الجوكر في الرياضيات

الوحدة الثانية

تطبيقات التفاضل

الفرع العلمي والصناعي

ا.محمد السواعير

المنهاج الجديد

0787468840

المعدلات المرتبطة بالزمن

Related Rates

مثال 1

عند سقوط قطرة ماء على مُسطَّح مائي، تتكوَّن موجات دائرية مُتَّحِدة المركز. إذا كان نصف قُطْر إحدى الدوائر يزداد بمُعدَّل $3\ cm/s$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1) مُعدَّل تغيُّر محيط الدائرة عندما يكون نصف قُطْرها $5\ cm$.

2) مُعدَّل تغيُّر مساحة الدائرة عندما يكون نصف قُطْرها $9\ cm$.

أتحقَّق من فهمي

تنفخ ماجدة بالونًا على شكل كرة، فيزداد حجمه بمُعدَّل $80\ cm^3/s$. أجد مُعدَّل زيادة نصف قُطْر البالون عندما يكون نصف القُطْر $6\ cm$

الأستاذ محمد السواعير

مثال 2

تسير السيّارة A في اتجاه الغرب بسرعة $80\ km/h$، وتسير السيّارة B في اتجاه الشمال بسرعة $100\ km/h$، وهما تتَّجِهان نحو تقاطع مروري. أجد مُعدَّل تغيُّر البُعْد بين السيّارتين عندما تكون السيّارة A والسيّارة B على بُعْد $0.3\ km$ و $0.4\ km$ (على الترتيب) من التقاطع.

أتحقَّق من فهمي

تحرَّكت السيّارة A والسيّارة B في الوقت نفسه، ومن النقطة نفسها، بحيث اتَّجَهت السيّارة A نحو الشمال بسرعة $45\ km/h$، واتَّجَهت السيّارة B نحو الشرق بسرعة $40\ km/h$. أجد مُعدَّل تغيُّر البُعْد بين السيّارتين بعد ساعتين من انطلاقهما.

مثال 3 : من الحياة

رصدت كاميرا مُثبَّتة عند مستوى سطح الأرض لحظة إطلاق صاروخ رأسيًا إلى الأعلى، وَفق اقتران الموقع: $s(t) = 50t^2$، حيث s الموقع بالأقدام، و t الزمن بالثواني. إذا كانت الكاميرا تبعد مسافة $2000\ ft$ عن مِنَصَّة الإطلاق، فأجد مُعدَّل تغيُّر زاوية ارتفاع الصاروخ بعد 10 ثوانٍ من انطلاقه.

أتحقَّق من فهمي

حلَّقت طائرة ورقية خيطها مُثبَّت بنقطة على سطح الأرض على ارتفاع 50 m فوق سطح الأرض، ثم أخذت تتحرَّك أفقيًا بسرعة 2 m/s. أجد مُعدَّل تغيُّر الزاوية بين الخيط وسطح الأرض عندما يكون طول الخيط 100 m.

مثال 4

أُنشِئت منارة على جزيرة صغيرة، وتم تثبيتها في مستوى سطح البحر، وكانت تبعد مسافة 2 km عن أقرب نقطة على ساحل مستقيم. إذا كان مصباح المنارة يُكمِل 3 دورات في الدقيقة، فأجد سرعة تحرُّك بقعة الضوء على خط الساحل عندما تبعد مسافة 4 km عن أقرب نقطة إلى المنارة.

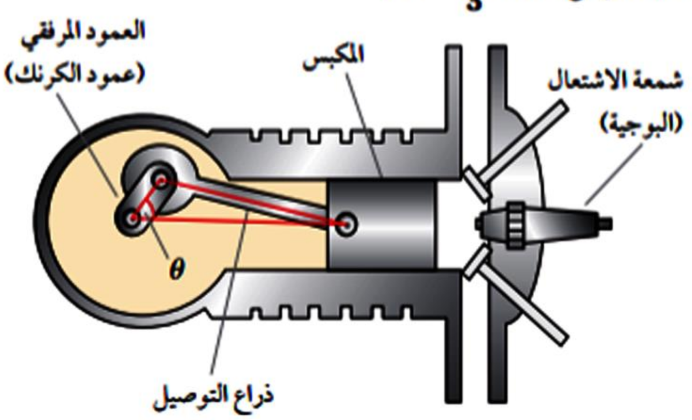
أتحقَّق من فهمي

أُنشِئت منارة على جزيرة صغيرة، وكانت تبعد مسافة 3 km عن أقرب نقطة على ساحل مستقيم. إذا كان مصباح المنارة يُكمِل 4 دورات في الدقيقة، فأجد سرعة تحرُّك بقعة الضوء على خط الساحل عندما تبعد مسافة 1 km عن أقرب نقطة إلى المنارة.

الأستاذ محمد السواعير

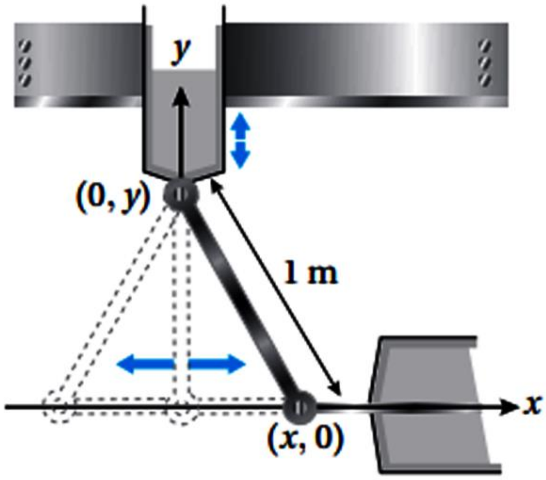
مثال 5

يُبيِّن الشكل الآتي مُحرِّك سيّارة يحتوي على ذراع توصيل طولها 7 in، وهي مُثبَّتة بعمود مرفقي طوله 3 in. إذا دار العمود المرفقي عكس اتجاه دوران عقارب الساعة 200 دورة في الدقيقة، فما سرعة المكبس عندما $\theta = \frac{\pi}{3}$؟



أتحقَّق من فهمي

هندسة ميكانيكية: يُبيِّن الشكل المجاور ذراعًا معدنيـةً مُتحرِّكـةً طولها 1 m، وإحداثيـات نهايتيها $(x, 0)$ و $(0, y)$. ويُمثِّـل الاقتـران $x(t) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi t}{6}$ موقع طـرف الذراع علـى المحور x، حيث t الزمن بالثواني:



a) أجد أعلى نقطة على المحور y يصلها طرف الذراع.

b) أجـد سـرعة طـرف الـذراع الواقـع علـى المحـور y عندمـا يكـون الطـرف الآخـر عنـد النقطـة $(\frac{1}{4}, 0)$.

مثال 6

خزّان ماء على شكل مخروط دائري قائم، ارتفاعه 5 m، ونصف قُطْر قاعدته 2 m، ورأسه إلى الأسفل.

تســرَّب الماء من الخزّان بمُعدَّل $\frac{1}{12}\ m^3/min$. ما مُعــدَّل تغيُّر ارتفاع الماء في الخزّان عندما يكون ارتفاعه 4 m؟

الأستاذ محمد السواعير

أتحقَّق من فهمي

خـزّان مـاء على شـكل مخـروط دائـري قائم رأسـه إلـى الأسـفل، وارتفاعـه 10 m، ونصف قُطْر قاعدتـه 5 m. صُـبَّ المـاء فـي الخـزّان بمُعـدَّل $\pi\ m^3/min$. مـا مُعـدَّل تغيُّـر ارتفاع المـاء فـي الخـزّان عندمـا يكـون ارتفاعه 8 m؟

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

يزداد طول أحد أضلاع مستطيل بمُعدَّل 2 cm/s، ويقل طول ضلع آخر له بمُعدَّل 3 cm/s بحيث يحافظ المستطيل على شكله، وفي لحظة مُعيَّنة بلغ طول الضلع الأوَّل 20 cm، وطول الضلع الثاني 50 cm:

1. ما مُعدَّل تغيُّر مساحة المستطيل في تلك اللحظة؟
2. ما مُعدَّل تغيُّر محيط المستطيل في تلك اللحظة؟
3. ما مُعدَّل تغيُّر طول قُطْر المستطيل في تلك اللحظة؟
4. أيُّ الكمِّيات في المسألة مُتزايِدة؟ أيُّها مُتناقِصة؟ أُبرِّر إجابتي.

مُكعَّب طول ضلعه 10 cm. بدأ المُكعَّب يتمدَّد، فزاد طول ضلعه بمُعدَّل 6 cm/s، وظلَّ مُحافِظًا على شكله:

5 أجد مُعدَّل تغيُّر حجم المُكعَّب بعد 4s من بَدْء تمدُّده.

6 أجد مُعدَّل تغيُّر مساحة سطح المُكعَّب بعد 6s من بَدْء تمدُّده.

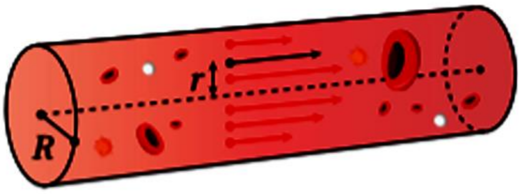
وقود: خزّان أسطواني الشكل، ارتفاعه 15 m، وقُطْر قاعدته 2 m. مُلِئَ الخزّان بالوقود بمُعدَّل 500 L/min:

7 أجد مُعدَّل ارتفاع الوقود في الخزّان عند أي لحظة.

8 أجد مُعدَّل تغيُّر المساحة الجانبية للوقود لحظة امتلاء الخزّان، علمًا بأنَّه كان فارغًا قبل ذلك.

---

9 طب: تُمثِّل المعادلة:

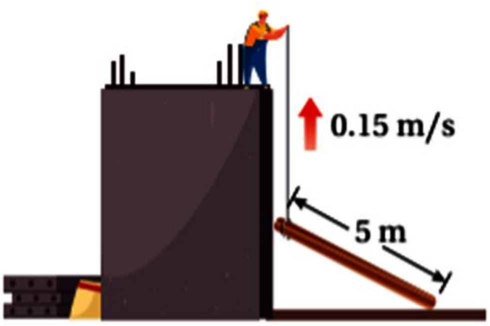


$V = \frac{3125}{6}(R^2 - r^2)$ سرعة الدم في أحد الأوعية الدموية بالملّيمتر لكل ثانية، حيث R طول نصف قُطْر الوعاء بالملّيمتر، وذلك على بُعْد r ملّيمترًا من محور هذا الوعاء. إذا كان الوعاء ينقبض بمُعدَّل 0.0002 mm/s، فأجد مُعدَّل تغيُّر سرعة الدم في الوعاء في اللحظة التي يكون فيها طول نصف قُطْره 0.075 mm، علمًا بأنَّ r ثابت، ومقداره 0.0005 mm

الأستاذ محمد السواعير

10 علوم: يُمثِّل الاقتران $T(x) = \frac{200}{1+x^2}$ درجة الحرارة (بالسليسيوس) التي يشعر بها شخص على بُعْد x مترًا من النار. إذا كان الشخص يبتعد عن النار بمُعدَّل 2 m/s، فأجد سرعة تغيُّر درجة الحرارة التي يشعر بها الشخص عندما يكون على بُعْد 5 m من النار.

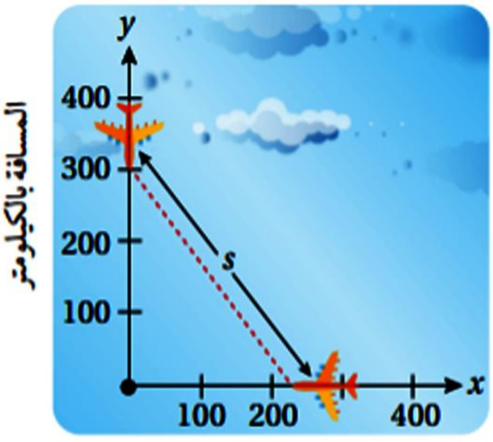
11 بناء: يسحب عامل بناء لوحًا خشبيًّا طوله 5 m إلى الأعلى بجانب مبنى لم يكتمل إنشاؤه بعدُ، وذلك باستعمال حبل رُبِط به أحد طرفي اللوح كما في الشكل المجاور. إذا افترضْتُ أنَّ الطرف الآخر من لوح الخشب يتبع مسارًا عموديًّا على جدار المبنى، وأنَّ العامل يسحب الحبل بمُعدَّل 0.15 m/s، بحيث يظلُّ الطرف العلوي من اللوح مُلامِسًا للجدار. فما سرعة انزلاق طرف اللوح على الأرض عندما يكون على بُعْد 3 m من جدار المبنى؟



آلات: يسقط الرمل من حزام ناقل بمُعدَّل $10\ m^3/min$ على قِمَّة كَوْمة مخروطية الشكل. إذا كان ارتفاع الكَوْمة يساوي دائمًا ثلاثة أثمان طول قُطْر قاعدتها، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

12 سرعة تغير ارتفاع الكَوْمة عندما يكون ارتفاعها $4\ m$.

13 سرعة تغيُّر طول نصف قُطْر قاعدة الكَوْمة عندما يكون ارتفاعها $4\ m$.



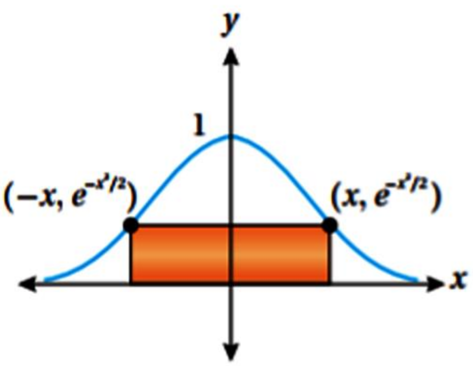
المسافة بالكيلومتر

طيران: رصد مُراقِب الحركة الجوية في أحد المطارات طائرتين تُحلِّقان على الارتفاع نفسه، وتقتربان من نقطة التقاء مسار حركتيهما في زاوية قائمة كما في الشكل المجاور. كانت إحدى الطائرتين تبعد مسافة $225\ km$ عن النقطة، وتسير بسرعة $450\ km/h$، في حين كانت الطائرة الأُخرى تبعد مسافة $300\ km$ عن النقطة، وتسير بسرعة $600\ km/h$:

14 أجد مُعدَّل تغيُّر المسافة بين الطائرتين في تلك اللحظة.

15 هل يجب على مُراقِب الحركة الجوية توجيه إحدى الطائرتين لاتِّخاذ مسار مختلف؟ أُبرِّر إجابتي.

16 **درّاجات نارية:** تحرَّكت درّاجتان في الوقت نفسه، ومن النقطة نفسها، على طريقين مستقيمين، قياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{3}$. إذا كانت سرعة الدرّاجة الأولى $15\ km/h$، وسرعة الدرّاجة الثانية $20\ km/h$، فأجد سرعة ابتعاد كلٍّ منهما عن الأُخرى بعد ساعتين من انطلاقهما.

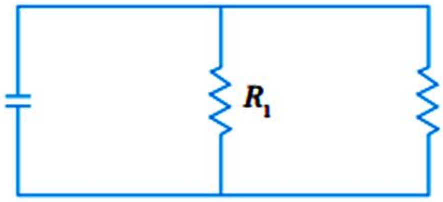


يُبيِّن الشكل المجاور مستطيلًا مرسومًا داخل منحنى الاقتران $f(x) = e^{-x^2/2}$، إذا كانت x تتغير مع الزمن ليتغير معها موضع المستطيل، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

17 أجد مساحة المستطيل بدلالة x.

18 أجد مُعدَّل تغيُّر مساحة المستطيل عندما $x = 4$، و $\frac{dx}{dt} = 4\ cm/min$.

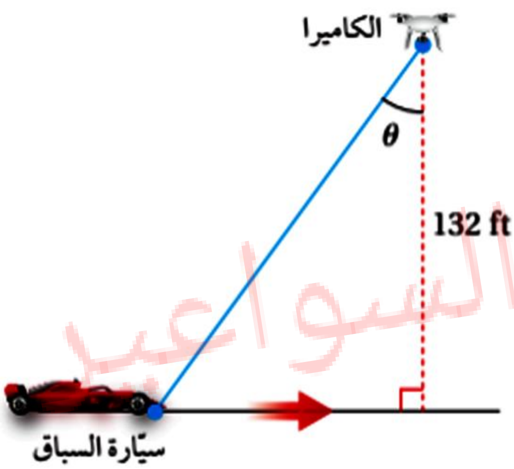
الأستاذ محمد السواعير



19 **كهرباء:** تعطى المقاومة المكافئة R بالأوم (Ω) للمقاومتين R_1 و R_2 الموصولتين على التوازي، كما في الشكل المجاور، بالعلاقة الآتية: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

إذا كانت R_1 و R_2 تزدادان بمُعدَّل $0.3\ \Omega/s$ و $0.2\ \Omega/s$ على الترتيب، فأجد مُعدَّل تغيُّر R عندما $R_1 = 80\ \Omega$، و $R_2 = 100\ \Omega$.

20 **قوارب:** يسحب جمال قاربه إلى رصيف الاصطفاف باستعمال بكرة سحب ترتفع 1 m عن مُقدِّمة القارب. إذا طوت البكرة حبل السحب بسرعة 1 m/s، وكان القارب يبعد عن الرصيف مسافة 8 m في لحظة ما، فما سرعة اقتراب القارب من الرصيف عندئذٍ؟



سباقات سيّارات: ترتفع كاميرا عن الأرض مسافة 132 ft، وترصد سيّارة تتحرَّك على مضمار سباق، وتبلغ سرعتها 264 ft/s كما في الشكل المجاور:

21 أجد سرعة تغيُّر الزاوية θ عندما تكون السيّارة أسفل الكاميرا تمامًا.

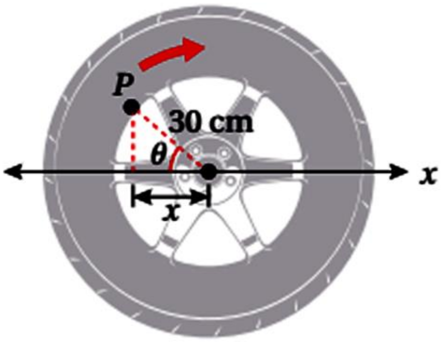
22 أجد سرعة تغيُّر الزاوية θ بعد نصف ثانية من مرور السيّارة أسفل الكاميرا.

الأستاذ محمد السواعير

23 **فيزياء:** يتحرَّك جُسَيْم على منحنى الاقتران $f(x) = 2\sin\frac{\pi x}{2}$. وعند مروره بالنقطة $(\frac{1}{3}, 1)$، فإنَّ الإحداثي x لموقعه يزداد بمُعدَّل $\sqrt{10}$ cm/s. أجد مُعدَّل تغيُّر المسافة بين الجُسَيْم ونقطة الأصل في هذه اللحظة.

24 **ضوء:** مصباح مُثبَّت بالأرض، وهو يضيء على جدار يبعد عنه مسافة 12 m. إذا سار رجل طوله 2 m من موقع المصباح إلى الجدار بسرعة 1.6 m/s، فأجد مُعدَّل تغيُّر طول ظلّه على الجدار عندما يكون على بُعْد 4 m من الجدار.

سيّارات: عجلة سيّارة طول نصف قُطْرها 30 cm، وهي تدور بمُعدَّل 10 دورات في الثانية. رُسِمت النقطة P على حافة العجلة كما في الشكل المجاور:



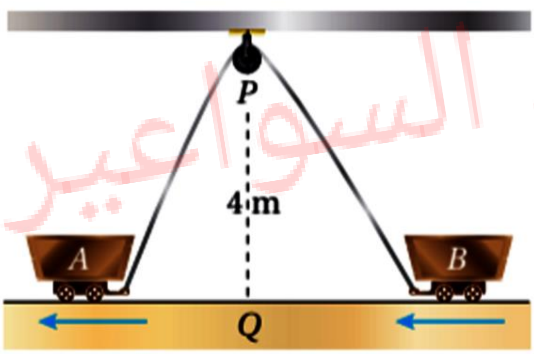
25 أجد $\frac{dx}{dt}$ بدلالة θ.

26 أجد $\frac{dx}{dt}$ عندما $\theta = 45°$.

27 مدينة ألعاب: عجلة دوّارة في مدينة الألعاب، طول نصف قُطْرها 10 m، وهي تدور بمُعدَّل دورة واحدة كل دقيقتين. أجد سرعة تغيُّر ارتفاع راكب فيها عندما يكون على ارتفاع 16 m فوق سطح الأرض.

تنبيه: أجد جميع الحلول المُمكِنة

مهارات التفكير العليا



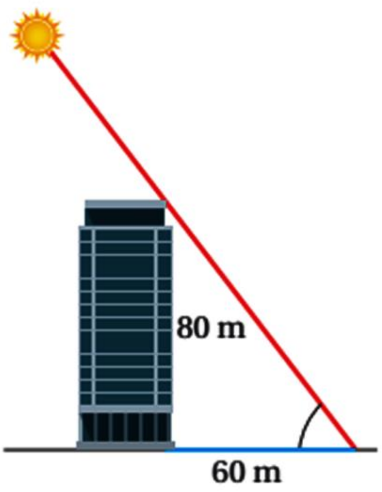
28 تبرير: رُبِطت العربتان A و B بحبل طوله 12 m، وهو يمرُّ بالبكرة P كما في الشكل المجاور. إذا كانت النقطة Q تقع على الأرض بين العربتين أسفل P مباشرة، وتبعد عنها مسافة 4 m، وكانت العربة A تتحرَّك بعيدًا عن النقطة Q بسرعة 0.5 m/s، فأجد سرعة اقتراب العربة B من النقطة Q في اللحظة التي تكون فيها العربة A على بُعْد 3 m من النقطة Q، مُبرِّرًا إجابتي.

29 تبرير: يركض عَدّاء في مضمار دائري، طول نصف قُطْره 100 m، بسرعة ثابتة مقدارها 7 m/s، ويقف عَدّاء آخر على بُعْد 200 m من مركز مضمار الركض. أجد مُعدَّل تغيُّر المسافة بين العَدّاءين عندما تكون المسافة بينهما 200 m.

تنبيه: أجد جميع الحلول المُمكِنة

الأستاذ محمد السواعير

30 **تحدٍّ:** سطعت الشـــمس في أحد الأيام فوق مبنى ارتفاعه 80 m، فــكان طول ظلِّ المبنى فــي هذه اللحظة 60 m كما في الشــكل المجاور. أجد مُعدَّل تغيُّر طول ظلِّ المبنى في هذه اللحظة بوحدة cm/min، مُقرِّبًــا إجابتي إلى أقرب جزء من عشــرة، علمًا بأنَّ الشمس في هذا اليوم ستمرُّ فوق المبنى تمامًا.



إرشاد: تُكمِل الأرض دورة كاملة حول نفسها كل 24 ساعة.

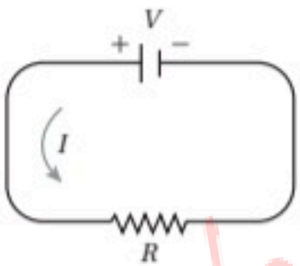
الأستاذ محمد السواعير

الدرس 1

المُعدَّلات المرتبطة
Related Rates

مُلِئَ بالون كروي بالهيليوم بمُعدَّل $8\ \text{cm}^3/\text{s}$. أجد مُعدَّل تغيُّر نصف قُطْر البالون في كلٍّ من الحالات الآتية:

1. عندما يكون طول نصف قُطْره 12 cm.
2. عندما يكون حجمه $1435\ \text{cm}^3$ (أُقرِّب إجابتي إلى أقرب جزء من مئة).
3. إذا مُلِئَ مدَّة 33.5 s.

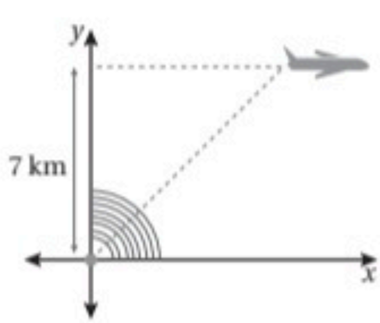


4. تُمثِّل المعادلة: $V = IR$ جُهْد الدارة الكهربائية (بالفولت) المُبيَّنة في الشكل المجاور، حيث I شِدَّة التيار بالأمبير، وR المقاومة بالأوم. إذا كان جُهْد الدارة يزداد بمُعدَّل 1 volt/sec، وشِدَّة التيار تقل بمُعدَّل $\frac{1}{3}$ amp/sec، فأجد مُعدَّل تغيُّر R عندما $V = 12$، و$I = 2$.

الأستاذ محمد السواعير

إذا كانت θ الزاوية المحصورة بين الضلعين اللذين طول كلٍّ منهما s في مثلث متطابق الضلعين، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

5. أُثبِت أنَّ مساحة المثلث تعطى بالمعادلة: $A = \frac{1}{2}s^2 \sin\theta$.
6. إذا كانت الزاوية θ تزداد بمُعدَّل $\frac{1}{2}$ rad/min، فأجد مُعدَّل تغيُّر مساحة المثلث عندما $\theta = \frac{\pi}{6}$، علمًا بأنَّ طول الضلعين المتطابقين ثابت.
7. يتحرَّك جُسَيْم على منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{10}{1+x^2}$. إذا كان مُعدَّل تغيُّر الإحداثي x هو 3 cm/s، فأجد مُعدَّل تغيُّر الإحداثي y عندما $x = 20$.



8. حلَّقت طائرة على ارتفاع 7 km، ومرَّت في أثناء تحليقها مباشرة فوق رادار كما في الشكل المجاور. وعندما أصبح البُعْد بينها وبين الرادار 10 km، رصد الرادار مُعدَّل تغيُّر البُعْد بينه وبين الطائرة، فكان 300 km/h. أجد سرعة الطائرة في هذه اللحظة.

الدرس الثاني

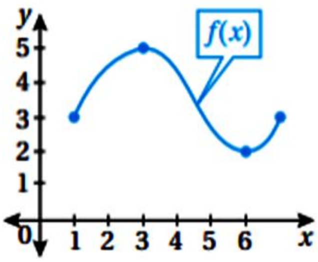
القيم القصوى و التقعر

Extreme Values and Concavity

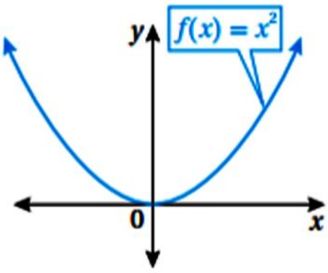
مثال 1

أجد القِيَم القصـــوى المحلية والقِيَم القصوى المُطلَقة (إنْ وُجِــدت) للاقتران المعطى تمثيله البياني في كلٍّ ممّا يأتي:

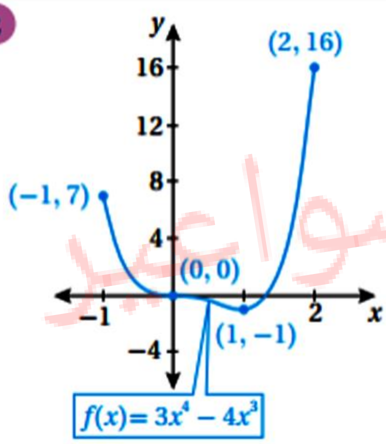
1



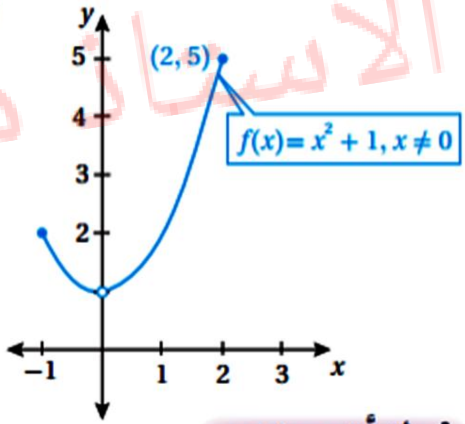
3



2



4

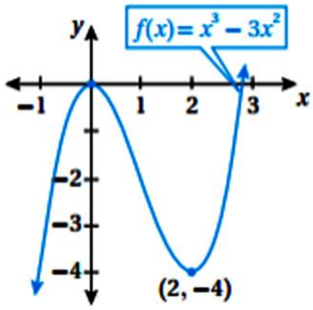


الأستاذ محمد السواعير

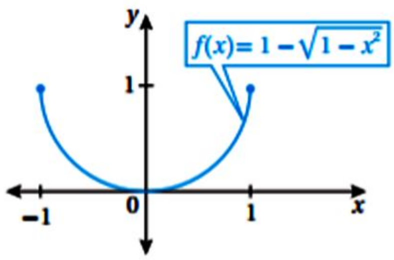
أتحقّق من فهمي

أجد القِيَم القصـــوى المحلية والقِيَم القصوى المُطلَقة (إنْ وُجِــدت) للاقتران المعطى تمثيله البياني في كلٍّ ممّا يأتي:

a)



b)



مثال 2

أجد القيمة العظمى المُطلَقة والقيمة الصغرى المُطلَقة (إنْ وُجِدت) لكل اقتران ممّا يأتي في الفترة المعطاة:

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2, [-2, 2]$

2) $f(x) = x^{2/3}, [-1, 2]$

3) $f(x) = 2\sin x - \cos 2x, [0, 2\pi]$

أتحقَّق من فهمي

أجد القيمة العظمى المُطلَقة والقيمة الصغرى المُطلَقة (إنْ وُجِدت) لكل اقتران ممّا يأتي في الفترة المعطاة:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5, [-3, 5]$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x}, [-8, 8]$

c) $f(x) = \sin^2 x + \cos x, [0, 2\pi]$

مثال 3

أجد القِيَم القصوى المحلية (إنْ وُجِدت) للاقتران: $f(x) = (x^2 - 3)\, e^x$.

أتحقَّق من فهمي

أجد القِيَم القصوى المحلية (إنْ وُجِدت) للاقتران: $f(x) = (x - 1)e^x$

مثال 4

أجد القِيَم القصوى المحلية والقِيَم القصوى المُطلَقة (إنْ وُجِدت) للاقتران: $f(x) = (x^2 - 4)^{2/3}$

الأستاذ محمد السواعير

أتحقَّق من فهمي

أجد القِيَم القصوى المحلية والقِيَم القصوى المُطلَقة (إنْ وُجِدت) للاقتران: $f(x) = \sqrt[3]{x - 3}$

مثال 5

أجد فترات التقعُّر للأعلى وللأسفل ونقاط الانعطاف (إنْ وُجِدت) لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = e^{-x^2/2}$

2) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

أتحقَّق من فهمي

أجد فترات التقعُّر للأعلى وللأسفل ونقاط الانعطاف (إنْ وُجِدت) لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = (x - 2)^3 (x - 1)$

b) $f(x) = \frac{x}{x - 1}$

مثال 6

إذا كان: $f(x) = (x^2 - 4)^2$، فأستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القِيَم القصوى المحلية للاقتران f.

أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $f(x) = xe^x$، فأستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القِيَم القصوى المحلية للاقتران f.

مثال 7

يُمثِّل الاقتران $s(t) = 3t^2 - 2t^3, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

1) ما الفترات الزمنية التي يتحرَّك فيها الجسم في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب؟

2) ما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة؟ وما الفترات التي تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهة؟

أتحقَّق من فهمي

يُمثِّل الاقتران $s(t) = t^3 - 3t + 3, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

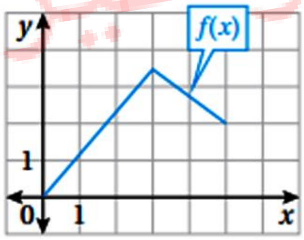
a) ما الفترات الزمنية التي يتحرَّك فيها الجسم في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب؟

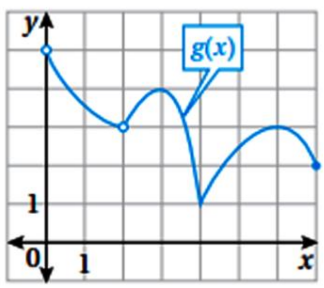
b) ما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة؟ وما الفترات التي تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهة؟

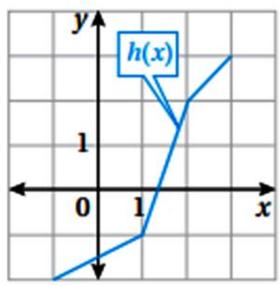
الأستاذ محمد السواعيد

أتدرَّب وأحُلّ المسائل

أجد القِيَم الحرجة والقِيَم القصوى المحلية والمُطلَقة (إنْ وُجِدت) للاقتران المُمثَّل بيانيًّا في كلٍّ ممّا يأتي:

1) 

2) 

3) 

أجد القيمة العظمى المُطلَقة والقيمة الصغرى المُطلَقة (إنْ وُجِدت) لكل اقتران ممّا يأتي في الفترة المعطاة:

4) $f(x) = 1 + 6x - 3x^2, [0, 4]$

5) $f(x) = (x+3)^{2/3} - 5, [-3, 3]$

6) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}, [-2, 2]$

7) $f(x) = \sqrt[3]{x}, [8, 64]$

8) $f(x) = 2\cos x + \sin 2x, [0, \frac{\pi}{2}]$

9) $f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}, [0, 3]$

10) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}, [\frac{1}{2}, 4]$

11) $f(x) = \sec x, [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$

12) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}, [-2, 2]$

أجـد فترات التزايد وفترات التناقـص لكل اقتران ممّا يأتي، ثم أجد القِيَم القصوى المحليـة والمُطلَقة (إنْ وُجِدت) لكل اقتران ممّا يأتي:

13) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 135$

14) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 9}$

15) $f(x) = x^2 \ln x$

16) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$

17) $f(x) = x^{2/3}(x-3)$

18) $f(x) = \sin^2 x + \sin x, [0, 2\pi]$

19) $f(x) = x + \sin x , [0, 2\pi]$

أجد فترات التقعُّر للأعلى وللأسفل ونقاط الانعطاف (إنْ وُجِدت) لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي:

20) $f(x) = x^3 - 12x + 1$

21) $f(x) = \sqrt{\sin x}, [0, \pi]$

22) $f(x) = \frac{3}{x^2 + 1}$

23) $f(x) = \ln(x^2 + 5)$

24) $f(x) = \sqrt{x}(x + 3)$

25) $f(x) = xe^x$

أجد القِيَم القصوى المحلية لكل اقتران ممّا يأتي، مُستعمِلًا اختبار المشتقة الثانية (إنْ أمكن):

26) $f(x) = 6x - x^2$

27) $f(x) = \cos x - x, [0, 4\pi]$

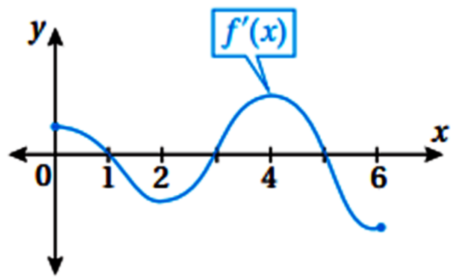
28) $f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$

29) $f(x) = x \ln x$

30) $f(x) = \frac{x}{2^x}$

31) $f(x) = x^{2/3} - 3$

الأستاذ محمد السواعير



أستعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f'(x)$ لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي:

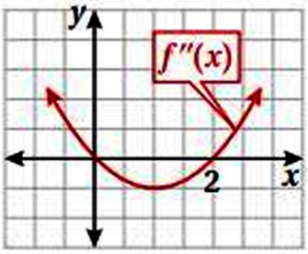
32) قِيَـم x التي يكـون عندها للاقتران f قِيَم قصـوى محلية، مُبيِّنًا نوعها.

33) فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران f.

34) إذا كان للاقتـران: $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ قيمـة عظمى محلية عندمـا $x = -3$، وقيمة صغرى محلية عند النقطة $(1, -14)$، فأجد قيمة كلٍّ من الثوابت: a، وb، وc.

35) إذا كان للاقتران: $f(x) = \sqrt{x + 1} + \frac{b}{x}$ نقطة انعطاف عندما $x = 3$، فأجد قيمة الثابت b.

أستعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f''(x)$ لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي:

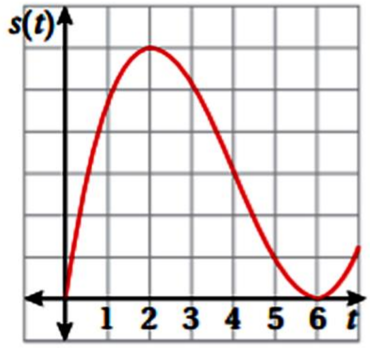


36 فترات التقعُّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران f.

37 الإحداثي x لنقاط انعطاف منحنى الاقتران f.

38 ضغـــط دم: يُمثِّل الاقتران: $B(x) = 305x^2 - 1830x^3, 0 \leq x \leq 0.16$ ضغط الــدم المَقيس بوحــدة mmgh، والناتج من تنــاول جرعة دواء مقدارها $x\ cm^3$. أجد الحدَّ الأقصى لضغـــط الدم الناتج من هذا الدواء، مُحدِّدًا جرعة الدواء التي يحدث عندها.

يُمثِّل الاقتران $s(t)$ المُبيَّن منحناه في الشكل المجاور موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني:



39 أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون.

40 ما الفترات الزمنية التي يتحرَّك فيها الجســم في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب؟

41 إذا كان تسارع الجســم صفرًا عندما $t = 4$، فما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة؟ وما الفترات التي تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهة؟

الأستاذ محمد السواعير

42 مُكبِّرات صــوت: يُمثِّل الاقتران: $f(x) = \dfrac{1500}{x^2 - 6x + 10} - 150$ الربح الأســبوعي (بالدينار) لأحد المصانع من إنتاجه، حيث x عدد مُكبِّرات الصوت المَبيعة. أجد عدد مُكبِّرات الصوت الذي يُحقِّق أكبر ربح مُمكِن.

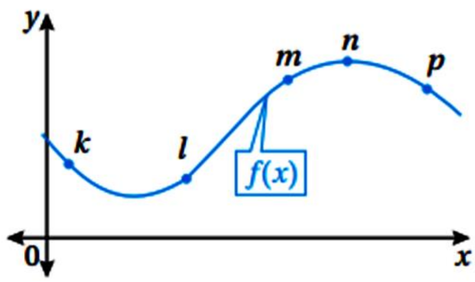
يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^3 - 5t^2 + 4t, t \geq 0$ موقع جســم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني:

43 ما الفترات الزمنية التي يتحرَّك فيها الجسم في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب؟

44 ما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة؟ وما الفترات التي تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهة؟

مهارات التفكير العليا

تبرير: يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)$. أُحدِّد النقطة (النقاط) من بين مجموعة النقاط: $\{k, l, m, n, p\}$ على منحنى الاقتران التي تُحقِّق كُلًّا من الشروط الآتية، مُبرِّرًا إجابتي:

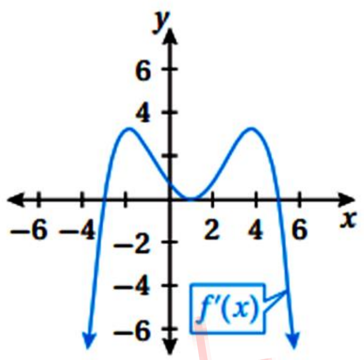


45 أنْ تكون إشارة كلٍّ من $f'(x)$ و $f''(x)$ موجبة.

46 أنْ تكون إشارة كلٍّ من $f'(x)$ و $f''(x)$ سالبة.

47 أنْ تكون إشارة $f'(x)$ سالبة، وإشارة $f''(x)$ موجبة.

تبرير: أستعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f'(x)$ لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي، مُبرِّرًا إجابتي:



48 قِيَم x التي يكون عندها للاقتران f قِيَم قصوى محلية، مُبيِّنًا نوعها.

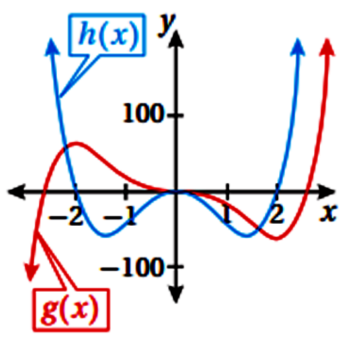
49 فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران f.

50 فترات التقعُّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران f.

51 الإحداثي x لنقاط الانعطاف.

الأستاذ محمد السواعير

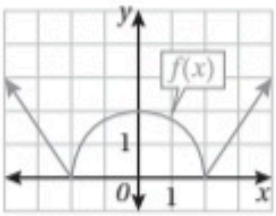
52 **تحدٍّ:** أستعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنيي الاقترانين $h(x)$ و $g(x)$ لتحديد الاقتران الذي يُمثِّل مشتقة للآخر، مُبرِّرًا إجابتي.



53 **تحدٍّ:** إذا كان a و b عددين حقيقيين موجبين، فأجد القيمة العظمى المُطلَقة للاقتران: $f(x) = x^a (1 - x)^b$ في الفترة $[0, 1]$.

الدرس 2

القِيَم القصوى والتقعُّر
Extreme Values and Concavity



1 أجد القِيَم الحرجة والقِيَم القصوى المحلية والمُطلَقة (إنْ وُجِدت) للاقتران $f(x)$ المُمثَّل بيانيًّا في الشكل المجاور.

أجد القيمة العظمى المُطلَقة والقيمة الصغرى المُطلَقة (إنْ وُجِدت) لكل اقتران ممّا يأتي في الفترة المعطاة:

2 $f(x) = 1 + \cos^2 x, [\frac{\pi}{4}, \pi]$

3 $f(x) = (x^2 - 4)^3, [-2, 3]$

4 $f(x) = x - 2\sin x, [-2\pi, 2\pi]$

5 $f(x) = x\ln(x+3), [0, 3]$

6 $f(x) = x + \frac{4}{x}, [-8, -1]$

7 $f(x) = 5e^x - e^{2x}, [-1, 2]$

الأستاذ محمد السواعير

أجد فترات التزايد وفترات التناقص، ثم أجد القِيَم القصوى المحلية (إنْ وُجِدت) لكل اقتران ممّا يأتي:

8 $f(x) = \sin x + \cos x, [0, 2\pi]$

9 $f(x) = \frac{x}{x-5}$

10 $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

11 $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 4)$

12 $f(x) = e^{-x^2}$

13 $f(x) = 2^{x^2 - 3}$

أجد فترات التقعُّر إلى الأعلى وإلى الأسفل ونقاط الانعطاف (إنْ وُجِدت) لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي:

14 $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 12$

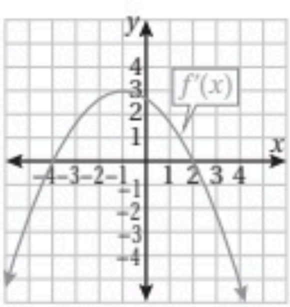
15 $f(x) = x^6 - 3x^4$

16 $f(x) = (2 + 2x - x^2)^2$

17 $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$

18 $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$

19 $f(x) = 2x - \tan x, (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$



أستعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f'(x)$ لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي:

20 قِيَم x التي يكون عندها للاقتران f قِيَم قصوى محلية، مُبيِّنًا نوعها.

21 فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران f.

أجد القِيَم القصوى المحلية لكل اقتران ممّا يأتي، مُستعمِلًا اختبار المشتقة الثانية (إنْ أمكن):

22 $f(x) = 2\sin x + \cos 2x, [0, 2\pi]$

23 $f(x) = x^3 + \frac{48}{x}$

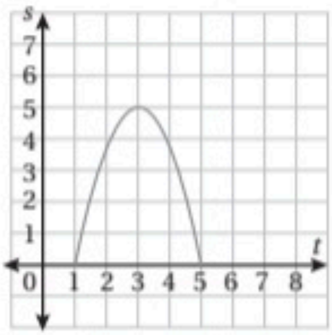
24 $f(x) = (x^2 - 3)e^x$

الدرس 2

يتبع

القِيَم القصوى والتقعُّر
Extreme Values and Concavity

25 إذا كان للاقتـــران: $f(x) = ax^2 + bx + c$ قيمـــة عظمى محلية عند النقطة $(3, 12)$، وقطع المحور y في النقطة $(0, 1)$، فأجد قيمة كلٍّ من الثوابت: a، وb، وc.



يُمثِّل الاقتران $s(t)$ المُبيَّن منحناه في الشكل المجاور موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني:

26 أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون.

27 ما الفترات الزمنية التي يتحرَّك فيها الجسم في الاتجاه الموجب؟ وما الفترات الزمنية التي يتحرَّك فيها الجسم في الاتجاه السالب؟

28 ما الفترات الزمنية التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة؟ وما الفترات الزمنية التي تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهة؟

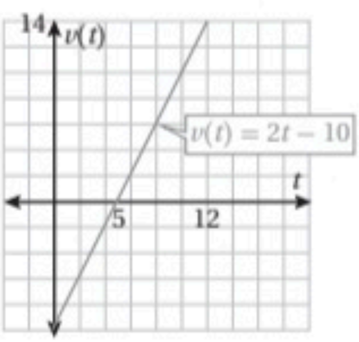
الأستاذ محمد السواعير

إذا كان الاقتران: $f(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$، فأُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

29 إذا كان لمنحنى الاقتران f مماس أفقي عند كلٍّ من النقطة $(-2, -73)$ والنقطة $(0, -9)$، فأجد قيمة كلٍّ من الثوابت: a، وb، وc، وd.

30 إذا وُجِدت نقطة ثالثة على منحنى الاقتران لها مماس أفقي، فأجد إحداثيي هذه النقطة.

31 أُصنِّف كُلًّا من النقاط الثلاث إلى صغرى محلية، وعظمى محلية (إنْ أمكن).



يُمثِّل الاقتران $v(t)$ المُبيَّن منحناه في الشكل المجاور السرعة المتجهة لجسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث v السرعة المتجهة بالمتر لكل ثانية، وt الزمن بالثواني:

32 أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون.

33 ما الفترات الزمنية التي يتحرَّك فيها الجسم في الاتجاه الموجب؟ وما الفترات الزمنية التي يتحرَّك فيها الجسم في الاتجاه السالب؟

34 ما الفترات الزمنية التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة؟ وما الفترات الزمنية التي تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهة؟

35 إذا كان للاقتران: $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ قيمة قصوى محلية عند النقطة $(2, 11)$، ونقطة انعطاف عندما $x = 1$، فأجد قيمة كلٍّ من الثوابت: a، وb، وc.

الدرس الثالث

تطبيقات القيم القصوى

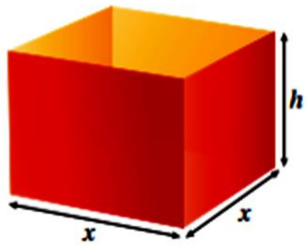
Optimization Problems

مثال 1

صندوق على شكل متوازي مستطيلات، صُنِع من قطعة كرتون رقيقة، مربعة الشكل، طولها 8 dm، وذلك بقطع 4 مربعات متطابقة من زواياها، وطَيِّ الجوانب إلى الأعلى. أجد أبعاد الصندوق ليكون حجمه أكبر ما يُمكِن.

أتحقَّق من فهمي

ترغب شركة في تصميم صندوق مفتوح من الأعلى، وقاعدته مربعة الشكل، ومساحة سطحه الكلية $1080\ cm^2$ كما في الشكل المجاور. أجد أبعاد الصندوق ليكون حجمه أكبر ما يُمكِن.



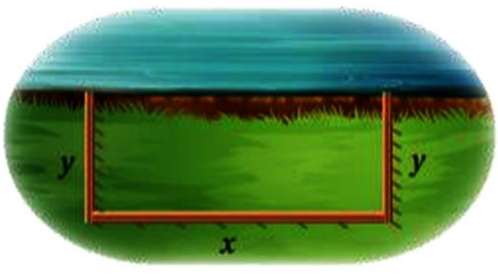
الأستاذ محمد السواعير

مثال 2

عمودان طول أحدهما 8 m، وطول الآخر 4 m، والمسافة بينهما 9 m، وهما مُثبَّتان بسلكين يصلان قِمَّة كل عمود بوتد عند سطح الأرض كما في الشكل المجاور. أجد الموقع المناسب لتثبيت الوتد بين العمودين بحيث يكون طول السلك المُستعمَل أقل ما يُمكِن.

أتحقَّق من فهمي

خطَّط مُزارِع لتسييج حظيرة مستطيلة الشكل قرب نهر كما في الشكل المجاور، وحدَّد مساحة الحظيرة بـ $245000\ m^2$ لتوفير كمية عشب كافية لأغنامه.



أجد أبعاد الحظيرة التي تجعل طول السياج أقل ما يمكن، علمًا بأنَّ الجزء المُقابِل للنهر لا يحتاج إلى تسييج.

مثال 3 : من الحياة

تتدرَّب إسراء وأميرة يوميًّا استعدادًا لسباق العَدْوِ (المارثون). في أحد الأيام، انطلقت إسرا من منزلها الذي يقع على بُعْد 20 km شمال منزل أميرة الساعة 9:00 am، واتَّجَهت جنوبًا بسرعة 8 km/h. وفي الوقت نفسه، انطلقت أميرة في اتجاه الشرق بسرعة 6 km/h. في أيِّ ساعة تكون إسراء وأميرة أقرب ما يُمكِن إلى بعضهما، علمًا بأنَّ كُلًّا منهما ركضت مدَّة 2.5 h؟

أتحقَّق من فهمي

انطلق قطار من إحدى المحطّات الساعة 10:00 am، وتحرَّك في اتجاه الجنوب بسرعة 60 km/h، حيث المحطَّة التالية. وفي الوقت نفسه، انطلق قطار آخر نحو الغرب بسرعة 45 km/h، ثم وصل إلى المحطة نفسها الساعة 11:00 am. في أيِّ ساعة يكون القطاران أقرب ما يُمكِن إلى بعضهما؟

مثال 4 : من الحياة

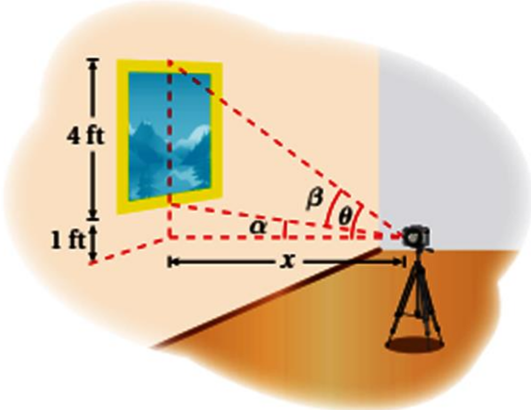
الأستاذ محمد السواعير

لاحظت إدارة أحد المسارح أنَّ مُتوسِّط عدد الحضور لعرض ما هو 1000 شخص إذا كان سعر بيع التذكرة JD 26، وأنَّ عدد الحضور يزيد بمقدار 50 شخصًا مُقابِل كل دينار يُخصَم من سعر التذكرة. إذا كان مُتوسِّط ما يُنفِقه كل شخص JD 4 على الخدمات داخل المسرح، فما سعر بيع التذكرة الذي يُحقِّق للمسرح أعلى إيراد؟

أتحقَّق من فهمي

يبيع متجر 200 شاشة تلفاز شهريًّا بسعر JD 350 للشاشة الواحدة. وقد أشار مسح للسوق أَعَدَّهُ خبير التسويق في المتجر إلى أنَّ عدد الشاشات المَبيعة شهريًّا يزيد بمقدار 20 شاشة عند كل خصم مقداره JD 10 من سعر الشاشة الواحدة. أجد سعر بيع الشاشة الواحدة الذي يُحقِّق للمتجر أعلى إيراد مُمكِن.

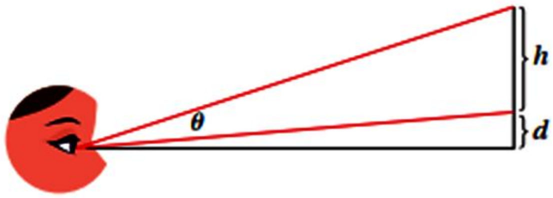
مثال 5 : من الحياة



يريد مُصوِّر التقاط صورة للوحة ارتفاعها 4 ft، وهي مُعلَّقة في معرض فني. إذا كانت عدسة الكاميرا تقع أسفل الحافة السفلية للوحة بمقدار 1 ft كما يظهر في الشكل المجاور، فأجد بُعْد الكاميرا اللازم عن اللوحة لتكون زاوية تصوير عدستها (β) أكبر ما يُمكِن.

أتحقَّق من فهمي

نظرت سارة إلى لوحة مُعلَّقة على حائط في منزلها، ارتفاعها h مترًا، وارتفاع حافتها السفلية d مترًا فوق عينها كما في الشكل المجاور. كم مترًا يجب أنْ تبتعد سارة عن الجدار لتكون زاوية نظرها θ أكبر ما يُمكِن؟



الأستاذ محمد السواعير

مثال 6

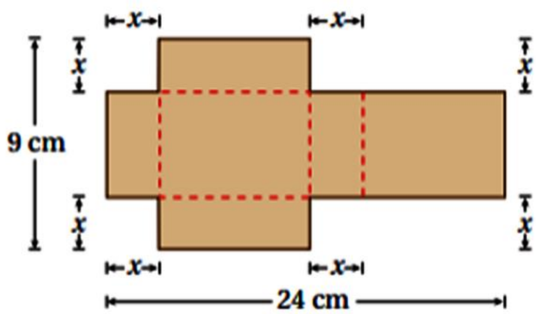
أجد النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران $f(x) = 4 - x^2$، التي هي أقرب ما يُمكِن إلى النقطة $(0, 2)$.

أتحقَّق من فهمي

أجد النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران $f(x) = \sqrt{8x}$، التي هي أقرب ما يُمكِن إلى النقطة $(4, 2)$.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

قطعة كرتون طولها 24 cm، وعرضها 9 cm، أُزيل منها مربعان متطابقان ومستطيلان متطابقان كما في الشكل المجاور، بحيث أمكن طيُّها، وتكوين صندوق له غطاء منها:

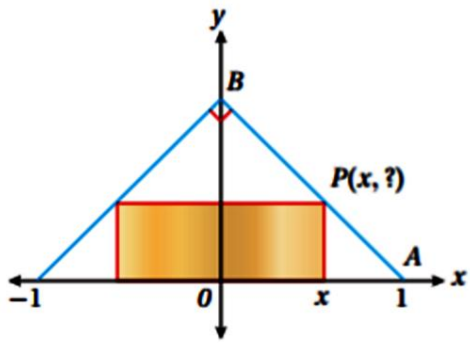


1. أكتب الاقتران $V(x)$ الذي يُمثِّل حجم الصندوق.
2. أُحدِّد مجال الاقتران V.
3. أجد أبعاد الصندوق بحيث يكون حجمه أكبر ما يُمكِن.

4 أجد النقطة الواقعة على منحنى العلاقة: $4x^2 + y^2 = 4$، التي هي أقرب ما يُمكِن إلى النقطة $(0, 1)$.

يُبيِّن الشكل المجاور مستطيلًا مرسومًا داخل مثلث قائم الزاوية.

وهو متطابق الضلعين، وطول قاعدته 2 وحدة طول:

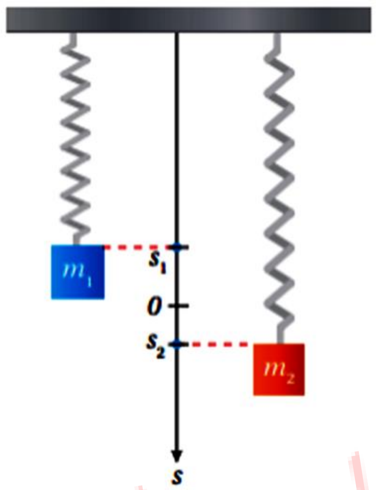


5 أجد الإحداثي y للنقطة P بدلالة x.

6 أكتب مساحة المستطيل بدلالة x.

7 أجد أكبر مساحة مُمكِنة للمستطيل.

8 أجد أبعاد المستطيل.



يُبيِّن الشكل المجاور كتلتين مُعلَّقتين جنبًا إلى جنب في زنبركين. ويُمثِّل الاقتران $s_1 = 2\sin t$ والاقتران $s_2 = \sin 2t$ موقعي الكتلتين على الترتيب، حيث s_1 و s_2 الموقعان بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

9 أجد قيمة (قِيَم) t التي تكون عندها الكتلتان في الموقع نفسه، حيث: $t > 0$.

10 أجد قيمة (قِيَم) t التي تكون عندها المسافة الرأسية بين الكتلتين أكبر ما يُمكِن، حيث: $0 \leq t \leq 2\pi$.

يُمثِّل الاقتران $p = 150 - 0.5x$ سعر البدلة الرجالية الذي حدَّدته إحدى الشركات، حيث x عدد البدلات المَبيعة. ويُمثِّل الاقتران $C(x) = 4000 + 0.25x^2$ تكلفة إنتاج x بدلة:

11 أجد اقتران الإيراد.

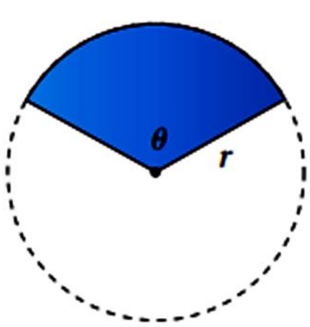
12 أجد اقتران الربح.

13 أجد عدد البدلات اللازم بيعها لتحقيق أكبر ربح مُمكِن، ثم أجد أكبر ربح مُمكِن.

14 أجد سعر البدلة الواحدة الذي يُحقِّق أعلى ربح مُمكِن.

15 تُنتِج مزرعة للتفّاح 30 صندوقًا من الشجرة الواحدة تقريبًا عند زراعة 20 شجرة في كل فَدّان من الأرض. ويقل إنتاج الشجرة الواحدة بمقدار صندوق عند زراعة شجرة إضافية في كل فَدّان بسبب قرب الأشجار الشديد بعضها من بعض. ما عدد الأشجار التي يجب زراعتها في كل فَدّان لتحقيق أكبر إنتاج مُمكِن؟

الأستاذ محمد السواعير

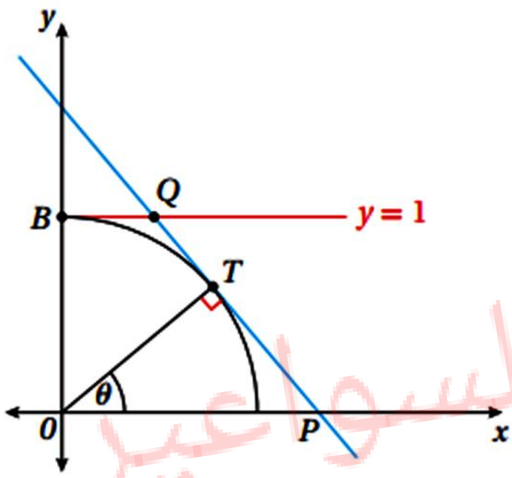


لدى مُزارِع P مترًا طوليًّا من سياج، يرغب في استعماله كاملًا لتسييج حقل رَعْي على شــكل قطاع دائري، زاويته θ بالراديان، في دائرة نصف قُطْرها r مترًا كما في الشكل المجاور:

16 أُثبِت أنَّ طول السياج اللازم إحاطة الحقل به هو: $P = r(\theta + 2)$.

17 أُثبِت أنَّ مساحة القطاع هي: $A = \frac{1}{2}Pr - r^2$.

18 أجد نصف قُطْر القطاع بدلالة P الذي تكون عنده مساحة الحقل أكبر ما يُمكِن.



تقــع النقطة T على دائــرة الوحدة التي معادلتهــا: $x^2 + y^2 = 1$، عند الزاوية θ من المحور x الموجب، حيث: $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ كما في الشكل المجاور:

19 أُثبِت أنَّ معادلة المستقيم PT هي:

$$x\cos\theta + y\sin\theta = 1$$

20 أُثبِت أنَّ مساحة شبه المُنحرِف $OBQP$ تعطى بالاقتران الآتي:

$$A = \frac{2 - \sin\theta}{2\cos\theta}$$

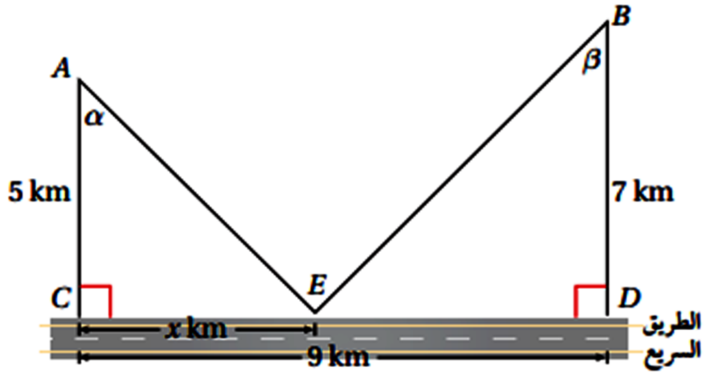
21 أجد قياس الزاوية θ الذي تكون عنده مساحة شبه المُنحرِف أقل ما يُمكِن.

الأستاذ محمد السواعير

22 يُبيِّن الشـكل المجاور نافذة مُكوَّنة من جزأين؛ أحدهما علوي على شـكل نصف دائرة قُطْرها x m، والآخر سفلي على شكل مستطيل عرضه x m وارتفاعه y m.

صُنِع الجزء العلوي من زجاج مُلوَّن يسـمح بمـرور 1 وحدة ضوء لكل متر مربع، وصُنِع الجزء السـفلي من زجاج شفّاف يسـمح بمرور 3 وحدات ضوء لكل متر مربـع. أجد قيمة كلٍّ من x و y التي تجعل كميـة الضوء المارِّ خلال النافذة أكبر ما يُمكِن، علمًا بأنَّ 10 m من المعدن الرقيق استُعمِل في تشكيل إطار النافذة كاملًا، بما في ذلك القطعة الفاصلة بين الجزأين.

يُمارِس يوسف هواية ركوب الدرّاجات. وفي أحد الأيام، انطلق على درّاجته من البيت عند النقطة A إلى المدرسة عند النقطة B، مارًّا بالنقطة E الواقعة على حافة الطريق السريع كما في الشكل المجاور:

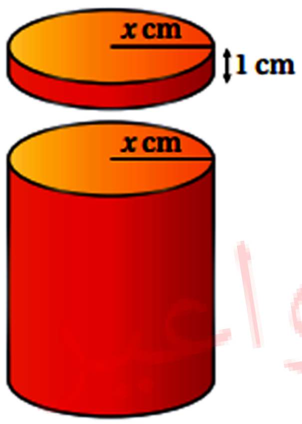


23 إذا كان الاقتران L يُمثِّل المسافة التي يقطعها يوسف من البيت إلى المدرسة، فأكتب L بدلالة x.

24 أُثبِت أنّه إذا كان: $\frac{dL}{dx} = 0$، فإنَّ: $\sin\alpha = \sin\beta$.

25 أجد قيمة x التي تجعل المسافة التي يقطعها يوسف أقل ما يُمكِن.

علبة بسكويت أسطوانية الشكل، لها غطاء مُحكَم يتداخل مع العلبة بمقدار 1 cm كما في الشكل المجاور. إذا كان نصف قُطْر العلبة والغطاء x cm، وصُنِعت العلبة والغطاء من صفيحة رقيقة مُلائِمة للأغذية، مساحتها $80\pi \text{ cm}^2$ من دون أيِّ هدر في المواد في أثناء عملية التصنيع:



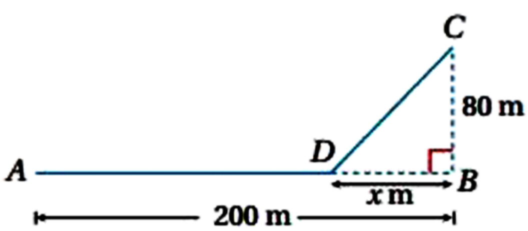
26 أجد قيمة x التي تجعل حجم العلبة أكبر ما يُمكِن.

27 أجد أكبر حجم مُمكِن للعلبة.

28 أجد النسبة المئوية للجزء الذي استُعمِل من الصفيحة لصنع الغطاء عندما كان الحجم أكبر ما يُمكِن.

يمتدُّ مسار للركض شرقًا من النقطة A إلى النقطة B مسافة 200 m، وتقع النقطة C على بُعْد 80 m شمال النقطة B.

انطلق راكب على درّاجة من النقطة A إلى النقطة D بسرعة 10 m/s، حيث تقع النقطة D على بُعْد x مترًا غرب النقطة B، ثم سار في طريق مستقيم وَعِر من النقطة D إلى النقطة C بسرعة 6 m/s:



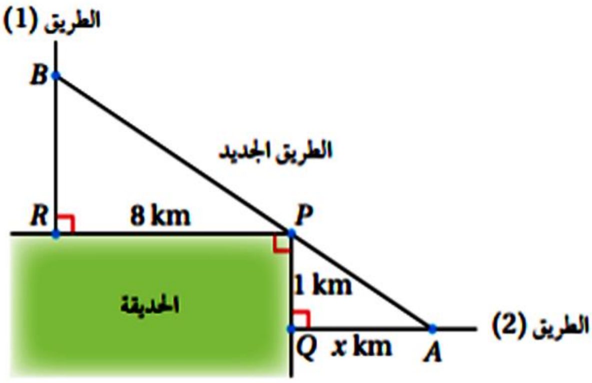
29 أجد اقترانًا بدلالة x يُمثِّل الزمن الذي سيستغرقه راكب الدرّاجة في الانتقال من النقطة A إلى النقطة C.

30 بافتراض أنَّ x قيمة مُتغيِّرة، أجد قيمة x التي يكون عندها الزمن اللازم للانتقال من النقطة A إلى النقطة C أقل ما يُمكِن.

الأستاذ محمد السوالمة

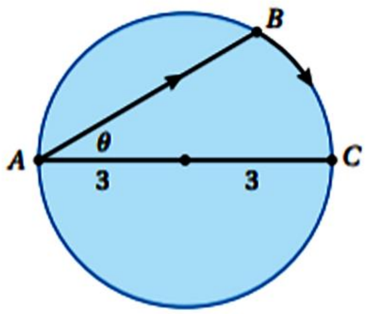
31 يُبيِّن الشــكل المجاور مدخلين لحديقة عامة عند النقطة R والنقطة Q، ويُمكِن الوصول إلى هذين المدخلين مــن طريقين عموديين على ضلعي الحديقة. أرادت البلدية إنشــاء طريق جديد يصل بين الطريقين القديمين، ويمرُّ بالنقطة P التي تُمثِّل زاوية الحديقــة، فاختارت النقطــة A والنقطة B على الطريقين ليكون طول الطريق الجديد أقصر مــا يُمكِن، علمًا بأنَّ النقطة A تقع على بُعْد x km من النقطة Q. أجد قيمة x التي تجعل طول الطريق الجديد أقصر

ما يُمكِن.



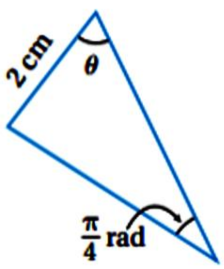
مهارات التفكير العليا

32 تبريــر: يقف رجل عند النقطة A على شــاطئ بحيــرة دائرية نصف قُطْرها 3 km، وهو يريد الوصول إلى النقطة C المقابلة تمامًا للنقطة A، على الجانب الآخر من البحيــرة، في أقصر وقت مُمكِن كما في الشــكل المجاور. يُمكِن للرجل أنْ يَجدِف بزورق من النقطة A إلى النقطة B بســرعة 3 km/h، ثم يركض حول حافة البحيرة بســرعة 6 km/h. أحــدِّد موقــع النقطة B ليصل الرجل مــن النقطة A إلى النقطة C في أقل وقت مُمكِن؟ أُبرِّر إجابتي.



الأستاذ محمد السواعير

تحدٍّ: يُبيِّن الشكل المجاور مثلثًا، قياس إحدى زواياه $\frac{\pi}{4}$ rad، ومُقابِلها ضلع طوله 2 cm:



33 أُثبِت أنَّ مساحة المثلث A تعطى بالاقتران: $A = \sin 2\theta - \cos 2\theta + 1$.

34 أجد مجال الاقتران في السؤال السابق.

35 أُثبِت أنَّ أكبر مساحة مُمكِنة للمثلث هي: $(1 + \sqrt{2})\ \text{cm}^2$.

الدرس 3

تطبيقات القِيَم القصوى
Optimization Problems

1 إذا كان a cm و b cm هما طولي ضلعين ثابتين في مثلث، وكانت الزاوية بينهما θ، فأجد قيمة θ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يُمكِن.

2 ترغب شركة في تصميم خزّان من الفولاذ الرقيق المُقاوِم للصدأ على شكل متوازي مستطيلات، حجمه $500\ m^3$، وقاعدته مربعة الشكل، ومفتوح من الأعلى. أجد الأبعاد التي تجعل مساحة سطح الخزّان أقل ما يُمكِن.

يُمثِّل الاقتران: $s_1 = \sin t$ والاقتران: $s_2 = \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$ موقعي جُسَيْمين يتحرَّكان في مسار مستقيم، حيث s_1 و s_2 الموقعان بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

3 أجد قيمة (قِيَم) t التي يلتقي فيها الجُسَيْمين.

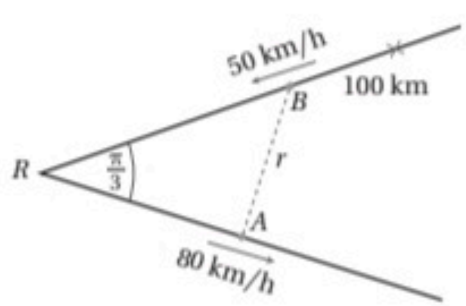
4 أجد أكبر مسافة بين الجُسَيْمين في الفترة الزمنية: $0 \le t \le 2\pi$.

سلك يبلغ طوله 24 cm، ويراد قَصُّه إلى قطعتين لصنع دائرة ومربع:

5 أُحدِّد مكان القَصِّ، بحيث يكون مجموع مساحتي الدائرة والمربع أصغر ما يُمكِن.

6 أُحدِّد مكان القَصِّ، بحيث يكون مجموع مساحتي الدائرة والمربع أكبر ما يُمكِن.

7 يلتقي طريقان مستقيمان عند النقطة R بزاوية قياسها $\frac{\pi}{3}$. إذا انطلقت السيّارة A من النقطة R على أحد الطريقين بسرعة 80 km/h، وفي الوقت نفسه انطلقت السيّارة B بسرعة 50 km/h على الطريق الآخر في اتجاه النقطة R من نقطة تبعد عنها مسافة 100 km، فأجد أقصر مسافة مُمكِنة بين السيّارتين.



اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 مثلث قائم الزاوية، ساقاه x وy، ووتره z. إذا كان: $\frac{dz}{dt} = 1$، وكان: $\frac{dy}{dt} = 3\frac{dx}{dt}$، فإنّ $\frac{dx}{dt}$ عندما $x = 4$، و$y = 3$ هي:

a) $\frac{1}{3}$ b) 1 c) 2 d) 5

2 القيمة العظمى المُطلَقة للاقتران $f(x) = 4x - x^2 + 6$ في الفترة $[0, 4]$ هي:

a) 6 b) 2 c) 10 d) 12

3 الإحداثي x لنقطة انعطاف الاقتران $f(x) = x^5 - 5x^4 + 3x + 7$ هو:

a) 0 b) 1 c) 3 d) -1

4 قيمة x التي تكون عندها قيمة عظمى محلية للاقتران $f(x) = (x-2)(x-3)^2$ هي:

a) 3 b) $-\frac{7}{3}$ c) $-\frac{5}{3}$ d) $\frac{7}{3}$

5 إذا كانت الفترة $[1, 25]$ هي مجال الاقتران المتصل f، الذي مداه $[3, 30]$، وكان: $f'(x) < 0$ لجميع قِيَم x بين 1 و25، فإنّ $f(25)$ تساوي:

a) 1 b) 3 c) 25 d) 30

6 القيمة العظمى (بالوحدات المربعة) لمساحة مثلث قائم الزاوية، طول وتره 10 وحدات، هي:

a) 24 b) 25 c) 48 d) 50

7 إذا زاد حجم مُكعَّب بمُعدَّل $24\ \text{cm}^3/\text{min}$، وزادت مساحة سطحه بمُعدَّل $12\ \text{cm}^2/\text{min}$، فإنَّ طول ضلعه في تلك اللحظة هو:

a) 2 cm b) $2\sqrt{2}$ cm

c) 4 cm d) 8 cm

8 عدد النقاط الحرجة للاقتران: $f(x) = (x-2)^5 (x+3)^4$ هو:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 5

أجد القيمة العظمى المُطلَقة والقيمة الصغرى المُطلَقة (إنْ وُجِدت) لكل اقتران ممّا يأتي في الفترة المعطاة:

9 $f(x) = 3x^2 - 2x^3$, $[-5, 1]$

10 $f(x) = \frac{x}{x+3}$,$[-1, 6]$

11 $f(x) = xe^{x/2}$, $[-3, 1]$

12 $f(x) = 3\cos x$, $[0, 2\pi]$

أجد فترات التزايد وفترات التناقص لكل اقتران ممّا يأتي، ثم أجد القِيَم القصوى المحلية والمُطلَقة (إنْ وُجِدت) لكل اقتران:

13 $f(x) = x^5 + x^3$

14 $f(x) = x^4 e^{-x}$

15 $f(x) = \frac{x^3}{3} - \ln x$

أجد فترات التقعُّر للأعلى وللأسفل ونقاط الانعطاف (إنْ وُجِدت) لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي:

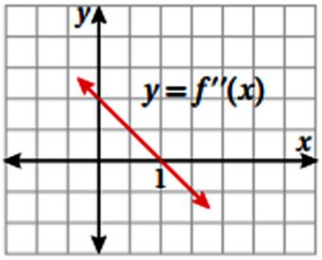
16 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$

17 $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

18 $f(x) = (3 - x^2)^2$

الأستاذ محمد السواعير

أستعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f''(x)$ لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي:



19 فترات التقعُّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران f.

20 الإحداثي x لنقاط انعطاف منحنى الاقتران f.

يُمثِّل الاقتران $p(x) = 5.00 - 0.002x$ سعر مُنتَج في إحدى الشركات، حيث x عدد القطع من المُنتَج. ويُمثِّل الاقتران $C(x) = 3.00 + 1.10x$ تكلفة إنتاج x قطعة من المُنتَج:

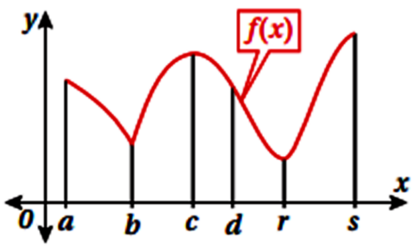
21 أجد اقتران الإيراد.

22 أجد اقتران الربح.

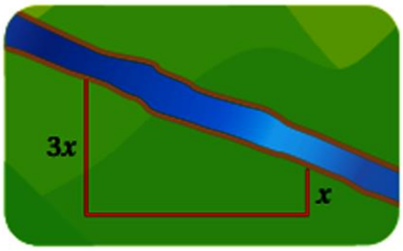
23 أجد عدد القطع اللازم بيعها من المُنتَج لتحقيق أكبر ربح مُمكِن، ثم أجد أكبر ربح مُمكِن.

24 أجد سعر المُنتَج الذي يُحقِّق أكبر ربح مُمكِن.

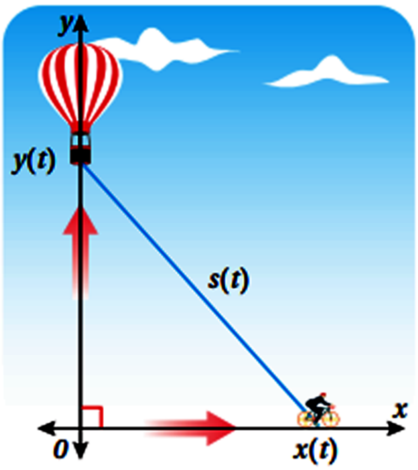
25 يُبيِّن الشكل التالي منحنى الاقتران $f(x)$. أيُّ النقاط الواقعة على المنحنى تُمثِّل نقطة صغرى أو نقطة عظمى محلية؟ أيُّها تُمثِّل قيمة صغرى أو قيمة عظمى مُطلَقة؟



26 لدى مُزارِع 400 m من السياج، وهو يريد تسييج حقله الذي يأخذ شكل شبه مُنحرِف، ويوجد على حافة النهر كما في الشكل التالي. إذا كان طول أحد الضلعين المتوازيين يساوي 3 أمثال طول الضلع الآخر، فأجد أكبر مساحة يُمكِن للمُزارِع أنْ يحيطها بهذا السياج، علمًا بأنَّ الجزء المُقابِل للنهر لا يحتاج إلى تسييج.



27 يرتفع بالون رأسيًّا فوق مستوى طريق مستقيم بمُعدَّل 1 ft/s. وفي اللحظة التي كان فيها البالون على ارتفاع 65 ft فوق سطح الأرض، مَرَّت أسفله درّاجة تتحرَّك بسرعة 17 ft/s كما في الشكل التالي. أجد سرعة تغيُّر المسافة بين البالون والدرّاجة بعد 3 ثوانٍ من هذه اللحظة.



الأستاذ محمد السواعير