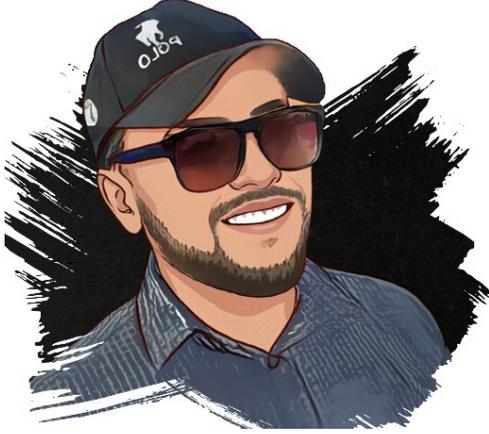


الجوكر في الرياضيات



الوحدة الثانية

التفاضل

الفرع الأدبي والفندقي

أ. محمد السواعير

0787468840

المنهاج الجديد

قاعدة السلسلة
The Chain Rule

الدرس

1

مثال 1

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $y = (x^2 + 1)^3$

2 $y = \sqrt{4 - 3x}$

أتحقق من فهمي 

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $y = (x^2 - 2)^4$

b) $y = \sqrt{x^3 + 4x}$

مثال 2

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

1 $f(x) = (2x^4 - x)^3, x = 1$

2 $f(x) = \sqrt{1 + x^3}, x = 2$

3 $y = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}, x = -2$

أتحقق من فهمي 

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

a) $f(x) = (x^4 + 1)^5, x = 1$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2}, x = 2$

c) $y = \sqrt[4]{(2x^2 - 7)^5}, x = 4$

مثال 3

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = 5(1 - x^2)^3 + 4x + 7$

2 $f(x) = (2x + 1)^3 - \sqrt{3x^2 - 2x}$

أتحقق من فهمي 

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = (1 + x^3)^4 + x^8 + 2$

b) $f(x) = \sqrt[3]{2x - 1} - (x - 3)^3$

مثال 4 : من الحياة



تلوث: توصلت دراسة بيئية إلى نمذجة متوسط المستوى اليومي لغاز أول أكسيد الكربون في الهواء بإحدى القرى عن طريق الاقتران: $C(p) = 0.6\sqrt{0.5p^2 + 17}$ ، حيث p عدد السكان بالآلاف نسمة، علمًا بأن C يقاس بأجزاء من المليون ($C = 5$ تعني 5 أجزاء من المليون مثلاً):

- 1 أجد معدل تغير متوسط المستوى اليومي لغاز أول أكسيد الكربون في الهواء بالنسبة إلى عدد السكان عندما يكون عدد السكان 4 آلاف نسمة، مُفسِّرًا معنى الناتج.
- 2 أجد معدل تغير متوسط المستوى اليومي لغاز أول أكسيد الكربون في الهواء بالنسبة إلى عدد السكان عندما يكون عدد السكان 4 آلاف نسمة، مُفسِّرًا معنى الناتج.

أتحقق من فهمي

صناعة: يُمثل الاقتران: $P(t) = \sqrt{10t^2 + t} + 229$ إجمالي الأرباح السنوية لإحدى الشركات الصناعية (بالآلاف الدنانير)، حيث t عدد السنوات بعد عام 2015م:

- (a) أجد معدل تغير إجمالي الأرباح السنوي للشركة بالنسبة إلى الزمن t .
- (b) أجد معدل تغير إجمالي الأرباح السنوي للشركة عام 2020م، مُفسِّرًا معنى الناتج.

مثال 5

إذا كان: $y = u^3 - 2u + 1$ ، حيث: $u = 2\sqrt{x}$ ، فأجد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x = 4$.

أتحقق من فهمي

إذا كان: $y = u^5 + u^3$ ، حيث: $u = 3 - 4x$ ، فأجد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x = 2$.

أدرب وأحل المسائل

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1 $f(x) = (1 + 2x)^4$

2 $f(x) = (3 - 2x^2)^{-5}$

3 $f(x) = (x^2 - 7x + 1)^{\frac{3}{2}}$

4 $f(x) = \sqrt{7 - x}$

5 $f(x) = 4(2 + 8x)^4$

6 $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{4x - 8}}$

7 $f(x) = \sqrt{5 + 3x^3}$

8 $f(x) = \sqrt{x} + (x - 3)^2$

9 $f(x) = \sqrt[3]{2x - x^5} + (4 - x)^2$

10 $f(x) = (\sqrt{x} + 5)^4$

11 $f(x) = \sqrt{(2x-5)^3}$

12 $f(x) = (2x^3 - 3x^2 + 4x + 1)^5$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

13 $f(x) = \frac{1}{(4x+1)^2}, x = \frac{1}{4}$

14 $f(x) = \sqrt{25 - x^2}, x = 3$

أستعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

15 $y = 5u^2 + 3u, u = x^3 + 1$

16 $y = \sqrt[3]{2u + 5}, u = x^2 - x$

أستعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

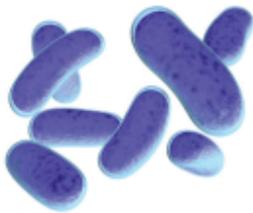
17 $y = 3u^2 - 5u + 2, u = x^2 - 1, x = 2$

18 $y = (1 + u^2)^3, u = 2x - 1, x = 1$

صناعة: يُمثل الاقتران: $C(x) = 1000\sqrt{x^2 - 0.1x}$ تكلفة إنتاج x قطعة من مُنتج مُعيّن (بالآلاف الدنانير):

19 أجد مُعدّل تغيّر تكلفة الإنتاج بالنسبة إلى عدد القطع المُنتجة.

20 أجد مُعدّل تغيّر تكلفة الإنتاج بالنسبة إلى عدد القطع المُنتجة عندما يكون عدد القطع المُنتجة 20 قطعة.



علوم: يُمثل الاقتران: $N(t) = 400 \left(1 - \frac{3}{(t^2 + 2)^2}\right)$ عدد الخلايا البكتيرية بعد t يوماً

في مجتمع بكتيري:

21 أجد مُعدّل تغيّر N بالنسبة إلى t عندما $t = 1$.

22 أجد مُعدّل تغيّر N بالنسبة إلى t عندما $t = 4$.

إذا كان: $g(2) = -3, g'(2) = 6, h(3) = 2, h'(3) = -2$ ، فأجد مشتقة كل اقتران مما يأتي عندما $x = 3$:

23 $f(x) = g(h(x))$

24 $f(x) = (h(x))^3$

25 تبرير: إذا كان: $h(x) = f(g(x))$ ، حيث: $f(u) = u^2 - 1$ ، وكان: $g(2) = 3$ ، $g'(2) = -1$ ، فأجد $h'(2)$ ، مُبرِّراً إجابتي.

26 تبرير: أجد مشتقة الاقتران: $y = (x^2 - 4)^5$ عندما $y = 0$ ، مُبرِّراً إجابتي.

27 أكتشف المُختلِف: أيُّ الاقترانات الآتية مُختلِف، مُبرِّراً إجابتي؟

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$h(x) = (x^2 + 1)^3$$

$$g(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$$

$$p(x) = x^2 + 1$$

28 تحدُّ: أجد مشتقة الاقتران: $f(x) = \sqrt[3]{2x + (x^2 + x)^4}$.

الأستاذ محمد السواعير

قاعدة السلسلة

The Chain Rule

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1 $f(x) = \sqrt{4x - 1}$

2 $f(x) = \frac{3}{\sqrt{3 - x^2}}$

3 $f(x) = (3 + 4x)^{\frac{5}{2}}$

4 $f(x) = (8 - x)^{100}$

5 $f(x) = x^2 + (200 - x)^2$

6 $f(x) = (x + 5)^7 + (2x + 3)^6$

7 $f(x) = \sqrt[3]{x^5 + 6x}$

8 $f(x) = \frac{1}{(x^2 - 3)^3}$

9 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{16 - x^2}$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

10 $f(x) = 4x^3 + (x - 2)^4, x = 2$

11 $f(x) = \sqrt{x^2 + 8x}, x = 8$

أستعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

12 $y = u^3 - 7u^2, u = x^2 + 3$

13 $y = \sqrt{7 - 3u}, u = x^2 - 9$

أستعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

14 $f(x) = u^3 - 5(u^3 - 7u)^2, u = \sqrt{x}, x = 4$

15 $f(x) = 2u^3 + 3u^2, u = x + \sqrt{x}, x = 1$

تلوث: توصلت دراسة بيئية إلى نمذجة مقدار التلوث في إحدى البحيرات باستعمال الاقتران: $P(t) = (t^{\frac{1}{4}} + 3)^3$, حيث t الزمن بالسنوات، علمًا بأن P يقاس بأجزاء من المليون:

16 أجد مُعدّل تغيّر مقدار التلوث في البحيرة بالنسبة إلى الزمن t .

17 أجد مُعدّل تغيّر مقدار التلوث في البحيرة بعد 16 عامًا.

إذا كان: $g(-2) = 8, g'(-2) = 4, h(5) = -2, h'(5) = 6$, فأجد مشتقة كل اقتران مما يأتي عندما $x = 5$:

18 $f(x) = g(h(x))$

19 $f(x) = 4(h(x))^2$

مشتقتا الضرب والقسمة Product and Quotient Rules

الدرس

2

مثال 1

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1 $f(x) = (2x + 3)(x^2 - 5)$

2 $f(x) = (\sqrt{x} - 1)(x^2 + 4)$

أتحقق من فهمي 

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = (x^3 + 4)(7x^2 - 4x)$

b) $f(x) = (\sqrt{x} + 1)(3x - 2)$

مثال 2

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1 $f(x) = \frac{x}{2x + 5}$

2 $f(x) = \frac{1 + x^{-5}}{x^3}$

أتحقق من فهمي 

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = \frac{3x + 1}{x - 2}$

b) $f(x) = \frac{x^{-3}}{x^2 + 1}$

مثال 3 : من الحياة



دواء: يُمثَّل الاقتران: $C(t) = \frac{2t}{3t^2 + 16}$ تركيز مُسكِّن

للألم في دم مريض بعد t ساعة من تناوله، حيث C

مقيسة بوحدلة $\mu\text{g/mL}$:

1 أجد مُعدَّل تغيُّر تركيز المُسكِّن في دم المريض بالنسبة إلى الزمن t .

2 أجد مُعدَّل تغيُّر تركيز المُسكِّن في دم المريض عندما $t = 1$ ، مُفسِّراً معنى الناتج.

أتحقق من فهمي 

سكان: يُمثّل عدد سكان بلدة صغيرة بالاقتران: $P(t) = \frac{5}{2t^2 + 9}$ ، حيث t الزمن بالسنوات منذ الآن، و P عدد السكان بالآلاف:

(a) أجد مُعدّل تغيّر عدد السكان في البلدة بالنسبة إلى الزمن t .

(b) أجد مُعدّل تغيّر عدد السكان في البلدة عندما $t = 2$ ، مُفسّراً معنى الناتج.

مثال 4

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

2 $f(x) = \frac{2}{3-4x}$

أتحقق من فهمي 

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \frac{1}{1-x^3}$

b) $f(x) = \frac{3}{2x+1}$

مثال 5

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = (3x-5)^4 (7-x)^{10}$

2 $f(x) = \frac{4x+3}{(2x-1)^3}$

أتحقق من فهمي 

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = 20x(4x^3-1)^6$

b) $f(x) = \frac{x^2-1}{(x+2)^4}$

 **أدرّب وأحلّ المسائل** 

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = x(1+3x)^5$

2 $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$

3 $f(x) = (2x+1)^5 (3x+2)^4$

4 $f(x) = \frac{3x^2}{(2x-1)^2}$

5 $f(x) = \frac{6x}{\sqrt{5x+3}}$

6 $f(x) = (4x-1)(x^2-5)$

7 $f(x) = \frac{x^2+6}{2x-7}$

8 $f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{x}}$

9 $f(x) = (x+1)\sqrt{x-1}$

10 $f(x) = \frac{x}{5+2x} - 2x^4$

11 $f(x) = \frac{5}{(x+2)^2}$

12 $f(x) = \left(x + \frac{2}{x}\right)(x^2-3)$

13 $f(x) = (8x+\sqrt{x})(5x^2+3)$

14 $f(x) = 5x^{-3}(x^4-5x^3+10x-2)$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

15 $f(x) = x^2 (3x-1)^3, x = 1$

16 $f(x) = 3x\sqrt{5-x}, x = 4$

17 $f(x) = \frac{x-1}{2x+1}, x = 2$

18 $f(x) = (2x+3)(x-2)^2, x = 0$



أعمال: يُمثل الاقتران: $S(t) = \frac{2000t}{4 + 0.3t}$ إجمالي المبيعات (بآلاف الدنانير)

شركة جواهر وحلي، حيث t عدد السنوات بعد عام 2020م:

19 أجد مُعدّل تغيّر إجمالي المبيعات للشركة بالنسبة إلى الزمن t .

20 أجد مُعدّل تغيّر إجمالي المبيعات للشركة عام 2030م، مُفسّرًا معنى الناتج.

سكان: يُمثل عدد سكان بلدة صغيرة بالاقتران: $P(t) = 12(2t^2 + 100)(t + 20)$ حيث t الزمن بالسنوات منذ الآن،

P عدد السكان بالآلاف:

21 أجد مُعدّل تغيّر عدد السكان في البلدة بالنسبة إلى الزمن t .

22 أجد مُعدّل تغيّر عدد السكان في البلدة عندما $t = 6$ ، مُفسّرًا معنى الناتج.



23 تفاعلات: يُمكن نمذجة كتلة مُركّب في أثناء تفاعل كيميائي باستعمال الاقتران: $M(t) = \frac{5.8t}{t+1.9}$

حيث t الزمن بالثواني بعد بدء التفاعل، و M الكتلة بالغرام. أجد مُعدّل تغيّر كتلة المُركّب بعد 5 ثوانٍ

من بدء التفاعل.

أستعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

24 $y = u(u^2 + 3)^3, u = (x + 3)^2, x = -2$

25 $y = \frac{u^3}{u+1}, u = (x^2 + 1)^3, x = 1$

إذا كان: $f(2) = 4, f'(2) = -1, g(2) = 3, g'(2) = 2$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

26 $(fg)'(2)$

27 $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$

28 $(3f + fg)'(2)$

مهارات التفكير العليا

29 تحدّد: أجد مشتقة الاقتران: $f(x) = x(4x - 3)^6 (1 - 4x)^9$.

تبرير: إذا كان: $f(x) = \frac{2x}{x+5} + \frac{6x}{x^2 + 7x + 10}$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تبعًا:

30 أثبت أنّ $f(x) = \frac{2x}{x+2}$ مُبرّرًا إيجابيًا. أجد $f'(3)$

32 تبرير: إذا كان: $f(x) = \frac{2x+8}{\sqrt{x}}$ ، فأجد قيمة x عندما $f'(x) = 0$ ، مُبرّرًا إيجابيًا.

مشتقتا الضرب والقسمة
Product and Quotient Rules

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1 $f(x) = 2x(1 + 3x^2)^3$

2 $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$

3 $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2+1} + 4x^3$

4 $f(x) = (1-x^2)^4(2x+6)^3$

5 $f(x) = \frac{3x+5}{(x+1)^2}$

6 $f(x) = (5x^2+4x-3)(2x^2-3x+1)$

7 $f(x) = (3x^5-x^2)(x-\frac{5}{x})$

8 $f(x) = \frac{5x^2-1}{2x^3+3}$

9 $f(x) = \frac{1}{x-4}$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

10 $f(x) = x^5\sqrt{10x+6}, x = 1$

11 $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x+4}}, x = 12$

أستعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

12 $y = 5u^2 + 3u - 1, u = \frac{18}{x^2+5}, x = 2$

13 $y = \frac{1}{u+1}, u = x^3 - 2x + 5, x = 0$

للسكان: يُمثل عدد سكان مدينة صغيرة بالاقتران: $P(t) = 20 - \frac{6}{t+1}$ ، حيث t الزمن بالسنوات منذ الآن، و P عدد السكان بالآلاف:

14 أجد مُعدّل نمو السكان في المدينة بالنسبة إلى الزمن t .

15 أجد مُعدّل نمو السكان في المدينة عندما $t = 9$ ، مُفسّراً معنى الناتج.

16 نباتات هجينة: وجد فريق من الباحثين الزراعيين أنه يُمكن التعبير عن ارتفاع نبتة مُهجّنة من نبات تباع الشمس h (بالمتر) باستعمال الاقتران: $h(t) = \frac{3t^2}{4+t}$ ، حيث t الزمن بالأشهر بعد زراعة البذور. أجد مُعدّل تغيّر ارتفاع النبتة بالنسبة إلى الزمن t .

إذا كان: $f(0) = 5, f'(0) = -3, g(0) = -1, g'(0) = 2$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

17 $(fg)'(0)$

18 $(\frac{f}{g})'(0)$

19 $(7f + 2fg)'(0)$

مشتقتا الاقتران الأسّي الطبيعي والاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

Derivatives of Natural Exponential and Logarithmic Functions

الدرس

3

مثال 1

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = 5e^x$

2 $f(x) = 4x^2 - e^x$

3 $y = \frac{e^x}{x+1}$

أتحقق من فهمي  أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = 2e^x + 3$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x} + e^x$

c) $y = xe^x$

مثال 2

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = e^{4x}$

2 $f(x) = e^{(x^2+1)}$

3 $f(x) = 3e^{\frac{1}{x}}$

أتحقق من فهمي 

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = e^{7x+1}$

b) $f(x) = e^{x^3}$

c) $f(x) = 5e^{\sqrt{x}}$

مثال 3: من الحياة



حرارة: تُمثّل المعادلة: $T(t) = 18 + 12e^{0.002t}$ درجة حرارة الحساس في جهاز إلكتروني (بالسليسيوس °C) بعد t ساعة من بدء تشغيل الجهاز:

1 أجد مُعدّل تغيّر درجة حرارة الحساس بالنسبة إلى الزمن t .

2 أجد مُعدّل تغيّر درجة حرارة الحساس بعد 5 ساعات من بدء تشغيل الجهاز، مُفسّراً معنى

أتحقق من فهمي 



قمر صناعي: تُستعمل مادة مُشعَّة لتزويد قمر صناعي بالطاقة. ويُمكن نمذجة مقدار الطاقة المُتبقِّية في المادة المُشعَّة (بالواط) باستعمال الاقتران: $P(t) = 50e^{-0.004t}$ ، حيث t الزمن بالأيام. أجد مُعدَّل تغيُّر الطاقة المُتبقِّية في القمر الصناعي بعد 500 يوم، مُفسِّراً معنى الناتج.

مثال 4

أجد مشتقة كل اقتران ممَّا يأتي:

1 $f(x) = 7 \ln x$

2 $f(x) = x^{\frac{2}{3}} + \ln x$

3 $y = x \ln x$

أتحقق من فهمي 

أجد مشتقة كل اقتران ممَّا يأتي:

a) $f(x) = 4 \ln x$

b) $f(x) = \sqrt{x} + \ln x$

c) $y = \frac{\ln x}{x}$

مثال 5

أجد مشتقة كل اقتران ممَّا يأتي:

1 $f(x) = \ln(5x)$

2 $f(x) = \ln(x^3)$

3 $f(x) = \ln(3x^2 - 2)$

أتحقق من فهمي 

أجد مشتقة كل اقتران ممَّا يأتي:

a) $f(x) = \ln(8x)$

b) $f(x) = 2 \ln(x^7)$

c) $f(x) = \ln(9x + 2)$

أدرب وأحلُّ المسائل 

أجد مشتقة كل اقتران ممَّا يأتي:

1 $f(x) = 2e^x + 1$

2 $f(x) = e^{3x+9}$

3 $f(x) = (x^2 + 3x - 9)e^x$

$$4 \quad f(x) = \frac{e^x}{x^4}$$

$$5 \quad f(x) = 6e^{\sqrt{x}}$$

$$6 \quad f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

$$7 \quad f(x) = (e^x + 2)(e^x - 1)$$

$$8 \quad f(x) = e^{-2x} (2x - 1)^5$$

$$9 \quad f(x) = x^3 - 5e^{2x}$$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

$$10 \quad f(x) = 3 \ln x$$

$$11 \quad f(x) = x^3 \ln x$$

$$12 \quad f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

$$13 \quad f(x) = x^2 \ln(4x)$$

$$14 \quad f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$$15 \quad f(x) = \ln\sqrt{x^2 - 1}$$

$$16 \quad f(x) = (\ln x)^4$$

$$17 \quad f(x) = \ln(x^2 - 5)$$

$$18 \quad f(x) = x^4 \ln x - \frac{1}{2} e^x$$

$$19 \quad f(x) = e^{2x} \ln x$$

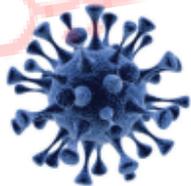
$$20 \quad f(x) = (\ln 3x)(\ln 7x)$$

$$21 \quad f(x) = \ln(e^x - 2)$$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

$$22 \quad f(x) = e^{2x-1} \ln(2x - 1), x = 1$$

$$23 \quad f(x) = \frac{\ln x^2}{x}, x = 4$$



24 فيروسات: يُمكن نمذجة انتشار الإنفلونزا في إحدى المدارس باستعمال

الاقتران: $P(t) = \frac{100}{1 + e^{3-t}}$ ، حيث $P(t)$ العدد الكلي للطلبة المصابين بعد t

يوماً من ملاحظة الإنفلونزا أول مرة في المدرسة. أجد سرعة انتشار الإنفلونزا

في المدرسة بعد 3 أيام.



25 ذاكرة: يُستعمل الاقتران: $m(t) = t \ln t + 1, 0 < t \leq 4$ لقياس قدرة

الأطفال على التذكُّر، حيث m مقياس من 1 إلى 7، و t عمر الطفل بالسنوات.

أجد مُعدَّل تغيُّر قدرة الأطفال على التذكُّر بالنسبة إلى عمر الطفل t .

أستعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لكلِّ مما يأتي:

$$26 \quad y = e^{2u} + 3, u = x^2 + 1$$

$$27 \quad y = \ln(u + 1), u = e^x$$

28 أكتشف الخطأ: أكتشف الخطأ في الحل الآتي، ثم أصحِّحه:

$$y = \ln kx$$

$$\frac{dy}{dx} = k \ln kx$$


29 تبرير: إذا كان: $y = \frac{7 \ln x - x^3}{e^{3x}}$ ، فأثبت أن $\frac{dy}{dx} = \frac{7}{e^3}$ عندما $x = 1$.

الأستاذ محمد السواعير

مشتقتا الاقتران الأسّي الطبيعي والاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

Derivatives of Natural Exponential and Logarithmic Functions

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = x^{10} e^x$

2 $f(x) = 3e^{2x-1}$

3 $f(x) = 3e^x - 2e^{4x}$

4 $f(x) = (9x - 1) e^{3x}$

5 $f(x) = \frac{e^{-2x}}{\sqrt{x+1}}$

6 $f(x) = \frac{(e^x + 2)^3}{x}$

7 $f(x) = e^{x^2+7}$

8 $f(x) = (2e^{3x} - 1)^2$

9 $f(x) = \sqrt{e^x + 1}$

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

10 $f(x) = \frac{\ln x}{x+2}$

11 $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

12 $f(x) = e^x \ln x^2$

13 $f(x) = (3 + x) \ln x$

14 $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

15 $f(x) = x^5 \ln(3x)$

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

16 $f(x) = x^2 e^{-1}, x = -1$

17 $f(x) = \ln(x^2 + 1), x = 3$

بكتيريا: يُمثّل الاقتران: $N(t) = 1000(30 + e^{-\frac{t}{30}})$ عدد الخلايا البكتيرية بعد t ساعة في مجتمع بكتيري:

18 أجد العدد الأوّلي للخلايا البكتيرية في المجتمع.

19 أجد مُعدّل تغيّر عدد الخلايا البكتيرية بالنسبة إلى الزمن.

20 أجد مُعدّل نمو المجتمع بعد 20 ساعة.

إعلانات: يُمكن نمذجة درجة استجابة المستهلكين لمُنتج ما عن طريق الإعلانات باستعمال الاقتران:

$N(a) = 2000 + 500 \ln a, a \geq 1$ الذي يُمثّل عدد الوحدات المبيّعة من المُنتج، حيث a المبلغ الذي أُنفق على

الإعلانات بآلاف الدنانير:

21 أجد مُعدّل تغيّر عدد الوحدات المبيّعة بالنسبة إلى المبلغ a الذي أُنفق على الإعلانات بآلاف الدنانير.

22 أجد مُعدّل تغيّر عدد الوحدات المبيّعة عندما $a = 10$.

مشتقتا اقتران الجيب واقتران جيب التمام
Sine and Cosine Functions Derivatives

الدرس

4

مثال 1

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1 $f(x) = 2 \sin x$ 2 $f(x) = x^2 + \cos x$ 3 $f(x) = \frac{\sin x}{2} + 3 \cos x$

أتحقق من فهمي 

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = 7 + \sin x$ b) $f(x) = 3x - \cos x$ c) $f(x) = 3 \sin x + 2 \cos x$

مثال 2

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1 $f(x) = x^2 \sin x$ 2 $f(x) = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$

أتحقق من فهمي 

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = e^x \cos x$ b) $f(x) = \frac{x + \cos x}{\sin x}$

مثال 3

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1 $f(x) = \sin 4x$ 2 $f(x) = \cos^3 x$ 3 $f(x) = e^{\sin 2x}$

أتحقق من فهمي 

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = \cos 5x$ b) $f(x) = \sqrt{\sin x}$ c) $f(x) = \ln (\cos 3x)$

مثال 4 : من الحياة



عجلة دَوَّارة: يُمثَّل الاقتران: $h(t) = 85 \sin \frac{\pi}{20} (t-10) + 90$ الارتفاع (بالأقدام) لشخص يركب في عجلة دَوَّارة، حيث t الزمن بالثواني. أجد مُعدَّل تغيُّر ارتفاع الشخص بالنسبة إلى الزمن t .

أتحقق من فهمي 

ميناء: يُمثَّل الاقتران: $h(t) = 10 + 4 \sin \frac{\pi}{6} t$ ارتفاع الماء (بالأقدام) عند رصيف أحد الموانئ بعد t ساعة تلي الساعة 6 a.m. أجد مُعدَّل تغيُّر ارتفاع الماء عند الرصيف بالنسبة إلى الزمن t .

أتدرَّب وأحلُّ المسائل 

أجد مشتقة كل اقتران ممَّا يأتي:

1 $f(x) = 2 \cos x + \sin x$

2 $f(x) = 5 + \cos x$

3 $f(x) = \sin x - \cos x$

4 $f(x) = x \sin x$

5 $f(x) = \sin x \cos x$

6 $f(x) = e^x \sin x$

7 $f(x) = \frac{e^x}{\cos x}$

8 $f(x) = \sin(x^2 + 1)$

9 $f(x) = \ln(\sin x)$

10 $f(x) = \cos(5x-2)$

11 $f(x) = \sin 3x + \cos 6x$

12 $f(x) = \cos(x^2-3x-4)$

13 $f(x) = e^{2x} \sin 10x$

14 $f(x) = (\cos x^2)(\ln x)$

15 $f(x) = \sqrt{x+1} \sin \frac{\pi x}{2}$

16 $f(x) = 4 \sin^2 x$

17 $f(x) = \cos^3 2x \cos x$

18 $f(x) = 5 \sin \sqrt{x}$

19 $f(x) = (\cos 2x - \sin x)^2$

20 $f(x) = \sin \sqrt{x} + \sqrt{\sin 2x}$

21 $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{\sin x}$



22 غزلان: يُمثَّل الاقتران: $D(t) = 1500 + 400 \sin 0.4t$ عدد الغزلان في إحدى الغابات بعد t سنة من بدء دراسة لأحد الباحثين عليها. أجد مُعدَّل تغيُّر عدد الغزلان في الغابة بالنسبة إلى الزمن t .

23 نهار: يُمكن إيجاد عدد ساعات النهار H في أيِّ يوم t من العام في إحدى المدن باستعمال الاقتران:
 $H(t) = 12 + 2.4 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t-80)\right)$. أجد مُعدَّل تغيُّر عدد ساعات النهار بالنسبة إلى الزمن t في هذه المدينة.

مهارات التفكير العليا

24 تبرير: إذا كان: $y = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)$ ، فأثبت أن $\frac{dy}{dx} = \sin^2 x$ مُبرِّراً إيجابتي.

25 تحدُّ: أجد مشتقة الاقتران: $f(x) = e^x \sin^2 x \cos x$.

26 أكتشف الخطأ: أكتشف الخطأ في الحَلِّ الآتي، ثم أصحِّحه:

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \times$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

الأستاذ محمد السواعير

مشتقتا اقتران الجيب واقتران جيب التمام
Sine and Cosine Functions Derivatives

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1 $f(x) = \sin^3(5x - 1)$

2 $f(x) = \sin(x^3 - 2x + 4)$

3 $f(x) = 2 \cos(-4x)$

4 $f(x) = 3 \sin(3x + 7)$

5 $f(x) = 2x^3 \sin x - 3x \cos x$

6 $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$

7 $f(x) = \cos(\ln x)$

8 $f(x) = e^x (\cos x + \sin x)$

9 $f(x) = \cos(1 - 2x)^2$

10 $f(x) = 4\sqrt{\cos x + \sin x}$

11 $f(x) = (1 + \cos 2x)^3$

12 $f(x) = \sin^3 x \cos 4x$

13 $f(x) = \sin\left(\frac{e^x}{1 + e^x}\right)$

14 $f(x) = \frac{\cos x^2}{e^x}$

15 $f(x) = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$

16 $f(x) = \frac{x \sin x}{1 + x}$

17 $f(x) = \frac{x}{2 - \cos x}$

18 $f(x) = \ln(\cos x - \sin x)$

19 حيوانات مُفترسة: يُمثل الاقتران: $D(t) = 500 + 200 \sin(0.4(t-2))$ عدد الحيوانات المُفترسة في إحدى الغابات بعد t سنة من بدء دراسة لأحد الباحثين عليها. أجد مُعدّل تغيّر عدد الحيوانات المُفترسة في الغابة بالنسبة إلى الزمن t .

20 وقود: يُمثل الاقتران: $C(t) = 30 + 21.6 \sin\left(\frac{2\pi t}{365} + 10.9\right)$ الاستهلاك اليومي من الوقود (باللترات) لإحدى السيارات، حيث t الزمن بالأيام. أجد مُعدّل تغيّر استهلاك السيارة للوقود بالنسبة إلى الزمن t .

21 أكتشف الخطأ: أكتشف الخطأ في الحّل الآتي، ثم أصحّحه:

$$f(x) = \cos x \sin x$$

$$f'(x) = \cos x \cos x + \sin x (-\sin x)$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= 1$$

اختبار نهاية الوحدة

7 إذا كان: $f(x) = \sin^4 3x$, فإن $f'(x)$ هي:

- a) $4\sin^3 3x \cos 3x$ b) $12 \sin^3 3x \cos 3x$
c) $12 \sin 3x \cos 3x$ d) $2 \cos^3 3x$

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقرانين قابلين للاشتقاق عندما $x = 2$ وكان: $f(2) = 3, f'(2) = -4, g(2) = 1, g'(2) = 2$ فأجد كلاً مما يأتي:

- 8 $(fg)'(2)$ 9 $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$
10 $(3f - 4fg)'(2)$

أنهار: يُمثَّل الاقتران: $h(t) = 0.12e^{0.1t}$ ارتفاع نهر (بالستيمتر) فوق مستواه الطبيعي، حيث t الزمن بالساعات بعد بداية هطّل المطر:

11 أجد مُعدّل تغيّر ارتفاع النهر بالنسبة إلى الزمن t .

12 أجد مُعدّل تغيّر ارتفاع النهر بعد 3 ساعات من بدء هطّل المطر.

أجد مشتقة كل اقران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

- 13 $f(x) = \frac{x}{3x+1}, x = 1$
14 $f(x) = (x^2 + 2)(x + \sqrt{x}), x = 4$
15 $f(x) = e^{3x} + e^{-3x}, x = 1$
16 $f(x) = e^{0.5} - x^2, x = 20$
17 $f(x) = x^2 (3x - 1)^3, x = 1$
18 $f(x) = (x + 3)^2 e^{3x}, x = 2$
19 $f(x) = 3 \ln x + \frac{1}{x}, x = e$

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلِّ مما يأتي:

1 إذا كان: $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$, فإن $f'(-1)$ هي:

- a) 3 b) -3 c) 4 d) -4

2 إذا كان: $y = uv$, وكان:

$u(1) = 2, u'(1) = 3, v(1) = -1, v'(1) = 1$
فإن $y'(1)$ تساوي:

- a) -4 b) -1 c) 1 d) 4

3 إذا كان: $f(x) = x - \frac{1}{x}$, فإن $f'(x)$ هي:

- a) $1 + \frac{1}{x^2}$ b) $1 - \frac{1}{x^2}$
c) $1 + \frac{1}{x}$ d) $1 - \frac{1}{x}$

4 إذا كان: $y = \sin 4t$, فإن $\frac{dy}{dt}$ هي:

- a) $\cos 4t$ b) $-\cos 4t$
c) $4 \cos 4t$ d) $-4 \cos 4t$

5 إذا كان: $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, فإن $f'(x)$ هي:

- a) $\frac{2}{(x-1)^2}$ b) $\frac{1}{(x-1)^2}$
c) $-\frac{2}{(x-1)^2}$ d) $-\frac{1}{(x-1)^2}$

6 إذا كان: $f(x) = x \cos x$, فإن $f'(x)$ هي:

- a) $\cos x - x \sin x$ b) $\cos x + x \sin x$
c) $\sin x - x \cos x$ d) $\sin x$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

37 $f(x) = \frac{\sqrt{\cos x}}{x}$

38 $f(x) = \sin(5x) \ln(\cos x)$

39 $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x^2+9}\right)$

40 $f(x) = e^{2x} \sin 2x$

بكتيريا: يُمثّل الاقتران: $N(t) = 1000\left(1 - \frac{3}{t^2+50}\right)$

عدد الخلايا البكتيرية بعد t يوماً في مجتمع بكتيري:

41 أجد مُعدّل تغيّر N بالنسبة إلى الزمن t .

42 أجد مُعدّل تغيّر N بالنسبة إلى الزمن t عندما $t = 1$.

غزلان: يُمثّل عدد الغزلان في غابة بالاقتران:

$P(t) = \frac{2000}{4t+80}$ ، حيث t الزمن بالأشهر منذ الآن:

43 أجد مُعدّل تغيّر عدد الغزلان في الغابة بالنسبة إلى الزمن t .

44 أجد مُعدّل تغيّر عدد الغزلان في الغابة عندما $t = 10$ ، مُفسّراً معنى الناتج.

سكّان: يُمثّل عدد سكّان بلدة صغيرة بالاقتران:

$P(t) = \frac{700}{t^2+1}$ ، حيث t الزمن بالسنوات، و p عدد السكّان بالآلاف:

45 أجد مُعدّل تغيّر عدد السكّان في البلدة بالنسبة إلى الزمن t .

46 أجد مُعدّل تغيّر عدد السكّان في البلدة عندما $t = 3$ ، مُفسّراً معنى الناتج.

20 $f(x) = \sqrt{2x^4+7}$

21 $f(x) = \frac{1}{(x^2+16)^5}$

22 $f(x) = \sqrt[4]{x^2-5x+2}$

23 $f(x) = (8x^2-6)^{-40}$

24 $f(x) = \frac{1}{3+2x}$

25 $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$

26 $f(x) = (2x-8)^2(3x^2-4)$

27 $f(x) = x^5(3x^2+4x-7)$

28 $f(x) = x^3(2x+6)^4$

29 $f(x) = (e^{-x} + e^x)^3$

30 $f(x) = 2x^3 e^{-x}$

31 $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$

32 $f(x) = 5 \ln(5x-4)$

33 $f(x) = \ln e^x$

34 $f(x) = \ln(3x^2+2x-1)$

35 $f(x) = x^5 \sin 3x$

36 $f(x) = \cos^2 x + \sin x$