الجوكر في الرياضيات

الوحدة الرابعة

التكامل

الفرع الأدبي والفندقي

ا.محمد السواعير

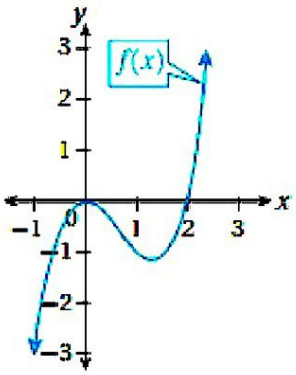
المنهاج الجديد

0787468840

الدرس 1

التكامل غير المحدود
Indefinite Integral

مسألة اليوم



يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)$، هل يُمكِنني تحديد قاعدة الاقتران إذا علمْتُ أنَّ مشتقته هي: $f'(x) = 3x^2 - 4x$؟

مثال 1

أجد اقترانًا أصليًّا لكلٍّ من الاقترانين الآتيين:

1) $f(x) = 6x^5$

2) $f(x) = -3x^{-4}$

أتحقَّق من فهمي

أجد اقترانًا أصليًّا لكلٍّ من الاقترانين الآتيين:

a) $f(x) = 5x^4$

b) $f(x) = -9x^{-10}$

مثال 2

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int 9\,dx$

2) $\int x^{10}\,dx$

3) $\int \sqrt{x}\,dx$

4) $\int \frac{1}{x^3}\,dx$

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int 6\ dx$

b) $\int x^8\ dx$

c) $\int \sqrt[3]{x}\ dx$

d) $\int \frac{1}{x^5}\ dx$

مثال 3

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

1) $\int (6x^2 + 2x)\ dx$

2) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x^5}\right) dx$

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int \left(x^3 - 2x^{5/3}\right) dx$

b) $\int \left(3x^2 - \frac{6}{\sqrt[5]{x}}\right) dx$

مثال 4

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int (x+2)(x-2)\ dx$

2) $\int \frac{8x^3 + 5x}{x}\ dx$

3) $\int x\left(x^2 + \frac{2}{x}\right) dx$

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int \frac{x^4 - 8x^3}{x^2}\ dx$

b) $\int (3x+2)(x-1)\ dx$

c) $\int x\,(x^3 - 7)\ dx$

أتدرّب وأحُلّ المسائل

أجد اقترانًا أصليًّا لكلٍّ من الاقترانات الآتية:

1. $f(x) = x^7$
2. $f(x) = -2x^6$
3. $f(x) = -10$
4. $f(x) = 8x$

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

5. $\int 6x \, dx$
6. $\int (7x - 5) \, dx$
7. $\int (3 - 4x) \, dx$
8. $\int \frac{10}{\sqrt{x}} \, dx$
9. $\int 2x^{3/2} \, dx$
10. $\int (2x^4 - 5x + 10) \, dx$
11. $\int (2x^3 - 2x) \, dx$
12. $\int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \sqrt{x^3} \right) dx$
13. $\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) dx$

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

14. $\int \frac{4x^3 - 2}{x^3} \, dx$
15. $\int \frac{2x + 8}{\sqrt{x}} \, dx$
16. $\int (x - 1)^2 \, dx$
17. $\int \frac{x^3 + 8}{x + 2} \, dx$
18. $\int \sqrt{x}(x - 1) \, dx$
19. $\int (2x - 3)(3x - 1) \, dx$

مهارات التفكير العليا

20. أكتشف الخطأ: أوجدت رنيم ناتج التكامل: $\int (2x + 1)(x - 1) \, dx$، وكان حَلُّها على النحو الآتي:

$$\int (2x + 1)(x - 1) \, dx = \int (2x + 1) \, dx \times \int (x - 1) \, dx$$
$$= (x^2 + x)\left(\frac{1}{2}x^2 - x \right) + C$$

✗

أكتشف الخطأ في حَلِّ رنيم، ثم أُصحّحه.

تحدٍّ: أجد كل تكامل ممّا يأتي:

21. $\int \left(\frac{x^2 + 1}{x^2} \right)^2 dx$
22. $\int (x - 1)(x - 3)(x + 5) \, dx$

23. تبرير: إذا كان: $\int \left(\frac{P}{2x^2} + Q \right) dx = \frac{2}{x} + 10x + C$، فأجد قيمة كلٍّ من الثابت P، والثابت Q، مُبرِّرًا إجابتي.

الدرس 1

التكامل غير المحدود
Indefinite Integral

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1. $\int (4x+2)\,dx$
2. $\int 2x^{-4}\,dx$
3. $\int (6x^2-4x)\,dx$
4. $\int (3-x-2x^5)\,dx$
5. $\int \left(x^{-2}+x^{5/2}\right)dx$
6. $\int \left(3x^2-\frac{2}{x^2}\right)dx$
7. $\int (3x^{-2}+6x^{-1/2}+x-4)\,dx$
8. $\int \left(10x^4+8x^{-3}\right)dx$
9. $\int \left(\frac{2}{x^3}-3\sqrt{x}\right)dx$
10. $\int \left(8x^3+6x-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx$
11. $\int \left(\frac{7}{x^2}+\sqrt[3]{x^4}\right)dx$
12. $\int \left(\frac{x^2}{3}+\frac{3}{x^2}\right)dx$

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

13. $\int \frac{4+2\sqrt{x}}{x^2}\,dx$
14. $\int \frac{4-x^2}{2+x}\,dx$
15. $\int \frac{x^2-1}{x^2}\,dx$
16. $\int x\sqrt{x}\,dx$
17. $\int \frac{x^2-1}{x-1}\,dx$
18. $\int x^2\left(1-x^3\right)dx$
19. $\int (x+4)^2\,dx$
20. $\int \frac{5-x}{x^5}\,dx$
21. $\int \frac{x^2+2x+1}{x+1}\,dx$
22. $\int x(x+1)^2\,dx$
23. $\int \frac{(x+3)^2}{\sqrt{x}}\,dx$
24. $\int (x-5)(x+5)\,dx$

الدرس 2

الشرط الأوَّلي

Initial Condition

مسألة اليوم

يُمثِّل الاقتران: $S'(t) = 500\sqrt[4]{t}$ مُعدَّل تغيُّر المبيعات الشهرية لهاتف جديد، حيث t عدد الأشهر منذ طرح الهاتف في الأسواق، و$S(t)$ عدد الهواتف المَبيعة شهريًّا. أجد $S(t)$، علمًا بأنَّ $S(0) = 0$.

مثال 1

أجد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان: $f'(x) = 3x^2 + 4x - 3$، ومَرَّ منحناه بالنقطة $(2, 4)$.

أتحقَّق من فهمي

أجد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان: $f'(x) = 6x^2 + 5$، ومَرَّ منحناه بالنقطة $(1, 9)$.

مثال 2 : من الحياة

التكلفة الحدِّيـة: يُمثِّل الاقتـران: $C'(x) = 3x^2 - 60x + 400$ التكلفة الحدِّية (بالدينار) لكل طابعة مُلوَّنة تُنتِجها إحدى الشركات، حيـث x عدد الطابعـات المُنتَجـة، و $C(x)$ تكلفة إنتـاج x طابعة بالدينـار. أجد اقتـران التكلفة $C(x)$، علمًا بأنَّ تكلفـة إنتاج طابعة واحدة هي JD 583.

أتحقَّق من فهمي

التكلفة الحدِّية: يُمثِّـل الاقتران: $C'(x) = 0.3x^2 + 2x$ التكلفة الحدِّية (بالدينار) لكل قطعة تُنتَج في إحدى الشـركات، حيث x عدد القطع المُنتَجة، و $C(x)$ تكلفة إنتاج x قطعة بالدينار.
أجد اقتران التكلفة $C(x)$، علمًا بأنَّ تكلفة إنتاج **10** قطع هي **JD 2200**.

مثال 3

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سـرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = t + 2$، حيث t الزمن بالثواني، وv سـرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَـيْم هو $11\ \text{m}$، فأجد موقع الجُسَيْم بعد **8** ثوانٍ من بَدْء الحركة.

أتحقَّق من فهمي

يتحرَّك جُسَـيْم في مسار مسـتقيم، وتعطى سـرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = 36t - 3t^2$، حيث t الزمن بالثواني، وv سـرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

مثال 4

يتحرَّك جُسَـيْم في مسـار مسـتقيم، ويعطى تسـارعه بالاقتران: $a(t) = 6t$، حيث t الزمن بالثواني، وa تسـارعه بالمتر لكل ثانية تربيـع. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَـيْم هو $4\ \text{m}$، وكانت سـرعته المتجهة هي $1\ \text{m/s}$ بعد ثانية واحدة من بَدْء حركته، فأجد موقع الجُسَيْم بعد ثانيتين من بَدْء الحركة.

أتحقَّق من فهد

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، ويعطى تسـارعه بالاقتران: $a(t) = 4t - 4$، حيث t الزمن بالثواني، وa تسـارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. إذا بدأ الجُسَـيْم حركته من نقطة الأصل بسرعة متجهة مقدارها $5\ \text{m/s}$، فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

اتدرّب وأحل المسائل

في كلٍّ ممّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y=f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

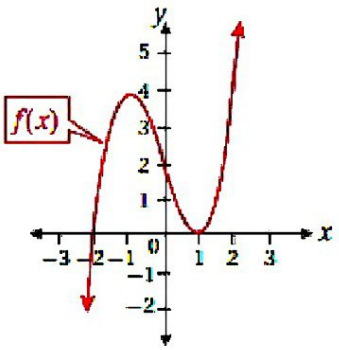
1. $f'(x)=x-3;\ (2,9)$
2. $f'(x)=x^2-4;\ (0,7)$
3. $f'(x)=6x^2-4x+2;\ (1,9)$
4. $f'(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{4}x^2;\ (4,11)$
5. $f'(x)=(x+2)^2;\ (1,7)$
6. $f'(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}-x;\ (4,0)$

---

7. إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو: $\frac{dy}{dx}=0.4x+3$، فأجد قاعدة العلاقة y، علمًا بأنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة $(0,5)$.

8. إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ هو: $f'(x)=\frac{x^2+10}{x^2}$، فأجد قاعدة الاقتران $f(x)$، علمًا بأنَّ منحناه يمرُّ بالنقطة $(5,2)$.

9. يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)$، حيث: $f'(x)=3x^2-3$.
أجد قاعدة الاقتران $f(x)$.



بالون: عند نفخ بالون كروي الشكل يصبح نصف قُطْره y سنتيمترًا بعد t ثانية.
إذا كان: $\frac{dy}{dt}=4t^{-\frac{2}{3}},\ t>0$، وكان نصف قُطْر البالون بعد 8 ثوانٍ من بَدْء نفخه 30 cm، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

10. قاعدة العلاقة y بدلالة t.
11. نصف قُطْر البالون بعد 27 ثانية من بَدْء نفخه.

12. أشجار: في دراسة تناولت نوعًا مُعيَّنًا من الأشجار، تبيَّن أنَّ ارتفاع هذه الأشجار يتغيَّر بمُعدَّلٍ يُمكِن نمذجته بالاقتران: $h'(t)=0.2t^{\frac{2}{3}}+\sqrt{t}$، حيث $h(t)$ ارتفاع الشجرة بالأقدام، وt عدد السنوات منذ لحظة زراعة الشجرة. إذا كان ارتفاع إحدى هذه الأشجار عند زراعتها هو 2 ft، فأجد $h(t)$.

13 يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = 2t + 3$، حيث t الزمن بالثواني، وv سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

14 يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = t^2$، حيث t الزمن بالثواني، وa تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَيْم هو 3 m، وكانت سرعته المتجهة هي 1 m/s بعد ثانية واحدة من بَدْء حركته، فأجد موقع الجُسَيْم بعد ثانيتين من بَدْء الحركة.

15 يتحرَّك جُسَيْم من السكون، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = 9 - 2t$، حيث t الزمن بالثواني، وa تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل بسرعة متجهة مقدارها 2 m/s، فأجد موقعه بعد ثانيتين من بَدْء الحركة.

مهارات التفكير العليا

16 تبرير: تعطى مشتقة الاقتران $f(x)$ بالقاعدة: $f'(x) = ax + b$، حيث a وb ثابتان. إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة $(-2, 8)$ هو 7، وقطع منحنى الاقتران المحور y عند النقطة $(0, 18)$، فأجد قاعدة هذا الاقتران، مُبرِّرًا إجابتي.

17 تحدٍّ: إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ هو: $\left(4 - \frac{100}{x^2}\right)$، وكان للاقتران نقطة حرجة عند النقطة $(a, 10)$، حيث: $a > 0$، فأجد قاعدة هذا الاقتران.

الدرس 2

الشرط الأوَّلي
Initial Condition

في كلٍّ ممّا يأتي المشـــتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y=f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

1. $f'(x)=3x-2;\ (-1,2)$
2. $f'(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}};\ (4,5)$
3. $f'(x)=-x(x+1);\ (-1,5)$
4. $f'(x)=x^3-\frac{2}{x^2}+2;\ (1,3)$
5. $f'(x)=x+\sqrt{x};\ (1,2)$
6. $f'(x)=-\frac{10}{x^2};\ (1,15)$

7. إذا كان ميـــل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ هو: $f'(x)=\sqrt{x}$، فأجد قاعدة الاقتران $f(x)$، علمًا بأنَّ منحناه يمرُّ بالنقطة $(9,25)$.

8. إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو: $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{x^2}$، فأجد قاعدة العلاقة y، علمًا بأنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة $(2,4)$.

9. إذا كان ميـــل المماس لمنحنـــى العلاقة y هو: $\frac{dy}{dx}=3x^2-12x+8$، ومَرَّ منحناهـــا بنقطة الأصل، فأجد الإحداثي x لجميع نقاط تقاطع منحنى العلاقة مع المحور x، مُبرِّرًا إجابتي.

10. **الإيراد الحـــدِّي:** يُمثِّل الاقتـــران: $R'(x)=x^2-3$ الإيراد الحدِّي (بالدينار) لكل قطعة تبـــاع من مُنتَجات إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المَبيعة، و$R(x)$ إيراد بيع x قطعة بالدينار. أجد اقتران الإيراد $R(x)$، علمًا بأنَّ $R(0)=0$.
إرشاد: يُمثِّل الإيراد الحدِّي مشتقة اقتران الإيراد.

11. يتحرَّك جُسَـــيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t)=3t^2-12t+11$، حيث t الزمن بالثواني، وv سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد ثانيتين من بَدْء الحركة.

12. يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t)=6t-30$، حيث t الزمن بالثواني، وa التسارع بالمتر لكل ثانية تربيع. إذا بدأ الجُسَـــيْم حركته من نقطة الأصل بســـرعة متجهة مقدارها $72\ \text{m/s}$، فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

الدرس
3

التكامل المحدود
Definite Integral

مسألة اليوم

يُمثِّل الاقتران: $C'(x) = 500 - \frac{x}{3}$ التكلفة الحدّية الشهرية (بالدينار) لكل درّاجة نارية يُنتِجها أحد مصانع الدرّاجات، حيث x عدد الدرّاجات المُنتَجة شهريًّا، و$C(x)$ تكلفة إنتاج x درّاجة شهريًّا بالدينار. أجد مقدار التغيُّر في التكلفة عند زيادة الإنتاج من 300 درّاجة إلى 600 درّاجة شهريًّا.

مثال 1

أجد قيمة كلٍّ من التكاملين الآتيين:

1) $\int_0^1 (2x-5)\ dx$

2) $\int_{-4}^3 x(4-3x)\ dx$

أتحقَّق من فهمي

أجد قيمة كلٍّ من التكاملين الآتيين:

a) $\int_1^4 (8x-\sqrt{x})\ dx$

b) $\int_{-1}^2 (1-x)(1+3x)\ dx$

مثال 2

إذا كان: $\int_1^k \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx = 3$، فأجد قيمة الثابت k.

أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $\int_0^k 6x^2\ dx = 2$، فأجد قيمة الثابت k.

مثال 3

إذا كان: $\int_0^5 f(x)\,dx = 10, \int_5^0 g(x)\,dx = -4, \int_5^7 f(x)\,dx = 3$، فأجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

1) $\int_0^5 (4f(x) + g(x))\ dx$ 2) $\int_5^0 5g(x)\ dx$ 3) $\int_0^7 f(x)\ dx$

أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $\int_{-1}^1 h(x)\ dx = 7, \int_4^1 f(x)\ dx = 2, \int_{-1}^1 f(x)\ dx = 5$، فأجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

a) $\int_{-1}^1 (f(x) + 3h(x))\ dx$ b) $\int_{-1}^4 f(x)\ dx$ c) $\int_1^{-1} 4h(x)\ dx$

مثال 4

1) إذا كان: $f(x) = \begin{cases} 12 & , x < 2 \\ 3x^2 & , x \geq 2 \end{cases}$، فأجد قيمة: $\int_1^4 f(x)\ dx$.

2) إذا كان: $f(x) = |x-1|$، فأجد قيمة: $\int_0^5 f(x)\,dx$.

أتحقَّق من فهمي

a) إذا كان: $f(x) = \begin{cases} 1+x & , x < 1 \\ 2x & , x \geq 1 \end{cases}$، فأجد قيمة: $\int_{-2}^2 f(x)\ dx$.

b) إذا كان: $f(x) = |x-3|$، فأجد قيمة: $\int_{-1}^4 f(x)dx$.

مثال 5 : من الحياة

التغيُّـر في الأرباح: يُمثِّـل الاقتـران: $P'(x) = 165 - 0.1x$ الربح الحدِّي الشـهري (بالدينار) لكل جهاز لوحي تبيعه إحدى الشركات، حيث x عدد الأجهزة اللوحية المَبيعة شهريًّا، و $P(x)$ ربح بيع x قطعة شـهريًّا بالدينار. أجد مقدار التغيُّر في أرباح الشركة عند زيادة مبيعاتها الشـهرية إلى 1100 جهـاز، علمًا بأنَّ عدد الأجهـزة المَبيعة الآن هو 1000 جهاز.

أتحقَّق من فهمي

مُعتمِدًا المعلومات الوارد ذكرها في المثال 5، أجد مقدار التغيُّر الشهري في أرباح الشركة عند زيادة مبيعاتها الشهرية إلى 1500 جهاز، علمًا بأنَّ عدد الأجهزة المَبيعة الآن هو 1400 جهاز.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

1. $\int_{-1}^{3} 3x^2\,dx$
2. $\int_{-3}^{-2} 6\,dx$
3. $\int_{0}^{2} (3x^2+4x+3)\,dx$
4. $\int_{1}^{8} 8\sqrt[3]{x}\,dx$
5. $\int_{1}^{9} \left(\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}}\right) dx$
6. $\int_{-2}^{3} (-x^2+4x-5)\,dx$
7. $\int_{1}^{3} (x-2)(x+2)\,dx$
8. $\int_{-3}^{3} (9-x^2)\,dx$
9. $\int_{1}^{4} \frac{2+\sqrt{x}}{x^2}\,dx$
10. $\int_{1}^{4} x^3\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right) dx$
11. $\int_{1}^{8} (x^{1/3} - x^{-1/5})\,dx$
12. $\int_{1}^{9} \left(2+\sqrt{x}\right)^2 dx$
13. $\int_{-1}^{4} |3x-6|\,dx$
14. $\int_{0}^{3} |x-2|\,dx$
15. $\int_{2}^{3} \frac{x^2-1}{x+1}\,dx$

---

16. إذا كان: $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , x \le 3 \\ 10-x & , x > 3 \end{cases}$، فأجد قيمة: $\int_{0}^{4} f(x)\,dx$.

17 إذا كان: $f(x)=\begin{cases}-x+5 & , x<0\\ x+5 & , x\geq 0\end{cases}$، فأجد قيمة: $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$.

إذا كان: $\int_1^5 g(x)\,dx=8,\ \int_1^5 f(x)\,dx=6,\ \int_1^2 f(x)\,dx=-4$، فأجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

18 $\int_2^2 g(x)\,dx$

19 $\int_5^1 (g(x)-2)\,dx$

20 $\int_1^2 (3f(x)+x)\,dx$

21 $\int_2^5 f(x)\,dx$

22 $\int_1^5 \big(f(x)-g(x)\big)\,dx$

23 $\int_1^5 \big(4f(x)+g(x)\big)\,dx$

---

24 إذا كان: $\int_1^m (6x-10)\,dx=4$، فأجد قيمة الثابت m.

25 تغيُّر التكلفة: يُمثِّل الاقتران: $C'(x)=6x+1$ التكلفة الحدِّية (بالدينار) لكل قطعة تُنتِجها إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المُنتَجة، و $C(x)$ تكلفة إنتاج x قطعة بالدينار. أجد مقدار التغيُّر في التكلفة عند زيادة الشركة إنتاجها من 10 قطع إلى 20 قطعة شهريًّا.

26 تلوُّث: يُلوِّث مصنعٌ بحيرةً بمُعدَّلٍ يُمكِن نمذجته بالاقتران: $N'(t)=280t^{3/2}$، حيث t عدد الأشهر منذ الآن، و $N(t)$ عدد الكيلوغرامات من المُلوِّثات التي يطرحها المصنع في البحيرة. كم كيلوغرامًا من المُلوِّثات يدخل البحيرة منذ الآن حتى 4 أشهر؟

مهارات التفكير العليا

27 أكتشف الخطأ: أوجد خالد ناتج التكامل: $\int_0^2 (x^2+x)\,dx$، وكان حَلُّه على النحو الآتي:

$$\int_0^2 (x^2+x)\,dx=\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^2$$

$$=\left(\frac{1}{3}(0)^3+\frac{1}{2}(0)^2\right)-\left(\frac{1}{3}(2)^3+\frac{1}{2}(2)^2\right)$$

$$=-\frac{14}{3}$$

28 تبرير: أُثبِت أنَّ: $\int_0^1 x^n(1-x)\,dx=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$، حيث $n>0$، مُبرِّرًا إجابتي.

29 تحدٍّ: إذا كان: $\int_1^5 (2ax+7)\,dx=4a^2$، فأجد قيمة الثابت a.

الدرس 3

التكامل المحدود
Definite Integral

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

1. $\int_1^5 10x^{-2}\,dx$
2. $\int_0^2 (2x^3 - 4x + 5)\,dx$
3. $\int_1^4 \frac{x^3 + 2x^2}{\sqrt{x}}\,dx$
4. $\int_3^6 \left(x - \frac{3}{x}\right)^2 dx$
5. $\int_0^5 (|x+3| - 5)\,dx$
6. $\int_0^6 x(6-x)\,dx$
7. $\int_1^2 (6x - \frac{12}{x^4} + 3)\,dx$
8. $\int_0^7 |2x-1|\,dx$
9. $\int_{-3}^4 |x|\,dx$
10. $\int_1^2 \frac{x^2 + x^3}{x}\,dx$
11. $\int_3^4 (6x^2 - 4x)\,dx$
12. $\int_{10}^{10} \frac{x+1}{x^2}\,dx$

إذا كان: $\int_{-3}^{2} g(x)\,dx = -2, \int_{-3}^{1} f(x)\,dx = 4, \int_{-3}^{2} f(x)\,dx = 5$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

13. $\int_2^2 f(x)\,dx$
14. $\int_1^2 (f(x) - 5)\,dx$
15. $\int_{-3}^2 \big(-2f(x) + 5g(x)\big)dx$
16. $\int_2^{-3} \big(g(x) + 2x\big)\,dx$
17. $\int_2^{-3} \big(f(x) + g(x)\big)\,dx$
18. $\int_{-3}^2 \big(4f(x) - 3g(x)\big)\,dx$

19. إذا كان: $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x < 2 \\ 8 - x & , x \geq 2 \end{cases}$، فأجد قيمة: $\int_{-3}^{6} f(x)\,dx$.

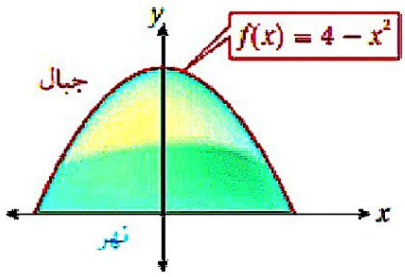
20. **سكّان:** أشارت دراسة إلى أنَّ عدد السكّان في إحدى القرى يتغيَّر شهريًّا بمُعدَّلٍ يُمكِن نمذجته بالاقتران: $P'(t) = 5 + 3t^{2/3}$، حيث t عدد الأشهر من الآن، و $P(t)$ عدد السكّان. أجد مقدار الزيادة في عدد سكّان القرية في الأشهر الثمانية القادمة.

21. إذا كان: $\int_2^3 (x^2 - a)\,dx = 5$، فأجد قيمة الثابت a.

الدرس 4

المساحة
Area

مسألة اليوم



يُمثِّل الجزء المُظلَّل بالأخضر في الشكل المجاور حقول منطقة زراعية تحيط بها سلسلة من الجبال، ويُمثِّل منحنى الاقتران: $f(x) = 4 - x^2$ الحدَّ الفاصل بين سلسلة الجبال والمنطقة الزراعية، ويُمثِّل المحور x حافة النهر الذي يُطِلُّ على المنطقة الزراعية. أجد المساحة الكلية للمنطقة الزراعية، علمًا بأنَّ x وy مَقيسان بالكيلومتر.

مثال 1

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 + 1$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 1$، و$x = 4$.

أتحقَّق من فهمي

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x + 3$، والمحور x، والمستقيمين: $x = -1$، و$x = 3$.

مثال 2

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - 8x$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 5$، و$x = 2$.

أتحقَّق من فهمي

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - 4$، والمحور x، والمستقيمين: $x = -1$، و$x = 1$.

مثال 3

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 3x^2 - 12$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 1$، و$x = 3$.

أتحقَّق من فهمي

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 + 2x$، والمحور x، والمستقيمين: $x = -1$، و$x = -3$.

مثال 4

1) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - 3x$، والمحور x.

2) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 - x$، والمحور x.

أتحقَّق من فهمي

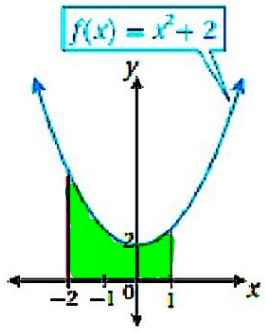
a) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 + 5x + 4$، والمحور x.

b) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 - 9x$، والمحور x.

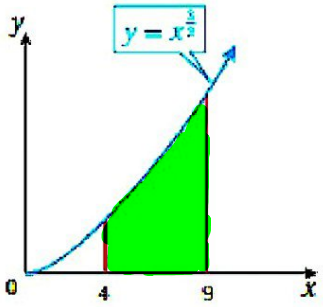
أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلات البيانية الآتية:

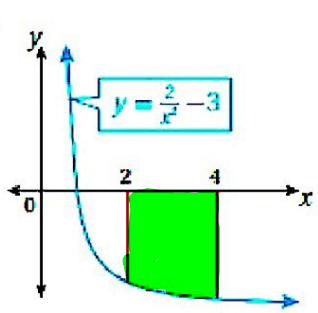
1)



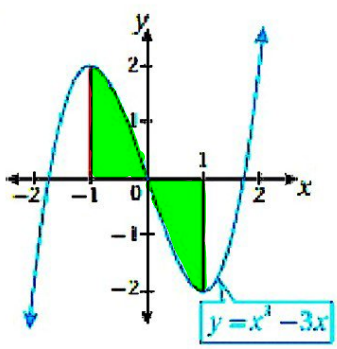
2)



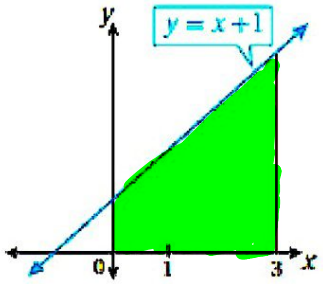
3)



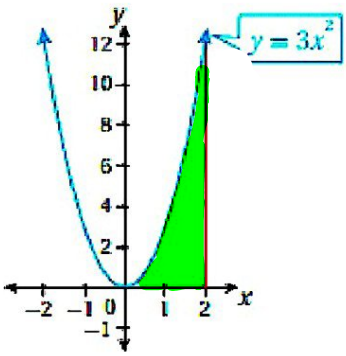
4)



5



6



---

7 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 0$، و$x = 2$.

8 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 9 - x^2$، والمحور x.

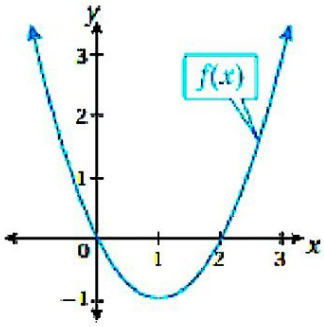
9 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 + 4x$، والمحور x، والمستقيمين: $x = -1$، و$x = 2$.

10 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = -7 + 2x - x^2$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 1$، و$x = 4$.

11 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 5 - x$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 3$، و$x = 5$.

12 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = (x + 1)(x - 4)$، والمحور x.

يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - 2x$:



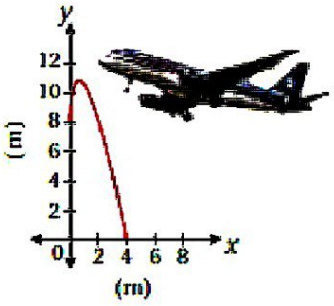
13 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران، والمحور x.

14 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران، والمحور x، والمستقيم $x = 3$.

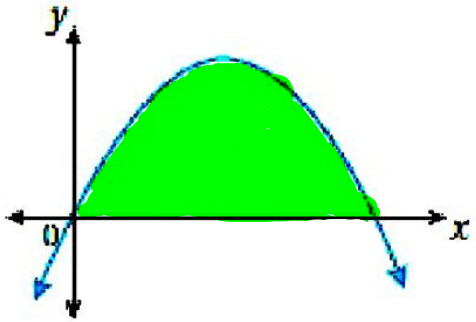
15 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران، والمحور x، والمستقيم $x = -1$.

---

16 يُبيِّن التمثيل البياني المجاور شكل السطح العلوي لجناح طائرة، مُمثَّلًا بالمعادلة: $y = 8 + 8\sqrt{x} - 6x$، حيث: $0 \le x \le 4$. أجد مساحة السطح العلوي لجناح الطائرة.

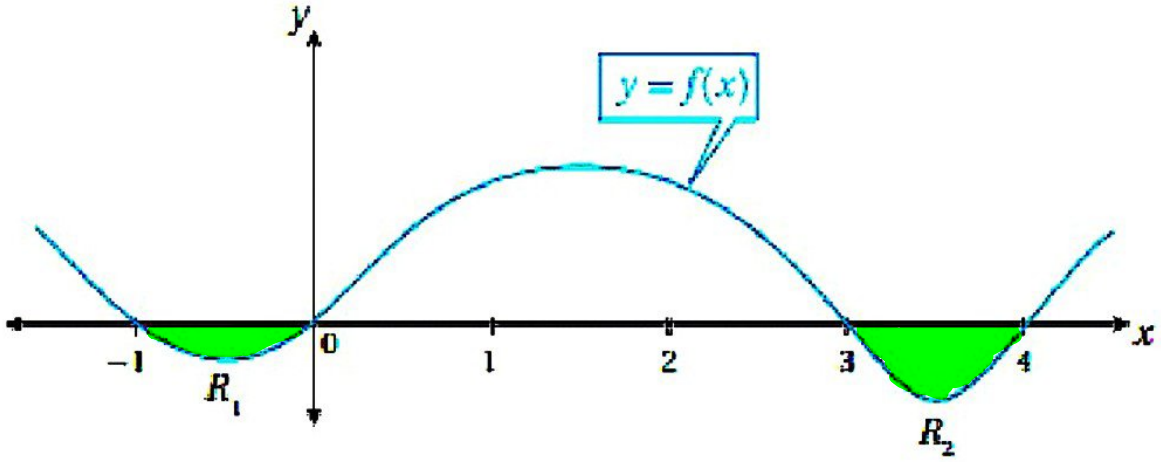


مهارات التفكير العليا



17 تحدٍّ: يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $y = kx(4-x)$. إذا كانت مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران والمحور x هي 32 وحدة مربعة، فأجد قيمة الثابت k.

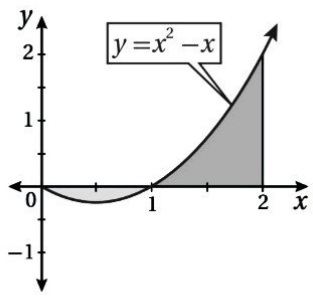
18 تبرير: يُبيِّن الشكل التالي منحنى الاقتران $f(x)$. إذا كانت مساحة المنطقة R_1 هي وحدتين مربعتين، ومساحة المنطقة R_2 هي 3 وحدات مربعة، وكان: $\int_0^4 f(x)\,dx = 10$، فأجد $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$، مُبرِّرًا إجابتي.

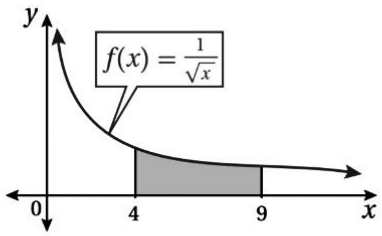


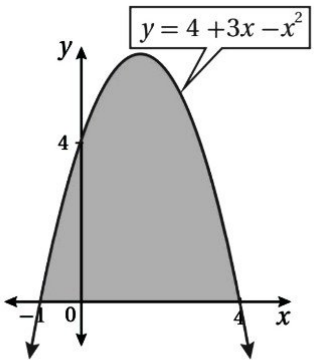
الدرس 4

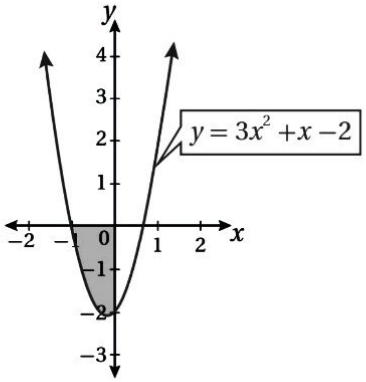
المساحة
Area

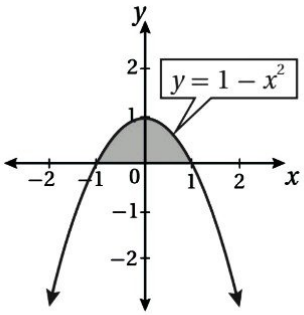
أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلات البيانية الآتية:

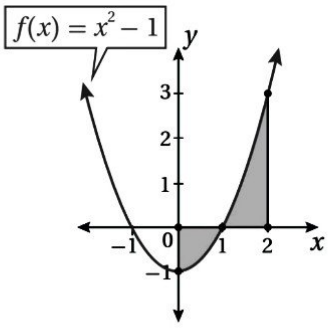
1


2


3


4


5


6


7 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 3x^2 - 3$، والمحور x.

8 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 - 5x^2 - 6x$، والمحور x.

9 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2\,(2 - x)$، والمحور x.

الدرس 5

تكامل اقترانات خاصة
Integration of Special Functions

مسألة اليوم

يتغيَّر عدد الطلبة الذين يلتحقون بإحدى الجامعات الجديدة سنويًّا بمُعدَّل: $P'(t) = \frac{5000}{\sqrt{(t+1)^3}}$، حيث $P(t)$ عدد الطلبة المُلتحِقين بالجامعة، وt الزمن بالسنوات منذ تأسيس الجامعة. أجد عدد الطلبة الذين درسوا في الجامعة بعد 3 سنوات من تأسيسها، علمًا بأنَّ عددهم عند تأسيس الجامعة بلغ 2000 طالب.

مثال 1

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int (e^x + 8)\,dx$ 2) $\int (5\cos x + \sqrt{x})\,dx$ 3) $\int \left(4\sin x - \frac{1}{x^2}\right)dx$

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int (5x^2 + 7e^x)\,dx$ b) $\int \left(9\cos x + \frac{4}{x^3}\right)dx$ c) $\int \left(\sqrt[3]{x} - \sin x\right)dx$

مثال 2

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int \left(\frac{1}{x} + 6\sin x\right)dx$ 2) $\int \left(2e^x + \frac{3}{x}\right)dx$ 3) $\int \frac{2x^5 - 4}{x}\,dx$

أتحقّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int \left(\frac{1}{x} + 8e^x\right) dx$ b) $\int \left(\sin x - \frac{5}{x}\right) dx$ c) $\int \frac{x^2 - 7x + 2}{x^2} dx$

مثال 3

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int (2x+7)^5 dx$ 2) $\int \frac{1}{\sqrt{4x-2}} dx$ 3) $\int 2e^{4x+3} dx$

4) $\int 2\sin(4x+3) dx$ 5) $\int \left(5\cos(2x+3) + \sqrt[3]{x}\right) dx$ 6) $\int \frac{1}{8x-1} dx$

أتحقّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int (7x-5)^6 dx$ b) $\int \sqrt{2x+1} dx$

c) $\int 4\cos(3x-7) dx$ d) $\int (\sin 5x + e^{2x}) dx$

e) $\int (6x^2 - 3e^{7x+1}) dx$ f) $\int \frac{5}{3x+2} dx$

مثال 4 : من الحياة

بيئة: في دراسة أجرتها شركة نفطية، تبيَّن أنَّ مُعدَّل إنتاج إحدى الآبار النفطية يُنمذَج بالاقتران: $R'(t) = \frac{100}{t+1} + 5$، حيث $R(t)$ عدد البراميل المُنتَجة (بالآلاف) في السنة، و t عدد السنوات منذ بَدْء ضَخِّ النفط من البئر. أجد عدد براميل النفط المُنتَجة بعد 9 سنوات من بَدْء عملية الضَّخِّ من البئر، علمًا بأنَّ $R(0) = 0$.

أتحقّق من فهمي

سكّان: أشارت دراسة إلى أنَّ عدد السكّان في إحدى القرى يتغيَّر سنويًّا بمُعدَّلٍ يُمكِن نمذجته بالاقتران: $P'(t) = 105e^{0.03t}$، حيث t عدد السنوات منذ عام 2010م، و $P(t)$ عدد السكّان.

أجد عدد سكّان القرية عام 2020م، علمًا بأنَّ عدد سكّانها عام 2010م هو 3500 شخص.

مثال 5

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int \frac{3x^2}{x^3+5}\,dx$ 2) $\int \frac{6x}{x^2+9}\,dx$ 3) $\int \frac{x-1}{x^2-2x+2}\,dx$ 4) $\int \frac{e^x}{e^x-1}\,dx$

أتحقّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x}\,dx$ b) $\int \frac{9x^2}{x^3+8}\,dx$

c) $\int \frac{x+1}{4x^2+8x}\,dx$ d) $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5}\,dx$

مثال 6

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

1) $\int_0^1 (6e^{-3x}+12x^3)\,dx$ 2) $\int_{-1}^2 (x+1)^3\,dx$ 2) $\int_{-1}^2 (x+1)^3\,dx$

أتحقّق من فهمي

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

a) $\int_0^2 (4e^{2x}+7)\,dx$ b) $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{6x+1}}\,dx$ c) $\int_0^4 \frac{8x}{x^2+1}\,dx$

أتدرّب وأحلُّ المسائل

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1. $\int \left(\frac{1}{2}e^x + 3x\right)\,dx$
2. $\int \left(\frac{x^2+2x+1}{x^2}\right)\,dx$
3. $\int (e^x+1)^2\,dx$
4. $\int \frac{1}{x}(x+2)\,dx$
5. $\int \left(\frac{4}{x^3}+\frac{5}{x}\right)\,dx$
6. $\int \left(\sqrt{x}+3e^{6x}-\frac{7}{x}\right)\,dx$
7. $\int \left(\frac{3}{x+1}-5e^{-2x}\right)\,dx$
8. $\int \frac{1}{\sqrt{2x-3}}\,dx$
9. $\int (\sin(2x-3)+e^{6x-4})\,dx$
10. $\int 4\cos(6x+1)\,dx$
11. $\int \frac{\sin x+3\cos x}{4}\,dx$
12. $\int \left(e^{6x}+(1-2x)^6\right)\,dx$
13. $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$
14. $\int \frac{x^2}{x^3-3}\,dx$
15. $\int \frac{x^2-x}{2x^3-3x^2+12}\,dx$
16. $\int \frac{e^x+7}{e^x}\,dx$
17. $\int \frac{1}{5-\frac{1}{4}x}\,dx$
18. $\int \left(4x^3+2+3\sin(5-3x)\right)\,dx$
19. $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}\,dx$
20. $\int \frac{3}{(1-4x)^2}\,dx$
21. $\int \frac{1+xe^x}{x}\,dx$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

22. $\int_1^2 \left(2x+3e^x-\frac{4}{x}\right)\,dx$
23. $\int_0^5 \frac{x}{x^2+10}\,dx$
24. $\int_3^4 (2x-6)^4\,dx$

---

25. يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t)=e^{-2t}$، حيث t الزمن بالثواني، وv سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَيْم 2 m، فأجد موقع الجُسَيْم بعد t ثانية من بَدْء الحركة.

في كلٍّ ممّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y=f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

26. $f'(x)=5e^x;\ \left(0,\frac{1}{2}\right)$
27. $f'(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2};\ (1,-1)$
28. $f'(x)=e^{-x}+x^2;\ (0,4)$

---

29. إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو: $\frac{dy}{dx}=2x+\frac{3}{x+e}$، فأجد قاعدة العلاقة y، علمًا بأنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة (e,e^2).

بيئة: في دراسة تناولت أسماكًا في بحيرة، تبيَّن أنَّ عدد الأسماك $P(t)$ يتغيَّر بمُعدَّل: $P'(t) = -0.51e^{-0.03t}$، حيث t الزمن بالسنوات بعد بَدْء الدراسة:

30 أجد قاعدة الاقتران $P(t)$ عند أيِّ زمن t، علمًا بأنَّ عدد الأسماك عند بَدْء الدراسة هو 1000 سمكة.

31 أجد عدد الأسماك بعد 10 سنوات من بَدْء الدراسة.

طب: يلتئم جرح جلدي بمُعدَّلٍ يُمكِن نمذجته بالاقتران: $A'(t) = -0.9e^{-0.1t}$، حيث t عدد الأيام بعد الإصابة بالجرح، و $A(t)$ مساحة سطح الجرح بالسنتيمتر المربع:

32 أجد قاعدة الاقتران $A(t)$ عند أيِّ زمن t، علمًا بأنَّ مساحة سطح الجرح عند الإصابة هي $9\ \text{cm}^2$.

33 أجد مساحة سطح الجرح بعد 5 أيام من الإصابة.

مهارات التفكير العليا

34 أكتشف الخطأ: أوجد أحمد ناتج التكامل: $\int \frac{1}{2x}\,dx$، وكان حَلُّه على النحو المجاور.

أكتشف الخطأ في حَلِّ أحمد، ثم أُصحِّحه.

$$\int \frac{1}{2x}\,dx = \int \frac{2\times 1}{2x}\,dx \quad \times$$
$$= \int \frac{2}{2x}\,dx$$
$$= \ln|2x| + C$$

تحدَّ: أجد كل تكامل ممّا يأتي:

35 $\int \sqrt{e^x}\,dx$

36 $\int \frac{\cos x}{3+2\sin x}\,dx$

37 $\int (x^2+2x+1)^5\,dx$

---

38 أكتشف المُختلِف: أيُّ التكاملات الآتية مُختلِف، مُبرِّرًا إجابتي؟

$\int (x-1)^3\,dx$ $\quad$ $\int \frac{1}{x+1}\,dx$ $\quad$ $\int \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$ $\quad$ $\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$

الدرس 5

تكامل اقترانات خاصة
Integration of Special Functions

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1. $\int \frac{1-x^2}{5x}\,dx$
2. $\int (5e^x + 4)\,dx$
3. $\int \left(1 - e^{2x-3}\right)dx$
4. $\int (\sin 2x - \cos 2x)\,dx$
5. $\int \frac{3}{2x-1}\,dx$
6. $\int \left(5 - \sin(5 - 5x)\right)dx$
7. $\int \frac{1}{\frac{1}{3}x - 2}\,dx$
8. $\int \left(2x - 1 + \frac{8}{5x+4}\right)dx$
9. $\int \left(3\cos x + \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}\right)dx$
10. $\int (3x+2)^5\,dx$
11. $\int \frac{x+1}{x^2+2x+5}\,dx$
12. $\int \left(e^{2x} - \frac{1}{2}\sin(2x-1)\right)dx$
13. $\int \left(\sin(2x+3) + \cos(3x+2)\right)dx$
14. $\int \left(\frac{1}{8}x^{3/2} - \frac{4}{x}\right)dx$
15. $\int \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

16. $\int_0^1 \sqrt{1+7x}\,dx$
17. $\int_0^1 e^x(4 - e^x)\,dx$
18. $\int_1^3 \left(1 + \frac{1}{x}\right)dx$

19. إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو: $\frac{dy}{dx} = 6e^{2x} + 2e^{-x}$، فأجد قاعدة العلاقة y، علمًا بأنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة $(0, 2)$.

في كلٍّ ممّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y = f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

20. $f'(x) = e^{-x}\,;\,(0, 3)$
21. $f'(x) = \frac{3}{x} - 4\,;\,(1,0)$
22. $f'(x) = 4e^x - 2\,;\,(0, 1)$

23. **تلوُّث:** يُعالَج التلوُّث في بحيرة باستعمال مضاد للبكتيريا. إذا كان عدد الخلايا البكتيرية الضارَّة لكل ملّيلتر من الماء في البحيرة يتغيَّر بمُعدَّل: $N'(t) = -\frac{2000t}{1+t^2}$، حيث $N(t)$ عدد الخلايا البكتيرية لكل ملّيلتر من الماء بعد t يومًا من استعمال المضاد، فأجد $N(t)$، علمًا بأنَّ العدد الابتدائي للخلايا هو 5000 خلية لكل ملّيلتر.

24. أُحدِّد أوجه الاختلاف بين التكاملين الآتيين من دون إيجاد التكامل:

$\int (3\sin(3x+1))\,dx$ $\qquad$ $\int (3\sin 3x + 1)\,dx$

الدرس 6

التكامل بالتعويض
Integration by Substitution

مسألة اليوم

يُمثِّل الاقتران $C(t)$ تركيز دواء في الدم بعد t ساعة من حقنه في جسم مريض، حيث C مَقيسة بالمِلّيغرام لكل سنتيمتر مُكعَّب (mg/ cm^3). إذا كان تركيز الدواء في دم المريض يتغيَّر بمُعدَّل: $C'(t) = \dfrac{0.3t}{\sqrt{t^2+16}}$، فأجد مقدار التغيُّر في تركيز الدواء بالدم خلال الساعات الثلاث الأولى التي تلت حقنه في جسم المريض.

مثال 1

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int 3x^2 (x^3+1)^7 \, dx$

2) $\int 2x\sqrt{x^2+6} \, dx$

3) $\int \cos x \, e^{\sin x} \, dx$

4) $\int \dfrac{\ln x}{x} \, dx$

5) $\int x^4 \sin(x^5-8) \, dx$

6) $\int \sin^3 x \cos x \, dx$

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int 6x^2 (2x^3-3)^4 \, dx$

b) $\int x \, e^{x^2+1} \, dx$

c) $\int \dfrac{4x+8}{\sqrt{2x^2+8x}} \, dx$

d) $\int \dfrac{(\ln x)^2}{x} \, dx$

e) $\int x^3 \cos(x^4-5) \, dx$

f) $\int \cos^4 x \sin x \, dx$

مثال 2 : من الحياة

أسعار: يُمثِّل الاقتران $p(x)$ سعر حذاء رياضي بالدينار، حيث x عدد الأحذية المَبيعة بالمئات. إذا كان: $p'(x)=\frac{-136\,x}{\sqrt{9+x^2}}$ هو مُعدَّل التغيُّر في سعر الحذاء، فأجد $p(x)$، علمًا بأنَّ سعر الحذاء الواحد JD 30 عندما يكون عدد الأحذية المَبيعة 400 حذاء.

أتحقَّق من فهمي

تجارة: يُمثِّل الاقتران $p(x)$ سعر القطعة الواحدة (بالدينار) من مُنتَج مُعيَّن، حيث x عدد القطع المَبيعة (بالمئات) من المُنتَج. إذا كان: $p'(x)=\frac{-300\,x}{\sqrt{(36+x^2)^3}}$ هو مُعدَّل التغيُّر في سعر القطعة الواحدة من المُنتَج، فأجد $p(x)$، علمًا بأنَّ سعر القطعة الواحدة JD 75 عندما يكون عدد القطع المَبيعة 800 قطعة.

مثال 3

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

1) $\int_1^2 4x(x^2+1)^3\,dx$

2) $\int_0^1 (x+1)\sqrt{x^2+2x}\,dx$

3) $\int_{-1}^3 8x\,e^{x^2}\,dx$

أتحقَّق من فهمي

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

a) $\int_0^1 x^2(x^3-1)^4\,dx$

b) $\int_{-1}^0 \frac{x^3}{(2-x^4)^7}\,dx$

c) $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$

أتدرّب وأحلّ المسائل

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

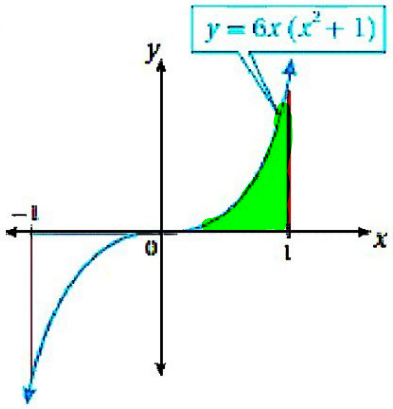
1. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$
2. $\int x^2(2x^3+5)^4\,dx$
3. $\int 3x\sqrt{x^2+7}\,dx$
4. $\int x^6 e^{1-x^7}\,dx$
5. $\int \frac{x^4}{(x^5+9)^3}\,dx$
6. $\int (3x^2-1)\,e^{x^3-x}\,dx$
7. $\int \frac{3x-3}{\sqrt{x^2-2x+4}}\,dx$
8. $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$
9. $\int \sin x\,(1+\cos x)^4\,dx$
10. $\int \sin^5 2x\cos 2x\,dx$
11. $\int \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\,dx$
12. $\int \frac{\cos x}{e^{\sin x}}\,dx$
13. $\int e^x(2+e^x)^5\,dx$
14. $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$
15. $\int (3x^2-2x-1)(x^3-x^2-x)^4\,dx$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

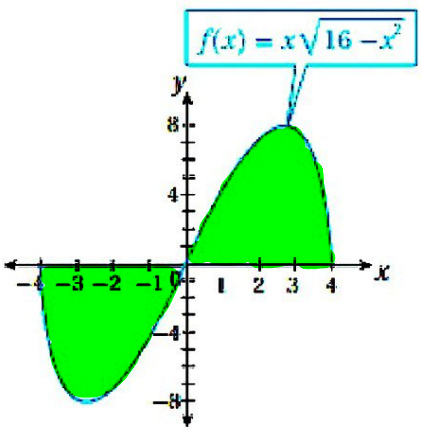
16. $\int_0^2 (2x-1)\,e^{x^2-x}\,dx$
17. $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$
18. $\int_e^{e^3} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$
19. $\int_0^1 (x^3+x)\sqrt{x^4+2x^2+1}\,dx$
20. $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$
21. $\int_1^2 \frac{2x+1}{(x^2+x+4)^3}\,dx$

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلين البيانيين الآتيين:

22.



23.



في كلٍّ ممّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y=f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

24 $f'(x)=xe^{4-x^2}; (-2, 1)$

25 $f'(x)=\frac{2x}{(1-x^2)^2}; (0, -1)$

26 يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t)=\frac{-2t}{\sqrt{(1+t^2)^3}}$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَيْم 4 m، فأجد موقع الجُسَيْم بعد t ثانية من بَدْء الحركة.

27 زراعة: يُمثِّل الاقتران $V(t)$ سعر دونم أرض زراعية في الأغوار الأردنية (بالدينار) بعد t سنة من الآن. إذا كان: $V'(t)=\frac{0.4t^3}{\sqrt[3]{0.2t^4+8000}}$ هو مُعدَّل التغيُّر في سعر دونم الأرض، فأجد $V(t)$، علمًا بأنَّ سعره الآن 5000 JD.

28 سكّان: أشارت دراسة إلى أنَّ عدد السكّان في إحدى المدن يتغيَّر سنويًّا بمُعدَّلٍ يُمكِن نمذجته بالاقتران: $P'(t)=\frac{4e^{0.2t}}{\sqrt{4+e^{0.2t}}}$، حيث t عدد السنوات منذ عام 2015م، و $P(t)$ عدد السكّان بالآلاف. أجد مقدار الزيادة في عدد سكّان المدينة من عام 2015م إلى عام 2025م.

مهارات التفكير العليا

29 أكتشف المُختلِف: أيُّ التكاملات الآتية مُختلِف، مُبرِّرًا إجابتي؟

$\int x(x^3+1)\,dx$ $\int x\cos x^2\,dx$ $\int 3x^2e^{1+x^3}\,dx$ $\int \frac{2x+3}{(x^2+3x)^2}\,dx$

30 أكتشف الخطأ: أوجدت سعاد ناتج التكامل: $\int_0^1 8x(x^2+1)^3\,dx$، وكان حَلُّها على النحو الآتي:

$$\int_0^1 8x(x^2+1)^3\,dx = \int_0^1 8x \times u^3 \times \frac{du}{2x}$$
$$= \int_0^1 4u^3\,du$$
$$= u^4\Big|_0^1$$
$$= 1$$

أكتشف الخطأ في حَلِّ سعاد، ثم أُصحِّحه.

31 تحدٍّ: إذا كان: $\int_0^k kx^2 e^{x^3}\,dx = \frac{2}{3}(e^8-1)$، فأجد قيمة الثابت k.

الدرس 6

التكامل بالتعويض
Integration by Substitution

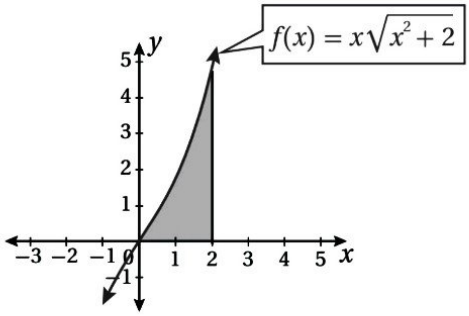
أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1. $\int x\sqrt{x^2+3}\ dx$
2. $\int x^4\, e^{x^5+2}\ dx$
3. $\int (x+1)(x^2+2x+5)^4\ dx$
4. $\int \frac{(\ln x)^3}{x}\ dx$
5. $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}\ dx$
6. $\int \sin x\sqrt{1+3\cos x}\ dx$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

7. $\int_1^2 \frac{x^2}{(x^3+1)^2}\ dx$
8. $\int_0^1 x\sqrt{3x^2+2}\ dx$
9. $\int_e^{e^2} \frac{(\ln x)^2}{x}\ dx$
10. $\int_0^1 (x+1)\,(x^2+2x)^5\ dx$

11. أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في التمثيل البياني المجاور.



12. **الإيراد الحدّي:** يُمثِّل الاقتران: $R'(x) = 50 + 3.5xe^{-0.1x^2}$ الإيراد الحدِّي (بالدينار) لكل قطعة تباع من إنتاج إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المَبيعة، و$R(x)$ إيراد بيع x قطعة بالدينار. أجد اقتران الإيراد $R(x)$، علمًا بأنَّ $R(0) = 0$.

يُمثِّل الاقتران $f'(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ المارِّ بالنقطة المعطاة. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

13. $f'(x) = 2x(4x^2-10)^2\ ;\ (2, 10)$
14. $f'(x) = x^2\, e^{-0.2x^3}\ ,\ \left(0, \frac{3}{2}\right)$

15. يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$، حيث t الزمن بالثواني، وv سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد t ثانية من بَدْء الحركة.

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 قيمة: $\int \frac{x^3-1}{x^2}$ هي:

a) $\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}+C$ b) $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}+C$

c) $x^2-\frac{1}{x}+C$ d) $x^2+\frac{1}{x}+C$

2 إذا كان: $\int_0^2 kx\ dx=6$، فإنَّ قيمة الثابت k هي:

a) 1 b) 2

c) 3 d) 4

3 قيمة: $\int_0^3 (-x^2+3x)\ dx$ هي:

a) $3\frac{3}{4}$ b) $21\frac{1}{4}$

c) $4\frac{1}{2}$ d) $22\frac{1}{2}$

4 قيمة: $\int_0^2 e^{2x}\ dx$ هي:

a) e^4-1 b) e^4-2

c) $2e^4-2$ d) $\frac{1}{2}e^4-\frac{1}{2}$

5 قيمة: $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx$ هي:

a) -2 b) $-\frac{7}{16}$

c) $\frac{1}{2}$ d) 2

6 التكامل المحدود الذي يمكِن عن طريقه إيجاد المساحة بين منحنى الاقتران: $f(x)=4x-x^2$، والمحور x هو:

a) $\int_4^0 (4x-x^2)\ dx$

b) $\int_0^4 (4x-x^2)\ dx$

c) $\int_1^0 (4x-x^2)\ dx$

d) $\int_0^1 (4x-x^2)\ dx$

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

7 $\int 3x^{-1/2}\ dx$

8 $\int (8x-10x^2)\ dx$

9 $\int \frac{5}{x^3}\ dx$

10 $\int \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}}\ dx$

11 $\int (5x^2-2e^{7x})\ dx$

12 $\int (2x+3e^{4x+5})\ dx$

13 $\int \frac{x^2-6}{2x}\ dx$

14 $\int \frac{1}{(x-1)^3}\ dx$

15 $\int \frac{e^x}{e^x+4}\ dx$

16 $\int 2x\,e^{x^2-1}\ dx$

17 $\int 4e^{x}\,(3+e^{2x})\,dx$

18 $\int \frac{1+x}{(4+2x+x^2)^8}\,dx$

19 $\int x\sin(3+x^2)\,dx$

20 $\int (3\sin 3x - 4\cos x)\,dx$

21 $\int \big(x - \sin(7x+2)\big)\,dx$

22 $\int (e^{3x} - e^{-3x})\,dx$

23 $\int \frac{2}{1-5x}\,dx$

24 إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو: $\frac{dy}{dx} = 4x - 2$، فأجد قاعدة العلاقة y، علمًا بأنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة $(0, 3)$.

25 الإيراد الحدّي: يُمثِّل الاقتران: $R'(x) = 4x - 1.2x^2$ الإيراد الحدّي (بالدينار) لكل قطعة تباع في إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المَبيعة، و$R(x)$ إيراد بيع x قطعة بالدينار. أجد اقتران الإيراد $R(x)$، علمًا بأنَّ $R(20) = 30000$.

26 يتحرَّك جُسَيْم من السكون، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = \cos(3t - \pi)$، حيث t الزمن بالثواني، وa تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. أجد سرعة الجُسَيْم بعد t ثانية من بَدْء الحركة.

إذا كان: $\int_{-5}^{-1} f(x)\,dx = 4, \int_{-5}^{5} f(x)\,dx = 10,$ $\int_{-5}^{-1} g(x)\,dx = 11$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

27 $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx$

28 $\int_{-5}^{-1} 7f(x)\,dx$

29 $\int_{-1}^{-5} (3f(x) - g(x))\,dx$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

30 $\int_{-2}^{3} (3x^2 - 4x + 1)\,dx$

31 $\int_{1}^{3} \frac{x^3 + 2x^2}{x}\,dx$

32 $\int_{1}^{5} |3 - x|\,dx$

33 $\int_{1}^{4} \frac{20}{\sqrt{x}}\,dx$

34 $\int_{2}^{5} 3x\,(x+2)\,dx$

35 $\int_{2}^{3} 2xe^{-x^2}\,dx$

36 $\int_{0}^{2} \frac{3x^2}{(x^3+1)^5}\,dx$

37 $\int_{0}^{1} \frac{6x}{x^2+1}\,dx$

38 إذا كان: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & , x < 0 \\ 4 - x & , x \geq 0 \end{cases}$، فأجد قيمة: $\int_{-2}^{1} f(x)\,dx$.

39 يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = 5 + e^{t-2}$، حيث t الزمن بالثواني، وv سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

في كلٍّ ممّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y = f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

40 $f'(x) = 3x^2 + 6x - 2; (0, 6)$

41 $f'(x) = \frac{\sqrt{20}}{x^2}; (1, 400)$

42 $f'(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}; (1, 1)$

43 $f'(x) = 5e^x - 4; (0, -1)$

44 $f'(x) = x\sqrt{x^2 + 5}; (2, 10)$

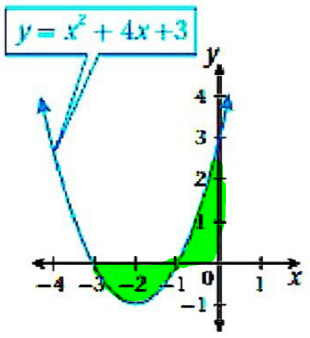
45 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - x - 2$، والمحور x، والمستقيمين: $x = -2$، و $x = 1$.

46 طب: يُمثِّل الاقتران $C(t)$ تركيز دواء في الدم بعد t ساعة من حقنه في جسم مريض، حيث C مَقيسة بالمِلّيغرام لكل سنتيمتر مُكعَّب (mg/cm^3). إذا كان تركيز الدواء في دم المريض يتغيَّر بمُعدَّل: $C'(t) = \frac{3t}{\sqrt{(t^2 + 36)^3}}$، فأجد مقدار التغيُّر في تركيز الدواء بالدم خلال الساعات الثماني الأولى التي تلت حقنه في جسم المريض.

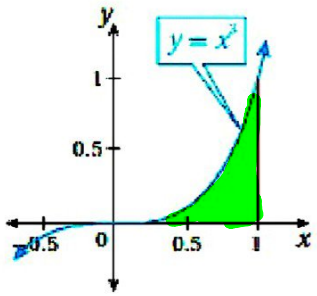
47 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 3x^2 - 3x$، والمحور x.

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلات البيانية الآتية:

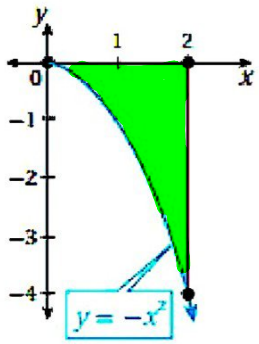
48



49



50



51