الأستاذ:محمد زكي الضو | اختبار رياضيات في وحدة التكامل | 0776441888

الفرع العلمي | مدة الاختبار ساعتان

السؤال الأول : ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة :

1: $\int \frac{3}{e^{0.5x-3}}dx$ يساوي :

a) $-6e^{-0.5x+3}$ b) $6e^{0.5x-3}$ c) $-\frac{3}{2}e^{-0.5x+3}$ d) $3e^{-0.5x+3}$

2: $\int \frac{x}{6^x}dx$ يساوي :

a) $\frac{x6^{-x}}{\ln 6}-\frac{6^{-x}}{(\ln 6)^2}+c$ b) $\frac{-x6^{-x}}{\ln 6}-\frac{6^{-x}}{(\ln 6)^2}+c$

c) $\frac{-x6^{-x}}{\ln 6}-\frac{6^{-x}}{\ln 6}+c$ d) $\frac{-x6^{-x}}{\ln 6}+\frac{6^{-x}}{(\ln 6)^2}+c$

3: $\int_0^e \frac{8x}{x^2+1}\,dx$ يساوي :

a) $\frac{1}{4}\ln(e^2+1)$ b) $\ln(e^2+1)$ c) $4\ln(e^2+1)$ d) $4\ln(e^2+1)-1$

4: حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحني الاقترانين $f(x)=\sqrt{x}, g(x)=x^2$ حول المحور x يساوي:

a) $\frac{3\pi}{5}$ b) $\frac{3\pi^2}{10}$ c) $\frac{3\pi}{5}$ d) $\frac{3\pi}{10}$

5: $\int \frac{\tan^2 \ln x}{x}dx$ يساوي :

a) $\tan(\ln x)-\ln x+c$ b) $\tan(\ln x)-x+c$

c) $\tan(\ln x)+\ln x+c$ d) $\sec \ln x+c$

6 : $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}dx$ يساوي :

a) $2\ln(1+\sin^2 x)+c$ b) $\frac{1}{2}\ln(1+\sin^2 x)+c$

c) $\ln(1+\sin^2 x)+c$ d) $-\ln(\cos x)+c$

7: $\int \frac{1}{x \ln x^3} dx$ يساوي :

a) $\frac{1}{3}\ln|x| + c$ b) $3\ln|\ln x| + c$ c) $\frac{1}{3}\ln|\ln x| + c$ d) $3\ln|x| + c$

8: $\int 2x \sin x \cos x \, dx$ يساوي :

a) $\frac{-x\cos 2x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + c$ b) $\frac{x\cos 2x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + c$

c) $\frac{-x\cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{2} + c$ d) $\frac{-x\cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c$

9: إحدى العلاقات التالية تمثل حلا للمعادلة التفاضلية $y` - y^2 = 1$:

a) $y = \tan x$ b) $y = \sec x$ c) $y = \cos x$ d) $y = \sin x$

10: مساحة المنطقة المحصورة بين منحني الاقترانين $f(x) = e^x$، و $g(x) = x$ و المستقيمين

$x = 0$, و $x = 2$ تساوي :

a) $e^2 + 3$ b) $e^2 - 3$ c) $2e - 3$ d) $2e + 3$

السؤال الثاني: جد التكاملات التالية:

1) $\int 2x^2 \sec^2 x \tan x \, dx$

$u = 2x^2$ $dv = \sec^2 x \tan x \; dx$

$du = 4x \, dx$ $v = \frac{\tan^2 x}{2}$

$$\int 2x^2 \sec^2 x \tan x \, dx = \int u \; dv = uv - \int v \; du = x^2 \tan^2 x - \int 2x \tan^2 x \; dx$$

$$\int 2x\tan^2 x\ dx$$

$u = 2x \qquad dv = \tan^2 x\ dx = (\sec^2 x - 1)dx$

$du = 2\ dx \qquad v = \tan x - x$

$$\int 2x\tan^2 x\ dx = 2x(\tan x - x) - \int 2(\tan x - x)\ dx$$

$$= 2x(\tan x - x) + 2\int \frac{-\sin x}{\cos x}\ dx + \int 2x\ dx$$

$$= 2x(\tan x - x) + 2\ln|\cos x| + x^2 + c$$

$$\therefore \int 2x^2\sec^2 x\tan x\,dx = x^2\tan^2 x - (2x(\tan x - x) + 2\ln|\cos x| + x^2) + C$$

$$2)\int e^{-x}\sin 2x\ dx$$

$u = e^{-x} \qquad dv = \sin 2x\ dx$

$du = -e^{-x}dx \qquad v = -\frac{\cos 2x}{2}$

$$\int e^{-x}\sin 2x\,dx = \int u\ dv = uv - \int v\ du = -e^{-x}\frac{\cos 2x}{2} - \int e^{-x}\frac{\cos 2x}{2}\ dx$$

$$\int e^{-x}\frac{\cos 2x}{2}\ dx$$

$u = e^{-x} \qquad dv = \frac{\cos 2x}{2}\ dx$

$du = -e^{-x}dx \qquad v = \frac{\sin 2x}{4}$

$$\int e^{-x}\frac{\cos 2x}{2}\ dx = \int u\ dv = uv - \int v\ du = e^{-x}\frac{\sin 2x}{4} + \int e^{-x}\frac{\sin 2x}{4}dx$$

$$\therefore \int e^{-x} \sin 2x \, dx = -e^{-x} \frac{\cos 2x}{2} - \left(e^{-x} \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{4} \int e^{-x} \sin 2x \, dx \right)$$

$$\int e^{-x} \sin 2x \, dx = -e^{-x} \frac{\cos 2x}{2} - e^{-x} \frac{\sin 2x}{4} - \frac{1}{4} \int e^{-x} \sin 2x \, dx$$

$$\frac{5}{4} \int e^{-x} \sin 2x \, dx = -e^{-x} \frac{\cos 2x}{2} - e^{-x} \frac{\sin 2x}{4}$$

$$\int e^{-x} \sin 2x \, dx = \frac{4}{5} \left(-e^{-x} \frac{\cos 2x}{2} - e^{-x} \frac{\sin 2x}{4} \right) + c$$

$$3) \int \sin 2x \ (1 + \sin x)^3 \, dx$$

الحل : افرض $u = 1 + \sin x$ و من ثم فإن: $du = \cos x \ dx \to du = \frac{dx}{\cos x}$

$$\int \sin 2x \ (1 + \sin x)^3 \, dx = \int 2 \sin x \cos x \ (u)^3 \frac{du}{\cos x}$$

$$= \int 2(u-1)(u)^3 du = \int 2(u^4 - u^3) = 2\left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^4}{4}\right) + c$$

$$\int \sin 2x \ (1 + \sin x)^3 \, dx = 2\left(\frac{(1 + \sin x)^5}{5} - \frac{(1 + \sin x)^4}{4}\right) + c$$

$$4) \int \frac{5x^2 - 4x + 2}{(x-1)(x^2+2)} dx$$

$$\frac{5x^2 - 4x + 2}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{a}{(x-1)} + \frac{bx + c}{(x^2+2)}$$

$\rightarrow 5x^2 - 4x + 2 = a(x^2+2) + (bx+c)(x-1)$

عند $x = 1 : 3 = 3a \rightarrow a = 1$

عند $x = 0, a = 1 :\ 2 = 2 + c(1) \rightarrow 2 = 2 + c \rightarrow c = 0$

عند $x = 2, a = 1, c = 0 :\ 14 = 6 + 2b \rightarrow 8 = 2b$

$\rightarrow b = 4$

$$\therefore \int \frac{5x^2 - 4x + 2}{(x-1)(x^2+2)} dx = \int \frac{1}{(x-1)} + \frac{4x}{(x^2+2)} dx$$

$$= \int \frac{1}{(x-1)} + 2\left(\frac{2x}{x^2+2}\right) dx = \ln|x-1| + 2\ln|x^2+2| + c$$

السؤال الثالث :

1) أثبت أن : $\int_0^{\pi/4} x \sin 5x \sin 3x \, dx = \frac{\pi - 2}{16}$

$$\sin 5x \sin 3x = \frac{1}{2}(\cos(8x) - \cos(2x))$$

$$\int_0^{\pi/4} x \sin 5x \sin 3x \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} x(\cos(8x) - \cos(2x) \, dx$$

$u = x \qquad dv = (\cos(8x) - \cos(2x))\, dx$

$du = dx \qquad v = \frac{\sin 8x}{8} - \frac{\sin 2x}{2}$

$$\int x\sin 5x \sin 3x \, dx = \int u \ dv = uv - \int v \ du$$

$$= x\left(\frac{\sin 8x}{8} - \frac{\sin 2x}{2}\right) - \int \left(\frac{\sin 8x}{8} - \frac{\sin 2x}{2}\right) dx$$

$$= x\left(\frac{\sin 8x}{8} - \frac{\sin 2x}{2}\right) - \left(-\frac{\cos(8x)}{64} + \frac{\cos(2x)}{4}\right) + c$$

$$= x\left(\frac{\sin 8x}{8} - \frac{\sin 2x}{2}\right) + \frac{\cos(8x)}{64} - \frac{\cos(2x)}{4} + c$$

$$\therefore \int_0^{\pi/4} x \sin 5x \sin 3x \, dx = \frac{1}{2}\left(x\left(\frac{\sin 8x}{8} - \frac{\sin 2x}{2}\right) + \frac{\cos(8x)}{64} - \frac{\cos(2x)}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/4}$$

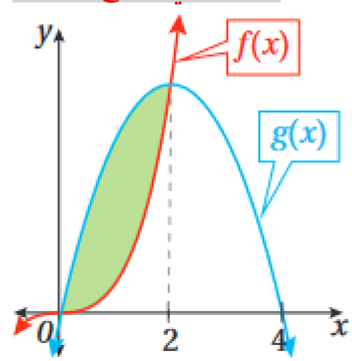
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\left(\frac{\sin 2\pi}{8} - \frac{\sin(\pi/2)}{2}\right) + \frac{\cos(2\pi)}{64} - \frac{\cos(\pi/2)}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(0 + \frac{\cos 0}{64} - \frac{\cos 0}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\left(0 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{64} - \frac{0}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{64} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{8} + \frac{1}{64}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{64} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= -\frac{\pi}{16} + \frac{1}{128} - \frac{1}{128} + \frac{1}{8} = -\frac{\pi}{16} + \frac{1}{8} = -\frac{\pi}{16} + \frac{2}{16} = \frac{8-\pi}{16}$$

---

2) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ ، و $g(x) = 4x - x^2$ و الواقعة في الربع الأول .



الحل :

$$f(x) = g(x) \to 4x - x^2 = \frac{1}{2}x^3 \to 8x - 2x^2$$

$$= x^3 \to x^3 + 2x^2 - 8x = 0$$

$$\to x(x^2 + 2x - 8) = 0 \to x(x+4)(x-2) = 0 \to x = 0, -4, 2$$

$$A = \left|\int_0^2 (\frac{1}{2}x^3) - (4x - x^2)\, dx\right| = \left|\int_0^2 (\frac{1}{2}x^3 - 4x + x^2)\ dx\right|$$

$$= \left|\left(\frac{x^4}{8} - 2x^2 + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2\right| = \left|\left(2 - 8 + \frac{8}{3}\right) - (0)\right| = \left|-6 + \frac{8}{3}\right| \left|\frac{-18+8}{3}\right| = \frac{10}{3}$$

---

3) يتحرك جسم في مسار مستقيم و تعطى سرعته المتجهة بالمعادلة التفاضلية : $\frac{ds}{dt} = -s^2 \ln(t+1)$

حيث t الزمن بالثواني و s موقع الجسم بالأمتار. جد موقع الجسيم بعد 3 ثوان من بدء الحركة، علما أن $s(0) = 0.5$

$$\frac{ds}{dt} = -s^2 \ln(t+1) \rightarrow \frac{ds}{-s^2} = \ln(t+1)\, dt \rightarrow \int \frac{ds}{-s^2} = \int \ln(t+1)\ dt$$

$$\rightarrow \int -s^{-2} ds = \int \ln(t+1)\ dt \rightarrow \frac{-s^{-1}}{-1} = \int \ln(t+1)\ dt$$

$$u = \ln(t+1) \qquad dv = dt$$

$$du = \frac{1}{t+1} \qquad v = t$$

$$\int \ln(t+1)\ dt = t\ln(t+1) - \int \frac{t}{t+1}\ dt = t\ln(t+1) - \int t - \frac{1}{t+1}\ dt$$

$$\therefore \int \ln(t+1)\ dt = t\ln(t+1) - \frac{t^2}{2} + \ln(t+1) + c$$

$$\therefore \frac{1}{s} = t\ln(t+1) - \frac{t^2}{2} + \ln(t+1) + c$$

$$s(0) = 0.5 \rightarrow 2 = c$$

$$\therefore \frac{1}{s} = t\ln(t+1) - \frac{t^2}{2} + \ln(t+1) + 2$$

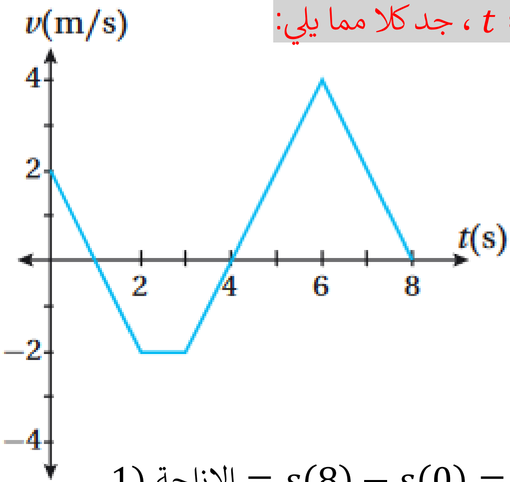
---

4) يبين الشكل المجاور منحنى السرعة المتجهة –الزمن لجسيم يتحرك على المحور x في الفترة الزمنية $[0,8]$. إذا بدأ الجسم الحركة من $x = 5$ عندما $t = 0$ ، جد كلا مما يلي:

1) إزاحة الجسم في الفترة الزمنية المعطاة

2) المسافة التي قطعها الجسم في الفترة الزمنية المعطاة

3) الموقع النهائي للجسيم



$$1)\ \text{الإزاحة} = s(8) - s(0) = \int_0^5 v(t)dt = \int_0^1 v(t)dt + \int_1^4 v(t)dt + \int_4^8 v(t)dt$$

$$= (\text{مساحة المثلث}) + (-\text{ مساحة شبه المنحرف}) + (\text{مساحة المثلث})$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times 1 \times 2\right) + \left(-\frac{1}{2} \times (3+1) \times 2\right) + \left(\left(\frac{1}{2} \times 4 \times 4\right)\right) = 1 - 4 + 8 = 5$$

$$2)\ \text{المسافة} = \int_0^8 |v(t)|dt = \text{مجموع المساحات} = 1 + 4 + 8 = 13$$

$$3)\ s(8) - s(0) = 5 \rightarrow s(5) - 5 = 5 \rightarrow s(5) = 10$$

MOHAMMAD ZAKI AL-DOW
0776441888