الجوكر في الرياضيات

الوحدة الأولى

التفاضل

الفرع العلمي والصناعي

ا.محمد السواعير

المنهاج الجديد

0787468840

الدرس الأول

الاشتقاق
Differentiation

مثال 1

1 أبحث قابلية الاقتران: $f(x) = |x|$ للاشتقاق عندما $x = 0$.

2 أبحث قابلية الاقتران: $f(x) = x^{1/3}$ للاشتقاق عندما $x = 0$.

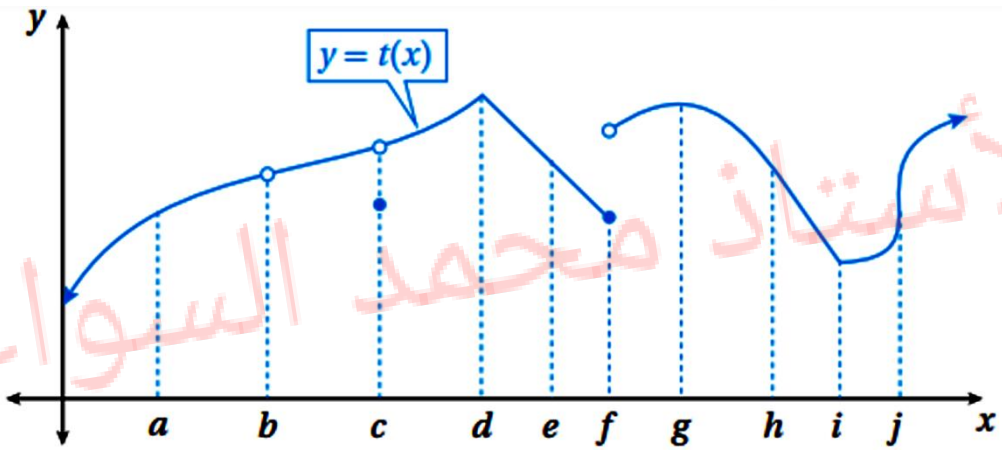
أتحقَّق من فهمي

a) أبحث قابلية الاقتران: $f(x) = |x-2|$ للاشتقاق عندما $x = 2$.

b) أبحث قابلية الاقتران: $f(x) = (x+1)^{1/5}$ للاشتقاق عندما $x = -1$.

مثال 2

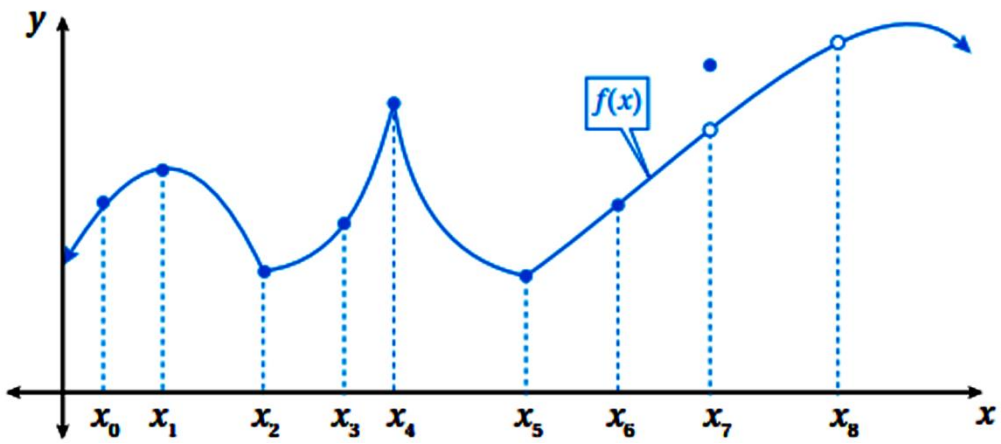
يُبيِّن الشكل الآتي منحنى الاقتران $t(x)$. أُحدِّد قِيَم x للنقاط التي لا يكون عندها الاقتران $t(x)$ قابلًا للاشتقاق، مُبرِّرًا إجابتي.



الأستاذ محمد السواعير

أتحقَّق من فهمي

يُبيِّن الشكل الآتي منحنى الاقتران $f(x)$. أُحدِّد قِيَم x للنقاط التي لا يكون عندها الاقتران $f(x)$ قابلًا للاشتقاق، مُبرِّرًا إجابتي.



مثال 3

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = 3e^x$ 2 $f(x) = x^2 + e^x$ 3 $y = \frac{\sqrt[3]{x} - 2xe^x}{x}$

أتحقّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = 5e^x + 3$ b) $f(x) = \sqrt{x} - 4e^x$ c) $y = 8e^x + \frac{4}{\sqrt[5]{x}}$

مثال 4

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = \ln(x^4)$ 2 $f(x) = \ln(xe^x) + \ln 7x$

أتحقّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \sqrt{x} + \ln(4x)$ b) $f(x) = \ln(2x^3)$

مثال 5

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = 3\sin x + 4$ 2 $y = \frac{1}{2}e^x - 7\cos x$

أتحقّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $y = \frac{\sin x}{2} + 3\cos x$ b) $f(x) = x^2 + \cos x + \sin\frac{\pi}{2}$

مثال 6

إذا كان الاقتران: $f(x) = \ln(\frac{x}{e})$، فأستعمل المشتقة لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي:

1 معادلة المماس عند النقطة $(1, -1)$. 2 معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(1, -1)$.

أتحقّق من فهمي

إذا كان الاقتران: $f(x) = \ln\sqrt{x}$، فأستعمل المشتقة لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي:

a) معادلة المماس عند النقطة $(e, \frac{1}{2})$. b) معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(e, \frac{1}{2})$.

الأستاذ محمد السواعير

مثال 7

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 6t^2 - t^3, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك على خط مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني:

1. أجد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t = 2$.
2. أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.
3. في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 5$؟
4. متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي؟

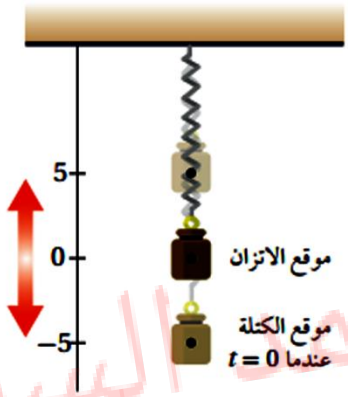
أتحقَّق من فهمي

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^2 - 7t + 8, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك على خط مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني:

a) أجد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t = 4$.
b) أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.
c) في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 2$؟
d) متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي؟

مثال 8 : من الحياة

زنبرك: يُبيِّن الشكل المجاور جسمًا مُعلَّقًا بزنبرك، شُدَّ 5 وحدات أسفل الاتزان ($s = 0$)، ثم تُرِك عند الزمن $t = 0$ ليتحرَّك إلى الأعلى وإلى الأسفل. ويُمثِّل الاقتران: $s(t) = 5\cos t$ موقع الجسم عند أيِّ زمن لاحق، حيث t الزمن بالثواني، وs الموقع بالسنتيمترات:



1. أجد اقترانًا يُمثِّل سرعة الجسم المتجهة، واقترانًا آخرَ يُمثِّل تسارعه عند أيِّ لحظة.
2. أَصِف حركة الجسم.

أتحقَّق من فهمي

يتحرَّك جسم مُعلَّق بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل، ويُمثِّل الاقتران: $s(t) = 7\sin t$ موقع الجسم عند أيِّ زمن لاحق، حيث t الزمن بالثواني، وs الموقع بالأمتار:

a) أجد اقترانًا يُمثِّل سرعة الجسم المتجهة، واقترانًا آخرَ يُمثِّل تسارعه عند أيِّ لحظة.
b) أَصِف حركة الجسم.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أبحث قابلية اشتقاق كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

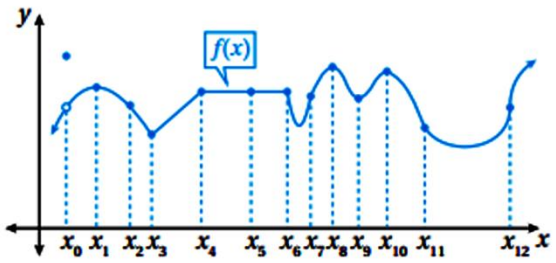
1. $f(x) = |x - 5|, x = 5$
2. $f(x) = x^{2/5}, x = 0$
3. $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 1 \\ x^2 - 2x & , x > 1 \end{cases}, x = 1$

الأستاذ محمد السواعير

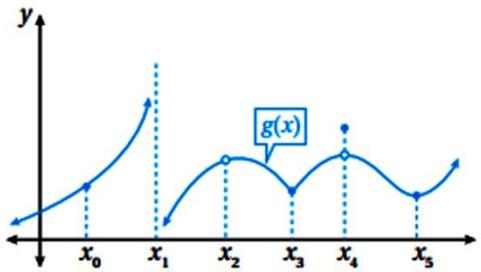
4 $f(x)=\frac{3}{x}, x=4$ 5 $f(x)=(x-6)^{2/3}, x=6$ 6 $f(x)=\begin{cases} x+1 & , x\neq 4 \\ 3 & , x=4 \end{cases}, x=4$

أُحدِّد قِيَم x للنقاط التي لا يكون عندها كل اقتران ممّا يأتي قابلًا للاشتقاق، مُبرِّرًا إجابتي:

7



8



أُحدِّد قيمة (قِيَم) x التي لا يكون عندها كل اقتران ممّا يأتي قابلًا للاشتقاق:

9 $f(x)=\frac{x-8}{x^2-4x-5}$ 10 $f(x)=\sqrt[3]{3x-6}+5$ 11 $f(x)=|x^2-9|$

12 إذا كان: $f(x)=x\,|x|$، فأُثبِت أنَّ $f'(0)$ موجودة.

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

13 $f(x)=2\sin x-e^x$ 14 $f(x)=\frac{\ln x}{4}-\pi\cos x$ 15 $f(x)=\ln\left(\frac{1}{x^3}\right)+x^4$

16 $f(x)=e^{x+1}+1$ 17 $f(x)=e^x+x^e$ 18 $f(x)=\ln\left(\frac{10}{x^n}\right)$

إذا كان: $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}e^x$ ، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

19 أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $(\pi, \frac{1}{2}e^{\pi})$.

20 أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $(\pi, \frac{1}{2}e^{\pi})$.

21 أجد قيمة x التي يكون عندها المماس أفقيًّا لمنحنى الاقتران: $f(x)=e^x-2x$.

22 اختيار من مُتعدِّد: أيُّ الآتية تُمثِّل معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x)=\sin x+\cos x$ عندما $x=\pi$؟

a) $y=-x+\pi-1$ b) $y=x-\pi-1$ c) $y=x-\pi+1$ d) $y=x+\pi+1$

23 إذا كان: $f(x)=\ln kx$، حيث k عدد حقيقي موجب، و$x>0$، فأُبين أنَّ $f'(x)=\frac{1}{x}$.

الأستاذ محمد السواعير

إذا كان الاقتران: $f(x) = \ln x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

24 أُثبِت أنَّ مماس منحنى الاقتران عند النقطة $(e, 1)$ يمرُّ بنقطة الأصل.

25 أُثبِت أنَّ المقطع x للعمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة $(e, 1)$ هو $e + \frac{1}{e}$.

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

26 أجد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t = 5$.

27 أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

28 في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 4$؟

29 متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي؟

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = e^t - 4t, t \geq 0$ موقع جُسَيْم يتحرَّك على خط مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

30 أُحدِّد الموقع الابتدائي للجُسَيْم.

31 أجد تسارع الجُسَيْم عندما تكون سرعته المتجهة صفرًا.

زنبرك: يتحرَّك جسم مُعلَّق بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل، ويُحدِّد الاقتران: $s(t) = 4 \cos t$ موقع الجسم عند أيِّ زمن لاحق، حيث t الزمن بالثواني، و s الموقع بالأمتار:

32 أجد اقترانًا يُمثِّل سرعة الجسم المتجهة، واقترانًا آخرَ يُمثِّل تسارعه عند أيِّ لحظة.

33 أجد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t = \frac{\pi}{4}$.

34 أَصِف حركة الجسم.

مهارات التفكير العليا

35 تبرير: إذا كان الاقتران: $y = e^x - ax$، حيث a عدد حقيقي، فأجد معادلة المماس عند نقطة تقاطع الاقتران مع المحور y، مُبرِّرًا إجابتي.

36 تبرير: إذا كان: $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 2 \\ mx + b & , x > 2 \end{cases}$، فأجد قيمة كلٍّ من m و b اللتين تجعلان f قابلًا للاشتقاق عند جميع قِيَم x الحقيقية، مُبرِّرًا إجابتي.

37 تحدٍّ: أُثبِت عدم وجود مماس ميله 2 للاقتران: $y = 2e^x + 3x + 5x^3$.

الاستاذ احمد السواعير

تبريـر: إذا كان الاقتـران: $y = ke^x$، حيـث: $k > 0$، وكان منحنـاه يقطـع المحـور y عنـد النقطـة P، فأُجيـب عـن السـؤالين الآتييـن تباعًـا:

38 أجد نقطة تقاطع مماس منحنى الاقتران عند النقطة P مع المحور x.

39 إذا كان العمودي على المماس عند النقطة P يقطع المحور x عند النقطة $(100, 0)$، فأجد قيمة k.

تحدٍّ: إذا كان الاقتران: $y = \log x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

40 أُثبِت أنَّ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln 10}$.

41 مُعتمِدًا على النتيجة من السؤال السابق، أجد $\frac{dy}{dx}$ للاقتران: $y = \log ax^2$، حيث a عدد حقيقي موجب.

تبريـر: يُمثِّـل الاقتـران: $s(t) = 4 - \sin t,\ t \geq 0$ موقع جُسَـيْم يتحرَّك في مسـار مسـتقيم، حيث s الموقـع بالأمتار، و t الزمـن بالثواني:

42 أجد سرعة الجُسَيْم المتجهة وتسارعه بعد t ثانية.

43 أجد موقع الجُسَيْم عندما كان في حالة سكون أوَّل مَرَّة بعد انطلاقه.

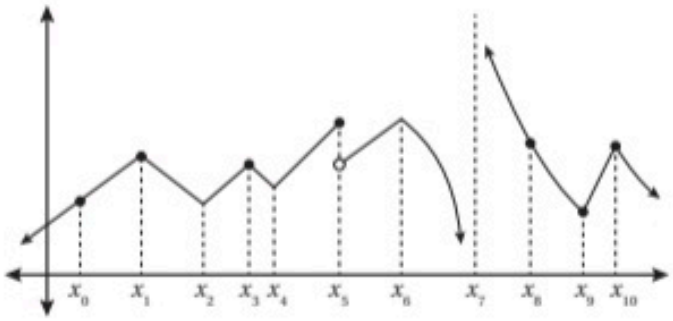
44 أجد موقع الجُسَيْم عندما يصل إلى أقصى سرعة متجهة، مُبرِّرًا إجابتي.

الأستاذ محمد السواعير

الدرس 1

الاشتقاق
Differentiation

1 يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)$. أُحدِّد قِيَم x للنقاط التي يكون عندها الاقتران $f(x)$ غير قابل للاشتقاق، مُبرِّرًا إجابتي.



أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

2 $f(x) = 9e^x + \frac{1}{3\sqrt{x}}$

3 $f(x) = 2e^x + \frac{1}{x^2}$

4 $f(x) = \frac{\pi}{2}\sin x - \cos x$

الأستاذ محمد السواعير

5 أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = 2e^x + x$ عندما $x = 2$.

6 أُثبِت عدم وجود مماس أفقي لمنحنى الاقتران: $f(x) = 3x + \sin x + 2$.

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 3t^2 - t^3, t \geq 0$ موقع جُسَيْم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

7 أجد سرعة الجُسَيْم المتجهة وتسارعه بعد t ثانية.

8 أجد الموقع (المواقع) الذي يكون عنده الجُسَيْم في حالة سكون.

إذا كان: $f(x) = \ln x^2$، حيث: $x > 0$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

9 أجد معادلة مماس منحنى الاقتران عندما $x = e^2$.

10 أجد الإحداثي x للنقطة التي يكون المماس عندها موازيًا للمستقيم $6x - 2y + 5 = 0$

إذا كان: $f(x) = 2\sin x - 4\cos x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

11 أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x = 0$.

12 أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x = \frac{\pi}{2}$.

الدرس الثاني

مشتقتا الضرب والقسمة والمشتقات العليا
Product and Quotient Rules and Higher-Order Derivatives

مثال 1

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = (3x - 2x^2)(5 + 4x)$

2) $f(x) = xe^x$

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 3)(7x^2 - 4x)$

b) $f(x) = \ln x \cos x$

مثال 2

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$

2) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x + 1}$

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \dfrac{x + 1}{2x + 1}$

b) $f(x) = \dfrac{\sin x}{e^x}$

مثال 3 : من الحياة

مرض: تعطى درجة حرارة مريض في أثناء مرضه بالاقتران: $T(t) = \dfrac{4t}{1 + t^2} + 98.6$، حيث t الزمن بالساعات بعد ظهور أعراض المرض، و T درجة الحرارة بالفهرنهايت:

1) أجد مُعدَّل تغيُّر درجة حرارة المريض بالنسبة إلى الزمن.

2) أجد مُعدَّل تغيُّر درجة حرارة المريض عندما $t = 2$، مُفسِّرًا معنى الناتج.

أتحقَّق من فهمي

سكّان: يعطى عدد سكّان مدينة صغيرة بالاقتران: $P(t) = \dfrac{500t^2}{2t + 9}$، حيث t الزمن بالسنوات، و P عدد السكّان بالآلاف:

a) أجد مُعدَّل تغيُّر عدد السكّان في المدينة بالنسبة إلى الزمن.

b) أجد مُعدَّل تغيُّر عدد السكّان في المدينة عندما $t = 12$، مُفسِّرًا معنى الناتج.

الأستاذ محمد السواعير

مثال 4

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1. $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$
2. $f(t)=\frac{1}{t+\frac{1}{t}}$

أتحقّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x)=\frac{1}{5x-x^2}$

b) $f(x)=\frac{1}{e^x+\sqrt{x}}$

مثال 5

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1. $f(x)=x^2\sec x$
2. $f(x)=\frac{\csc x}{1+\tan x}$

أتحقّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x)=x\cot x$

b) $f(x)=\frac{\tan x}{1+\sin x}$

مثال 6

أجد المشتقات الأربع الأولى للاقتران: $f(x)=x^2-\frac{1}{x}$.

أتحقّق من فهمي

أجد المشتقات الثلاث الأولى للاقتران: $f(x)=\frac{\sin x}{x}$.

أتدرّب وأحلّ المسائل

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1. $f(x)=\frac{x^3}{2x-1}$
2. $f(x)=x^3\sec x$
3. $f(x)=\frac{x+1}{\cos x}$
4. $f(x)=e^x(\tan x-x)$
5. $f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{e^x}$
6. $f(x)=x^3\sin x+x^2\cos x$
7. $f(x)=\sqrt[3]{x}(\sqrt{x}+3)$
8. $f(x)=\frac{1+\sec x}{1-\sec x}$
9. $f(x)=\frac{2-\frac{1}{x}}{x-3}$
10. $f(x)=(x^3-x)(x^2+2)(x^2+x+1)$
11. $f(x)=(\csc x+\cot x)^{-1}$

الأستاذ محمد المواعيد

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عندما $x=0$، وكان $f(0)=5, f'(0)=-3, g(0)=-1, g'(0)=2$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

12 $(fg)'(0)$

13 $\left(\frac{f}{g}\right)'(0)$

14 $(7f-2fg)'(0)$

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

15 $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}, x=-2$

16 $f(x)=\frac{1+x}{1+\sqrt[3]{x}}, x=8$

17 $f(x)=\frac{1}{1+\sqrt{x}}, x=4$

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

18 $f(x)=\frac{1+x}{1+e^x}, (0, \frac{1}{2})$

19 $f(x)=e^x \cos x+\sin x, (0, 1)$

أُثبِت صحة كلٍّ ممّا يأتي معتمدًا أنَّ $\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$، $\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$:

20 $\frac{d}{dx}(\cot x)=-\csc^2 x$

21 $\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x \tan x$

22 $\frac{d}{dx}(\csc x)=-\csc x \cot x$

أُلاحِظ المشتقة المعطاة في كلٍّ ممّا يأتي، ثم أجد المشتقة العليا المطلوبة:

23 $f''(x)=2-\frac{2}{x}, f'''(x)$

24 $f'''(x)=2\sqrt{x}, f^{(4)}(x)$

25 $f^{(4)}(x)=2x+1, f^{(6)}(x)$

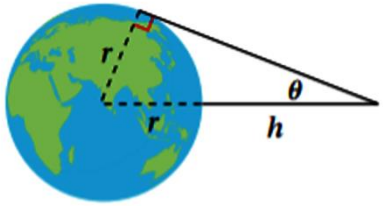
26 نباتات هجينة: وجد باحثون زراعيون أنَّه يُمكِن التعبير عن ارتفاع نبتة مُهجَّنة من نبات تبّاع الشمس h بالأمتار، باستعمال الاقتران: $h(t)=\frac{3t^2}{4+t^2}$، حيث t الزمن بالأشهر بعد زراعة البذور. أجد مُعدَّل تغيُّر ارتفاع النبتة بالنسبة إلى الزمن.

إذا كان الاقتران: $y=e^x \sin x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

27 أجد $\frac{dy}{dx}$، و $\frac{d^2y}{dx^2}$.

28 أُثبِت أنَّ $\frac{d^2y}{dx^2}=2\frac{dy}{dx}-2y$.

الأستاذ محمد السواعير



أقمار صناعية: عندمـــا ترصدُ الأقمارُ الصناعيـــةُ الأرضَ، فإنَّه يُمكِنها مســـح جزء فقط من ســـطح الأرض. وبعض الأقمار الصناعية تحوي مُستشعِرات لقياس الزاوية θ (بالراديان) المُبيَّنة في الشكل المجاور.

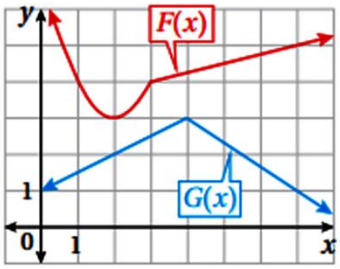
إذا كان h يُمثِّل المسافة بين القمر الصناعي وسطح الأرض بالكيلومتر، و r يُمثِّل نصف قُطْر الأرض بالكيلومتر، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

29 أُثبِت أنَّ $h = r(\csc\theta - 1)$.

30 أجد مُعدَّل تغيُّر h بالنسبة إلى θ عندما $\theta = \frac{\pi}{6}$ (أفترض أنَّ $r = 6371\ \text{km}$)

31 إذا كان: $f(x) = 9\ln x + \frac{1}{2x^2}$، فأُثبِت أنَّ $f'(x) = \frac{(3x-1)(3x+1)}{x^3}$.

يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: $F(x)$، و $G(x)$.



إذا كان: $P(x) = F(x)G(x)$، وكان: $Q(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

32 $P'(2)$

33 $Q'(7)$

الأستاذ محمد السواعير

مهارات التفكير العليا

تبرير: إذا كان: $y = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

34 أجد ميل المماس عند نقطة الأصل.

35 أُبيِّن عدم وجود مماس أفقي للاقتران y، مُبرِّرًا إجابتي.

تحدٍّ: إذا كان: $y = \frac{x+1}{x-1}$، حيث: $x \neq 1$، فأُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

36 أجد $\frac{dy}{dx}$.

37 أُعيد كتابة المعادلة بالنسبة إلى المُتغيِّر x (x اقتران بالنسبة إلى y)، ثم أجد $\frac{dx}{dy}$.

38 أُبيِّن أنَّ $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

تبرير: إذا كان: $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

39 أُثبِت أنَّ $f''(x) = \frac{6\ln x - 5}{x^4}$، مُبرِّرًا إجابتي.

40 أجد قيمة المقدار: $x^4 f''(x) + 4x^3 f'(x) + 2x^2 f(x) + 1$.

الدرس 2

مشتقتا الضرب والقسمة والمشتقات العليا

Product and Quotient Rules and Higher-Order Derivatives

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$
2. $f(x) = -\csc x - \sin x$
3. $f(x) = \frac{x + c}{x + \frac{c}{x}}$
4. $f(x) = x \cot x$
5. $f(x) = 4x - x^2 \tan x$
6. $f(x) = \frac{\cos x}{x^2}$
7. $f(x) = x\left(1 - \frac{4}{x+3}\right)$
8. $f(x) = \frac{3(1 - \sin x)}{2 \cos x}$
9. $f(x) = (x + 1)e^x$

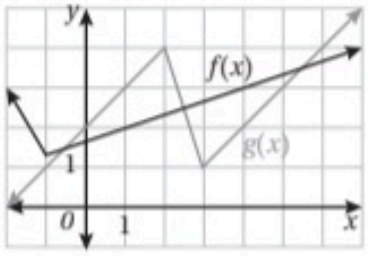
أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

10. $f(x) = x^2 \cos x, \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$
11. $f(x) = \frac{1 + \sin x}{\cos x}, (\pi, -1)$

أجد إحداثيي النقطة (النقاط) التي يكون عندها لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي مماس أفقي:

12. $f(x) = \frac{2x - 1}{x^2}$
13. $h(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$
14. $g(x) = \frac{8(x - 2)}{e^x}$

يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: $f(x)$، و$g(x)$. إذا كان: $u(x) = f(x)g(x)$، وكان: $v(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:



15. $u'(1)$
16. $v'(4)$

17. إذا كان: $f(x) = x \sec x$، فأُثبِت أنَّ $f'(x) = \sec x (1 + x \tan x)$.

18. إذا كان: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$، حيث: $x > 0$، فأجد $f'(x)$، و $f''(x)$.

يُمثِّل الاقتران: $v(t) = \frac{10}{2t + 15}, t \geq 0$ السرعة المتجهة لسيّارة بدأت الحركة في مسار مستقيم، حيث تقاس v بالقَدم لكل ثانية:

19. أجد تسارع السيّارة عندما $t = 5$.
20. أجد تسارع السيّارة عندما $t = 20$.

21. يعطى طول مستطيل بالمقدار $5 + 6t$، ويعطى عرضه بالمقدار $\sqrt{t}$، حيث t الزمن بالثواني، والأبعاد بالسنتيمترات. أجد مُعدَّل تغيُّر مساحة المستطيل بالنسبة إلى الزمن.

الأستاذ محمد السواعيد

الدرس الثالث

قاعدة السلسلة
The Chain Rule

مثال 1

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x)=\cos 2x$ 2 $f(x)=e^{(x+x^2)}$ 3 $f(x)=\ln(\sin x)$

أتحقّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x)=\tan 3x^2$ b) $f(x)=e^{\ln x}$ c) $f(x)=\ln(\cot x)$

مثال 2

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x)=\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$ 2 $f(x)=\tan^4 x$ 3 $f(x)=\sqrt{\ln x}$

أتحقّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x)=\sqrt[5]{(x^2-1)^2}$ b) $f(x)=\sqrt{\cos x}$ c) $f(x)=(\ln x)^5$

مثال 3

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x)=e^{\csc 4x}$ 2 $f(x)=\sin(\tan\sqrt{3x^2+4})$

أتحقّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x)=\cos^2(7x^3+6x-1)$ b) $f(x)=(2+(x^2+1)^4)^3$

مثال 4

1 أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران: $f(x)=e^{-0.2x}\sin 4x$ عندما $x=\frac{\pi}{8}$.

2 أجد ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x)=\left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)^2$ عندما $x=0$.

أتحقّق من فهمي

a) أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران: $f(x)=(2x+1)^5(x^3-x+1)^4$ عندما $x=1$.

b) أجد ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x)=\frac{\cos^2 x}{e^{2x}}$ عندما $x=\frac{\pi}{2}$

الأستاذ محمد السواعير

مثال 5 : من الحياة

أعمال: طرحت إحدى الشـركات مُنتَجًا جديدًا في الأسواق، ثم رصدت عدد القطع المَبيعة منذ طرحه.

إذا مثَّـل الاقتـران: $N(t)=\frac{250000\,t^2}{(2t+1)^2}$, $t>0$ عـدد القطع المَبيعة منذ طرحه، حيث t الزمن بالأسابيع، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

1. أجد مُعدَّل تغيُّر عدد القطع المَبيعة بالنسبة إلى الزمن.
2. أجد $N'(52)$، مُفسِّرًا معنى الناتج.

أتحقَّق من فهمي

قيمة بدل الخدمة لأحد المُنتَجات تُحسَب بالدينار، باستعمال الاقتران:

$U(x)=80\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}$، حيث x عدد القطع المَبيعة من المُنتَج.

a) أجد مُعدَّل تغيُّر قيمة بدل الخدمة بالنسبة إلى عدد القطع المَبيعة من المُنتَج.

b) أجد $U'(20)$، مُفسِّرًا معنى الناتج.

مثال 6

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1. $f(x)=8^{5x}$
2. $f(x)=6^{x^2}$
3. $f(x)=e^{3x}+2^{3x}$

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x)=\pi^{\pi x}$

b) $f(x)=6^{1-x^3}$

c) $f(x)=e^{4x}+4^{2x}$

مثال 7

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1. $f(x)=\log\cos x$
2. $f(x)=\log_2\left(\frac{x^2}{x-1}\right)$

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x)=\log\sec x$

b) $f(x)=\log_8(x^2+3x)$

إبراهيم محمد السواعير

مثال 8

أجد معادلة مماس منحنى المعادلة الوسيطية الآتية، عندما: $t=\frac{\pi}{4}$:

$$x=2\sin t,\quad y=3\cos t,\quad 0\le t\le 2\pi$$

أتحقَّق من فهمي

أجد معادلة مماس منحنى المعادلة الوسيطية الآتية، عندما: $t=\frac{\pi}{4}$:

$$x=\sec t,\quad y=\tan t\quad -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$$

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1. $f(x)=e^{4x+2}$
2. $f(x)=50e^{2x-10}$
3. $f(x)=\cos(x^2-3x-4)$
4. $f(x)=10x^2e^{-x^2}$
5. $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x}}$
6. $f(x)=x^2\tan\frac{1}{x}$
7. $f(x)=3x-5\cos(\pi x)^2$
8. $f(x)=\ln\left(\frac{1+e^x}{1-e^x}\right)$
9. $f(x)=(\ln x)^4$
10. $f(x)=\sin\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{\sin x}$
11. $f(x)=\sqrt[5]{x^2+8x}$
12. $f(x)=\frac{3^{2x}}{x}$
13. $f(x)=2^{-x}\cos\pi x$
14. $f(x)=\frac{10\log_4 x}{x}$
15. $f(x)=\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$
16. $f(x)=\log_3(1+x\ln x)$
17. $f(x)=e^{\sin 2x}+\sin(e^{2x})$
18. $f(x)=\tan^4(\sec(\cos x))$

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

19. $f(x)=4e^{-0.5x^2},\ x=-2$
20. $f(x)=x+\cos 2x,\ x=0$
21. $f(x)=2^x,\ x=0$
22. $f(x)=\sqrt{x+1}\sin\frac{\pi x}{2},\ x=3$
23. إذا كان: $A(x)=f(g(x))$، وكان: $g(5)=-2,\ g'(5)=6,\ f(-2)=8,\ f'(-2)=4,\ f'(5)=3$، فأجد $A'(5)$.
24. إذا كان: $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$، فأُثبِت أنَّ $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

الأستاذ محمد السواعير

بكتيريا: يُمثِّل الاقتران: $A(t) = Ne^{0.1t}$ عدد الخلايا البكتيرية بعد t ساعة في مجتمع بكتيري:

25 أجد مُعدَّل نمو المجتمع بعد 3 ساعات بدلالة الثابت N.

26 إذا كان مُعدَّل نمو المجتمع بعد k ساعة هو 0.2 خلية لكل ساعة، فما قيمة k بدلالة الثابت N؟

أجد المشتقة العليا المطلوبة في كلٍّ ممّا يأتي:

27 $f(x) = \sin \pi x\,, f'''(x)$ 28 $f(x) = \cos(2x+1), f^{(5)}(x)$ 29 $f(x) = \cos x^2, f''(x)$

30 إذا كان الاقتران: $y = e^{\sin x}$، فأجد ميل مماس منحنى الاقتران عند النقطة $(0, 1)$.

31 مواد مُشِعَّة: يُمكِن نمذجة الكمية A (بالغرام) المتبقية من عيِّنةٍ كتلتها الابتدائية 20 g من عنصر البلوتونيوم بعد t يومًا باستعمال الاقتران: $A(t) = 20\left(\frac{1}{2}\right)^{t/140}$. أجد مُعدَّل تحلُّل عنصر البلوتونيوم عندما $t = 2$.

زنبرك: تتحرَّك كرة مُعلَّقة بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل، ويُحدِّد الاقتران: $s(t) = 0.1 \sin 2.4t$، موقع الكرة عند أيِّ زمن لاحق، حيث t الزمن بالثواني، و s الموقع بالسنتيمترات:

32 أجد السرعة المتجهة للكرة عندما $t = 1$.

33 أجد موقع الكرة عندما تكون سرعتها المتجهة صفرًا.

34 أجد موقع الكرة عندما يكون تسارعها صفرًا.

أجد معادلة المماس لمنحنى كل معادلة وسيطية ممّا يأتي عند النقطة المُحدَّدة بقيمة t المعطاة:

35 $x = t + 2, y = t^2 - 1, t = 1$

36 $x = \frac{t}{2}, y = t^2 - 4, t = -1$

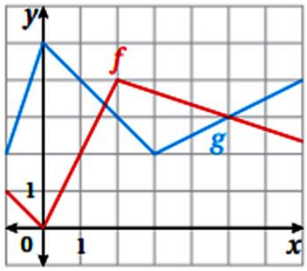
37 $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, t = \frac{\pi}{3}$

38 $x = \sec^2 t - 1, y = \tan t, t = -\frac{\pi}{4}$

39 يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية: $x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t)$، حيث: $0 \le t \le 2\pi$. أُثبِت أنَّ ميل المماس وميل العمودي على المماس لمنحنى هذه العلاقة عندما $t = \frac{\pi}{4}$ هما $1 + \sqrt{2}$، و $1 - \sqrt{2}$ على الترتيب.

الأستاذ محمد السواعير

يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين $f(x)$ و $g(x)$. إذا كان:
$h(x) = f(g(x))$، وكان: $p(x) = g(f(x))$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:



40 $h'(1)$

41 $p'(1)$

مهارات التفكير العليا

تبريـــر: إذا كان الاقتران: $y = \ln(ax + b)$، حيث a و b ثابتان موجبان، وكان ميل المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة P هو 1، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

42 أُثبِت أنَّ الإحداثي x للنقطة P أقل من 1

43 أجد إحداثيي النقطة التي يكون عندها ميل المماس $\frac{1}{2}$، علمًا بأنَّ P هي النقطة $(0, 2)$، ثم أُبرِّر إجابتي.

تبرير: يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية: $x = t^2, y = 2t$:

44 أجد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة t.

45 أجد معادلة العمودي على مماس المنحنى عند النقطة $(t^2, 2t)$.

46 أُثبِت أنَّ مساحة المثلث المُكوَّن من العمودي على المماس، والمحورين الإحداثيين، هي $\frac{1}{2}|t|(2 + t^2)^2$.

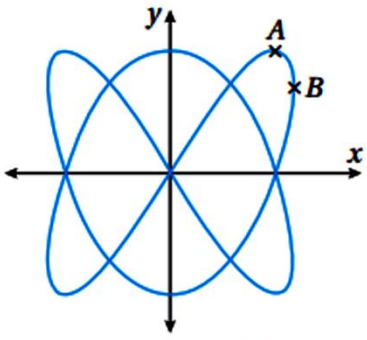
تحدٍّ: أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

47 $y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$

48 $y = e^x \sin^2 x \cos x$

تحدٍّ: يُبيِّن الشكل المجاور منحنى المعادلة الوسيطية:

$$x = \sin 2t, \quad y = \sin 3t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$



49 إذا كان مماس منحنى المعادلة أفقيًّا عند النقطة A الواقعة في الربع الأوَّل، فأجد إحداثيي A.

50 إذا كان مماس المنحنى موازيًا للمحور y عند النقطة B، فأجد إحداثيي B.

51 إذا مَرَّ فرعان من المنحنى بنقطة الأصل كما هو مُوضَّح في الشكل، فأجد ميل المماس لكلٍّ منهما عند هذه النقطة.

الأستاذ محمد السواعير

تبريـــر: يُمثِّل الاقتران: $s(t) = \ln(t^2 - 2t + 1.9), t \geq 0$ موقع جُسَـــيْم يتحرَّك في مســـار مســـتقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

52 أجد سرعة الجُسَيْم المتجهة وتسارعه بعد t ثانية.

53 أجد موقع الجُسَيْم وتسارعه عندما تكون سرعته المتجهة صفرًا.

54 متى يعود الجُسَيْم إلى موقعه الابتدائي؟

الأستاذ محمد السواعير

الدرس 3

قاعدة السلسلة
The Chain Rule

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1. $f(x) = 100e^{-0.1x}$
2. $f(x) = \sin(x^2 + 1)$
3. $f(x) = \cos^2 x$
4. $f(x) = \cos 2x - 2\cos x$
5. $f(x) = \log_3 \frac{x\sqrt{x-1}}{2}$
6. $f(x) = 2\cot^2(\pi x + 2)$
7. $f(x) = \log 2x$
8. $f(x) = \ln(x^3 + 2)$
9. $f(x) = \left(\frac{x^2}{x^3 + 2}\right)^2$
10. $f(x) = x^2\sqrt{20 - x}$
11. $f(x) = \frac{\sin(2x+1)}{e^{x^2}}$
12. $f(x) = 3^{\cot x}$

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

13. $y = 2\sin 5x - 4\cos 3x, x = \frac{\pi}{2}$
14. $f(x) = (x^2 + 2)^3, x = -1$
15. $f(x) = \tan 3x, x = \frac{\pi}{4}$

الأستاذ محمد السواعير

إذا كان الاقتران: $f(x) = 3\sin x - \sin^3 x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

16. أُثبِت أنَّ $f'(x) = 3\cos^3 x$.
17. أجد $f''(x)$.

18. يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية: $x = a\cos t, y = b\sin t$، حيث: $0 \le t \le 2\pi$. أجد المقطع y لمماس المنحنى عندما $t = \frac{\pi}{4}$ بدلالة a و b.

إذا كان الاقتران: $y = e^{ax}$، حيث a ثابت، و $a > 0$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

19. أجد إحداثيي النقطة P التي تقع على منحنى الاقتران، ويكون ميل المماس عندها 1.
20. أُثبِت أنَّه يُمكِن كتابة معادلة العمودي على المماس عند النقطة P في صورة: $x + y = k$، ثم أجد قيمة الثابت k.

21. إذا كان: $h(x) = \sqrt{4 + 3f(x)}$، وكان: $f(1) = 7, f'(1) = 4$، فأجد $h'(1)$.
22. إذا كان الاقتران: $f(x) = e^{2x} + e^{-2x}$، فأُثبِت أنَّ $f''(x) = 4f(x)$.

الدرس 3

قاعدة السلسلة
The Chain Rule

يتبع

23 إذا كان: $f(x) = \sin 4x + \cos 4x$، فأُثبِت أنَّ $f''(x) + 16f(x) = 0$.

يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية: $x = \sin^2\theta, y = 2\cos\theta$، حيث: $0 \le \theta \le 2\pi$:

24 أجد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة θ.

25 أجد معادلة المماس عندما يكون الميل $\sqrt{2}$.

26 أجد النقطة التي يكون عندها المماس موازيًا للمحور y.

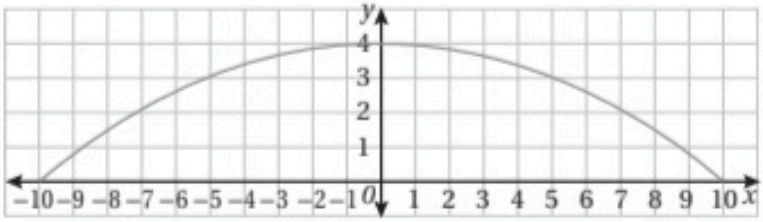
27 **سيّارة:** يُمثِّل الاقتران: $v(t) = 15te^{-0.05t^2}$ السرعة المتجهة (بالمتر لكل ثانية) لسيّارة تتحرَّك في مسار مستقيم، حيث: $0 \le t \le 10$. أجد السرعة المتجهة للسيّارة عندما يكون تسارعها صفرًا.

أجد $(f\circ g)'(x)$ عند قيمة x المعطاة في كلٍّ ممّا يأتي:

28 $f(u) = u^3 + 1, u = g(x) = \sqrt{x}, x = 1$

29 $f(u) = u + \frac{1}{\cos^2 u}, u = g(x) = \pi x, x = \frac{1}{4}$

مرور: يُبيِّن التمثيل البياني المجاور شكل مَطَبٍّ سرعةٍ صُمِّم للتخفيف من سرعة السيّارات على أحد الطرق. وفيه يُمثِّل المحور x سطح الأرض، وتقاس جميع الأطوال بالسنتيمترات.



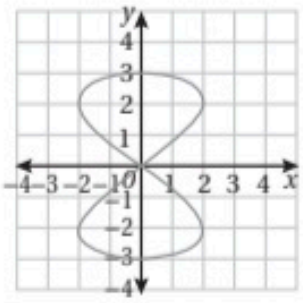
إذا كانت المعادلة الوسيطية التي تُمثِّل منحنى المَطَبِّ هي: $x = 10\sin t, y = 2 + 2\cos 2t$، حيث: $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

30 ميل المماس لمنحنى المَطَبِّ بدلالة t.

31 قيمة t عند أعلى نقطة على منحنى المَطَبِّ.

32 **تبرير:** يُبيِّن الشكل المجاور منحنى المعادلة الوسيطية:

$x = 2\sin 2t, \quad y = 3\cos t \qquad 0 \le t \le 2\pi$



أجد ميل المماس لمنحنى المعادلة عند نقطة الأصل، مُبرِّرًا إجابتي.

الأستاذ محمد السواعير

الدرس الرابع

الاشتقاق الضمني
Implicit Differentiation

مثال 1

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

1) $x^2 + y^2 = 4$

2) $\sin x + \cos y = 2x - 3y$

أتحقّق من فهمي

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

a) $x^2 + y^2 = 13$

b) $2x + 5y^2 = \sin y$

مثال 2

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

1) $2xy - y^3 = 1$

2) $\sin(x+y) = y^2 \cos x$

3) $y^2 = \frac{x-1}{x+1}$

أتحقّق من فهمي

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

a) $3xy^2 + y^3 = 8$

b) $\tan(x-y) = 2xy^3 + 1$

c) $x^2 = \frac{x-y}{x+y}$

الأستاذ محمد السواعير

مثال 3

1) أجد ميل مماس منحنى العلاقة: $e^{2x} \ln y = x + y - 2$ عند النقطة $(1, 1)$.

2) أجد ميل مماس منحنى العلاقة: $y^2 = x$ عندما $x = 4$.

أتحقّق من فهمي

a) أجد ميل مماس منحنى العلاقة: $y^2 = \ln x$ عند النقطة $(e, 1)$.

b) أجد ميل مماس منحنى العلاقة: $(y-3)^2 = 4(x-5)$ عندما $x = 6$.

مثال 4

أجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة: $x^2 - xy + y^2 = 7$ عند النقطة $(-1, 2)$.

أتحقّق من فهمي

أجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة: $x^3 + y^3 - 3xy = 17$ عند النقطة $(2, 3)$.

مثال 5

إذا كان: $2x^3 - 3y^2 = 8$، فأجد $\frac{d^2y}{dx^2}$.

أتحقّق من فهمي

إذا كان: $xy + y^2 = 2x$، فأجد $\frac{d^2y}{dx^2}$.

مثال 6

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطية الآتية عندما $t = 1$:

$x = t^3 + 3t^2, y = t^4 - 8t^2$

أتحقّق من فهمي

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطية الآتية عندما $t = 2$:

$x = 3t^2 + 1, y = t^3 - 2t^2$

مثال 7

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي:

2 $y = \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+9}}$

1 $y = x^x$

أتحقّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي:

b) $y = \sqrt{\frac{x-1}{x^4+1}}$

a) $y = x^{\sqrt{x}}$

أتدرّب وأحلّ المسائل

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

1 $x^2 - 2y^2 = 4$

2 $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{10}$

3 $(x^2 + y^2)^2 = 50(x^2 - y^2)$

4 $e^x y = xe^y$

5 $3^x = y - 2xy$

6 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$

7 $x = \sec\frac{1}{y}$

8 $(\sin \pi x + \cos \pi y)^2 = 2$

9 $\frac{x}{y^2} + \frac{y^2}{x} = 5$

10 $x + y = \cos(xy)$

11 $x^2 + y^2 = \ln(x + y)^2$

12 $\sin x \cos y = x^2 - 5y$

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي عند القيمة المعطاة:

13 $2y^2 + 2xy - 1 = 0, x = \frac{1}{2}$

14 $y^3 + 2x^2 = 11y, y = 1$

أجد ميل المماس لمنحنى كل علاقة ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

15 $x^2 + y^2 = 25, (3, -4)$

16 $x^2 y = 4(2 - y), (2, 1)$

17 $e^{\sin x} + e^{\cos y} = e + 1, \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

18 $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 5, (8, 1)$

الأستاذ محمد السواعير

أجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

19 $x^2 + xy + y^2 = 13, (-4, 3)$

20 $x + y - 1 = \ln(x^2 + y^2), (1, 0)$

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

21 $x + y = \sin y$

22 $4y^3 = 6x^2 + 1$

23 $xy + e^y = e$

24 أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة: $(x-6)(y+4) = 2$ عند النقطة $(7, -2)$.

25 أُثبِت أنَّ لمنحنى العلاقة: $3x^2 + 2xy + y^2 = 6$ مماسين أفقيين، ثم أجد إحداثيي نقطتي التماس.

26 أجد إحداثيي نقطة على المنحنى: $x + y^2 = 1$، بحيث يكون عندها مماس المنحنى موازيًا للمستقيم: $x + 2y = 0$.

27 أجـد إحداثيي نقطة (نقاط) على المنحنى: $y^3 = x^2$، بحيث يكون عندها مماس المنحنى عموديًّا على المسـتقيم: $y + 3x - 5 = 0$.

28 إذا كان: $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = 10$، حيث: $x \neq y \neq 0$، فأُثبِت أنَّ $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$.

29 أجد إحداثيي النقطة على منحنى الاقتران: $y = x^{1/x}, x > 0$، التي يكون عندها ميل المماس صفرًا.

30 أجد إحداثيات جميع النقاط على منحنى الدائرة: $x^2 + y^2 = 100$، التي يكون عندها ميل المماس $\frac{3}{4}$.

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^{1/t}, t > 0$ موقع جُسَيْم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني:

31 أجد سرعة الجُسَيْم المتجهة وتسارعه.

32 أجد تسارع الجُسَيْم عندما تكون سرعته المتجهة صفرًا.

أجد مشتقة كلٍّ من الاقترانات الآتية باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي:

33 $y = (x^2 + 3)^x$

34 $y = \frac{(x^4+1)\sqrt{x+2}}{2x^2 + 2x + 1}$

35 $y = \sqrt{x^2(x+1)(x+2)}$

36 $y = x^{\sin x}$

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل معادلة وسيطية ممّا يأتي عند قيمة t المعطاة:

37 $x = \sin t, y = \cos t, \ t = \frac{\pi}{4}$

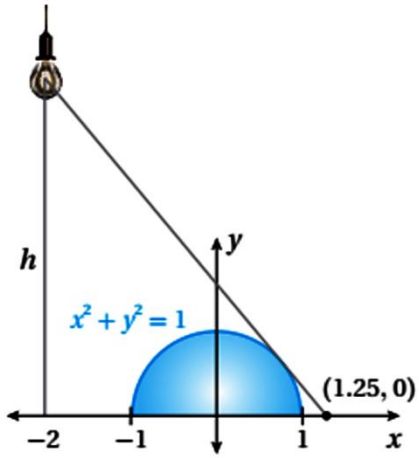
38 $x = e^{-t}, \ y = t^3 + t + 1, t = 0$

إذا كانت العلاقة: $x^3 + y^3 = 6xy$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

39 أجد معادلة المماس عند نقطة تقاطع منحنى المعادلة مع منحنى $y = x$ في الربع الأوَّل.

40 أجد إحداثيي نقطة على منحنى العلاقة في الربع الأوَّل، بحيث يكون عندها مماس المنحنى أفقيًّا.

الأستاذ محمد السواعير



41 **مصباح:** يُبيِّن الشكل المجاور مصباحًا على ارتفاع h وحدة من المحور x. إذا وقعت النقطة $(1.25, 0)$ في نهاية الشعاع الصادر من المصباح، الذي يمسُّ منحنى العلاقة: $x^2 + y^2 = 1$، فأجد ارتفاع المصباح h.

مهارات التفكير العليا

تبرير: إذا كان: $x^2 - y^2 = 1$، فأُجيب عن الأسئلة الأربعة الآتية تباعًا:

42 أجد $\frac{dy}{dx}$.

43 يُمكِن التعبير عن منحنى العلاقة: $x^2 - y^2 = 1$ بالمعادلة الوسيطية: $x = \sec t, y = \tan t$، حيث: $0 \le t \le 2\pi$. أستعمل هذه الحقيقة لإيجاد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة t.

44 أُثبِت أنَّ المقدارين الجبريين اللذين يُمثِّلان $\frac{dy}{dx}$ الناتجين في الفرعين السابقين متكافئان، مُبرِّرًا إجابتي.

45 أجد إحداثيات النقاط التي يكون عندها ميل المماس 2.

46 تبرير: إذا مثَّل l أيَّ مماس لمنحنى المعادلة: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{k}$، حيث k ثابت موجب، فأُثبِت أنَّ مجموع المقطع x والمقطع y للمستقيم l يساوي k، مُبرِّرًا إجابتي.

47 تحدٍّ: إذا كان مماس منحنى الاقتران: $y = x^{\sqrt{x}}$ عند النقطة $(4, 16)$ يقطع المحور x في النقطة B، والمحور y في النقطة C، فأجد مساحة ΔOBC، حيث O نقطة الأصل.

الأستاذ محمد السواعير

الدرس 4

الاشتقاق الضمني
Implicit Differentiation

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

1. $x^3 y^3 = 144$
2. $xy = \sin(x+y)$
3. $y^4 - y^2 = 10x - 3$
4. $x \sin y - y \cos x = 1$
5. $\cot y = x - y$
6. $\sqrt{xy} + x + y^2 = 0$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

7. $x^2 + 3xy + y^2 = x + 3y\,,\ (2, -1)$
8. $xe^y + y \ln x = 2\,,\ (1, \ln 2)$
9. $4xy = 9\,,\ \left(1, \frac{9}{4}\right)$
10. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1\,,\ (1, 2)$

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

11. $x^2 y - 4x = 5$
12. $x^2 + y^2 = 8$
13. $y^2 = x^3$

14. أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران: $y = x^{x^2}$ عندما $x = 2$.

15. أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة: $(x+y)^3 = x^2 + y$ عند النقطة $(1, 0)$.

16. أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران: $y = x(\ln x)^x$ عندما $x = e$.

أجد مشتقة كلٍّ من الاقترانات الآتية باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي:

17. $y = (x-2)^{x+1}$
18. $y = \frac{x^{10}\sqrt{x^2+5}}{\sqrt[3]{8x^2+2}}$
19. $y = (\cos x)^x$

20. أجد معادلتي مماسي منحنى العلاقة: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ اللذين يمرّان بالنقطة $(4, 0)$.

21. أجد نقطتي تقاطع منحنى العلاقة: $x^2 + xy + y^2 = 7$ مع المحور x، ثم أُثبِت أنَّ مماسي منحنى العلاقة عند هاتين النقطتين متوازيان.

الأستاذ محمد السواعير

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 3 + \sin t$ حركة توافقية بسيطة لجُسَيْم. إحدى الآتية تُمثِّل الزمن الذي تكون عنده سرعة الجُسَيْم المتجهة صفرًا:

a) $t = 0$ b) $t = \frac{\pi}{4}$

c) $t = \frac{\pi}{2}$ d) $t = \pi$

2 إذا كان: $y = uv$، وكان:

$u(1) = 2, u'(1) = 3, v(1) = -1, v'(1) = 1$،

فإنَّ $y'(1)$ تساوي:

a) 1 b) -1 c) 1 d) 4

3 إذا كان: $f(x) = x - \frac{1}{x}$، فإنَّ $f''(x)$ هو:

a) $1 + \frac{1}{x^2}$ b) $1 - \frac{1}{x^2}$

c) $\frac{2}{x^3}$ d) $-\frac{2}{x^3}$

4 إذا كان: $y = \tan 4t$، فإنَّ $\frac{dy}{dt}$ هو:

a) $4 \sec 4t \tan 4t$ b) $\sec 4t \tan 4t$

c) $\sec^2(4t)$ d) $4 \sec^2(4t)$

5 إذا كان: $y^2 - x^2 = 1$، فـإنَّ ميـل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة $(1, \sqrt{2})$ هو:

a) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $-\sqrt{2}$

c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ d) $\sqrt{2}$

6 إذا كان: $f(x) = \log(2x - 3)$، فإنَّ $f'(x)$ هو:

a) $\frac{2}{(2x-3)\ln 10}$ b) $\frac{2}{(2x-3)}$

c) $\frac{1}{(2x-3)\ln 10}$ d) $\frac{1}{(2x-3)}$

7 إذا كان: $y = 2^{1-x}$، فـإنَّ ميل المماس لمنحنى العلاقة عندما $x = 2$ هو:

a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{\ln 2}{2}$ d) $-\frac{\ln 2}{2}$

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

8 $f(x) = e^x(x + x\sqrt{x})$

9 $f(x) = \frac{x}{\tan x}$

10 $f(x) = \frac{1}{x} - 12 \sec x$

11 $f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$

12 $f(x) = \frac{\ln x}{x^4}$

13 $f(x) = 5^{2-x}$

14 $f(x) = 10 \sin 0.5x$

15 $f(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^3 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$

16 $f(x) = e^{-1.5x} \cos x^2$

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عندما $x = 2$، وكان: $f(2) = 3, f'(2) = -4, g(2) = 1, g'(2) = 2$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

17 $(fg)'(2)$

18 $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$

19 $(3f - 4fg)'(2)$

الأستاذ محمد السواعير

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي:

20 $f(x) = x^7 \ln x$

21 $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$

22 $f(x) = \dfrac{x}{1+\sqrt{x}}$

23 $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند القيمة المعطاة:

24 $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x}, x = 1$

25 $f(x) = \dfrac{x^2}{\cos x}, x = \dfrac{\pi}{4}$

26 $f(x) = \ln(x+5), x = 0$

27 $f(x) = \sin x + \sin 3x, x = \dfrac{\pi}{4}$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل معادلة وسيطية ممّا يأتي عند النقطة المُحدَّدة بقيمة t المعطاة:

28 $x = t^2, y = t + 2, t = 4$

29 $x = 4\cos t, y = 3\sin t, t = \dfrac{\pi}{4}$

إذا كان: $y = x \ln x$، حيث: $x > 0$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

30 أجد معادلة المماس عند النقطة $(1, 0)$.

31 أجد إحداثيي النقطة التي يكون ميل المماس عندها 2.

أجد $\dfrac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

32 $x(x+y) = 2y^2$

33 $x = \dfrac{2y}{x^2 - y}$

34 $y\cos x = x^2 + y^2$

35 $2xe^y + ye^x = 3$

36 أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة: $y^2 = \dfrac{x^3}{2-x}$ عند النقطة $(1, -1)$.

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي:

37 $y = \dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$

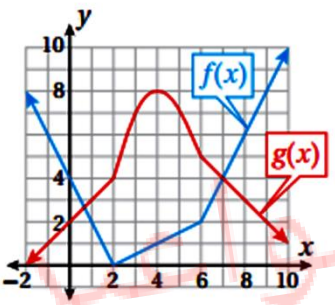
38 $y = x^{\ln x}$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

39 $x^2 + 3xy + y^2 = x + 3y, (2, -1)$

40 $x^2 e^y = 1, (1, 0)$

يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: $f(x)$، و$g(x)$. إذا كان: $p(x) = f(x)g(x)$، وكان: $q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:



41 $p'(1)$

42 $p'(4)$

43 $q'(7)$

44 مواد مُشِعَّة: يُمكِن نمذجة الكمية R (بالغرام) المتبقية من عيِّنةٍ كتلتها 200 g من عنصر مُشِعٍّ بعد t يومًا باستعمال الاقتران: $R(t) = 200(0.9)^t$. أجد $\dfrac{dR}{dt}$ عندما $t = 2$.

45 يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 10 + \dfrac{1}{4}\sin(10\pi t)$ موقع جُسَيْم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالسنتيمترات، وt الزمن بالثواني. أجد سرعة الجُسَيْم المتجهة وتسارعه بعد t ثانية.

الأستاذ محمد السوالمية