الجوكر في الرياضيات

الوحدة الثالثة

تطبيقات التفاضل

الفرع الأدبي والفندقي

ا. محمد السواعير

المنهاج الجديد

0787468840

الدرس 1

المماس والعمودي على المماس
The Tangent and Normal

مثال 1

أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = x^2 + 3x + 2$ عند النقطة $(2, 12)$.

أتحقَّق من فهمي

أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ عند النقطة $(3, 5)$.

مثال 2

أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = \frac{8}{x^2 + 4}$ عندما $x = -2$.

أتحقَّق من فهمي

أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = \frac{2x - 1}{x}$ عندما $x = 1$.

مثال 3

1) أجد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = \sqrt{x}$، التي يكون عندها ميل المماس $\frac{1}{2}$.

2) أجد إحداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = -x^3 + 6x^2$، التي يكون عندها المماس أفقيًّا.

أتحقَّق من فهمي

a) أجد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = 1 - \sqrt{x}$، التي يكون عندها ميل المماس $-\frac{1}{4}$

b) أجد إحداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$، التي يكون عندها المماس أفقيًّا.

مثال 4

أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = e^{3x}$ عند النقطة $(0, 1)$.

أتحقَّق من فهمي

أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = \ln x^3$ عند النقطة $(1, 0)$.

الأستاذ محمد السواعير

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد معادلة المماس لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

1. $f(x) = x^3 - 6x + 3, (2, -1)$
2. $f(x) = \frac{x^4 - 3x^3}{x}, (1, -2)$
3. $f(x) = \sqrt{x}\,(x^2 - 1), (1, 0)$
4. $f(x) = x + \frac{4}{x}, (-4, -5)$
5. $f(x) = x + e^x, (0, 1)$
6. $f(x) = \ln(x + e), (0, 1)$

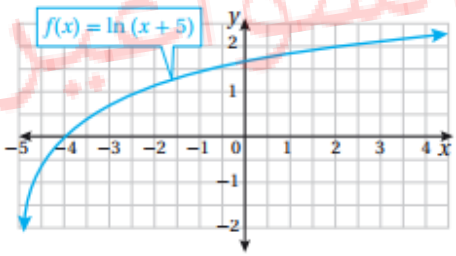
أجد معادلة المماس لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

7. $f(x) = \sqrt{x - 7}, x = 16$
8. $f(x) = (x - 1)\,e^x, x = 1$
9. $f(x) = \frac{x + 3}{x - 3}, x = 4$
10. $f(x) = (\ln x)^2, x = e$

أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

11. $f(x) = (3x + 10)^2, (-3, 1)$
12. $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x + 1}}, (4, 1)$

يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = \ln(x + 5)$:



13. أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند نقطة تقاطعه مع المحور x.
14. أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند نقطة تقاطعه مع المحور y.

إذا كان: $f(x) = 4e^{2x+1}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

15. معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند نقطة تقاطعه مع المستقيم: $x = -1$.
16. معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند نقطة تقاطعه مع المحور y.
17. أجد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - x - 12$، التي يكون عندها ميل المماس 3، ثم أكتب معادلة هذا المماس.

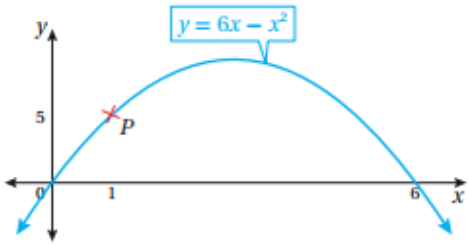
الأستاذ محمد السواعير

18 أجـد إحداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتـران: $f(x) = x^3 - 4x^2 - 4$، التي يكون عندها المماس أفقيًّا.

19 أجد إحداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x-1}}$، التي يكون عندها المماس أفقيًّا.

20 أجد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = 5x^2 - 49x + 12$، التي يكون عندها ميل المماس 1.

يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $y = 6x - x^2$:



21 أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة P.

22 أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة P.

مهارات التفكير العليا

تبرير: إذا كان: $f(x) = 6 - x^2$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

23 معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند كلٍّ من النقطة $(-1, 5)$ والنقطة $(1, 5)$، مُبرِّرًا إجابتي.

24 نقطة تقاطع المماسين من الفرع السابق، مُبرِّرًا إجابتي.

تحدٍّ: إذا كان: $f(x) = \sqrt{x}$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

25 أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة $(1, 1)$.

26 أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة $(1, 1)$.

27 تبرير: أجـد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنـى الاقتران: $f(x) = \sqrt{x} - 1$، التي يكـون عندها مماس منحنى الاقتران موازيًا للمستقيم: $y = 2x - 1$.

الأستاذ محمد السواعير

الدرس 1

المماس والعمودي على المماس
The Tangent and Normal

أجد معادلة المماس لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

1. $f(x) = 2x^3 + 6x + 10, (-1, 2)$
2. $f(x) = \frac{e^x}{x+4}, \left(0, \frac{1}{4}\right)$
3. $f(x) = x^2 - \frac{7}{x^2}, (1, -6)$
4. $f(x) = x^2 - \frac{8}{\sqrt{x}}, (4, 12)$
5. $f(x) = 4\sqrt{x}, (9, 12)$
6. $f(x) = \sqrt{25 - x^2}, (3, 4)$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

7. $f(x) = \sqrt[3]{x}, x = 8$
8. $f(x) = \frac{4+x}{x-2}, x = 8$
9. $f(x) = \frac{8}{\sqrt{x+11}}, x = 5$

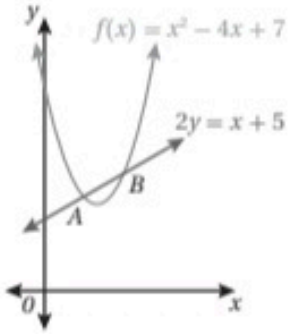
أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x، أو عند النقطة المعطاة:

10. $f(x) = 5x^3 + x^2 - 2, (-1, -6)$
11. $f(x) = 2x^2(6 - x), x = 5$

الأستاذ محمد السواعير

12. أجد إحداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = 2x^6 - x^4 - 2$، التي يكون عندها المماس أفقيًّا.
13. أجد إحداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = 20x^3 - 3x^5$، التي يكون عندها المماس أفقيًّا.
14. أجد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 10x$، التي يكون عندها ميل المماس 6.
15. إذا كان: $f(x) = kx^3 + h$، حيث k و h ثابتان، فأجد قيمة k التي تجعل المستقيم: $y = 2x + 5$ مماسًّا لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x = 1$.

يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - 4x + 7$، والمستقيم: $2y = x + 5$:



16. أجد إحداثيي كلٍّ من النقطة A والنقطة B.
17. أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند كلٍّ من النقطة A والنقطة B.

الدرس 2

المشتقة الثانية، والسرعة المتجهة، والتسارع
The Second Derivative, Velocity, and Acceleration

مثال 1

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \sin x$

2 $f(x) = \ln x + e^x$

أتحقَّق من فهمي

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + \cos x$

b) $f(x) = \frac{2}{x^3}$

مثال 2

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

1 ما سرعة الجسم المتجهة عندما $t = 2$؟

2 في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 2$؟

3 ما تسارع الجسم عندما $t = 2$؟

4 أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

أتحقَّق من فهمي

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 3t^2 - t^3, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

a) ما سرعة الجسم المتجهة عندما $t = 3$؟

b) في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 3$؟

c) ما تسارع الجسم عندما $t = 3$؟

d) أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

مثال 3 : من الحياة

أسد جبال: يُمكِن نمذجة موقع أسد جبال يطارد فريسته على أرض مستوية مُتحرِّكًا في خط مستقيم باستعمال الاقتران: $s(t) = t^3 - 15t^2 + 63t$، حيث t الزمن بالثواني، و s الموقع بالأمتار:

1 ما سرعة أسد الجبال المتجهة بعد 4 ثوانٍ من بَدْء حركته؟

2 ما تسارع أسد الجبال بعد 4 ثوانٍ من بَدْء حركته؟

3 أجد قِيَم t التي يكون عندها أسد الجبال في حالة سكون لحظي.

الأستاذ محمد السيد اعبير

أتحقَّق من فهمي

فهـد: يُمكِن نمذجة موقع فهد يطارد فريسته على أرض مستوية مُتحرِّكًا في خط مستقيم باستعمال الاقتران: $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$، حيث t الزمن بالثواني، وs الموقع بالأمتار:

a) ما سرعة الفهد المتجهة بعد 3 ثوانٍ من بَدْء حركته؟

b) ما تسارع الفهد بعد 3 ثوانٍ من بَدْء حركته؟

c) أجد قِيَم t التي يكون عندها الفهد في حالة سكون لحظي.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x$

2) $f(x) = 2e^x + x^2$

3) $f(x) = 2\cos x - x^3$

4) $f(x) = 4\ln x - 3x^3$

5) $f(x) = x^3(x+6)^6$

6) $f(x) = x^7 \ln x$

7) $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$

8) $f(x) = \sin x^2$

9) $f(x) = 2x^{-3}$

10) $f(x) = x^3 - \dfrac{5}{x}$

11) $f(x) = \sqrt{x}$

12) $f(x) = 2 - 4x + x^2 - x^3$

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

13) $f(x) = 8x^3 - 3x + \dfrac{4}{x}, x = -2$

14) $f(x) = \dfrac{1}{2x-4}, x = 3$

15) إذا كان: $f(x) = px^3 - 3px^2 + x - 4$، وكانت: $f''(2) = -1$، فأجد قيمة الثابت p.

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^5 - 20t^2, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك على خط مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني:

16) ما سرعة الجسم المتجهة عندما $t = 3$؟

17) في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 3$؟

18) ما تسارع الجسم عندما $t = 3$؟

19) أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = \dfrac{3t}{1+t}, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني:

20) ما سرعة الجسم المتجهة عندما $t = 4$؟

21) في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 4$؟

22) ما تسارع الجسم عندما $t = 4$؟

الأستاذ محمد السواعير

لوح تزلُّج: يتحرَّك رامي في مسار مستقيم على لوح تزلُّج، بحيث يُمكِن نمذجة موقعه باستعمال الاقتران: $s(t) = t^2 - 8t + 12$، حيث t الزمن بالثواني، وs الموقع بالأمتار:

23 ما سرعة رامي المتجهة بعد 6 ثوانٍ من بَدْء حركته؟

24 ما تسارع رامي بعد 6 ثوانٍ من بَدْء حركته؟

25 أجد قِيَم t التي يكون عندها رامي في حالة سكون لحظي.

مهارات التفكير العليا

26 **تبرير:** إذا كان: $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{(5-3x^2)^6}$، فأُثبِت أنَّ $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{5+33x^2}{(5-3x^2)^7}$.

27 **تحدٍّ:** إذا مثَّل الاقتران: $s(t) = t^3 - 12t - 9,\ t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني، فما سرعة الجسم عندما يكون تسارعه صفرًا؟

28 **تحدٍّ:** إذا مثَّل الاقتران: $s(t) = 2t^3 - 24t - 10,\ t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني، فما تسارع الجسم عندما تكون سرعته صفرًا؟

الأستاذ محمد السواعير

الدرس 2

المشتقة الثانية، والسرعة المتجهة، والتسارع
The Second Derivative, Velocity, and Acceleration

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي:

1. $f(x) = 5x^3 + 4x$
2. $f(x) = 5e^{4x}$
3. $f(x) = \sqrt[3]{x}$
4. $f(x) = 7 \ln x$
5. $f(x) = (x-1)(2x+3)$
6. $f(x) = e^x \sin x$

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

7. $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{3x-2}}, x = 2$
8. $f(x) = 1 - 7x^2, x = -3$

9. إذا كان: $f(x) = ax^4 - 3x^2$، وكانت: $f''(2) = 42$، فأجد قيمة a.

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t - 7, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني:

10. ما سرعة الجسم المتجهة عندما $t = 1$؟
11. في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 1$؟
12. ما تسارع الجسم عندما $t = 1$؟
13. أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون.

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = (t-3)^3, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني:

14. ما سرعة الجسم المتجهة عندما $t = 5$؟
15. في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 5$؟
16. ما تسارع الجسم عندما $t = 5$؟
17. أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون.

سيّارات سباق: يُمكِن نمذجة موقع سيّارة سباق تتحرَّك في مسار مستقيم باستعمال الاقتران: $s(t) = 6t^2 - 2t$، حيث t الزمن بالثواني، وs الموقع بالأمتار:

18. ما السرعة المتجهة للسيّارة بعد 5 ثوانٍ من بَدْء حركتها؟
19. ما تسارع السيّارة بعد 5 ثوانٍ من بَدْء حركتها؟
20. أجد قِيَم t التي تكون عندها السيّارة في حالة سكون.

الأستاذ محمد السواعير

الدرس 3

تطبيقات القِيَم القصوى
Optimization Problems

مثال 1

إذا كان: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$، فأستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القِيَم القصوى المحلية للاقتران f.

أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 5$، فأستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القِيَم القصوى المحلية للاقتران f.

مثال 2 : من الحياة

اشترى مُزارِعٌ سياجًا طوله 800 m لتسييج حقل مستطيل الشكل من مزرعته، وكان هذا الحقل مُقابِلًا لطريق زراعي محاط به سياج من قبلُ. أجد أكبر مساحة مُمكِنة للحقل يُمكِن للمُزارِع أنْ يحيط السياج بها.

أتحقَّق من فهمي

بنى نجّار سقفًا خشبيًّا لحظيرة حيوانات، وكان السقف على شكل مستطيل محيطه 54 m. أجد أكبر مساحة مُمكِنة لسطح الحظيرة.

مثال 3

أراد مصنع إنتاج عُلَبٍ من الكرتون على شكل متوازي مستطيلات مغلق، بحيث يكون حجم كلٍّ منها $1000\ cm^3$، وقاعدتها مربعة الشكل. أجد أبعاد العُلْبة الواحدة التي تجعل كمِّية الكرتون المُستعمَلة لصنعها أقل ما يُمكِن.

أتحقَّق من فهمي

أرادت إحدى الشركات أنْ تصنع خزّانات معدنية على شكل متوازي مستطيلات مغلق، بحيث يكون حجم كلٍّ منها $2\ m^3$، وقاعدته مربعة الشكل. أجد أبعاد الخزّان الواحد التي تجعل كمِّية المعدن المُستعمَلة لصنعه أقل ما يُمكِن.

الأستاذ محمد السواعير

مثال 4

لدى حدّادٍ صفيحةٌ معدنية مساحتها $36\ m^2$. أراد الحدّاد أنْ يصنع منها خزّان ماء على شكل متوازي مستطيلات مغلق، وأنْ تكون قاعدة الخزّان مربعة الشكل. أجد أبعاد الخزّان التي تجعل حجمه أكبر ما يُمكِن.

أتحقَّق من فهمي

لدى حدّادٍ صفيحةٌ معدنية مساحتها $54\ m^2$. أراد الحدّاد أنْ يصنع منها خزّان ماء على شكل متوازي مستطيلات مغلق، وأنْ يكون الخزّان مفتوحًا من الأعلى، وقاعدته مربعة الشكل. أجد أبعاد الخزّان التي تجعل حجمه أكبر ما يُمكِن.

مثال 5 : من الحياة

وجد خبير تسويق أنَّه لبيع x حاسوبًا من نوع جديد، فإنَّ سعر الحاسوب الواحد (بالدينار) يجب أنْ يكون: $s(x) = 1000 - x$، حيث x عدد الأجهزة المَبيعة. إذا كانت تكلفة إنتاج x من هذه الأجهزة تعطى بالاقتران: $C(x) = 3000 + 20x$، فأجد عدد الأجهزة التي يجب إنتاجها وبيعها لتحقيق أكبر ربح مُمكِن.

أتحقَّق من فهمي

وجدت خبيرة تسويق أنَّه لبيع x ثلّاجة من نوع جديد، فإنَّ سعر الثلّاجة الواحدة (بالدينار) يجب أنْ يكون: $s(x) = 1750 - 2x$، حيث x عدد الأجهزة المَبيعة. إذا كانت تكلفة إنتاج x من هذه الأجهزة تعطى بالاقتران: $C(x) = 2250 + 18x$، فأجد عدد الأجهزة التي يجب إنتاجها وبيعها لتحقيق أكبر ربح مُمكِن.

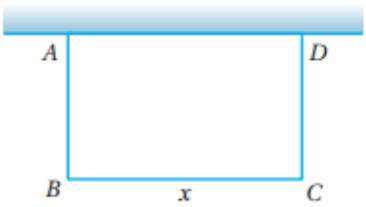
أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القِيَم القصوى المحلية (إنْ وُجِدت) لكل اقتران ممّا يأتي:

1. $f(x) = x^2 - 2x + 5$
2. $f(x) = 20 + 15x - x^2 - \frac{x^3}{3}$
3. $f(x) = x^4 - 2x^2 - 2$

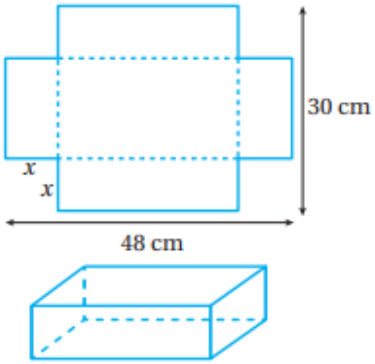
الأستاذ محمد السواعير

يُمثِّل الشكل المجاور مُخطَّطًا لحديقة منزلية على شكل مستطيل أُنشِئت مُقابِل جدار. إذا كان محيط الحديقة من دون الجدار **300 m**، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:



4. المقدار الجبري الذي يُمثِّل طول الضلع AB بدلالة x.
5. اقتران مساحة الحديقة بدلالة x.
6. بُعْدي الحديقة اللذين يجعلان مساحتها أكبر ما يُمكِن.

قطعة ورق مستطيلة الشكل، طولها **48 cm**، وعرضها **30 cm**. قُصَّ من زوايا القطعة مربعات مُتطابِقة، طول ضلع كلٍّ منها x **cm** كما في الشكل المجاور، ثم ثُنِيت لتشكيل عُلْبة:



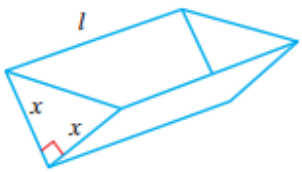
7. أجد الاقتران الذي يُمثِّل حجم العُلْبة بدلالة x.
8. أجد قيمة x التي تجعل حجم العُلْبة أكبر ما يُمكِن.

يُمثِّل الاقتران: $P(x) = 500 - 0.002x$ سعر مُنتَج لإحدى الشركات، حيث x عدد القطع المُنتَجة. ويُمثِّل الاقتران: $C(x) = 300 + 1.10x$ تكلفة إنتاج x قطعة:

9. أجد اقتران الإيراد.
10. أجد اقتران الربح.
11. أجد عدد القطع اللازم بيعها من المُنتَج لتحقيق أكبر ربح مُمكِن، ثم أجد أكبر ربح مُمكِن.
12. أجد سعر الوحدة الواحدة من المُنتَج الذي يُحقِّق أكبر ربح مُمكِن.

مهارات التفكير العليا

13. تحدٍّ: قالَب لصنع الكعك على شكل منشور ثلاثي، قاعدته على شكل مثلث قائم الزاوية كما في الشكل المجاور. إذا كان حجم القالَب $1000\ \text{cm}^3$، فأجد أبعاده التي تجعل المواد المُستعمَلة لصنعه أقل ما يُمكِن، مُبرِّرًا إجابتي.



الأستاذ محمد السواعير

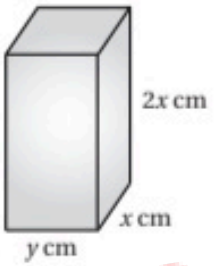
الدرس 3

تطبيقات القِيَم القصوى
Optimization Problems

أستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القِيَم القصوى المحلية (إنْ وُجِدت) لكل اقتران ممّا يأتي:

1. $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$
2. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$
3. $f(x) = x^3 (x-2)$

يُبيِّن الشكل المجاور قالَبًا يُستعمَل لصنع لَبِنات البناء، وتبلغ مساحة سطحه الكلية $600\ \text{cm}^2$:



4. أجد الاقتران الذي يُمثِّل حجم القالَب بدلالة x.
5. أجد قيمة x التي تجعل حجم القالَب أكبر ما يُمكِن.

الأستاذ محمد السواعير

يُمثِّل الاقتران: $s(x) = 150 - 0.5x$ سعر البدلة الرجالية الذي حدَّدته شركة لإنتاج الملابس، حيث x عدد البدلات المَبيعة.
ويُمثِّل الاقتران: $C(x) = 4000 + 0.25x^2$ تكلفة إنتاج x بدلة:

6. أجد اقتران الإيراد.
7. أجد اقتران الربح.
8. أجد عدد البدلات اللازم بيعها لتحقيق أكبر ربح مُمكِن، ثم أجد أكبر ربح مُمكِن.
9. أجد سعر البدلة الواحدة الذي يُحقِّق أكبر ربح مُمكِن.

10. أرادت إحدى الشركات أنْ تصنع خزّانات من الفولاذ الرقيق المُقاوِم للصدأ على شكل متوازي مستطيلات، بحيث يكون كلٌّ منها مفتوحًا من الأعلى، وحجمه $500\ \text{m}^3$، وقاعدته مربعة الشكل. أجد الأبعاد التي تجعل مساحة سطح الخزّان أقل ما يُمكِن.

الدرس 4

الاشتقاق الضمني والمُعدَّلات المرتبطة
Implicit Differentiation and Related Rates

مثال 1

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

1 $2x + 3y^2 = 1$ 2 $y^3 - \sin x = 4y^2$ 3 $xy - 2y = 3e^x$

أتحقَّق من فهمي

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

a) $x^2 + y^2 = 2$ b) $5y^2 - 2e^x = 4y$ c) $xy + y^2 = 4\cos x$

مثال 2

أجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة: $y^3 + xy = 2$ عند النقطة $(1, 1)$.

أتحقَّق من فهمي

أجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة: $x^3 + 2y^3 = 6$ عند النقطة $(2, -1)$.

مثال 3 : من الحياة

عند رمي حجر في مُسطَّح مائي، تتكوَّن موجات دائرية مُتَّحِدة المركز. إذا كان نصف قُطْر دائرة يزداد بمُعدَّل 8 cm/s، فأجد مُعدَّل تغيُّر مساحة هذه الدائرة عندما يكون نصف قُطْرها 10 cm، علمًا بأنَّ العلاقة التي تربط بين مساحة الدائرة (A) ونصف قُطْرها (r) هي: $A = \pi r^2$.

أتحقَّق من فهمي

بالونات: نفخت هديل بالونًا على شكل كرة، فازداد نصف قُطْره بمُعدَّل 3 cm/s. أجد مُعدَّل تغيُّر حجم البالون عندما يكون نصف قُطْره 4 cm، علمًا بأنَّ العلاقة التي تربط بين حجم البالون (V) ونصف قُطْره (r) هي: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

الأستاذ محمد السواعير

أتدرّب وأحلُّ المسائل

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

1. $x^2 - 2y^2 = 4$
2. $x^2 + y^3 = 2$
3. $x^2 + 2y - y^2 = 5$
4. $2xy - 3y = y^2 - 7x$
5. $y^5 = x^3$
6. $x^2 y^3 + y = 11$
7. $\sqrt{x} + \sin y = 16$
8. $e^x y = xe^y$
9. $\cos x + \ln y = 3$
10. $16y^2 - x^2 = 16$
11. $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 9$

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

12. $3x^3 - y^2 = 8, (2, 4)$
13. $2x^2 - 3y^3 = 5, (-2, 1)$
14. $y^2 = \ln x, (e, 1)$
15. $(y - 3)^2 = 4x - 20, (6, 1)$

إذا كان: $2x^2 + y^2 = 34$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

16. ميل المماس عند النقطة $(3, 4)$.
17. معادلة المماس عند النقطة $(3, 4)$.

إذا كان: $y^2 + xy + x^2 = 7$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

18. ميل المماس عند النقطة $(3, -2)$.
19. معادلة المماس عند النقطة $(3, -2)$.
20. معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(3, -2)$.

21. هندسة: تتناقص أطوال أضلاع مُكعَّب بمُعدَّل 6 cm/s. أجد مُعدَّل تغيُّر حجم المُكعَّب عندما يكون طول ضلعه 30 cm، علمًا بأنَّ العلاقة التي تربط بين حجم المُكعَّب (V) وطول ضلعه (x) هي: $V = x^3$.

22. فقاقيع: يزداد نصف قُطْر فُقّاعة صابون كروية الشكل بمُعدَّل 0.5 cm/s. أجد سرعة زيادة مساحة سطح الفُقّاعة عندما يكون طول نصف قُطْرها 3 cm، علمًا بأنَّ العلاقة التي تربط بين مساحة سطح الفُقّاعة (A) ونصف قُطْرها (r) هي: $A = 4\pi r^2$.

الأستاذ محمد السواعير

23 أورام: اتَّخَذ ورم شــكلًا كرويًّا تقريبًا، وقد ازداد نصف قُطْره بمُعدَّل 0.13 cm لكل شــهر. أجد مُعدَّل تغيُّر حجم الورم عندما يكون طول نصف قُطْره 0.45 cm، علمًا بأنَّ العلاقة التي تربط بين حجم الورم (V) ونصف قُطْره (r) هي: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

مهارات التفكير العليا

24 تبرير: أجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة: $x^2 + 6y^2 = 10$ عندما $x = 2$، مُبرِّرًا إجابتي.

25 تحدٍّ: إذا كان: $\ln(xy) = x^2 + y^2$، فأُثبِت أنَّ $\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2y - y}{x - 2xy^2}$.

26 تبريــر: إذا كان المُتغيِّران u وw مرتبطين بالعلاقــة: $u = 150\sqrt[3]{w^2}$، وكانت قيمة المُتغيِّر w تزداد بمرور الزمن t، وَفقًا للعلاقة: $w = 0.05t + 8$، فأجد مُعدَّل تغيُّر u بالنسبة إلى الزمن عندما $w = 64$، مُبرِّرًا إجابتي.

الأستاذ محمد السواعير

الاشتقاق الضمني والمُعدَّلات المرتبطة
Implicit Differentiation and Related Rates

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

1. $x^2 + 5y^2 = 14$
2. $x^2 + 2xy = 3y^2$
3. $y \ln x = 1 + x$
4. $y + y^3 = \sin x - x^2$
5. $xe^y - 3x = 15$
6. $x^3 + xy^2 = 5x$

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

7. $x^2 y - 2x^3 - y^3 + 1 = 0, (2, -3)$
8. $y^3 - x^2 = 4, (2, 2)$

إذا كان: $x^2 - y^2 = 16$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

9. ميل المماس عند النقطة $(3, 5)$.
10. معادلة المماس عند النقطة $(3, 5)$.

إذا كان: $x^2 y = 8 - 4y$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

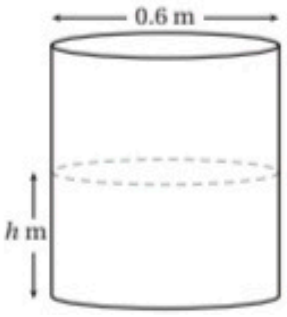
11. ميل المماس عند النقطة $(2, 1)$.
12. معادلة المماس عند النقطة $(2, 1)$.

إذا كان: $x^2 + 4xy + y^2 = 25$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

13. ميل المماس عند النقطة $(0, 5)$.
14. معادلة المماس عند النقطة $(0, 5)$.

15. **مناطيد:** يخرج الهواء من منطاد كروي الشكل بمُعدَّل ثابت مقداره $0.6\ \text{cm}^3/\text{s}$. أجد مُعدَّل تناقص نصف قُطْر المنطاد عند اللحظة التي يكون فيها نصف القُطْر $2.5\ \text{m}$، علمًا بأنَّ العلاقة التي تربط بين حجم المنطاد (V) ونصف قُطْره (r) هي: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

16. **خزّانات مياه:** يُبيِّن الشكل المجاور خزّان ماء أسطواني الشكل. إذا كانت كمِّية الماء في الخزّان تزداد بمُعدَّل $0.4\ \text{m}^3/\text{s}$، فأجد مُعدَّل تغيُّر عمق الماء فيه (h)، علمًا بأنَّ العلاقة التي تربط بين حجم الخزّان (V) وارتفاعه (h) هي: $V = \pi r^2 h$.



الأستاذ محمد السواعير

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 ميل المماس لمنحنى الاقتران: $y = x^2 + 5x$ عندما $x = 3$ هو:

a) 24 b) $-\frac{5}{2}$

c) 11 d) 8

2 إذا كان: $f(x) = x - \frac{1}{x}$، فإنَّ $f''(x)$ هي:

a) $1 + \frac{1}{x^2}$ b) $1 - \frac{1}{x^2}$

c) $\frac{2}{x^3}$ d) $-\frac{2}{x^3}$

3 إذا كان: $y^2 - x^2 = 1$، فإنَّ ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة $(1, \sqrt{2})$ هو:

a) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $-\sqrt{2}$

c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ d) $\sqrt{2}$

4 ميل العمودي على المماس لمنحنى العلاقة: $3x - 2y + 12 = 0$ هو:

a) 6 b) 3

c) $\frac{3}{2}$ d) $-\frac{2}{3}$

5 قيمة x التي عندها قيمة صغرى محلية للاقتران: $f(x) = x^4 - 32x$ هي:

a) 2 b) -2

c) 1 d) -1

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 2 + 7t - t^2,\ t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني:

6 اللحظة التي تكون فيها حركة الجسم في الاتجاه السالب هي:

a) $t = 1$ b) $t = 2$

c) $t = 3.5$ d) $t = 4$

7 اللحظة التي يكون فيها الجسم في حالة سكون لحظي هي:

a) $t = 1$ b) $t = 2$

c) $t = 3.5$ d) $t = 4$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

8 $f(x) = x^2 - 7x + 10, (2, 0)$

9 $f(x) = x^2 - \frac{8}{\sqrt{x}}, (4, 12)$

10 $f(x) = \frac{2x - 1}{x}, (1, 1)$

11 $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x + 1}}, (4, 1)$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

12 $f(x) = (x - 7)(x + 4), x = 1$

13 $f(x) = \frac{x}{x + 4}, x = -5$

14 $f(x) = 2x^4 + 9x^3 + x, x = -2$

الأستاذ محمد السواعير

أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

15 $f(x) = 7x^3 + 6x - 5, x = 2$

16 $f(x) = \dfrac{6x^2 - x^3}{4x^4}, x = -2$

17 أجد إحداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = x^4 - 3x^3 + 1$، التي يكون عندها المماس أفقيًّا.

18 أجد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 + 3$، التي يكون عندها ميل المماس هو 12.

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي:

19 $f(x) = 4x^2 - 5x + 7$

20 $f(x) = \ln x - 9e^x$

21 $f(x) = 10x - 2x\sqrt{x}$

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

22 $f(x) = \sqrt{x}\,(x + 2), x = 2$

23 $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - x^2, x = 1$

24 نفط: تسرَّب نفط من ناقلة بحرية، مُكوِّنًا بُقْعة دائرية الشكل على سطح الماء، تزداد مساحتها بمُعدَّل $50\ \text{m}^2/\text{min}$. أجد سرعة تزايد نصف قُطْر البُقْعة عندما يكون طول نصف قُطْرها 20 m، علمًا بأنَّ العلاقة التي تربط بين مساحة الدائرة (A) ونصف قُطْرها (r) هي: $A = \pi r^2$.

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^3 - 6t^2 + 12t, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

25 ما سرعة الجسم المتجهة عندما $t = 2$؟

26 في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 2$؟

27 ما تسارع الجسم عندما $t = 2$؟

28 أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

درّاجات: يُمكِن نمذجة موقع شخص يقود درّاجة في مسار مستقيم باستعمال الاقتران: $s(t) = \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t$، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

29 ما سرعة الشخص المتجهة بعد 3 ثوانٍ من بَدْء حركته؟

30 ما تسارع الشخص بعد 3 ثوانٍ من بَدْء حركته؟

31 أجد قِيَم t التي يكون عندها الشخص في حالة سكون لحظي.

أستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القِيَم القصوى المحلية (إنْ وُجِدت) لكل اقتران ممّا يأتي:

32 $f(x) = 9 + 24x - 2x^3$

33 $f(x) = (3x - 2)^3 - 9x$

34 $f(x) = 4x^5 - 10x^2$

الأستاذ محمد السواعير

35 **بالونات:** نفخت ماجدة بالونًا على شكل كرة، فازداد حجمه بمُعدَّل $800\ \text{cm}^3/\text{s}$. أجد مُعدَّل زيادة نصف قُطْر البالون عندما يكون طول نصف قُطْره 60 cm، علمًا بأنَّ العلاقة التي تربط بين حجم البالون (V) ونصف قُطْره (r) هي: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

36 خطَّط مُزارع لتسييج حظيرة مستطيلة الشكل قرب نهر كما في الشكل التالي، وحدَّد مساحة الحظيرة بـ $245000\ \text{m}^2$؛ لتوفير كمِّية عشب كافية لأغنامه. أجد أبعاد الحظيرة التي تجعل طول السياج أقل ما يُمكِن، علمًا بأنَّ الجزء المقابل للنهر لا يحتاج إلى تسييج.

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

37 $x^2 + y^2 = y$

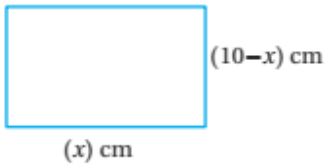
38 $x^2 + 6x - 8y + 5y^2 = 13$

إذا كان: $y^2 + xy + x^2 = 13$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

39 ميل المماس عند النقطة $(-4, 3)$.

40 معادلة المماس عند النقطة $(-4, 3)$.

41 سلك طوله 20 cm. إذا أُريد ثني السلك ليحيط بالمستطيل التالي، فأجد أكبر مساحة مغلقة يُمكِن إحاطة السلك بها.



يُبيِّن الشكل الآتي صندوقًا على شكل متوازي مستطيلات. إذا كانت قاعدة الصندوق مربعة الشكل، وطول ضلع القاعدة x cm، ومجموع أطوال أحرفه 144 cm، فأجد كُلًّا ممّا يلي:

42 الاقتران الذي يُمثِّل حجم الصندوق بدلالة x.

43 قيمة x التي تجعل حجم الصندوق أكبر ما يُمكِن.

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

44 $2x^3 + 4y^2 = -12, (-2, -1)$

45 $x^3 - x^2 y^2 = -9, (3, -2)$

الاستاذ محمد السواعير