعضهما، علماً بأن كلا منهما ركضت مدة 2.5h

الحل:

أفترض أن إسراء بدأت الركض من النقطة I ووصلت إلى النقطة J بعد t ساعة، وأن أميرة انطلقت –في الوقت نفسه– من النقطة A ، ووصلت

إلى النقطة B بعد t ساعة وبذلك، فإن بُعد إسراء عن أميرة بعد t ساعة هو: $s = JB$



باستعمال نظرية فيثاغورس فإن:

$$s = JB = \sqrt{JA^2 + AB^2}$$

المسافة JA $\quad JA = 20 - 8t$

المسافة AB $\quad AB = 6t$

$$s = JB = \sqrt{JA^2 + AB^2}$$

$$s(t) = \sqrt{(20-8t)^2 + (6t)^2}$$

$$= \sqrt{100t^2 - 320t + 400}$$

ومجاله هو: $0 \le t \le 2.5$

$$s'(t) = \frac{100t - 160}{\sqrt{100t^2 - 320t + 400}}$$

$$\frac{100t - 160}{\sqrt{100t^2 - 320t + 400}} = 0$$

$$100t - 160 = 0 \Rightarrow t = 1.6$$

توجد 3 قيم ممكن المقارنة بينها بحسب نظرية القيم القصوى، وهي: القيمة الحرجة، وقيمتا طرفي الفترة

$s(0) = 20$

$s(1.6) = 12$

$s(2.5) = 15$

إذن، تكون إسراء وأميرة أقرب ما يمكن إلى بعضهما بعد 1.6 ساعة من بدء كل منهما الركض، أي الساعة 10:36 a.m

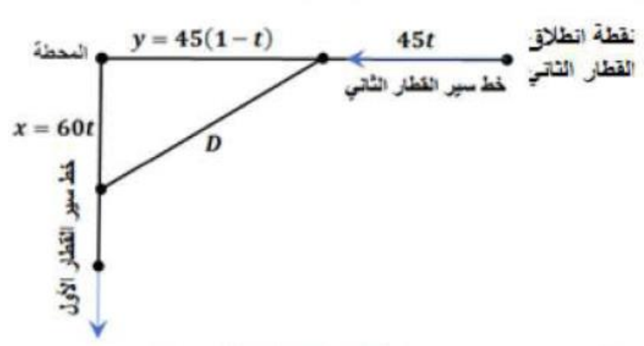
---

مثال 7:

انطلق قطار من إحدى المحطات الساعة 10:00a.m وتحرك في اتجاه الجنوب بسرعة 60km/h حيث المحطة التالية وفي الوقت نفسه، انطلق قطار آخر نحو الغرب بسرعة 45km/h ثم وصل إلى محطة انطلاق القطار الأول الساعة 11:00a.m في أي ساعة يكون القطاران أقرب ما يمكن إلى بعضهما

الحل:

نفرض x بعد القطار الاول عن المحطة، y بعد القطار الثاني عن المحطة ونفرض D البعد بين القطارين ، القطار الثاني استغرق ساعة واحدة للوصول الى المحطة اذن فقد انطلق من نقطة تبعد 45 كيلومتر عنها



بعد t ساعة من انطلاقهما يكون

$$x=60t$$

$$y=45-45t=45(1-t)$$

$$D(t)=\sqrt{(60t)^2+(45(1-t))^2}$$

$$=\sqrt{3600t^2+2025(1-t)^2},0\le t\le 1$$

$$D'(t)=\frac{7200t-4050(1-t)}{2\sqrt{3600t^2+2025(1-t)^2}}$$

$$=\frac{11250t-4050}{2\sqrt{3600t^2+2025(1-t)^2}}$$

$$D'(t)=0$$

$$t=\frac{4050}{11250}=\frac{9}{25}$$

قيمة t الحرجة هي $t=\frac{9}{25}$

اجد المسافة D عند القيمة الحرجة وعند طرفي المجال

$$D(0)=\sqrt{2025}=45$$

$$D(1)=\sqrt{3600}=60$$

$$D\left(\frac{9}{25}\right)=\sqrt{3600\left(\frac{9}{25}\right)^2+2025\left(1-\frac{9}{25}\right)^2}=36$$

اذن يكون القطار اقرب ما يمكن الى بعضهما عندما $t=\frac{9}{25}$ اي بعد 21 دقيقة و36 ثانية

وتكون السرعة حينئذ 10:21:36

مثال8:

لاحظت إدارة أحد المسارح أن متوسط عدد الحضور لعرض ما هو 1000 شخص إذا كان سعر بيع التذكرة JD26 وأن عدد الحضور يزيد بمقدار 50 شخصاً مقابل كل دينار يخصم من سعر التذكرة إذا كان متوسط ما ينفقه كل شخص JD4 على الخدمات داخل المسرح فما سعر بيع التذكرة الذي يحقق للمسرح أعلى إيراد

الحل:

افترض أولا أن x هو المبلغ الذي خصمته إدارة المسرح من سعر التذكرة الأصلي وبما أن عدد الحضور يزيد بمقدار 50 شخصاً مقابل كل دينار يخصم فإن عدد الحضور يزيد بمقدار $50x$ مقابل كل x دينار

اقتران الإيراد

$R(x)=$ (الإيراد من التذاكر) + (الإيراد من إنفاق كل شخص)

بالتعويض

(4 ×عدد الأشخاص) + (سعر التذكر×عدد الاشخاص) =

بالتعويض

$$=(1000+50x)(26-x)+(1000+5x)\times 4$$

$$=-50x^2+500x+30000$$

إذن، الاقتران الذي يمثل الإيراد هو:

$$R(x)=-50x^2+500x+30000$$

أجد الإيراد الحدي $R'(x)$ ثم أجد القيمة الحرجة للاقتران $R(x)$ عندما $R'(x)=0$

$$R'(x)=-100x+500$$

$$-100x+500=0$$

$$x=5$$

بإيجاد المشتقة الثانية للاقتران الإيراد

$$R''(x)=-100$$

بتعويض $x=5$

$$R''(5)=-100<0$$

ألاحظ أنه توجد قيمة عظمى مطلقة عندما $x=5$

إذن، يحقق المسرح إعلى إيراد إذا خفض سعر التذكرة بمقدار JD5 أي إذا أصبح سعرها JD21

مثال9:

يبيع متجر 200 شاشة تلفاز شهرياً بسعر JD350 للشاشة الواحدة، وقد أشار مسح للسوق أعده خبير تسويق في المتجر إلى أن عدد الشاشات المبيعة شهرياً يزيد بمقدار 20 شاشة عند كل خصم مقداره JD10 من سعر الشاشة الواحدة أجد سعر بيع الشاشة الواحدة الذي يحقق للمتجر أعلى إيراد ممكن

الحل:

ليكن سعر بيع الشاشة الواحدة هو x دينار

اي ان مقدار الخصم من سعر بيع الشاشة الواحدة هو $350-x$ دينار

وبالتالي تحصل وياده في عدد الشاشات المبيعة مقدارها $\frac{20}{10}(350-x)=700-2x$ شاشة

اذن عدد الشاشات المبيعة سيكون

$$200+700-2x=900-2x$$

الايراد = عدد الشاشات المبيعة × سعر بيع الشاشة الواحدة بعد الخصم

$$R(x)=(900-2x)x=900x-2x^2$$

$$R'(x)=900-4x$$

$$R'(x)=0\Rightarrow x=225$$

توجد قيمة حرجة وحيدة هي 225

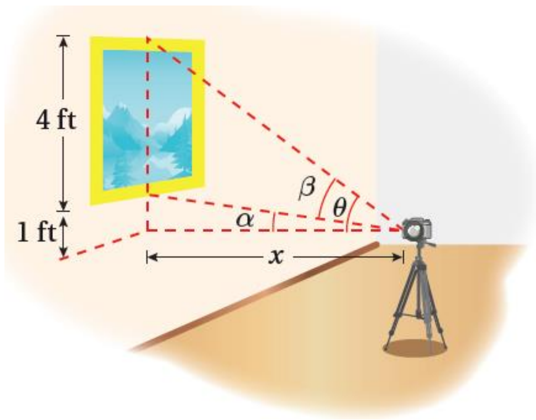
$$R''(x)=-4\Rightarrow R''(225)=-4<0$$

نلاحظ ان الاقتران الايراد له قيمة عظمى عندما $x=225$

اذن يحقق المتجر اعلى ايراد ممكن عندما يكون سعر بيع الشاشة الواحدة هو 225 دينارا

مثال10:

يريد مصور التقاط صورة للوحة ارتفاعها 4ft وهي معلقة في معرض فني إذا كانت عدسة الكاميرا تقع أسفل الحافة السفلية للوحة بمقدار 1ft كما يظهر في الشكل المجاور، فأجد بعد الكاميرا اللازم عن اللوحة لتكون زاوية تصوير عدستها β أكبر ما يمكن



الحل:

يظهر من الشكل أن ظل الزاوية β التي يراد إيجاد أكبر قيمة لها يعطى بالمعادلة الآتية:

$$\tan\beta = \tan(\theta-\alpha)$$

أكتب ظل الزاوية β بدلالة المتغير x الذي يمثل بعد العدسة عن اللوحة

الاقتران المطلوب إيجاد قيمته القصوى

$$\tan\beta = \tan(\theta-\alpha)$$

متطابقة ظل الفرق بين زاويتين

$$= \frac{\tan\theta-\tan\alpha}{1+\tan\theta\tan\alpha}$$

بتعويض $\tan\theta = \frac{5}{x}, \tan\alpha = \frac{1}{x}$

$$= \frac{\frac{5}{x}-\frac{1}{x}}{1+\frac{5}{x}\times\frac{1}{x}} = \frac{\frac{4}{x}}{\frac{x^2+5}{x^2}}$$

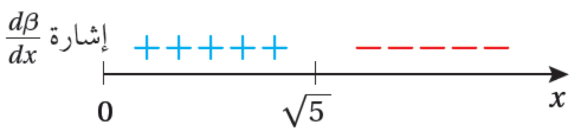
$$\tan\beta = \frac{4x}{x^2+5}$$

$$\sec^2\beta\times\frac{d\beta}{dx} = \frac{(x^2+5)(4)-(4x)(2x)}{(x^2+5)^2}$$

$$\sec^2\beta\times\frac{d\beta}{dx} = \frac{20-4x^2}{(x^2+5)^2}$$

$$\frac{20-4x^2}{(x^2+5)^2} = 0$$

$$20-4x^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{5}$$

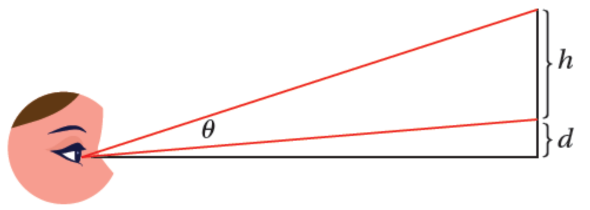


ألاحظ من اختبار المشتقة الأولى وجود قيمة عظمى مطلقة عندما $x = \sqrt{5}$

إذن، يجب أن يكون بعد الكاميرا عن اللوحة $\sqrt{5}$ ft لكي تكون زاوية تصوير عدستها أكبر ما يمكن

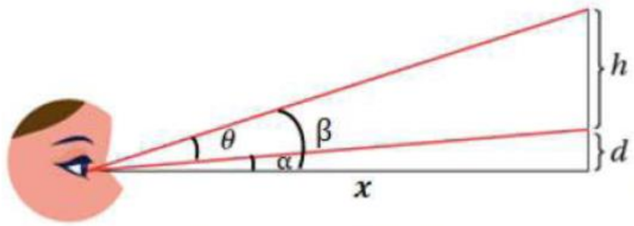
مثال11:

نظرت سارة إلى لوحدة معلقة على حائط في منزلها ارتفاعها h متراً وارتفاع حافتها السفلية d متراً فوق عينها كما في الشكل المجاور كم متراً يجب أن تبتعد سارة عن الجدار لتكون زاوية نظرها θ أكبر ما يمكن؟



الحل:

نسمي الابعاد وقياسات الزوايا كما في الشكل



$$\tan\theta = \tan(\beta - \alpha)$$

$$= \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha}$$

$$= \frac{\frac{h+d}{x} - \frac{d}{x}}{1 + \frac{d(h+d)}{x^2}}, x > 0$$

$$\tan\theta = \frac{xh}{x^2 + d(h+d)}$$

$$\sec^2\theta\frac{d\theta}{dx} = \frac{(x^2 + d(h+d))(h) - xh(2x)}{(x^2 + d(h+d))^2}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \cos^2 x\frac{(-x^2 + d(h+d))(h)}{(x^2 + d(h+d))^2} = 0$$

بما ان $\theta < \frac{\pi}{2}$ فإن $\cos^2 x \neq 0$ اذن

$$(-x^2 + d(h+d))(h) = 0$$

$$x^2 = d(h+d) \Rightarrow x = \sqrt{d(h+d)}$$

توجد قيمة حرجة وحيدة هي $x = \sqrt{d(h+d)}$

نستخدم اختبار المشتقة الاولى وندرس اشارة $\frac{d\theta}{dx}$

إشارة $\frac{d\theta}{dx}$

0	+ + + + +	$\sqrt{d(h+d)}$	− − − − −
	↗		↘

اعوض $x = \sqrt{dt}$

$$\frac{d\theta}{dx} = \cos^2\sqrt{dt}\frac{(-dt + d(h+d))(h)}{(dh + d(h+d))^2}$$

$$= \cos^2\sqrt{dt}\frac{d^2h}{(dh + d(h+d))^2} > 0$$

اعوض $x = \sqrt{d(2h+d)}$

$$\frac{d\theta}{dx} = \cos^2\sqrt{d(2h+d)}\frac{(-d(2h+d) + d(h+d))(h)}{(dh + d(h+d))^2}$$

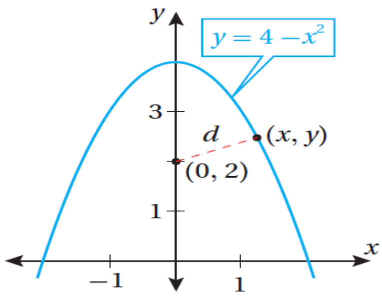
$$= \cos^2\sqrt{d(2h+d)}\frac{-dh^2}{(dh + d(h+d))^2} < 0$$

اذن يجب ان تبتعد سارة عن الجدار مسافة $\sqrt{d(h+d)}$ m لتكون زاوية نظرها θ اكبر ما يمكن

مثال12:

أجد النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x)=4-x^2$ التي هي أقرب ما يمكن إلى النقطة $(0,2)$

الحل:



أفترض أن النقطة الواقعة على منحنى الاقتران $f(x)$ هي (x,y) وأن d هي المسافة بينها وبين النقطة $(0,2)$ باستعمال قانون المسافة بين نقطتين فإن الاقتران الذي يمثل المسافة يكتب كما يأتي:

$$d=\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2}$$

بما أن النقطة (x,y) تقع على منحنى الاقتران $f(x)$ فإن: $y=f(x)=4-x^2$

$$d=\sqrt{x^2+(y-2)^2}$$

$$d(x)=\sqrt{x^2+(2-x^2)^2}$$

$$d'(x)=\frac{x-2x(2-x^2)}{\sqrt{x^2+(2-x^2)^2}}$$

$$\frac{x-2x(2-x^2)}{\sqrt{x^2+(2-x^2)^2}}=0$$

$$x-2x(2-x^2)=0$$

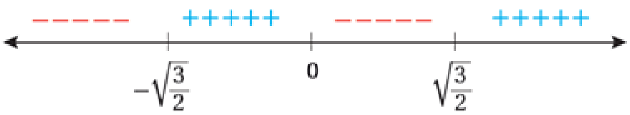
$$x-4x+2x^3=0$$

$$-3x+2x^3=0$$

$$x(-3+2x^2)=0$$

$$x=0 \quad or \quad -3+2x^2=0$$

$$x=0 \qquad x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$



توجد قيمة عظمى محلية عندما $x=0$ وتوجد قيمة صغرى محلية ومطلقة عندما $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$

إذن، أقرب نقطتين إلى النقطة $(0,2)$ هما $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{5}{2}\right),\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{5}{2}\right)$

مثال13:

أجد النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x)=\sqrt{8x}$ التي هي أقرب ما يمكن إلى النقطة $(4,2)$

الحل:

لتكن النقطة (x,y) على منحنى $f(x)=\sqrt{8x}$ ولتكن المسافة بينها وبين النقطة $(4,2)$ هي L حيث

$$L=\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}$$

$$L=\sqrt{(x-4)^2+\left(\sqrt{8x}-2\right)^2}$$

$$\frac{dL}{dx}=\frac{x-4+\left(\sqrt{8x}-2\right)\left(\frac{4}{\sqrt{8x}}\right)}{\sqrt{(x-4)^2+\left(\sqrt{8x}-2\right)^2}}$$

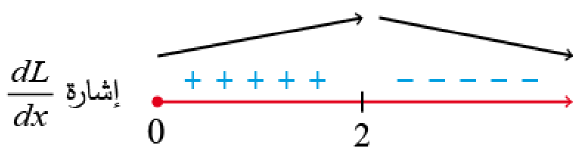
$$=\frac{x-\frac{8}{\sqrt{8x}}}{\sqrt{(x-4)^2+\left(\sqrt{8x}-2\right)^2}}$$

$$\frac{dL}{dx}=0$$

$$x=\frac{8}{\sqrt{8x}}\Rightarrow x\sqrt{8x}=8$$

$$8x^3=64\Rightarrow x^3=8\Rightarrow x=2$$

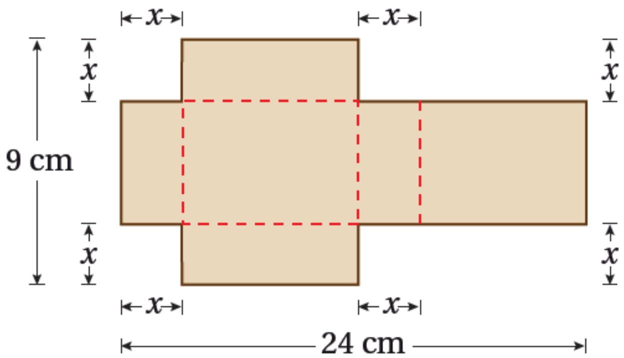
نستخدم اختبار المشتقة الاولى وندرس اشارة $\frac{dL}{dx}$



اذن اقرب نقطة من نقاط المنحنى f للنقطة $(4,2)$ هي $(2,4)$

مثال14:

قطعة كرتون طولها 24cm وعرضها 9cm أزيل منها مربعان متطابقان ومستطيلان متطابقان كما في الشكل المجاور بحيث أمكن طيها وتكوين له غطاء منها:



1) أكتب الاقتران $V(x)$ الذي يمثل حجم الصندوق

الحل:

$$V(x)=(12-x)(9-2x)x$$

$$=2x^3-33x^2+108x$$

2) أحدد مجال الاقتران V

الحل:

حتى يتشكل لدينا صندوق يجب ان تكون ابعاده كلها موجبة، وذلك بتحقق الشروط الثلاثة الآتية معا:

$$x>0, 12-x>0, 9-2x>0$$

$$\Rightarrow x>0, x<12, x<\frac{9}{2}$$

اي ان مجال الاقتران $V(x)$ هو $\left(0,\frac{9}{2}\right)$

3) أجد أبعاد الصندوق بحيث يكون حجمه أكبر ما يمكن

الحل:

$$V'(x)=6x^2-66x+108$$

$$V'(x)=0$$

$$6(x-9)(x-2)=0$$

$$x=9 \quad , \quad x=2$$

القيمة 9 خارج المجال اذن تهمل فتكون القيمة الحرجة الوحيدة ضمن المجال هي $x=2$

$$V''(x)=12x-66$$

$$V''(2)=12(2)-66=-42<0$$

وعليه فإن حجم الصندوق يكون اكبر ما يمكن عندما تكون ابعاده 2m , 5m , 10m

ويكون حجمه عندئذ $V(2)=100\ \text{m}^3$

4) أجد النقطة الواقعة على منحنى العلاقة: $4x^2+y^2=4$ التي هي أقرب ما يمكن إلى النقطة $(0,1)$

الحل:

لتكن النقطة (x,y) على منحنى العلاقة $4x^2+y^2=4$ ولتكن المسافة بينها وبين النقطة $(0,1)$ هي L حيث

$$L=\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2}$$

$$L=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$$

$$L=\sqrt{\frac{4-y^2}{4}+y^2-2y+1}$$

$$L=\sqrt{\frac{3}{4}y^2-2y+2}, y\in[-2,2]$$

$$\frac{dL}{dy}=\frac{\frac{3}{4}y-1}{\sqrt{\frac{3}{4}y^2-2y+2}}$$

$$\frac{dL}{dy}=0 \Rightarrow y=\frac{4}{3}$$

اذن توجد قيمة حرجة وحيدة ضمن مجال $L(y)$ هي $y=\frac{4}{3}$

وبمقارنة $L\left(\frac{4}{3}\right)$ مع $L(2), L(-2)$ نجد ان $L\left(\frac{4}{3}\right)$ قيمة صغرى مطلقة لان

$$L(-2)=\sqrt{3+4+2}=3$$

$$L(2)=\sqrt{3-4+2}=1$$

$$L\left(\frac{4}{3}\right)=\sqrt{\frac{4}{3}-\frac{8}{3}+2}=\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 0.82$$

تكون L قيمة صغرى محلية ومطلقة عندما $y=\frac{4}{3}$

وتكون:

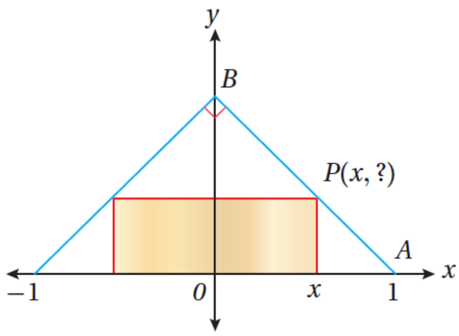
$$x=\pm\sqrt{\frac{4-y^2}{4}}=\pm\sqrt{\frac{4-\frac{16}{9}}{4}}=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$$

اذن اقرب نقطتين من نقاط المنحنى الى النقطة $(0,1)$ هما

$$\left(-\frac{\sqrt{5}}{3},\frac{4}{3}\right),\left(\frac{\sqrt{5}}{3},\frac{4}{3}\right)$$

مثال16:

يبين الشكل المجاور مستطيلاً مرسوماً داخل المثلث قائم الزاوية وهو متطابق الضلعين وطول قاعدته 2 وحدة طول:



1) أجد الإحداثي y للنقطة P بدلالة x

الحل:

المثلث قائم ومتطابق الضلعين اذن قياس كل زاوية من زوايا قاعدته $\frac{\pi}{4}$

ميل المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ هو $\tan\frac{3\pi}{4}=-1$

وهو يمر بالنقطة $A(1,0)$

معادلة $\overleftrightarrow{AB}$ هي

$$y-0=-1(x-1)\Rightarrow y=1-x$$

اذن الاحداثي y للنقطة P هو $1-x$

2) أكتب مساحة المستطيل بدلالة x

الحل:

مساحة المستطيل = طوله عرضه

$$A=2xy=2x(1-x)$$

$$=2x-2x^2,0<x<1$$

3) أجد أكبر مساحة ممكنة للمستطيل

الحل:

$$A'(x)=2-4x$$

$$A'(x)=0$$

$$2-4x=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

$$A(0)=A(1)=0,A\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

للاقتران A قيمة عظمى محلية هي $A\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

اذن اكبر مساحة ممكنة للمستطيل هي $\frac{1}{2}$ وحدة مربعة

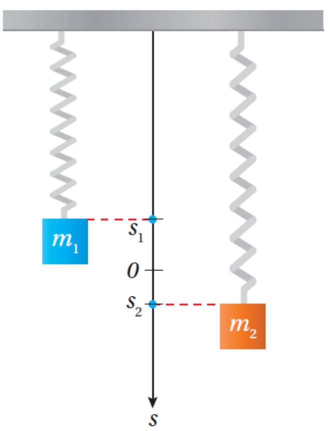
4) أجد أبعاد المستطيل التي تجعل مساحته أكبر ما يمكن

الحل:

الطول $2x=1$ ، والعرض $y=1-x=\frac{1}{2}$

مثال17:

يبين الشكل المجاور كتلتين معلقتين جنباً إلى جنب في زنبركين ويمثل الاقتران: $s_1=2\sin t$ والاقتران: $s_2=\sin 2t$ موقعي الكتلتين على



الترتيب حيث s_1, s_2 الموقعان بالامتار و الزمن t بالثواني:

1) أجد قيمة (قيم) t التي تكون عندها الكتلتان في الموقع نفسه، حيث $t > 0$

الحل:

$$s_1 = s_2$$

$$2\sin t = \sin 2t \quad , t > 0$$

$$2\sin t - 2\sin t\cos t = 0$$

$$2\sin t(1 - \cos t) = 0$$

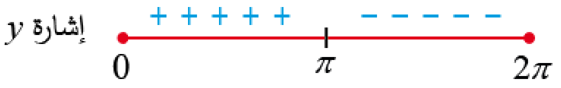
$$\sin t = 0 \quad or \quad \cos t = 1$$

حيث n عدد طبيعي $t = n\pi$

لتكن المسافة الرأسية بين الكتلتين y حيث

$$y = |s_1 - s_2| = |2\sin t - \sin 2t|$$

لاعادة تعريف اقتران القيمة المطلقة ندرس اشارة $2\sin t - \sin 2t$ على الفترة $[0, 2\pi]$



$$y = \begin{cases} 2\sin t - \sin 2t & , 0 \le t \le \pi \\ \sin 2t - 2\sin t & , \pi \le t \le 2\pi \end{cases}$$

❶ $2\sin t - \sin 2t \quad , 0 \le t \le \pi$

$$y'(t) = 2\cos t - 2\cos 2t$$

$$y'(t) = 0$$

$$2\cos t - 2\cos 2t = 0$$

$$2\cos t - 2(2\cos^2 t - 1) = 0$$

$$2\cos^2 t - \cos t - 1 = 0$$

$$(2\cos t + 1)(\cos t - 1) = 0$$

$$\cos t = -\frac{1}{2} \quad or \quad \cos t = 1$$

$$\Rightarrow t = \frac{2\pi}{3} \quad , \quad t = 0$$

لايجاد القيم القصوى نستطيع استخدام اختبار المشتقة الثانية

$$y''(t) = -2\sin t + 4\sin 2t$$

$$y''\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 4\sin 2\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= -\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = -3\sqrt{3} < 0$$

$$y(0) = 0$$

$$y(\pi) = 0$$

$$y\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \sin 2\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

اذن اكبر قيمة لـ y في الفترة $[0, \pi]$ هي $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

2) أجد قيمة (قيم) t التي تكون عندها المسافة الرأسية بين الكتلتين أكبر ما يمكن، حيث $0 \le t \le 2\pi$

الحل:

$y=\sin 2t-2\sin t, \pi\le t\le 2\pi$

$y'(t)=2\cos 2t-2\cos t$

$y'(t)=0$

$2\cos 2t-2\cos t=0$

$2\left(2\cos^2 t-1\right)-2\cos t=0$

$2\cos^2 t-\cos t-1=0$

$(2\cos t+1)(\cos t-1)=0$

$\cos t=-\frac{1}{2} \quad or \quad \cos t=1$

$\Rightarrow t=\frac{4\pi}{3} \quad , \quad t=2\pi$

لايجاد القيم القصوى نستطيع استخدام اختبار المشتقة الثانية

$y''(t)=-4\sin 2t+2\sin t$

$y''\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-4\sin\left(\frac{8\pi}{3}\right)+2\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

$=-2\sqrt{3}-\sqrt{3}=-3\sqrt{3}<0$

اذن $y\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ قيمة عظمى

$y(\pi)=0$

$y(2\pi)=0$

$y\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)-2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

اذن اكبر قيمة لـ y في الفترة $[\pi,2\pi]$ هي $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

اذن قيم t التي تكون عندها المسافة بين الكتلتين اكبر ما يمكن هي $t=\frac{4\pi}{3}, t=\frac{2\pi}{3}$

مثال18:

يمثل الاقتران: $p=150-0.5x$ سعر البدلة الرجالية (بالدينار) الذي حددته إحدى الشركات حيث x عدد البدلات المبيعة ويمثل الاقتران: $C(x)=4000+0.25x^2$ تكلفة إنتاج x بدلة:

1) أجد اقتران الإيراد

الحل:

$R(x)=xp(x)=150x-0.5x^2$

2) أجد اقتران الربح

الحل:

$P(x)=R(x)-C(x)$

$=150x-0.5x^2-4000-0.25x^2$

$=150x-0.75x^2-4000$

3) أجد عدد البدلات اللازم بيعها لتحقيق أكبر ربح ممكن ثم أجد أكبر ربح ممكن

الحل:

$P'(x)=150-1.5x$

$P'(x)=0$

$150-1.5x=0\Rightarrow x=100$

$P''(x)=-1.5$

$P''(100)=-1.5<0$

اذن لتحقيق اكبر ربح ممكن يلزم بيع 100 بدلة وتكون عندها قيمة الربح

$$P(100)=15000-7500-4000=3500\,JD$$

4) أجد سعر البدلة الواحدة الذي يحقق أعلى ربح ممكن

الحل:

عندما $x=100$ فإن سعر البدلة الواحدة يساوي:

$$P(100)=150-0.5(100)=100\,JD$$

مثال19:

تنتج مزرعة للتفاع 30 صندوقاً من الشجرة الواحدة تقريباً عند زراعة 20 شجرة في كل فدان من الأرض ويقل إنتاج الشجرة الواحدة بمقدار صندوق عند زراعة شجرة إضافية في كل فدان بسبب قرب الإشجار الشديد بعضها من بعض ما عدد الأشجار التي يجب زراعتها في كل فدان لتحقيق أكبر إنتاج ممكن؟

الحل:

ليكن عدد الاشجار التي ستزرع في الفدان هو x شجرة حيث $x\geq 20$

اذن عدد الاشجار الزائدة على العشرين هو $x-20$

سنقص عدد الصناديق التي تنتجها كل شجرة بمقدار $(x-20)$ صندوق

ويكون عدد الصناديق التي تنتجها كل شجرة $30-(x-20)=50-x$

سيكون اقتران الانتاج الكلي من الفدان

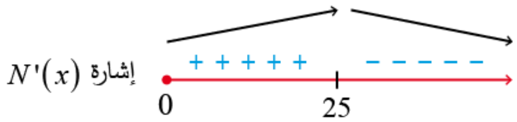
(عدد الاشجار × عدد الصناديق من كل شجرة)

$$N(x)=x(50-x)=50x-x^2$$

$$N'(x)=50-2x$$

$$N'(x)=0$$

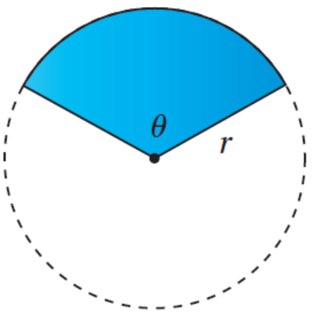
$$50-2x=0\Rightarrow x=25$$



اذن يتحقق اكبر انتاج عندما يتم زرع 25 شجرة في كل فدان

مثال20:

لدى مزارع P متراً طولياً من سياج، يرغب في استعماله كاملاً لتسييج حقل رعي على شكل قطاع دائري، زاويته θ بالراديان، في دائرة نصف قطرها r متراً كما في الشكل المجاور:



1) أثبت أن طول السياج اللازم إحاطة الحقل به هو:

$$P=r(\theta+2)$$

الحل:

ليكن L طول قوس القطاع الدائري المظلل اذن

$$P = r + r + L = 2r + r\theta = r(2+\theta)$$

2) أثبت أن مساحة القطاع هي: $A = \frac{1}{2}Pr - r^2$

الحل:

لتكن A مساحة القطاع الدائري المظلل اذن

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta$$

وبما ان $P = r(2+\theta)$ فإن:

$$\theta = \frac{P-2r}{r} = \frac{P}{r} - 2$$

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}r^2\left(\frac{P}{r} - 2\right) = \frac{1}{2}Pr - r^2$$

3) أجد نصف قطر القطاع بدلالة P الذي تكون عنده مساحة الحقل أكبر ما يمكن

الحل:

$$A'(r) = \frac{1}{2}P - 2r$$

$$A'(r) = 0$$

$$\frac{1}{2}P - 2r = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{4}P$$

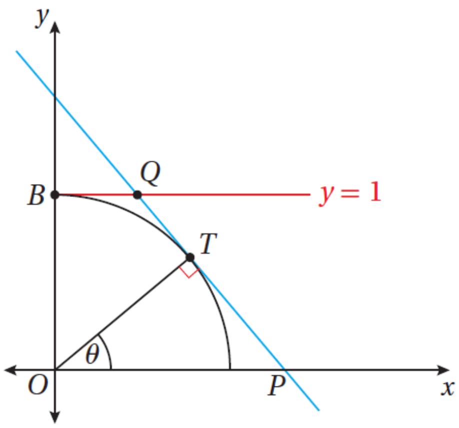
$$A''(r) = -2$$

$$A''\left(\frac{1}{4}P\right) = -2 < 0$$

تكون مساحة الحقل اكبر ما يمكن عندما $r = \frac{1}{4}P$

مثال21:

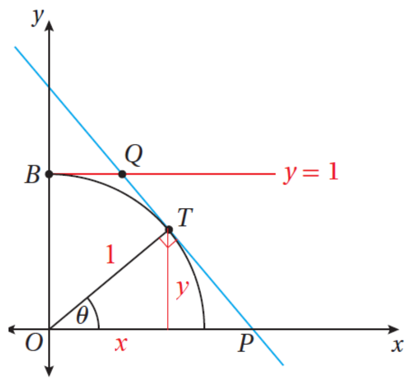
تقع النقطة T على دائرة الوحدة التي معادلتها: $x^2 + y^2 = 1$ عند الزاوية θ من المحور x الموجب، حيث $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ كما في الشكل المجاور



1) أثبت أن معادلة المستقيم PT هي:

$$x\cos\theta + y\sin\theta = 1$$

الحل:



$$\sin\theta = \frac{y}{1}, \cos\theta = \frac{x}{1}$$

$$T(\cos\theta, \sin\theta)$$

ميل OT يساوي $\tan\theta$ لان زاوية ميله θ

ومنه فإن ميل TP يساوي

$$\frac{-1}{\tan\theta}=\frac{-\cos\theta}{\sin\theta}$$

لانه يعامد OT

معادلة TP

$$y-\sin\theta=\frac{-\cos\theta}{\sin\theta}(x-\cos\theta)$$

$$y\sin\theta-\sin^2\theta=-\cos\theta(x-\cos\theta)$$

$$y\sin\theta-\sin^2\theta=-x\cos\theta+\cos^2\theta$$

$$y\sin\theta+x\cos\theta=1$$

2) أثبت أن مساحة شبه المنحرف $OBQP$ تعطى بالاقتران الآتي: $A=\dfrac{2-\sin\theta}{2\cos\theta}$

الحل:

$$A=\frac{1}{2}(OP+BQ)(OB)$$

لايجاد OP نضع $y=0$ في معادلة المستقيم TP فنجد ان

$$0+x\cos\theta=1\Rightarrow x=\frac{1}{\cos\theta}=OP$$

لايجاد BQ نضع $y=1$ في معادلة المستقيم TP فنجد ان

$$\sin\theta+x\cos\theta=1\Rightarrow x=\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}=BQ$$

ومنه تكون مساحة شبه المنحرف هي:

$$A=\frac{1}{2}(OP+BQ)(OB)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos\theta}+\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\right)(1)=\frac{2-\sin\theta}{2\cos\theta}$$

3) أجد قياس الزاوية θ الذي تكون عنده مساحة شبه المنحرف أقل ما يمكن

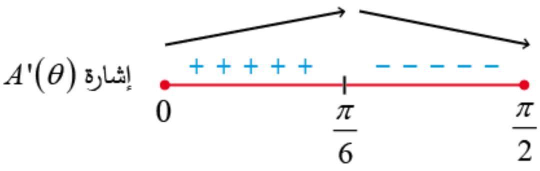
الحل:

$$A'(\theta)=\frac{(2\cos\theta)(-\cos\theta)-(2-\sin\theta)(-2\sin\theta)}{4\cos^2\theta}$$

$$=\frac{2\sin\theta-1}{2\cos^2\theta}$$

$$A'(\theta)=0$$

$$2\sin\theta-1=0\Rightarrow\sin\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{6}$$



تكون مساحة شبه المنحرف اقل ما يمكن عندما $\theta=\dfrac{\pi}{6}$

مثال22:

يبين الشكل المجاور نافذة مكونة من جزأين أحدهما علوي على شكل نصف دائرة قطرها x m والآخر على شكل مستطيل عرضه x m وارتفاعه y m صُنع الجزء العلوي

من زجاج ملون يسمح بمرور 1 وحدة ضوء لكل متر مربـع وصُـنـع الجـزء السـفلي مـن زجـاج شـفاف يسمح بمرور 3 وحدات ضوء لكل متر مربـع. أجد قيمة كل من x و y التـي تجعـل كميـة الضـوء المـار خـلال النافذة أكبـر مـا يمكن، علمـاً بـأن 10m مـن المعدن الرقيق استعمل في تشكيل إطار النافئة كالمأ بما في ذلك القطعة الفاصلة بين الجزأين

الحل:

لتكن كمية الضوء المارة خلال النافذة كاملة Q

$$Q=3xy+\frac{1}{2}\times\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2=3xy+\frac{1}{8}\pi x^2$$

محيط النافذة بالاضافة الى القطعة الفاصلة بين الجزأين هو L

$$L=2x+2y+\pi\frac{x}{2}=10$$

$$y=5-\left(1+\frac{\pi}{4}\right)x$$

ومنع فإن كمية الضوء تصبح

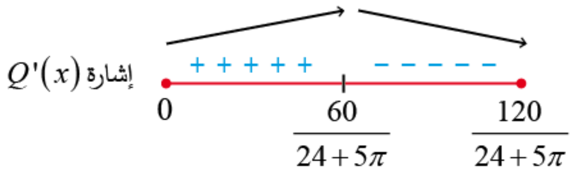
$$Q(x)=3x\left(5-\left(1+\frac{\pi}{4}\right)x\right)+\frac{1}{8}\pi x^2$$

حيث $0\le x\le\dfrac{120}{24+5\pi}$

$$=15x-\left(3+\frac{5\pi}{8}\right)x^2$$

$$Q'(x)=15-\left(6+\frac{5\pi}{4}\right)x$$

$$Q'(x)=0\Rightarrow x=\frac{60}{24+5\pi}$$

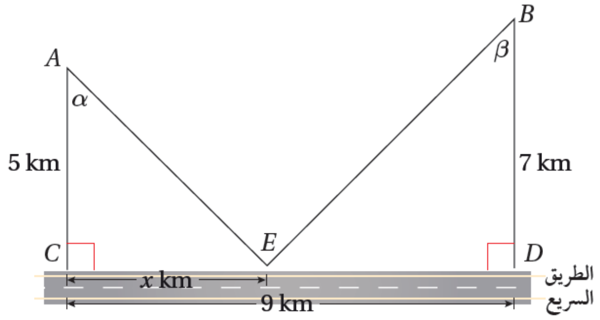


اذن تكون كمية الضوء المار خلال النافذة اكبر ما يمكن عندما

$$x=\frac{60}{24+5\pi},\ y=\frac{60+10\pi}{24+5\pi}$$

مثال23:

يمـارس يوسـف هوايـة ركـوب الـدراجات وغـي أحـد الأيام، انطلق علـى دراجتـه مـن البيت عند النقطة A إلـى المدرسة عند النقطة B ، ماراً بالنقطة E الواقعة على حافة الطريق السريع كما في الشكل المجاور :



1) إذا كـان الاقتـران L يمثـل المسافة التـي يقطعها يوسف من البيت إلى المدرسة فأكتب L بدلالة x

الحل:

$$L=AE+EB$$

$$=\sqrt{x^2+25}+\sqrt{(9-x)^2+49},0\le x\le 9$$

2) أثبت أنه إذا كان: $\frac{dL}{dt}=0$ فإن:

$\sin\alpha=\sin\beta$

الحل:

$$\frac{dL}{dx}=\frac{x}{\sqrt{x^2+25}}+\frac{-(9-x)}{\sqrt{(9-x)^2+49}}$$

$$\frac{dL}{dx}=0$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+25}}=\frac{9-x}{\sqrt{(9-x)^2+49}}$$

$$\sin\alpha=\sin\beta$$

3) أجد قيمة x التي تجعل الكمسافة التي يقطعها يوصف أقل ما يمكن

الحل:

من الفرع السابق

بما ان $\sin\alpha=\sin\beta$ والزاويتان α,β حادتان اذن

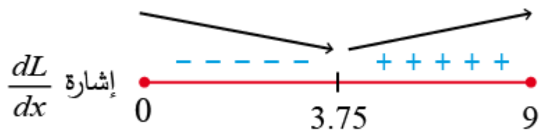
$\alpha=\beta$

ومنه فان $\tan\alpha=\tan\beta$ اي:

$$\frac{x}{5}=\frac{9-x}{7}$$

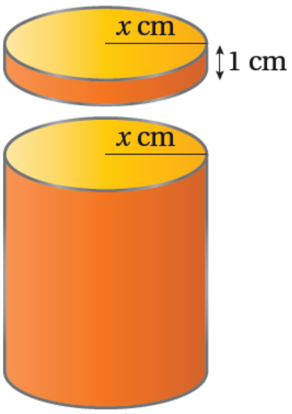
$$7x=45-5x$$

$$12x=45\Rightarrow x=\frac{15}{4}=3.75$$



اذن قيمة التي تجعل المسافة التي يقطعها يوسف اقل ما يمكن هي 3.75 km

مثال24:



علبة بسكويت أسطوانية الشكل، لها غطاء محكم يتداخل مع العلبة بمقدار 1cm كما في الشكل المجاور. إذا كان نصف قطر العلبة والغطاء x cm وصنعت العلبة والغطاء من صفيحة رقيقة ملائمة للأغذية، مساحتها $80\pi\ \text{cm}^2$ من دون أي هدر في المواد في أثناء عملية التصنيع فأجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعاً:

1) أجد قيمة x التي تجعل حجم العلبة المغلقة أكبر ما يمكن

الحل:

ليكن حجم العلبة ومساحة سطحها الكلية مع الغطاء وارتفاعها

$$A=2\left(\pi x^2\right)+2\pi xh+2\pi x=80\pi$$

$$x^2+(1+h)x=40$$

$$h=\frac{40}{x}-x-1$$

$$V = \pi x^2 h = \pi x^2\left(\frac{40}{x} - x - 1\right)$$

$$= \pi\left(40x - x^3 - x^2\right)$$

$$\frac{dV}{dx} = \pi\left(40 - 3x^2 - 2x\right)$$

$$\frac{dV}{dx} = 0$$

$$\pi\left(40 - 3x^2 - 2x\right) = 0$$

$$3x^2 + 2x - 40 = 0$$

$$(3x - 10)(x + 4) = 0 \Rightarrow x = \frac{10}{3}$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \pi(-6x - 2)$$

$$\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=\frac{10}{3}} = -22\pi < 0$$

اذن قيمة x التي تجعل حجم العلبة اكبر ما يمكن هي

$$x = \frac{10}{3}$$

2) أجد أكبر حجم ممكن للعلبة

الحل:

$$V\left(\frac{10}{3}\right) = \pi\left(40\left(\frac{10}{3}\right) - \left(\frac{10}{3}\right)^3 - \left(\frac{10}{3}\right)^2\right)$$

$$= \frac{2300}{27}\pi \text{ cm}^3$$

3) أجد النسبة المئوية للجزء الذي استعمل من الصفيحة لصنع الغطاء عندما كان الحجم أكبر ما يمكن

الحل:

لتكن مساحة الغطاء الكلية A_C

$$A_C = \pi x^2 + 2\pi x(1) = \pi x(x + 2)$$

$$A_C\left(\frac{10}{3}\right) = \pi\left(\frac{10}{3}\right)\left(\frac{10}{3} + 2\right) = \frac{160\pi}{9}$$

النسبة المئوية للجزء المستعمل لصنع الغطاء من مساحة الصفيحة هي:

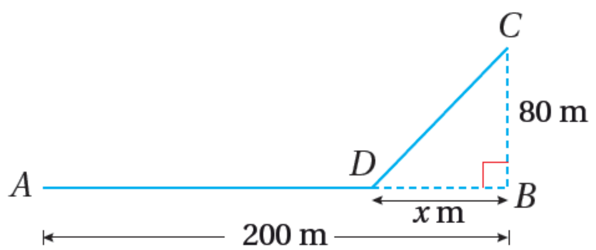
$$\frac{A_C}{80\pi} \times 100\% = \frac{\frac{160\pi}{9}}{80\pi} \times 100\%$$

$$= \frac{200}{9}\% \approx 22.2\%$$

مثال 25:

يمتد مسار للركض شرقاً من النقطة A إلى النقطة B مسافة 200m وتقع النقطة C على بعد 80m شمال النقطة B

انطلق راكب على دراجة من النقطة A إلى النقطة D بسرعة 10m/s ، حيث تقع النقطة D على بُعد x متراً غرب النقطة B ، ثم سار في طريق مستقيم وعر من النقطة D إلى النقطة C بسرعة 6 m/s:



1) أجد اقتراناً بدلالة x يمثل الزمن الذي سيستغرقه راكب الدراجة في الانتقال من النقطة A إلى النقطة C

الحل:

$$T = T_{AD} + T_{DC}$$

$$= \frac{200 - x}{10} + \frac{\sqrt{x^2 + 6400}}{6}$$

2) بافتراض أن x قيمة متغيرة أجد قيمة x التي يكون عندها الزمن اللازم للانتقال من النقطة A إلى النقطة C أقل ما يمكن

الحل:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{-1}{10} + \frac{x}{6\sqrt{x^2 + 6400}}$$

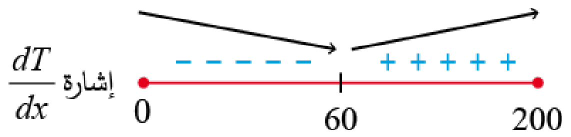
$$\frac{dT}{dx} = 0$$

$$\frac{x}{6\sqrt{x^2 + 6400}} = \frac{1}{10}$$

$$10x = 6\sqrt{x^2 + 6400}$$

$$25x^2 = 9\left(x^2 + 6400\right)$$

$$16x^2 = 9\left(6400\right) \Rightarrow x = 60 \text{ m}$$

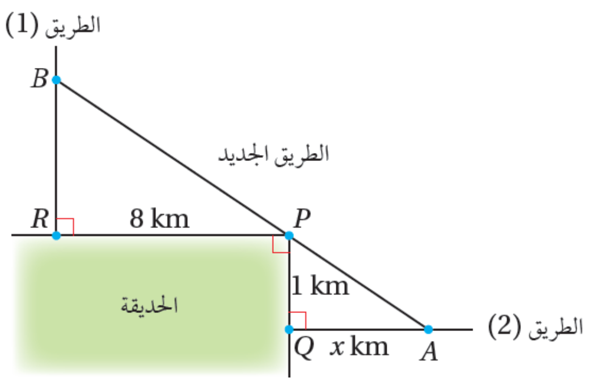


اذن قيمة x التي يكون عندها الزمن T اقل ما يمكن هي

$x = 60 \text{ m}$

مثال26:

يبين الشكل المجاور مدخلين لحديقة عامة عند النقطة R والنقطة Q ويمكن الوصول إلى هذين المدخلين من طريقين عموديين على ضلعي الحديقة. أرادت البلدية إنشاء طريق جديد يصل بين الطريقين القديمين، ويمر بالنقطة P التي تمثل زاوية الحديقة فاختارت النقطة A والنقطة B على الطريقين ليكون طول الطريق الجديد أقصر ما يمكن، علماً بأن النقطة A تقع على بُعد x km من النقطة Q أجد قيمة x التي تجعل طول الطريق الجديد أقصر ما يمكن



الحل:

ليكن L طول AB

النقاط A, B, P على استقامة واحدة

اذن المثلثان القائمان AQP, PRB متشابهان

ينتج عن ذلك

$$\frac{BR}{1}=\frac{8}{x}\Rightarrow BR=\frac{8}{x}$$

$$L=AP+PB$$

$$=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{64+\left(\frac{8}{x}\right)^2}$$

$$=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{\frac{64x^2+64}{x^2}}$$

$$=\sqrt{1+x^2}+\frac{8}{x}\sqrt{1+x^2}$$

$$=\sqrt{1+x^2}\left(1+\frac{8}{x}\right), x>0$$

$$\frac{dL}{dx}=\sqrt{1+x^2}\left(-\frac{8}{x^2}\right)+\left(1+\frac{8}{x}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

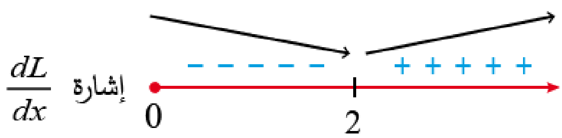
$$=\frac{-8\sqrt{1+x^2}}{x^2}+\frac{8+x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{dL}{dx}=0$$

$$\frac{8\sqrt{1+x^2}}{x^2}=\frac{8+x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$8\left(1+x^2\right)=8x^2+x^3$$

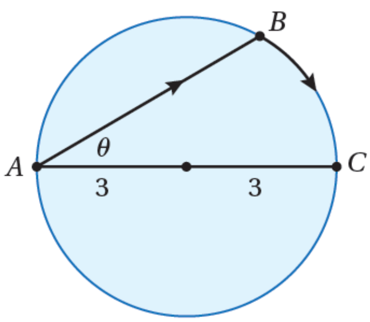
$$x^3=8\Rightarrow x=2$$



اذن قيمة x التي تجعل طول الطريق الجديد اقصر ما يمكن هي $x=2\text{ km}$

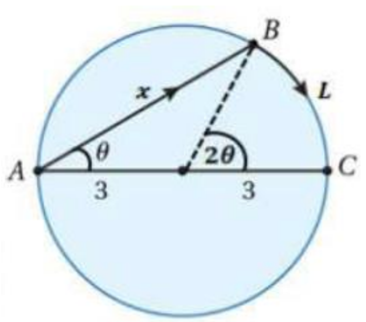
مثال27:

يقف رجل عند النقطة A على شاطئ بحيرة دائرية نصف قطرها 3km وهو يريد الوصول إلى النقطة C المقابلة تماماً للنقطة A على الجانب الآخر من البحيرة، في أقصر وقت ممكن كما في الشكل المجاور يمكن للرجل أن يجدف بزورق من النقطة A إلى النقطة B بسرعة 3km/h ثم يركض حول حافة البحيرة بسرعة 6km/h أحدد موقع النقطة B ليصل الرجل من النقطة A إلى النقطة C في أقل وقت ممكن؟ أبرر إجابتي



الحل:

المثلث ABC قائم الزاوية في B لان الزاوية ABC محيطية على قطر ومنه فإن $\cos\theta=\frac{x}{6}$



قياس الزاوية COB يساوي 2θ لانها مركزية مشتركة مع المحيطية CAB بالقوس نفسه

ليكن الزمن الكلي الذي يحتاجه الرجل للوصول الى النقطة C هو T

$$T = T_{A\to B} + T_{B\to C} = \frac{x}{3} + \frac{L}{6}$$

$$= \frac{6\cos\theta}{3} + \frac{3(2\theta)}{6}$$

$$= 2\cos\theta + \theta \quad , 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{dT}{d\theta} = 1 - 2\sin\theta$$

$$\frac{dT}{d\theta} = 0 \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

نقارن الزمن عند النقطة الحرجة مع الزمن عند طرفي المجال وهما $0, \frac{\pi}{6}$

$$T(0) = 2\text{ h}$$

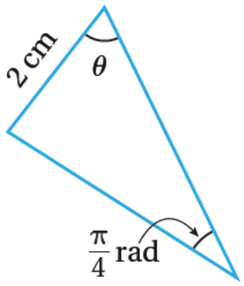
$$T\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} \approx 2.25\text{ h}$$

$$T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \approx 1.57\text{ h}$$

اذن القيمة الصغرى للزمن تكون عندما $\theta = \frac{\pi}{2}$ اي عندما تنطبق B على A ويقطع الرجل القوس AB كاملا راكضا على اليابسة دون تجديف في الماء

مثال 28:

يبين الشكل المجاور مثلثاً قياس زواياه $\frac{\pi}{4}$ rad ومقابلها ضلع طوله 2 cm:

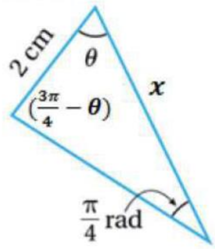


1) أثبت أن مساحة المثلث A تعطى بالاقتران:

$$A = \sin 2\theta - \cos 2\theta + 1$$

الحل:

ليكن طول الضلع الاخر من ضلعي الزاوية θ هو x فيكون قياس الزاوية المقابلة له هو $\left(\pi - \theta - \frac{\pi}{4}\right)$ اي $\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right)$



ولتكن مساحة هذا المثلث A فإن

$$A = \frac{1}{2} \times 2 \times x \times \sin\theta$$

وبتطبيق قانون الجيوب على هذا المثلث ينتج ان:

$$\frac{3}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{x}{\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right)}$$

$$x = 2\sqrt{2}\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\sin\frac{3\pi}{4}\cos\theta - \cos\frac{3\pi}{4}\sin\theta\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right)$$

$$= 2\left(\cos\theta + \sin\theta\right)$$

$$A = \frac{1}{2}\times 2\times 2\left(\cos\theta + \sin\theta\right)\times\sin\theta$$

$$= 2\left(\cos\theta + \sin\theta\right)\times\sin\theta$$

$$= 2\cos\theta\sin\theta \times 2\sin^2\theta$$

$$= 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta + 1 - \cos^2\theta$$

$$= 2\cos\theta\sin\theta - \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) + 1$$

$$= \sin 2\theta - \cos 2\theta + 1$$

اذن مساحة المثلث المعطى هي

$$A = \sin 2\theta - \cos 2\theta + 1$$

2) أجد مجال الاقتران في السؤال السابق

الحل:

المجال هو الفترة التي تكون فيها مساحة المثلث عددا حقيقيا موجبا وهو هنا الفترة $\left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$ التي طرفاها جذري اقتران المساحة لان المساحة عند هذين الحدين تكون صفرا وعند اي عدد بينهما تكون عددا موجبا فإذا كانت $\theta = \frac{\pi}{6}$ تكون مساحة المثلث

$$A = \sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3} + 1$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + 1 \approx 1.37 > 0$$

3) أثبت أن أكبر مساحة ممكنة للمثلث هي: $\left(1+\sqrt{2}\right)\text{cm}^2$

الحل:

$$A'(\theta) = 2\cos 2\theta + 2\sin 2\theta = 0$$

$$2\sin 2\theta = -2\cos 2\theta$$

$$\tan 2\theta = -1 \Rightarrow 2\theta = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{8}$$

توجد قيمة حرجة وحيدة ضمن مجال الاقتران هي $\theta = \frac{3\pi}{8}$

لذلك نقارن قيمة الاقتران عند النقطة الحرجة مع قيمتيه عند طرفي المجال

$$A(0) = \sin 0 - \cos 0 + 1 = 0$$

$$A\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sin\frac{3\pi}{8} - \cos\frac{3\pi}{8} + 1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 1 = \frac{2}{\sqrt{2}} + 1 = \sqrt{2} + 1$$

$$A\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4} + 1 = -1 + 0 + 1 = 0$$

اذن اكبر قيمة ممكنة (العظمى المطلقة) لمساحة المثلث هي:

$$A\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sqrt{2} + 1 = 1 + \sqrt{2}$$

حلول كتاب التمارين: تطبيقات القيم القصوى

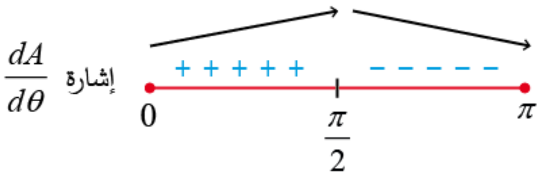
1 اذا كان $a\text{ cm}, b\text{ cm}$ هما طولي ضلعين ثابتين في مثلث، وكانت الزاوية بينهما θ، فأجد قيمة θ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن

الحل:

$$A=\frac{1}{2}ab\sin\theta \quad ,0<\theta<\pi$$

$$\frac{dA}{d\theta}=\frac{1}{2}ab\cos\theta$$

$$\frac{dA}{d\theta}=0\Rightarrow\cos\theta=0\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}$$



اذن مساحة المثلث تكون أكبر ما يمكن عندما $\theta=\frac{\pi}{2}$

2 ترغب شركة في تصميم خزان من الفولاذ الرقيق المقاوم للصدأ على شكل متوازي متطسيلات، حجمه 500m^3 وقاعدته مربعة الشكل، ومفتوح من الاعلى أجد الأبعاد التي تكون فيها مساحة سطح الخزان أقل ما يمكن.

الحل:

ليكن (x) طول ضلع القاعدة المربعة و (h)ارتفاع الخزان و (A) مساحة سطحه و (V) حجمه

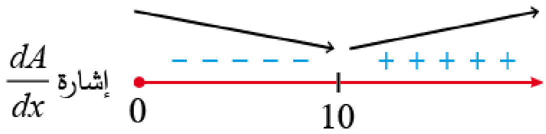
$$V=x^2h=500\Rightarrow h=\frac{500}{x^2}$$

$$A=x^2+4xh=x^2+4x\times\frac{500}{x^2}$$

$$=x^2+\frac{2000}{x}$$

$$\frac{dA}{dx}=2x-\frac{2000}{x^2}$$

$$\frac{dA}{dx}=0\Rightarrow 2x^3=2000\Rightarrow x=10$$



اذن تكون مساحة سطح الخزان أقل ما يمكن عندما تكون الابعاد كالآتي: $x=10\text{ m}\ ,\ h=5\text{ m}$

يمثل الاقتران: $s_1=\sin t$ والاقتران: $s_2=\sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right)$ موقعي جسيمين يتحركان في مسار مستقيم، حيث s_1, s_2 الموقعان بالامتار، و t الزمن بالثواني:

3 أجد قيمة (قيم) t التي يلتقي فيها الجسيمين

الحل:

$$S_1=S_2\Rightarrow\sin t=\sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right)-\sin t=0$$

$$2\cos\left(t+\frac{\pi}{6}\right)-\sin\frac{\pi}{6}=0$$

$$\cos\left(t+\frac{\pi}{6}\right)=0$$

$$t+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+n\pi \Rightarrow t=\frac{\pi}{3}+n\pi$$

حيث n عدد صحيح غير سالب

4 أجد أكبر مسافة بين الجسيمين في الفترة الزمنية:

$0\le t\le 2\pi$

الحل:

تكون المسافة بين الجسيمين $f(t)$

$$f(t)=|S_2-S_1|$$

$$=\left|\sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right)-\sin t\right|$$

$$=\left|\cos\left(t+\frac{\pi}{6}\right)\right| \quad ,0\le t\le 2\pi$$

$$f(t)=\pm\cos\left(t+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$f'(t)=\pm\sin\left(t+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$f'(t)=0$$

$$\sin\left(t+\frac{\pi}{6}\right)=0$$

$$t+\frac{\pi}{6}=\pi \quad or \quad 2\pi$$

$$t=\frac{5\pi}{6} \quad , \quad t=\frac{11\pi}{6}$$

اذن القيم الحرجة هي: $t=\frac{5\pi}{6},\frac{11\pi}{6}$

نقارن قيمة الاقتران عند القيم الحرجة مع قيمتيه عند طرفي المجال

$$f(0)=\left|\cos\left(0+\frac{\pi}{6}\right)\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\left|\cos\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)\right|=1$$

$$f\left(\frac{11\pi}{6}\right)=\left|\cos\left(\frac{11\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)\right|=1$$

$$f(2\pi)=\left|\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

اذن أكبر مسافة بين الجسيمين هي (1 m)

سلك يبلغ طوله 24cm ويراد قصه إلى قطعتين لصنع دائرة ومربع

5 أحدد مكان القص بحيث يكون مجموع مساحتي الدائرة والمربع أصغر ما يمكن

الحل:

لتكن (A) مجموع مساحتي الدائرة والمربع و (r)طول نصف قطر الدائرة

ليكن طول الجزء الذي تصنع منه الدائرة $(x\text{ cm})$ ، فإن:

$$x=2\pi r \Rightarrow r=\frac{x}{2\pi}$$

$$A(x)=\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2+\left(\frac{24-x}{4}\right)^2$$

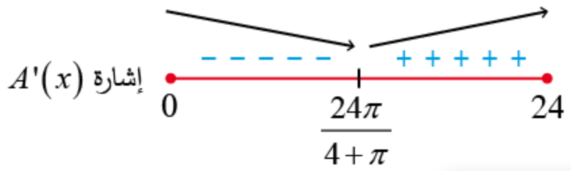
$$A'(x)=2\pi\frac{x}{2\pi}\times\frac{1}{2\pi}+2\left(6-\frac{1}{4}x\right)\times\frac{-1}{4}$$

$$=\frac{1}{2\pi}x-3+\frac{1}{8}x$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{8}\right)x-3$$

$$A'(x)=0$$

$$x=\frac{3}{\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{8}}=\frac{24\pi}{4+\pi}$$



اذن يكون مجموع مساحتي الدائرة والمربع أصغر ما يمكن عندما نقطع للدائرة من السلك طولاً مقداره $\frac{24\pi}{4+\pi}$ cm

6 أحدد مكان القص بحيث يكون مجموع مساحتي الدائرة والمربع أكبر ما يمكن

الحل:

للحصول على أكبر قيمة للاقتران A نقارن القيمتين $A(0)$ و $A(24)$

$$A(0)=\pi\left(\frac{0}{2\pi}\right)^2+\left(\frac{24-0}{4}\right)^2=36\text{ cm}^2$$

$$A(24)=\pi\left(\frac{24}{2\pi}\right)^2+\left(\frac{24-24}{4}\right)^2\approx 45.8\text{ cm}^2$$

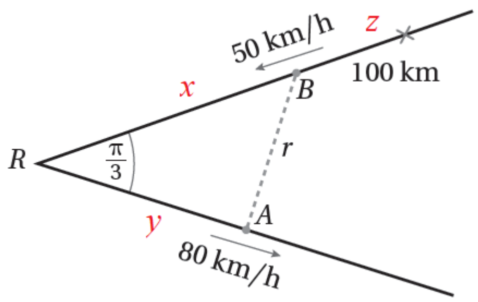
اذن للحصول على أكبر مجموع للمساحتين نخصص السلك كله للدائرة ولا نقطع للمربع شيئاً منه

---

7 يلتقي طريقان مستقيمان عند النقطة R بزاوية قياسها $\frac{\pi}{3}$. انطلقت السيارة A من النقطة R على أحد الطريقين بسرعة 80km/h وفي الوقت نفسه، انطلقت السيارة B بسرعة 50km/h على الطريق الآخر في اتجاه النقطة R من نقطة تبعد عنها مسافة أجد أقصر مسافة ممكنة بين السيارتين

الحل:

لتكن الابعاد كما في الشكل أدناه



بعد مرور t ساعة من انطلاق السيارتين يكون:

$$y=800t\quad,\quad z=50t$$

$$x=100-50t$$

$$r^2=x^2+y^2-2xy\cos\frac{\pi}{3}$$

$$r^2=x^2+y^2-xy$$

$$r^2 = (100-50t)^2 + (80t)^2 - (100-50t)(80t)$$

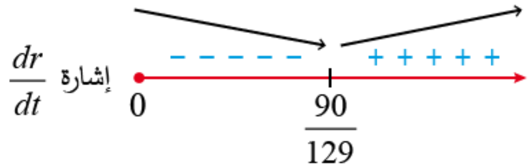
$$= 10000 - 18000t + 12900t^2$$

$$2r\frac{dr}{dt} = -18000 + 25800t$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{-18000+25800t}{2r}$$

$$\frac{dr}{dt} = 0$$

$$\frac{dr}{dt} = -18000 + 25800t = 0 \Rightarrow t = \frac{90}{129}h$$



أقصر مسافة ممكنة بين السيارتين هي:

$$r = \sqrt{10000 - 18000\left(\frac{90}{129}\right) + 12900\left(\frac{90}{129}\right)^2}$$

$$r \approx 61\,\text{km}$$

اختبار نهاية الوحدة

اختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1) مثلث قائم الزاوية ساقاه x و y ووتره z إذا كان $\frac{dz}{dt}=1$ وكان $\frac{dx}{dt}=3\frac{dy}{dt}$ فإن $\frac{dx}{dt}$ عندما $x=4$ و $y=3$ هي:

a) $\frac{1}{3}$ b) 1 c) 2 d) 5

2) القيمة العظمى المطلقة للاقتران: $f(x)=4x-x^2+6$ في الفترة $[0,4]$ هي:

a) 6 b) 2 c) 10 d) 12

3) الإحداثي x لنقطة انعطاف الاقتران: $f(x)=x^5-5x^4+3x+7$ هو:

a) 0 b) 1 c) 3 d) -1

4) قيمة x التي تكون عندها قيمة عظمى محلية للاقتران $f(x)=(x-2)(x-3)^2$ هي:

a) 3 b) $-\frac{7}{3}$ c) $-\frac{5}{3}$ d) $\frac{7}{3}$

5) إذا كانت الفترة $[1,25]$ هي مجال الاقتران المتصل f الذي مداه $[3,30]$ وكان $f'(x)<0$ لجميع قيم x بين 1 و 25 فإن $f(25)$ تساوي:

a) 1 b) 3 c) 25 d) 30

6) القيمة العظمى (بالوحدات المربعة) لمساحة مثلث قائم الزاوية طول وتره 10 وحدات هي:

a) 24 b) 25 c) 48 d) 50

7) إذا زاد حجم مكعب بمعدل $24\text{cm}^3/\text{min}$ وزادت مساحة سطحه بمعدل $12\text{cm}^2/\text{min}$ فإن طول شلعه في تلك اللحظة هو:

a) 2 cm b) $2\sqrt{2}$ cm c) 4 cm d) 8 cm

8) عدد النقاط الحرجة للاقتران: $f(x)=(x-2)^5(x+3)^4$ هو:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 5

الحل:

8	7	6	5	4	3	2	1
c	d	b	b	d	c	c	b

أجد القيمة العظمى المطلقة والقيمة الصغرى المطلقة (إن وجدت) لكل اقتران مما يأتي في الفترة المعطاة:

1) $f(x)=3x^2-2x^3 \quad ,[-5,1]$

الحل:

$f'(x)=6x-6x^2$

$f'(x)=0$

$6x(1-x)=0 \Rightarrow x=0, x=1$

مجموعة قيم الحرجة ضمن الفترة $(-5,1)$ هي

$x=0$

نقارن قيم الاقتران عند النقطة الحرجة مع قيمتيه عند طرفي الفترة

$f(0)=0$

$f(1)=1$

$f(-5)=75+250=325$

اذن لهذا الاقتران قيمة عظمى مطلقة هي
$f(-5)=325$

وقيمة صغرى مطلقة هي $f(0)=0$

2) $f(x)=\dfrac{x}{x+3} \quad ,[-1,6]$

الحل:

$$f'(x)=\frac{x+3-x}{(x+3)^2}=\frac{3}{(x+3)^2}$$

$f'(x)>0$ لجميع قيم ولذا فإن $f(x)$ متصل ومتزايد على مجاله

ولا يوجد له قيم حرجة ضمن $(-1,6)$ ، قيمه القصوى تكون عند طرفي مجاله

$f(-1)=-\dfrac{1}{2}$

$f(6)=\dfrac{2}{3}$

اذن لهذا الاقتران قيمة عظمى مطلقة هي
$f(6)=\dfrac{2}{3}$

وقيمة صغرى مطلقة هي $f(-1)=-\dfrac{1}{2}$

3) $f(x)=xe^{\frac{x}{2}} \quad ,[-3,1]$

الحل:

$$f'(x)=\frac{1}{2}xe^{\frac{x}{2}}=e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{2}x+1\right)$$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=-2$

له قيمة حرجة وحيدة هي $x=-2$

نقارن قيمته عند النقطة الحرجة مع قيمتيه عند طرفي المجال

$f(-3)=-3e^{\frac{-3}{2}}=\dfrac{-3}{\sqrt{e^3}}\approx -0.6694$

$f(-2)=-2e^{-1}=\dfrac{-2}{e}\approx -0.7358$

$f(1)=e^{\frac{1}{2}}\approx 1.6487$

اذن لهذا الاقتران قيمة عظمى مطلقة هي
$f(1)=e^{\frac{1}{2}}$

وقيمة صغرى مطلقة هي $f(-2)=\dfrac{-2}{e}$

4) $f(x)=3\cos x \quad ,[0,2\pi]$

الحل:

$f'(x)=-3\sin x$

$f'(x)=0 \Rightarrow \sin x=0 \Rightarrow x=0,\pi,2\pi$

له قيمة حرجة وحيدة هي $x=\pi$

نقارن قيمته عند النقطة الحرجة مع قيمتيه عند طرفي المجال

$f(0)=3$

$f(\pi)=-3$

$f(2\pi)=3$

اذن لهذا الاقتران قيمة عظمى مطلقة هي $f(0)=f(2\pi)=3$

وقيمة صغرى مطلقة هي $f(\pi)=-3$

أجد فترات التزايد والتناقص لكل اقتران مما يأتي، ثم أجد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) لكل اقتران:

1) $f(x)=x^5+x^3$

الحل:

$f'(x)=5x^4+3x^2$

$f'(x)=0$

$x^2(5x^2+3)=0 \Rightarrow x=0$

الاقتران $f(x)$ متزايد على R

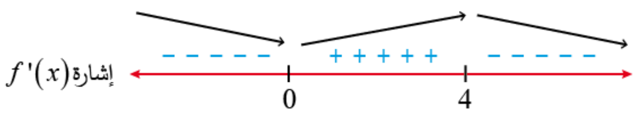
وليس له قيم قصوى محلية ولا مطلقة

2) $f(x)=x^4e^{-x}$

الحل:

$f'(x)=-x^4e^{-x}+4x^3e^{-x}=e^{-x}x^3(4-x)$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=0, x=4$



متزايد على $(0,4)$

متناقص على $(4,\infty),(-\infty,0)$

له قيمة عظمى محلية هي $f(4)=\dfrac{256}{e^4}$

له قيمة صغرى محلية ومطلقة هي $f(0)=0$

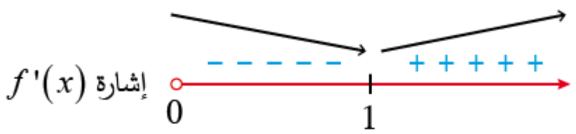
3) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\ln x$

الحل:

$f'(x)=x^2-\dfrac{1}{x}$

$f'(x)=0$

$x^2=\dfrac{1}{x} \Rightarrow x^3=1 \Rightarrow x=1$



متزايد على $(1,\infty)$ ، متناقص على $(0,1)$

له قيمة صغرى محلية ومطلقة هي $f(1)=\dfrac{1}{3}$

أجد فترات التقعر للأعلى وفترات التقعر للأسفل ونقاط الانعطاف (إن وجدت) لمنحنى كل اقتران مما يأتي:

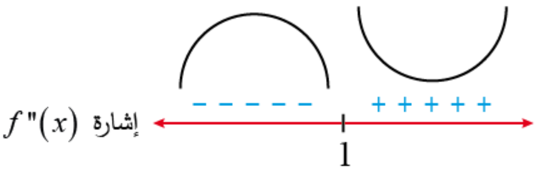
1) $f(x)=x^3-3x^2-9x+4$

الحل:

$f'(x)=3x^2-6x-9$

$f''(x)=6x-6$

$f''(x)=0 \Rightarrow x=1$



مقعر للاعلى في $(1,\infty)$

مقعر للاسفل في $(-\infty,1)$

له نقطة انعطاف هي $(1,-7)$

2) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$

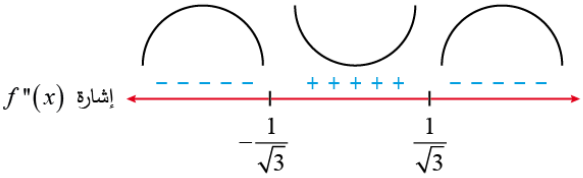
الحل:

$$f'(x)=\frac{(x^2+1)(2x)-(x^2)(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow x^2=\frac{1}{3} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$



مقعر للأعلى في $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

مقعر للأسفل في $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\infty\right),\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

له نقطتا انعطاف هما $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{4}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{4}\right)$

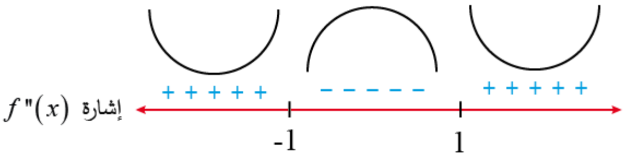
3) $f(x)=(3-x^2)^2$

الحل:

$f'(x)=2(3-x^2)(-2x)=4x^3-12x$

$f''(x)=12x^2-12$

$f''(x)=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm1$



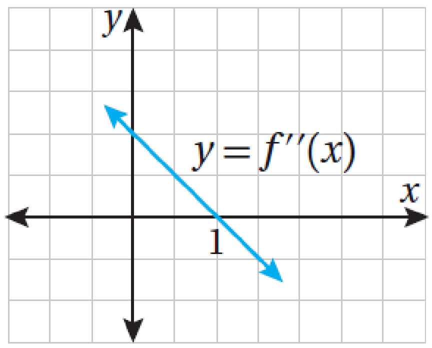
مقعر للأعلى في $(1,\infty),(-\infty,-1)$

مقعر للأسفل في $(-1,1)$

له نقطتا انعطاف هما $(-1,4),(1,4)$

أستعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f''(x)$

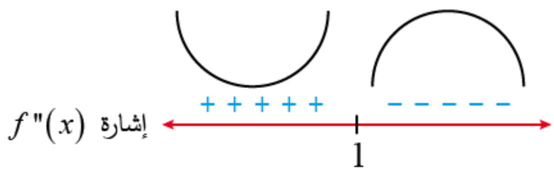
لإيجاد كل مما يأتي:



1) فترات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران f

الحل:

نلاحظ من الشكل ان اشارة الاقتران f'' كالآتي:



مقعر للأعلى في $(-\infty,1)$ ، مقعر للأسفل في $(1,\infty)$

2) الإحداثي x لنقاط انعطاف منحنى الاقتران f

الحل:

للاقتران f نقطة انعطاف عند $x=1$

يمثل الاقتران: $p(x)=5-0.002x$ سعر منتج (بالدينار) في إحدى الشركات، حيث x عدد القطع من المنتج ويمثل الاقتران: $C(x)=3+1.10x$ تكلفة إنتاج x قطعة (بالدينار) من المنتج:

1) أجد اقتران الإيراد

الحل:

سعر المنتج الواحد هو

$$p(x)=5-0.002x$$

$$R(x)=xp(x)=5x-0.002x^2$$

2) أجد اقتران الربح

الحل:

$$P(x)=R(x)-C(x)$$

$$=5x-0.002x^2-3-1.1x$$

$$=3.9x-0.002x^2-3$$

3) أجد عدد القطع اللازم بيعها من المنتج لتحقيق أكبر ربح ممكن، ثم أجد أكبر ربح ممكن

الحل:

$$P'(x)=3.9-0.004x$$

$$P'(x)=0$$

$$x=\frac{3.9}{0.004}=\frac{3900}{4}=975$$

$$P''(x)=-0.004$$

$$P''(975)=-0.004<0$$

اذن اكبر ربح ممكن يتحقق عند انتاج وبيع 975 قطعة

اكبر ربح ممكن يساوي

$$P(975)=3.9(975)-0.002(975)^2$$

$$=1898.25\ JD$$

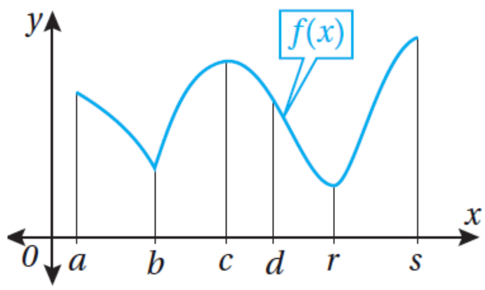
4) أجد سعر المنتج الذي يحقق أكبر ربح ممكن

الحل:

$$p(975) = 5 - 0.002(975)$$

$$= 5 - 1.950 = 3.05\ JD$$

يبين الشكل التالي منحنى الاقتران $f(x)$ أي النقاط الواقعة على المنحنى تمثل نقطة صغرى أو نقطة عظمى محلية؟ أيها تمثل قيمة صغرى أو قيمة عظمى مطلقة؟ أبرر أجابتي



الحل:

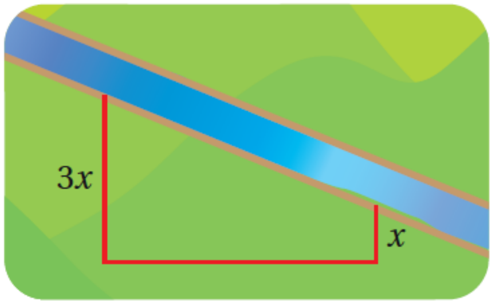
$(b, f(b))$ نقطة قيمة صغرى محلية

$(c, f(c))$ نقطة قيمة عظمى محلية

$(r, f(r))$ نقطة قيمة صغرى محلية ومطلقة

$(s, f(s))$ نقطة قيمة عظمى مطلقة

لدى مزارع 400m من السياج، وهو يريد تسييج حقله الذي يأخذ شكل شبه منحرف ويوجد على حافة النهر كما في الشكل التالي إذا كان طول أحد الضلعين المتوازيين يساوي 3 أمثال طول الضلع الآخر، فأجد أكبر مساحة يمكن للمزارع أن يحطيها بهذا السياج، علماً بأن الجزء المقابل للنهر لا يحتاج إلى تسييج



الحل:

ليكن y طول الضلع الثالث لهذا الحقل

$$400 = x + 3x + y$$

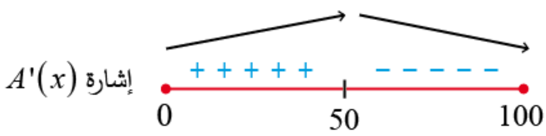
$$4x + y = 400$$

$$A = \frac{1}{2}(x+3x)y = \frac{1}{2}(4x)(400-4x)$$

$$A(x) = 800x - 8x^2, 0 \le x \le 100$$

$$A'(x) = 800 - 16x$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{800}{16} = 50$$

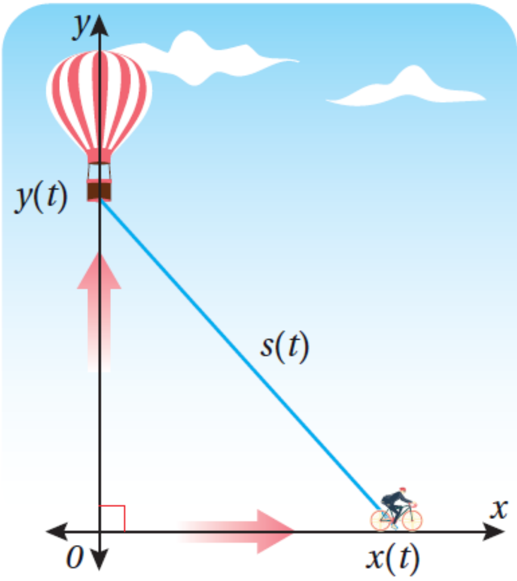


اذن اكبر مساحة ممكنة هي: $A(50)$

$$A(50) = 800(50) - 8(50)^2$$

$$= 20000\ m^2$$

يرتفع بالون رأسياً فوق طريق مستقيم بمعدل 1ft/s وفي اللحظة التي كان فيها البالون على ارتفاع 65ft فوق سطح الأرض، مرت أسفله دراجة تتحرك بسرعة 17ft/s كما في الشكل التالي أجد سرعة تغير المسافة بين البالون والدراجة بعد 3 ثوان من هذه اللحظة



الحل:

سرعة البالون $\frac{dy}{dt}=1\text{ ft/s}$

سرعة الدراجة $\frac{dx}{dt}=17\text{ ft/s}$

المطلوب $\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=3}$

بعد t ثانية من مرور الدراجة يكون ارتفاع البالون فوق سطح الارض هو $y=65+t$

وتكون الدراجة قطعت مسافة أفقية هي $x=17t$

وتكون المسافة بين الدراجة والبالون هي s

ومن نظرية فيثاغورس نجد ان

$$s^2=x^2+y^2$$

$$s^2=(17t)^2+(65+t)^2$$

$$s=\sqrt{(17t)^2+(65+t)^2}$$

$$\frac{ds}{dt}=\frac{2(17t)(17)+2(65+t)(1)}{2\sqrt{(17t)^2+(65+t)^2}}$$

$$=\frac{289t+65+t}{\sqrt{(17t)^2+(65+t)^2}}$$

$$=\frac{290t+65}{\sqrt{(17t)^2+(65+t)^2}}$$

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=3}=\frac{290(3)+65}{\sqrt{(17\times 3)^2+(65+3)^2}}$$

$$=\frac{935}{85}=11\text{ ft/s}$$

اذن تتزايد المسافة بين البالون والدراجة بمعدل 11 قدما وذلك بعد مرور 3 ثوان من لحظة مرور الدراجة تحت البالون