سلسلة الاوائل في الرياضيات

التوجيهي العلمي

تحتوي على : ٥٠ سؤال شامل لجميع أفكار درس المعدّلات المرتبطة.

المعلم : صالح الزبيدي

المنهاج الجديد توجيهي ٢٠٠٥

الدرس الأول المعدّلات المرتبطة تطبيقات التفاضل

خطوات حل سؤال المعدّلات المرتبطة

1) **فهم المسألة:** أقرأ المسألة جيدًا، ثم أُحدِّد المُتغيِّر الذي أُريد إيجاد مُعدَّل تغيُّره، ومُعدَّلات التغيُّر المعطاة.
2) **رسم مخطط:** أرسم مُخطَّطًا يُمثِّل المسألة، ثم أُدوِّن عليه المعلومات المُهِمَّة لحلِّ المسألة، مثل: الكميات الثابتة، والكميات المُتغيِّرة بمرور الزمن.
3) **كتابة المعادلة:** أكتب معادلة تربط بين المُتغيِّر الذي أُريد إيجاد مُعدَّل تغيُّره والمُتغيِّرات التي علمْتُ مُعدَّلات تغيُّرها.
4) **نشتق بالنسبة للزمن :** أستعمل قاعدة السلسلة والاشتقاق الضمني لإيجاد مشتقة طرفي المعادلة بالنسبة إلى المُتغيِّر الوسيط t.
5) **عوض المعطيات ثم حساب معدّل التغير المطلوب :** أُعوِّض في المعادلة الناتجة جميع القِيَم المعلومة للمُتغيِّرات ومُعدَّلات تغيُّرها، ثم أحُلُّ المعادلة تبعًا لمُعدَّل التغيُّر المطلوب إيجاده.

المُعدّلات المرتبطة

- مُعدّل تغيّر المساحة و الحجم بالنسبة للزمن.
- مُعدّل تغيّر المسافة بالنسبة للزمن.
- مُعدّل تغيّر الزاوية بالنسبة للزمن.
- مُعدّل التغيّر بالنسبة للزمن في حالة وجود حركة دائرية.
- مُعدّل التغيّر بالنسبة للزمن وميكانيكا الحركة (حساب سرعة الأجزاء المتحركة داخل الآلات).
- مُعدّل تغيّر حجم السائل بالنسبة للزمن.
- وزاري سنوات سابقة.

أسئلة على معدل تغير المساحة والحجم بالنسبة للزمن :

سـؤال ١ :

عند سـقوط قطرة ماء على مُسـطَّح مائي، تتكوَّن موجات دائريـة مُتَّحِدة المركز.
إذا كان نصـف قُطْر إحدى الدوائر يزداد بمُعدَّل 3 cm/s، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

١. مُعدَّل تغيُّر محيط الدائرة عندما يكون نصف قُطْرها 5 cm.

٢. مُعدَّل تغيُّر مساحة الدائرة عندما يكون نصف قُطْرها 9 cm.

سـؤال ٢ :

تنفخ ماجدة بالونًا على شـكل كرة، فيزداد حجمه بمُعدَّل $80\ cm^3/s$. أجد مُعدَّل زيادة نصف قُطْر البالون عندما يكون نصف القُطْر 6 cm.

تذكر:

الكرة:

$V=\frac{4}{3}\pi r^3$

$A=4\pi r^2$

صالح الزبيدي
0797825868

سـؤال ٣ :

مُكعَّب طول ضلعه 10 cm. بدأ المُكعَّب يتمدَّد، فزاد طول ضلعه بمُعدَّل 6 cm/s، وظلَّ مُحافِظًا على شكله:

1. أجد مُعدَّل تغيُّر حجم المُكعَّب بعد 4s من بَدْء تمدُّده.

2. أجد مُعدَّل تغيُّر مساحة سطح المُكعَّب بعد 6s من بَدْء تمدُّده.

سـؤال ٤ :

يزداد طول أحد أضلاع مستطيل بمُعدَّل $2\ cm/s$، ويقل طول ضلعه الآخر بمُعدَّل $3\ cm/s$، بحيث يحافظ المستطيل على شكله، وفي لحظة مُعيَّنة بلغ طول الضلع الأوَّل $20\ cm$، وطول الضلع الثاني $50\ cm$:

1. ما مُعدَّل تغيُّر مساحة المستطيل في تلك اللحظة؟

2. ما مُعدَّل تغيُّر محيط المستطيل في تلك اللحظة؟

3. ما مُعدَّل تغيُّر طول قُطْر المستطيل في تلك اللحظة؟

4. أيُّ الكمِّيات في المسألة مُتزايِدة؟ أيُّها مُتناقِصة؟ أُبرِّر إجابتي

صالح الزبيدي
0797825868

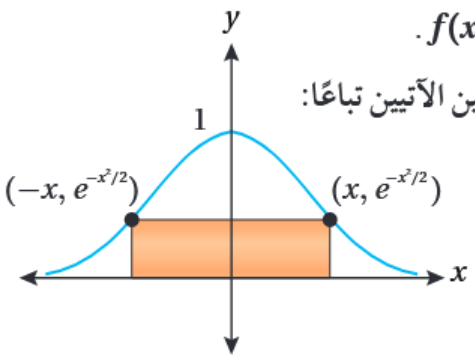
سـؤال ٥ :

في لحظة ما كان طولا ضلعي القائمة في مثلث قائم الزاوية $12\ cm$ ، $16\ cm$ ، فإذا كان طول الضلع الأول يزداد بمعدل $2\ cm/s$ وطول الضلع الثاني ينقص بمعدل $1\ cm/s$ بحيث أن المثلث يبقى محافظاً على شكله، فجد معدل التغير في مساحة المثلث بعد $2\ s$ من تلك اللحظة.

سـؤال٦:

يُبيِّن الشكل المجاور مستطيلًا مرسومًا داخل منحنى الاقتران: $f(x) = e^{-x^2/2}$.

إذا كان x يتغيَّر مع الزمن، مُغيِّرًا معه موضع المستطيل، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:



1. أجد مساحة المستطيل بدلالة x.

2. أجد مُعدَّل تغيُّر مساحة المستطيل عندما $x = 4$ cm، وعندما $\frac{dx}{dt} = 4$ cm/min.

سـؤال٧:

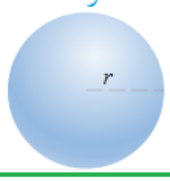
مُلِئَ بالون كروي بالهيليوم بمُعدَّل $8\ \text{cm}^3/\text{s}$. أجد مُعدَّل تغيُّر نصف قُطْر البالون في كلٍّ من الحالات الآتية:

تذكر:

الكرة:

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$A = 4\pi r^2$



1. عندما يكون طول نصف قُطْره 12 cm.

2. عندما يكون حجمه $1435\ \text{cm}^3$ (أُقرِّب إجابتي إلى أقرب جزء من مئة).

3. إذا مُلِئَ مدَّة 33.5 s

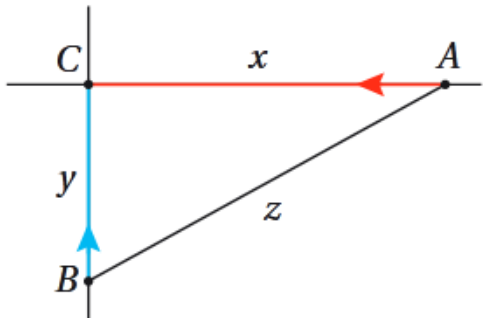
فرع 2: عند تعويض قيمة الحجم لايجاد r يكون الناتج 6.997 وبالتقريب لأقرب جزء من مئة يصبح 7.0

فرع 3 : إذا أعطي الزمن نحصل على الحجم بضرب معدل تغير الحجم بالزمن. و ثم نعوض الحجم لإيجاد r

أسئلة على معدل تغيّر المسافة بالنسبة للزمن

سـؤال ١ :

تتحرك السـيّارة A في اتجاه الغرب بسـرعة $80\ km/h$، وتتحرك السيّارة B في اتجاه الشمال بسـرعة $100\ km/h$، وهما تَتَّجِهان نحو تقاطع مروري. أجد مُعدَّل تغيُّر البُعْد بين السيّارتين عندما تكون السيّارة A والسيّارة B على بُعْد $0.3\ km$ و $0.4\ km$ (على الترتيب) من التقاطع.

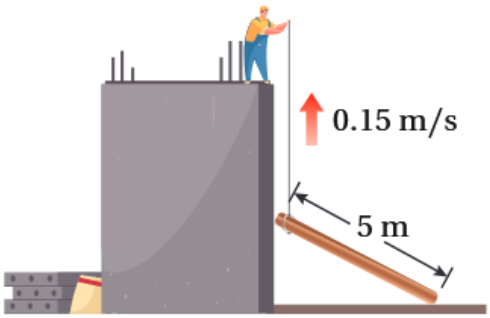


سـؤال ٢ :

تحرَّكت السـيّارة A والسيّارة B في الوقت نفسه، ومن النقطة نفسها، بحيث اتَّجَهت السيّارة A نحو الشـمال بسرعة $45\ km/h$، واتَّجَهت السـيّارة B نحو الشرق بسرعة $40\ km/h$. أجد مُعدَّل تغيُّر البُعْد بين السيّارتين بعد ساعتين من انطلاقهما.

صالح الزبيدي
0797825868

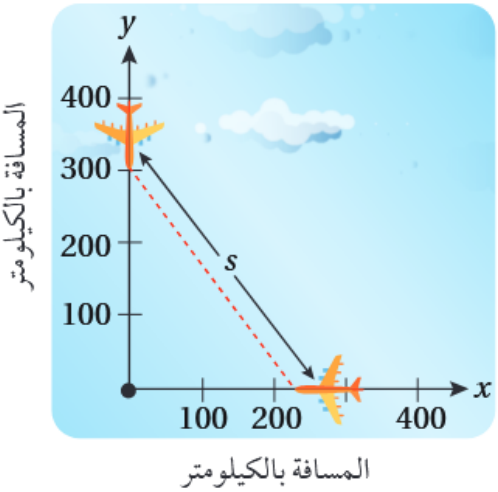
سـؤال ٣ :



يسـحب عامل بناء لوحًا خشبيًّا طوله $5\ m$ إلى الأعلى بجانب مبنى لم يكتمل إنشـاؤه بعدُ، وذلك باستعمال حبـل رُبِط به أحد طرفـي اللوح كما في الشـكل المجاور. إذا افترضْتُ أنَّ طرف اللوح المربوط بالحبل يتبع مسارًا عموديًّا على جدار المبنى، وأنَّ العامل يسحب الحبل بمُعدَّل $0.15\ m/s$، بحيث يظلُّ الطرف العلوي من اللوح مُلامِسًـا للجدار، فما سـرعة انزلاق الطرف الآخر للوح على الأرض عندما يكـون على بُعْد $3\ m$ من جدار المبنى؟

سـؤال ٤ :

رصـد مُراقِب الحركة الجوية في أحـد المطارات طائرتين تُحلِّقان على الارتفاع نفسه، وتقتربان من نقطة التقاء مسار حركتيهما في زاوية قائمة كما في الشـكل المجاور. كانـت إحدى الطائرتين تبعد مسـافة 225 km عن النقطة، وتسير بسرعة 450 km/h، في حين كانت الطائرة الأُخرى تبعد مسافة 300 km عن النقطة، وتسير بسرعة 600 km/h:

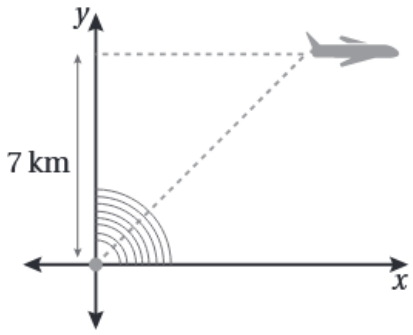


1. أجد مُعدَّل تغيُّر المسافة بين الطائرتين في تلك اللحظة.

2. هل يجب على مُراقِب الحركة الجوية توجيه إحدى الطائرتين لاتِّخاذ مسار مختلف؟ أُبرِّر إجابتي.

سـؤال ٥ :

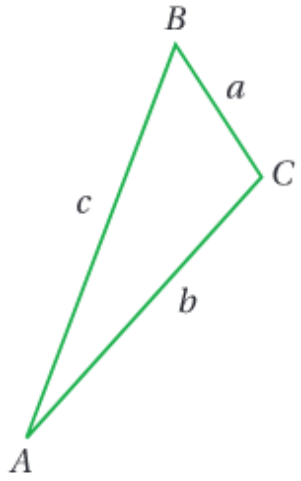
حلَّقت طائرة على ارتفاع 7 km، ومَرَّت في أثناء تحليقها مباشرة فوق رادار كما في الشـكل المجاور. وعندما أصبح البُعْـد بينها وبين الرادار 10 km، رصـد الرادار مُعدَّل تغيُّر البُعْد بينه وبيـن الطائرة، فكان 300 km/h. أجد سرعة الطائرة في هذه اللحظة.



صالح الزبيدي
0797825868

ملاحظة

- عند إعطاء السرعة و الزمن يمكن استعمال القانون: $d_{\text{المسافة}} = v \times t$ لحساب المسافة المقطوعة.
- عندما تكون الزاوية بين مساري حركة الجسمين ليست قائمة نستخدم القانون التالي:



قانون جيوب التمام

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

سـؤال٥:

تحرَّكت درّاجتان في الوقت نفسه، ومن النقطة نفسها، على طريقين مستقيمين، قياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{3}$ rad . إذا كانت سرعة الدرّاجة الأولى 15 km/h، وسرعة الدرّاجة الثانية 20 km/h، فأجد سرعة ابتعاد كلٍّ منهما عن الأُخرى بعد ساعتين من انطلاقهما.

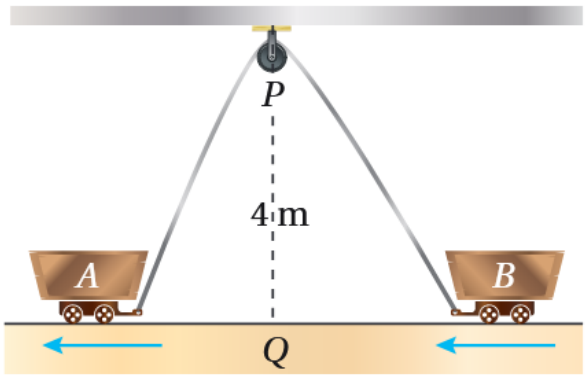
سـؤال٦ ((وزاري ٢٠١٣)):

انطلق قاربان من نفس النقطة في اتجاهين مختلفين قياس الزاوية بينهما $\frac{2\pi}{3}$ ،إذا كانت سرعة الأول 8 km/h و سرعة الثاني 6 km/h ، فجد معدل التغيّر في المسافة بينهما بعد مرور نصف ساعة من انطلاقهما .

سـؤال٧:

يسحب جمال قاربه إلى رصيف الاصطفاف باستعمال بكرة سحب ترتفع 1 m عن مُقدِّمة القارب. إذا طوت البكرة حبل السحب بسرعة 1 m/s، وكان القارب يبعد عن الرصيف مسافة 8 m في لحظة ما، فما سرعة اقتراب القارب من الرصيف عندئذٍ؟

سـؤال٨:

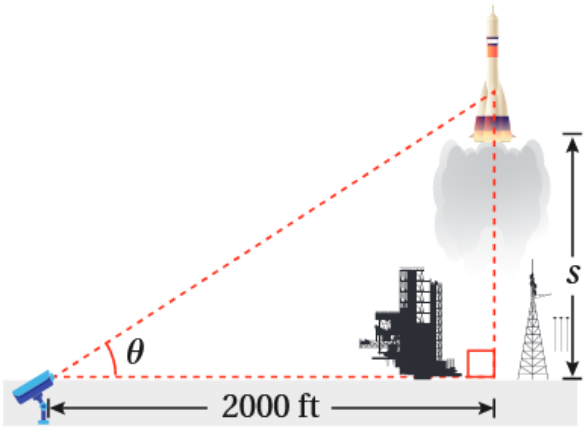


رُبِطت العربتان A و B بحبل طوله 12 m، وهو يمرُّ بالبكرة P كما في الشكل المجاور. إذا كانت النقطة Q تقع على الأرض بين العربتين أسفل P مباشرة، وتبعد عنها مسافة 4 m، وكانت العربة A تتحرَّك بعيدًا عن النقطة Q بسرعة 0.5 m/s، فأجد سرعة اقتراب العربة B من النقطة Q في اللحظة التي تكون فيها العربة A على بُعْد 3 m من النقطة Q، مُبرِّرًا إجابتي.

أسئلة على معدل تغيّر الزاوية بالنسبة للزمن

سـؤال ١ :

رصدت كاميرا مُثبَّتة عند مستوى سطح الأرض لحظة إطلاق صاروخ رأسيًّا إلى الأعلى، وقد أُعطِي ارتفاعه بالاقتران: $s(t) = 50t^2$، حيث s الموقع بالأقدام، وt الزمن بالثواني. إذا كانت الكاميرا تبعد مسافة 2000 ft عن مِنَصَّة الإطلاق، فأجد مُعدَّل تغيُّر زاوية ارتفاع الصاروخ بعد 10 ثوانٍ من انطلاقه.



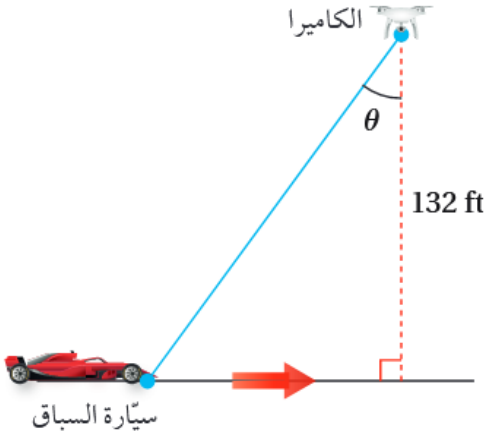
صالح الزبيدي
0797825868

سـؤال ٢ :

أمسك ولد ببكرة خيط طائرة ورقية تُحلِّق على ارتفاع 50 m فوق سطح الأرض، وتتحرَّك أفقيًّا بسرعة 2 m/s. أجد مُعدَّل تغيُّر الزاوية بين الخيط والمستوى الأفقي عندما يكون طول الخيط 100 m، علمًا بأنَّ ارتفاع يد الولد عن الأرض 1.5 m

سـؤال ٣ :

ترتفع كاميرا عن الأرض مسافة **132 ft**، وترصد سيّارة تتحرَّك على مضمار سباق، وتبلغ سرعتها **264 ft/s** كما في الشكل المجاور:



1. أجد سرعة تغيُّر الزاوية θ عندما تكون السيّارة أسفل الكاميرا تمامًا.

2. أجد سرعة تغيُّر الزاوية θ بعد نصف ثانية من مرور السيّارة أسفل الكاميرا.

إضافي سـؤال ٤ :

يسحب جمال قاربه إلى رصيف الاصطفاف باستعمال بكرة سحب ترتفع **0.9** m عن خط سير القارب إذا طوت البكرة حبل السحب بسرعة **0.3** m/s ،

جد **سرعة تغيّر الزاوية** المحصورة بين الحبل و خط سير القارب في اللحظة التي يكون فيها القارب على بعد **1.2** m عن الرصيف

ملاحظات

يسحب: نضع اشارة سالب مع معدل التغير .

نستعمل قانون النسب المثلثية $\sin\theta = \frac{0.9}{z}$ **بناءا على المعطيات**

سـؤال٥ ((وزاري ٢٠١٤)):

يقف رجل طوله 1.8m أمام مصباح كهربائي مثبت على عمود ارتفاعه عن سطح الارض5.4m ، إذا أخذ الرجل بالاقتراب من قاعدة العمود بمعدل 2 m/s، فجد معدل التغير في الزاوية المحصورة بين العمود الذي يحمل المصباح و الشعاع الواصل بين المصباح و رأس الرجل عندما يكون الرجل على بعد 1.8m من قاعدة العمود.

*** ملاحظة عند الاقتراب نضع اشارة سالب لان المسافة تقل

سـؤال٦ ((وزاري ٢٠١١)):

سلم طوله 5 m ، يرتكز طرفه العلوي على حائط عمودي و طرفه السفلي على أرض أفقية، إذا انزلق الطرف السفلي للسلم مبتعداً عن الحائط بمعدل 2 m/s، فجد سرعة تغير الزاوية بين السلم و الأرض عندما يكون طرفه السفلي على بعد 3 m عن الحائط .

أسئلة على معدل التغيّر بالنسبة للزمن فيها حركة دائرية .

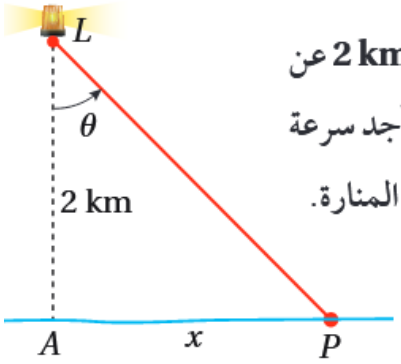
ملاحظة

عندما يعطي عدد الدورات نكون حصلنا على السرعة الزاوية

السـرعة الزاويَّة $\frac{d\theta}{dt}$: هي قيمة التغيُّر في قيـاس الزاوية بالراديان مقسـومة على الزمـن المنقضي،

مثلا 3 دورات بالدقيقة و قيـاس الدورة الكاملـة 2π : $\frac{d\theta}{dt}=\frac{3\times 2\pi}{1\ \text{min}}=6\pi$

سـؤال ١ :



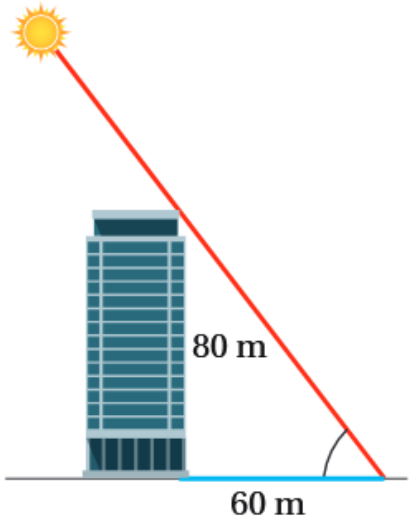
أُنشِئت منارة على جزيرة صغيرة، بحيث كانت على مستوى سطح البحر، وهي تبعد مسافة **2 km** عن أقرب نقطة على ساحل مسـتقيم. إذا كان مصباح المنارة يُكمِل **3** دورات في الدقيقة، فأجد سرعة تحرُّك بقعة الضوء على خط الساحل عند نقطة تبعد مسافة **4 km** عن أقرب نقطة إلى المنارة.

صالح الزبيدي
0797825868

سـؤال ٢ :

أُنشِـئت منارة على جزيرة صغيرة، بحيث كانت على مستوى سطح البحر، وهي تبعد مسافة **3 km** عن أقرب نقطة على سـاحل مسـتقيم. إذا كان مصباح المنارة يُكمِل **4** دورات في الدقيقة، فأجد سرعة تحرُّك بقعة الضوء على خط الساحل عندما تبعد مسافة **1 km** عن أقرب نقطة إلى المنارة.

سـؤال ٣:



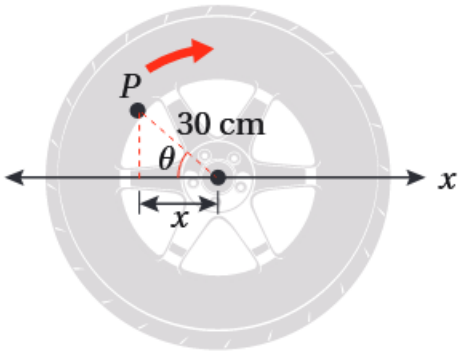
سطعت الشمس في أحد الأيام فوق مبنى ارتفاعه 80 m، فكان طول ظلِّ المبنى في هذه اللحظة 60 m كما في الشكل المجاور. أجد مُعدَّل تغيُّر طول ظلِّ المبنى في هذه اللحظة بوحدة cm/min، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة، علمًا بأنَّ الشمس في هذا اليوم ستمرُّ فوق المبنى تمامًا.

إرشاد: تُكمِل الأرض دورة كاملة حول نفسها كل 24 ساعة.

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi}{24\times 60} = \frac{\pi}{720}$$

تحويل الوحدة الى سم نضرب الناتج النهائي بـ 100

سـؤال ٤:



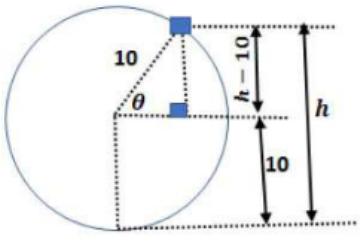
عجلة سيّارة طول نصف قُطْرها الداخلي 30 cm، وهي تدور بمُعدَّل 10 دورات في الثانية. رُسِمت النقطة P على حافة العجلة كما في الشكل المجاور:

1. أجد $\frac{dx}{dt}$ بدلالة θ.
2. أجد $\frac{dx}{dt}$ عندما $\theta = 45°$.

سـؤال٥:

عجلة دوّارة في مدينة الألعاب، طول نصف قُطْرها 10 m، وهي تدور بمُعدَّل دورة واحدة كل دقيقتين. أجد سرعة تغيُّر ارتفاع راكب فيها عندما يكـون على ارتفاع 16 m فوق سـطح الأرض (أُهمِل ارتفاع العربة عن الأرض).

تنبيه: أجد جميع الحلول المُمكِنة.



$$\sin\theta = \frac{h-10}{10}$$

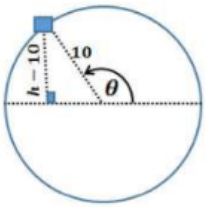
حالة 1 عندما $h=16$ يكون : $\sin\theta = 0.6$ و منه $\cos\theta = 0.8$

فيثاغورس

$$h = 10\sin\theta + 10$$

اشتق ثم أكمل ....

حالة 2 عندما $h=16$ يكون : $\sin\theta = 0.6$ و منه $\cos\theta = -0.8$ سالب في الربع الثاني

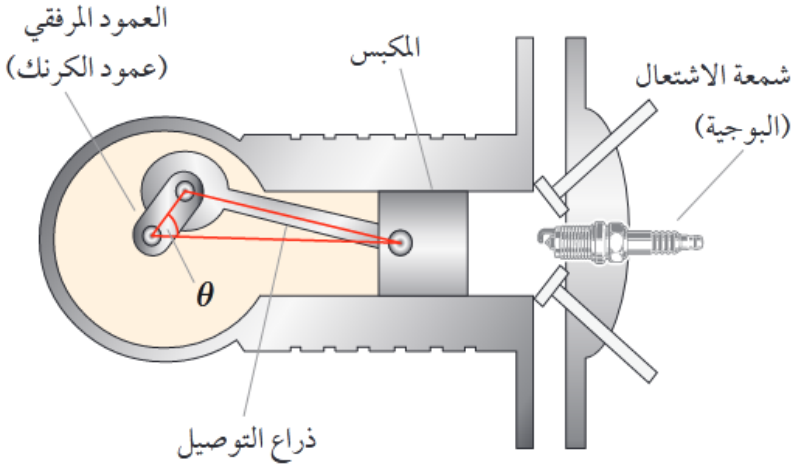


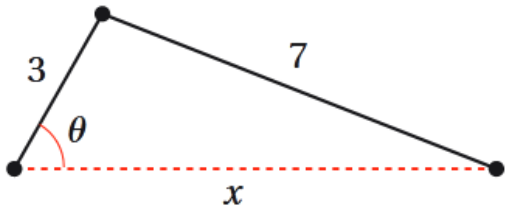
صالح الزبيدي
0797825868

أسئلة على معدل التغيّر بالنسبة للزمن و ميكانيكا الحركة (حركة أجزاء داخل آلات) .

سـؤال ١ :

يُبيِّن الشكل الآتي مُحرِّك سيّارة يحتوي على ذراع توصيل طولها 7 in، وهي مُثبَّتة بعمود مرفقي طوله 3 in. إذا دار العمود المرفقي عكس اتجاه دوران عقارب الساعة 200 دورة في الدقيقة، فما سرعة المكبس عندما $\theta = \frac{\pi}{3}$؟



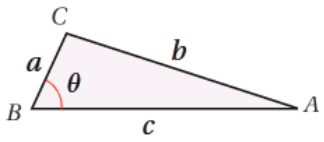


أفترض أنَّ x هو المسافة بين المكبس ورأس العمود المرفقي. ومن ثَمَّ، يُمكِن الاستعانة بقانون جيوب التمام للربط بين x و θ باستعمال المعادلة الآتية:

$$7^2 = 3^2 + x^2 - 6(x)\cos\theta$$

أكمل ...

قانون جيوب التمام



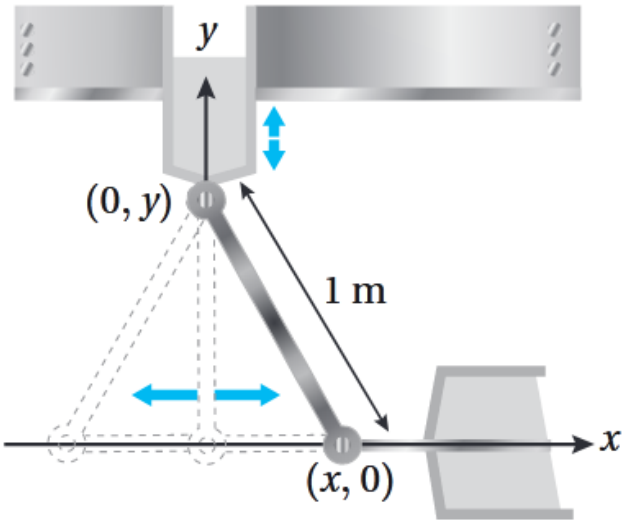
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

صالح الزبيدي
0797825868

سـؤال ٢ :



هندسة ميكانيكية: يُبيِّن الشكل المجاور ذراعًا معدنيةً مُتحرِّكةً طولها 1 m، وإحداثيات نهايتيها $(x, 0)$ و $(0, y)$.

ويُمثِّل الاقتران: $x(t) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi t}{6}$ موقع طرف الذراع على المحور x، حيث t الزمن بالثواني:

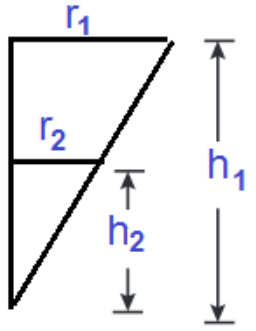
1. أجد أعلى نقطة على المحور y يصلها طرف الذراع.
2. أجد سرعة طرف الذراع الواقع على المحور y عندما يكون الطرف الآخر عند النقطة $(\frac{1}{4}, 0)$.

صالح الزبيدي
0797825868

أسئلة على معدل تغيّر حجم السائل بالنسبة للزمن

حجم المخروط : $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

** إذا طابقت زاويتان في مثلث زاويتين في مثلث آخر، كان المثلثان مُتشابِهين، وكانت أطوال أضلاعهما المُتناظِرة مُتناسِبة.

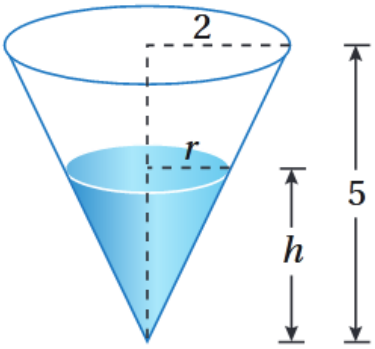


$$\frac{r_2}{h_2} = \frac{r_1}{h_1}$$

سـؤال ١ :

خزّان ماء على شكل مخروط دائري قائم، ارتفاعه 5 m، ونصف قُطْر قاعدته 2 m، ورأسه إلى الأسفل. تسرَّب الماء من الخزّان بمُعدَّل $\frac{1}{12}\ m^3/min$.

ما مُعدَّل تغيُّر ارتفاع الماء في الخزّان عندما يكون ارتفاعه 4 m؟



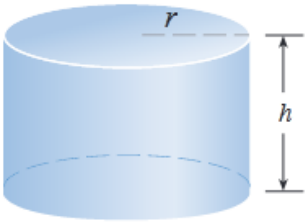
** لاحِظ أنَّ حجم الماء يتناقص في الخزّان (كلمة تسرب) ؛ لذا يكون $\frac{dV}{dt}$ سالبًا.

صالح الزبيدي
0797825868

سـؤال ٢ :

خزّان ماء على شكل مخروط دائري قائم رأسه إلى الأسفل، وارتفاعه 10 m، ونصف قُطْر قاعدته 5 m. صُبَّ الماء في الخزّان بمُعدَّل $\pi\ m^3/min$. ما مُعدَّل تغيُّر ارتفاع الماء في الخزّان عندما يكون ارتفاعه 8 m؟

الأسطوانة:



حجم الأسطوانة : $V = \pi r^2 h$

المساحة الجانبية للأسطوانة : $A = 2\pi rh$ جانبية

المساحة الكلية للأسطوانة : $A = 2\pi rh + 2\pi r^2$

سـؤال٣:

خزّان أسطواني الشكل، ارتفاعه 15 m، وقُطْر قاعدته 2 m. مُلِئَ الخزّان بالوقود بمُعدَّل 500 L/min:

نصف القطر = 1

لتحويل الى مللتر نقسم على 1000

1) أجد مُعدَّل ارتفاع الوقود في الخزّان عند أيِّ لحظة.

2) أجد مُعدَّل تغيُّر المساحة الجانبية للوقود عند أيِّ لحظة.

صالح الزبيدي
0797825868

سـؤال٤ ((وزاري ٢٠١٤)):

إناء على شكل مخروط دائري قائم رأسه إلى الأسفل، يسكب فيه الماء بمعدل $12\ cm^3/s$ فإذا كان قُطْر قاعدته 16 cm وارتفاعه 24 cm ،

جد مُعدَّل تغيُّر ارتفاع الماء في الخزّان عندما يصبح ارتفاع الماء 12 cm

سـؤال٥ ((وزاري ٢٠٠٨)):

أسطوانة دائرية قائمة مصنوعة من المعدن ،ارتفاعها يساوي $\frac{7}{6}$ طول قطر قاعدتها دائما . فإذا كان ارتفاعها يزداد بمعدل $0.01\ cm/s$ ، فجد معدل التغير في حجم الأسطوانة عندما يكون طول نصف قطر قاعدتها $6\ cm$.

سـؤال٦ :

يسـقط الرمل من حزام ناقل بمُعدَّل $10\ m^3/min$ على قِمَّة كَوْمة مخروطية الشكل.

إذا كان ارتفاع الكَوْمة يساوي دائمًا ثلاثة أثمان طول قُطْر قاعدتها، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

① سرعة تغيُّر ارتفاع الكَوْمة عندما يكون ارتفاعها $4\ m$.

② سرعة تغيُّر طول نصف قُطْر قاعدة الكَوْمة عندما يكون ارتفاعها $4\ m$.

أسئلة متنوعة

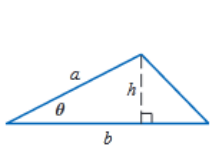
سـؤال ١ :

إذا كانت θ الزاوية المحصورة بين الضلعين اللذين **طول كل منهما** s في مثلث متطابق الضلعين، فأُجيب عن السـؤالين الآتيين تباعًا:

المثلث:

$A = \frac{1}{2}bh$

$= \frac{1}{2}ab\sin\theta$



1. أُثبِت أنَّ مساحة المثلث تعطى بالمعادلة: $A = \frac{1}{2}s^2\sin\theta$.

2. إذا كانت الزاوية θ تزداد بمُعدَّل $\frac{1}{2}$ rad/min ، فأجد مُعدَّل تغيُّر مساحة المثلث عندما $\theta = \frac{\pi}{6}$، علمًا بأنَّ طول الضلعين المتطابقين ثابت. s^2 لا نشتق تعامل معاملة الثابت

سـؤال ٢ :

يتحرَّك جُسَـيْم على منحنـى الاقتران: $f(x) = \frac{10}{1+x^2}$ إذا كان مُعدَّل تغيُّر الإحداثي x هـو $3\ \text{cm/s}$

y

أجد مُعدَّل تغيُّر الإحداثي y عندما $x = 20$

سـؤال ٣ :

يتحرَّك جُسَـيْم على منحنى الاقتران: $f(x) = 2\sin\frac{\pi x}{2}$. وعند مـروره بالنقطة $(\frac{1}{3}, 1)$، فإنَّ الإحداثي x لموقعـه يزداد بمُعدَّل $\sqrt{10}$ وحدة طول لكل ثانية. أجد مُعدَّل تغيُّر المسـافة بين الجُسَـيْم ونقطة الأصل في هذه اللحظة.

المعطيات :

$x = \frac{1}{3}$

$y = 1$

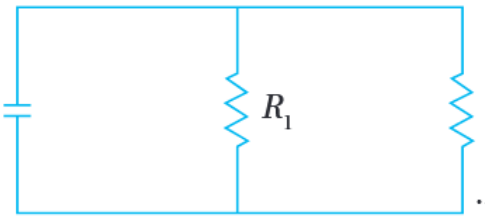
$(0, 0)$ $(x, 2\sin\frac{\pi x}{2})$

• المسافة بين النقطتين $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ هي:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

سـؤال ٤ :

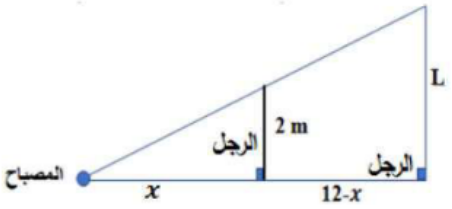
تعطى المقاومة المكافئة R بالأوم (Ω) للمقاومتين R_1 و R_2 الموصولتين على التوازي، كما في الشكل المجاور، بالعلاقة الآتية: $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$



إذا كانت R_1 و R_2 تزدادان بمُعدَّل $0.3\ \Omega/s$ و $0.2\ \Omega/s$ على الترتيب، فأجد مُعدَّل تغيُّر R عندما $R_1=80\ \Omega$، و $R_2=100\ \Omega$.

سـؤال ٥ :

مصباح مُثبَّت بالأرض، وهو يضيء على جدار يبعد عنه مسافة $12\ m$. إذا سار رجل طوله $2\ m$ من موقع المصباح إلى الجدار بسرعة $1.6\ m/s$، فأجد مُعدَّل تغيُّر طول ظلِّه على الجدار عندما يكون على بُعْد $4\ m$ من الجدار.



$x=12-4$

نستخدم قانون تشابه المثلثات : $\frac{L}{2}=\frac{12}{x}$

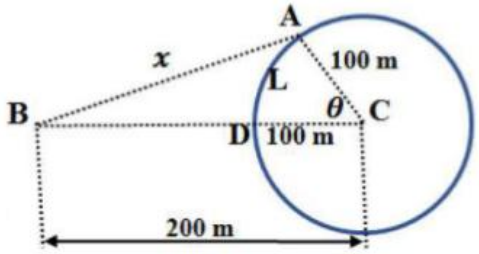
سـؤال٦ :

يركض عَدّاء في مضمار دائري، طول نصف قُطْره 100 m، بسرعة ثابتة مقدارها 7 m/s، ويقف عَدّاء آخر على بُعْد 200 m من مركز مضمار الركض. أجد مُعدَّل تغيُّر المسافة بين العَدّاءين عندما تكون المسافة بينهما 200 m.

تنبيه: أجد جميع الحلول المُمكِنة.

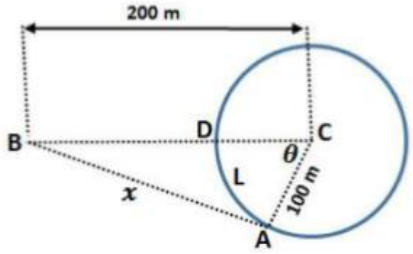
حالة 1 العداء A على يمين B

L متناقصة $\frac{dL}{dt} = -7$



حال 2 العداء A على يسار B

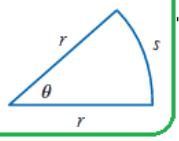
L متزايدة $\frac{dL}{dt} = 7$



• القطاع الدائري:

$A = \frac{1}{2} r^2 \theta$

$s = r\theta$ (θ radian)



$L = r\theta$

$L = 100\,\theta$

$\frac{dL}{dt} = 100\frac{d\theta}{dt}$

$-7 = 100\frac{d\theta}{dt}$

$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-7}{100}$

$x^2 = (200)^2 + (100)^2 - 2(200)(100)\cos\theta$

$x^2 = 50000 - 40000\cos\theta$

$\cos\theta = \frac{50000 - x^2}{40000}$

نشتق $2x\frac{dx}{dt} = 40000\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$

$\cos\theta = \frac{50000 - (200)^2}{40000} = \frac{1}{4}$

متطابقة $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sin\theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$

في الحالة 1 نعوض $\frac{d\theta}{dt} = \frac{-7}{100}$ سالبة و في الحالة 2 نعوض $\frac{d\theta}{dt} = \frac{-7}{100}$ موجبة

أكمل التعويض :