الجوكر في الرياضيات

إجابات

كتاب الطالب + كتاب التمارين

الفرع الأدبي والفندقي

ا.محمد السواعير

المنهاج الجديد

0787468840

الرياضيات

الصف الثاني عشر- الفرع الأدبي

الفصل الدراسي الأول

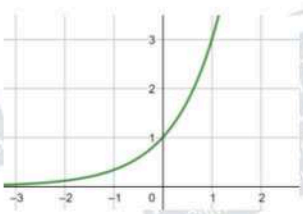
12

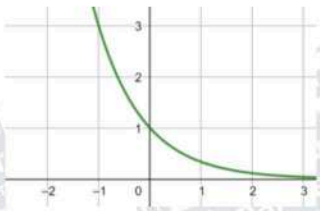
إجابات كتاب الطالب

إجابات كتاب الطالب- مادة الرياضيات- الصف الثاني عشر الأدبي ف1

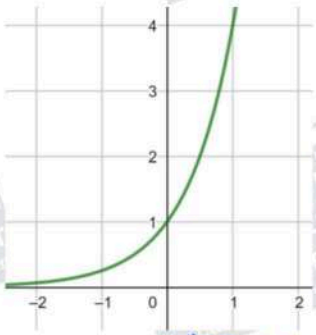
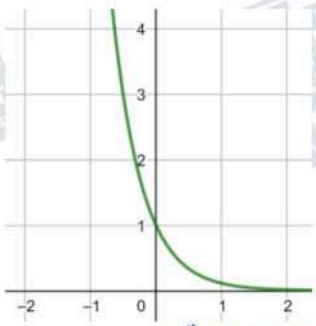
الوحدة الأولى: الاقترانات الأسية واللوغاريتمية

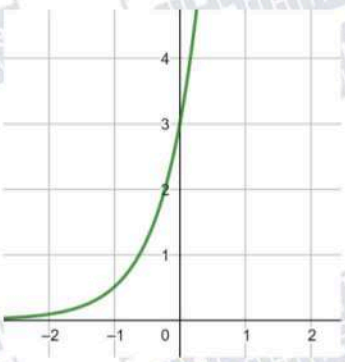
الدرس الأول: الاقترانات الأسية

	مسألة اليوم صفحة 8
	$P(t) = 325(0.25)^t$ $P(5) = 325(0.25)^5 \approx 0.32$
	أتحقق من فهمي صفحة 9
a	$f(4) = 3^4$ $= 81$
b	$f(-1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ $= 3$
	أتحقق من فهمي صفحة 10
a	$f(x) = 3^x$  مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$ لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو المحور x
b	لا يوجد لهذا الاقتران مقطع مع المحور x عندما $x = 0$ فإن $y = 1$، ومنه فإن المقطع y لهذا الاقتران هو 1
c	الاقتران $f(x)$ متزايد
d	الاقتران $f(x)$ هو اقتران واحد لواحد

	أتحقق من فهمي صفحة 12
a	$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$  مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$ لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو المحور x
b	لا يوجد لهذا الاقتران مقطع مع المحور x عندما $x = 0$ فإن $y = 1$، ومنه فإن المقطع y لهذا الاقتران هو 1
c	الاقتران $f(x)$ متناقص
d	الاقتران $f(x)$ هو اقتران واحد لواحد
	أتحقق من فهمي صفحة 15
a	$f(x) = 2(3)^{x+2} - 1$ لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = -1$ مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R مدى هذا الاقتران هو $(-1, \infty)$ الاقتران $f(x)$ متزايد
b	$f(x) = 4(5)^{-x} = 4\left(\frac{1}{5}\right)^x$ لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = 0$ مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$ الاقتران $f(x)$ متناقص

c	$f(x) = -\frac{1}{4}(3)^{x-1} + 2$ لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = 2$ مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R مدى هذا الاقتران هو $(-\infty, 2)$ الاقتران $f(x)$ متناقص
	أتحقق من فهمي صفحة 16
a	$f(5) = 500(2)^5$ $= 500(32)$ $= 16000$ عدد الخلايا البكتيرية في العينة بعد 5 ساعات هو 16000 خلية
b	$4000 = 500(2)^x$ $8 = (2)^x$ $(2)^3 = (2)^x$ $x = 3$ بعد 3 ساعات يصبح عدد الخلايا البكتيرية في العينة 4000 خلية
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 16
1	$f(3) = (11)^3$ $= 1331$
2	$f(1) = -5(2)^1$ $= -5(2)$ $= -10$
3	$f(2) = 3\left(\frac{1}{7}\right)^2$ $= 3\left(\frac{1}{49}\right)$ $= \frac{3}{49}$

4	$f(4) = -(5)^4 + 4$ $= -(625) + 4$ $= -621$
5	$f(5) = (3)^5 + 1$ $= 243 + 1$ $= 244$
6	$f(2) = \left(\frac{1}{9}\right)^2 - 3$ $= \frac{1}{81} - 3$ $= \frac{1}{81} - \frac{243}{81}$ $= -\frac{242}{81}$
7	$f(x) = 4^x$  مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$
8	$f(x) = 9^{-x} = \left(\frac{1}{9}\right)^x$  مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$

9	$f(x) = 7\left(\frac{1}{7}\right)^x$  مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$
10	$f(x) = 3(6)^x$  مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$
11	$f(x) = 5^{x-1} + 2$ لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = 2$ مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R مدى هذا الاقتران هو $(2, \infty)$ الاقتران $f(x)$ متزايد
12	$f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 5$ لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = -5$ مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R مدى هذا الاقتران هو $(-5, \infty)$ الاقتران $f(x)$ متناقص

13	$f(x) = 3\left(\frac{1}{7}\right)^{x+5} - 6$ لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = -6$ مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R مدى هذا الاقتران هو $(-6, \infty)$ الاقتران $f(x)$ متناقص
14	$f(x) = 3(7)^{x-2} + 1$ لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = 1$ مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R مدى هذا الاقتران هو $(1, \infty)$ الاقتران $f(x)$ متزايد
15	$f(0) = 7000(1.2)^0$ $= 7000(1)$ $= 7000$ عدد الخلايا البكتيرية في بداية التجربة هو 7000 خلية
16	$f(12) = 7000(1.2)^{12}$ ≈ 62413 عدد الخلايا البكتيرية بعد 12 ساعة هو 62413 خلية تقريبًا
17	$10080 = 7000(1.2)^x$ $1.44 = (1.2)^x$ $(1.2)^2 = (1.2)^x$ $x = 2$ بعد ساعتين من بدء التجربة يصبح عدد الخلايا البكتيرية 10080 خلية
18	$f(1) = 100(0.97)^1$ $= 100(0.97)$ $= 97$ نسبة الضوء المارّ خلال لوح زجاجي واحد هي 97%
19	$f(3) = 100(0.97)^3$ ≈ 91 نسبة الضوء المارّ خلال 3 ألواح زجاجية هي 91%
20	$P(1) = 100(0.3)^1$ $= 100(0.3)$ $= 30$ نسبة المتعافين بعد سنة من التشخيص الأوليّ للمرض هي 30%

21	$9 = 100(0.3)^t$ $0.09 = (0.3)^t$ $(0.3)^2 = (0.3)^t$ $t = 2$ بعد سنتين تصبح نسبة المتعافين 9%
22	$f(x) = ab^x$ من التمثيل البياني نلاحظ أن المقطع y هو 1 ، إذن عندما $x = 0$ فإن $y = 1$ نعوض $x = 0$ و $y = 1$ في قاعدة الاقتران، فنحصل على: $1 = ab^0$ $1 = a \times 1$ $a = 1$ نلاحظ أيضًا أن النقطة $\left(1, \frac{1}{4}\right)$ تقع على منحنى الاقتران، نعوض $x = 1$ و $y = \frac{1}{4}$ في قاعدة الاقتران، فنحصل على: $\frac{1}{4} = ab^1$ $\frac{1}{4} = (1)b^1$ $b = \frac{1}{4}$ ومنه فإن قاعدة هذا الاقتران هي: $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ $f(3) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$
23	الاقتران المختلف هو $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ لأنه الاقتران الوحيد المتناقص والاقترانات الأخرى متزايدة.
24	$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{ab^{x+1}}{ab^x}$ $= \frac{b^{x+1}}{b^x}$ $= b$

مسألة اليوم صفحة 18	
	$A(t) = a(1+r)^t = 10.8(1+0.026)^t$ $t = 2030 - 2020 = 10$ $A(10) = 10.8(1+0.026)^{10} \approx 13.960$ العدد التقريبي للسكان عام 2030م هو 13960000 نسمة
أتحقق من فهمي صفحة 19	
a	$A(t) = 327(1+0.18)^t$ $A(t) = 327(1.18)^t$
b	$A(3) = 327(1.18)^3$ ≈ 537 عدد الأبقار بعد 3 سنوات من بدء الدراسة هو 537 بقرة تقريبًا.
أتحقق من فهمي صفحة 21	
a	$A(t) = a(1-r)^t$ $A(t) = 28500(1-0.05)^t$ $A(t) = 28500(0.95)^t$
b	$A(4) = 28500(0.95)^4$ ≈ 23213 ثمن السيّارة بعد 4 سنوات هو 23213 دينارًا تقريبًا
أتحقق من فهمي صفحة 22	
	$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$ $= 5000\left(1+\frac{0.0225}{2}\right)^{2\times 5}$ ≈ 5591.85 جملة المبلغ بعد 3 سنوات: JD 5591.85 تقريبًا.

	أتحقق من فهمي صفحة 23
	$A = Pe^{rt}$ $= 6300e^{0.032\times 9}$ ≈ 8402.67 جملة المبلغ بعد 9 سنوات: JD 8402.67 تقريبًا.
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 24
1	$A(t) = a(1+r)^t$ $A(t) = 150(1+0.08)^t$ $A(t) = 150(1.08)^t$
2	$A(5) = 150(1.08)^5$ ≈ 220 عدد المشاركين بعد 5 سنوات 220 تقريبًا.
3	$A(t) = a(1+r)^t$ $A(t) = 50000(1+0.15)^t$ $A(t) = 50000(1.15)^t$
4	$t = 2025 - 2019 = 6$ $A(6) = 50000(1.15)^6$ ≈ 115653 عدد مستخدمي الموقع سنة 2025م: 115653 تقريبًا.
5	$A(t) = a(1-r)^t$ $A(t) = 17350(1-0.035)^t$ $A(t) = 17350(0.965)^t$
6	$A(3) = 17350(0.965)^3$ ≈ 15591.27 ثمن السيّارة بعد 3 سنوات: JD15591.27 تقريبًا.
7	$A(t) = a(1-r)^t$ $A(t) = 15275(1-0.27)^t$ $A(t) = 15275(0.73)^t$

8	$A(7) = 15275(0.73)^7$ ≈ 1687 عدد الخلايا البكتيرية في العيّنة بعد 7 ساعات: 1687 خلية تقريبًا.
9	$A(t) = a(1-r)^t$ $A(5) = 1550(1-0.25)^5$ $= 1550(0.75)^5$ ≈ 368 العدد المتبقي من الدجاج بعد 5 أيام من المرض: 368 دجاجة تقريبًا.
10	$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$ $= 1200\left(1+\frac{0.10}{12}\right)^{12t}$
11	$A = 1200\left(1+\frac{0.10}{12}\right)^{12\times 5}$ ≈ 1974.37 جملة المبلغ بعد 5 سنوات: JD 1974.37 تقريبًا.
12	$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$ $= 6200\left(1+\frac{0.084}{365}\right)^{365t}$
13	$A = 6200\left(1+\frac{0.084}{365}\right)^{365\times 6}$ ≈ 10262.45 جملة المبلغ بعد 6 سنوات: JD 10262.45 تقريبًا.
14	$A = Pe^{rt}$ $= 9000e^{0.036\times 7}$ ≈ 11579.36 جملة المبلغ بعد 7 سنوات: JD 11579.36 تقريبًا.

15	$A = Pe^{rt}$ $= 8200e^{0.049\times 9}$ ≈ 12744.94 جملة المبلغ بعد 9 سنوات: JD 12744.94 تقريبًا.
16	$P(t) = 20e^{0.03t}$ $P(72) = 20e^{0.03\times 72}$ ≈ 173 عدد ذباب الفاكهة بعد 72 ساعة من بدء الدراسة: 173 ذبابة تقريبًا.
17	الخطأ الذي ارتكبه رامي هو أنه كتب معدل الفائدة السنوي 1.25 وكان ينبغي كتابته: 0.0125 $A = 250\left(1+\frac{0.0125}{4}\right)^{4(3)} \approx 259.54$
18	النسبة المئوية للزيادة 200%، فيكون عامل النمو $1+\frac{200}{100}=3$ إذا كان عدد الإصابات في البداية يساوي N، فإن عددها بعد t أسبوعًا هو $A(t) = N(1+r)^t = N3^t$

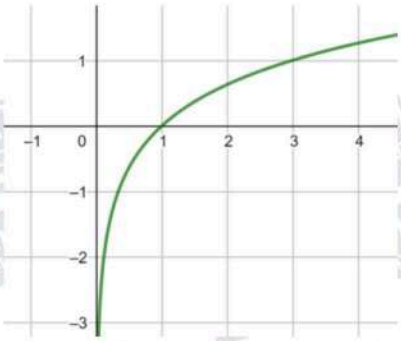
مسألة اليوم صفحة 26	
الرمز log هو اختصار لكلمة logarithm (لوغاريتم) وهو معكوس الاقتران الأسي. فإذا كان $b^x = a$ فنقول أن لوغاريتم a للأساس b هو x، وبالرموز نكتب $\log_b a = x$.	
أتحقق من فهمي مثال 1 صفحة 27	
a	$\log_2 16 = 4 \rightarrow 2^4 = 16$
b	$\log_7 7 = 1 \rightarrow 7^1 = 7$
c	$\log_3 \left(\frac{1}{243}\right) = -5 \rightarrow 3^{-5} = \frac{1}{243}$
d	$\log_9 1 = 0 \rightarrow 9^0 = 1$
أتحقق من فهمي مثال2 صفحة 27	
a	$7^3 = 343 \rightarrow \log_7 343 = 3$
b	$49^{\frac{1}{2}} = 7 \rightarrow \log_{49} 7 = \frac{1}{2}$
C	$(2)^{-5} = \frac{1}{32} \rightarrow \log_2 \frac{1}{32} = -5$
d	$17^0 = 1 \rightarrow \log_{17} 1 = 0$
أتحقق من فهمي صفحة 28	
a	$\log_5 25 = y$ $5^y = 25$ $5^y = 5^2$ $y = 2$ إذن $\log_5 25 = 2$
b	$\log_8 \sqrt{8} = y$ $8^y = \sqrt{8}$ $8^y = 8^{\frac{1}{2}}$ $y = \frac{1}{2}$ إذن $\log_8 \sqrt{8} = \frac{1}{2}$

c	$\log_{81} 9 = y$ $81^y = 9$ $9^{2y} = 9^1$ $2y = 1$ $y = \frac{1}{2}$ إذن $\log_{81} 9 = \frac{1}{2}$
d	$\log_3 \frac{1}{27} = y$ $3^y = \frac{1}{27}$ $3^y = \frac{1}{3^3}$ $3^y = 3^{-3}$ $y = -3$ إذن $\log_3 \frac{1}{27} = -3$
أتحقق من فهمي صفحة 29	
a	$\log_2 1 = 0$
b	$\log_{32} \sqrt{32} = \log_{32} 32^{\frac{1}{2}}$ $= \frac{1}{2}$
c	$\log_9 9 = 1$
d	$8^{\log_8 13} = 13$

أتحقق من فهمي صفحة 31

a

$f(x) = \log_3 x$



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$

مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

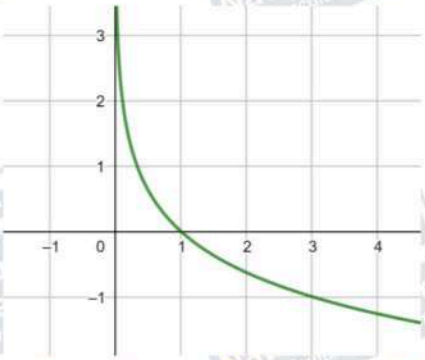
المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y

لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y

الاقتران متزايد

b

$f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$

مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y

لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y

الاقتران متناقص

أتحقق من فهمي صفحة 33

a

$f(x) = \log_7(5 - x)$

$5 - x > 0$

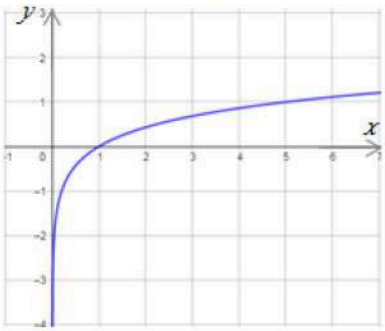
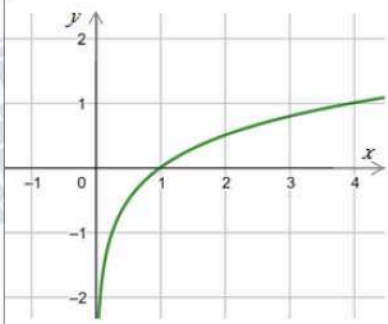
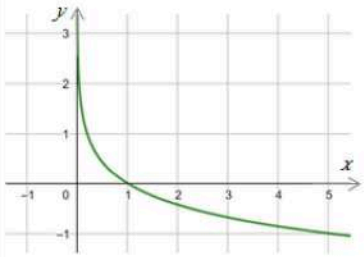
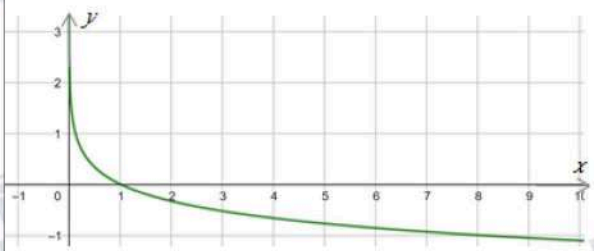
$-x > -5$

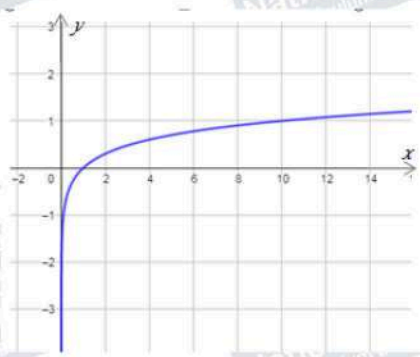
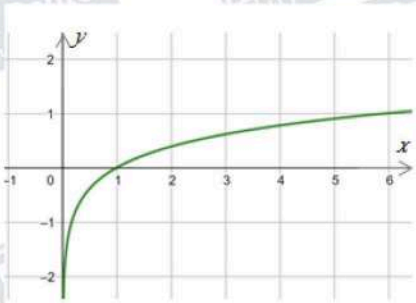
$x < 5$

مجال الاقتران هو $(-\infty, 5)$

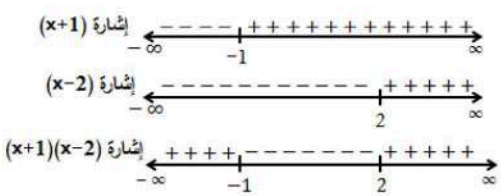
b	$f(x) = \log_5(9+3x)$ $9+3x > 0$ $3x > -9$ $x > -3$ مجال الاقتران هو $(-3, \infty)$
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 33
1	$\log_7 343 = 3 \rightarrow 7^3 = 343$
2	$\log_4 256 = 4 \rightarrow 4^4 = 256$
3	$\log_{125} 5 = \frac{1}{3} \rightarrow 125^{\frac{1}{3}} = 5$
4	$\log_{36} 6 = 0.5 \rightarrow 36^{0.5} = 6$
5	$\log_9 1 = 0 \rightarrow 9^0 = 1$
6	$\log_{57} 57 = 1 \rightarrow 57^1 = 57$
7	$2^6 = 64 \rightarrow \log_2 64 = 6$
8	$4^{-3} = \frac{1}{64} \rightarrow \log_4 \frac{1}{64} = -3$
9	$6^3 = 216 \rightarrow \log_6 216 = 3$
10	$5^{-3} = 0.008 \rightarrow \log_5 0.008 = -3$
11	$51^1 = 51 \rightarrow \log_{51} 51 = 1$
12	$9^0 = 1 \rightarrow \log_9 1 = 0$
13	$\log_3 81 = \log_3 3^4$ $= 4$
14	$\log_{25} 5 = y$ $25^y = 5$ $5^{2y} = 5^1$ $2y = 1$ $y = \frac{1}{2}$ إذن $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$
15	$\log_2 32 = \log_2 2^5$ $= 5$ إذن $\log_2 32 = 5$

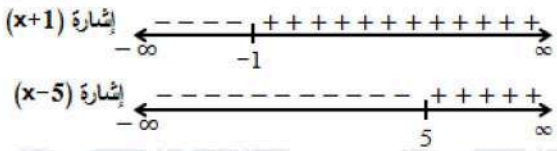
16	$\log_{49} 343 = y$ $49^y = 343$ $7^{2y} = 7^3$ $2y = 3$ $y = \frac{3}{2}$ إذن $\log_{49} 343 = \frac{3}{2}$
17	$\log_{10} 0.001 = \log_{10} 10^{-3}$ $= -3$
18	$\log_{\frac{3}{2}} 1 = 0$
19	$\log_{\frac{1}{4}} 4 = y$ $\left(\frac{1}{4}\right)^y = 4$ $4^{-y} = 4^1$ $-y = 1$ $y = -1$ إذن $\log_{\frac{1}{4}} 4 = -1$
20	$(10)^{\log_{10} \frac{1}{8}} = \frac{1}{8}$
21	$\log_2 \frac{1}{\sqrt{2^7}} = \log_2 \frac{1}{(2)^{\frac{7}{2}}}$ $= \log_2 (2)^{-\frac{7}{2}}$ $= -\frac{7}{2}$
22	$\log_a \sqrt[5]{a} = \log_a a^{\frac{1}{5}}$ $= \frac{1}{5}$
23	$\log_{10}(1 \times 10^{-9}) = \log_{10} 10^{-9}$ $= -9$
24	$8^{\log_8 5} = 5$

25	$f(x) = \log_5 x$ 	مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$ مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y الاقتران متزايد
26	$f(x) = \log_4 x$ 	مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$ مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y الاقتران متزايد
27	$f(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$ 	مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$ مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y الاقتران متناقص
28	$f(x) = \log_{\frac{1}{8}} x$ 	مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$ مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y الاقتران متناقص

29	$f(x) = \log_{10} x$  مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$ مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y الاقتران متزايد
30	$f(x) = \log_6 x$  مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$ مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y الاقتران متزايد
31	$f(x) = \log_3(x-2)$ $x - 2 > 0$ $x > 2$ مجال هذا الاقتران هو $(2, \infty)$
32	$f(x) = 5 - 2\log_7(x+1)$ $x + 1 > 0$ $x > -1$ مجال هذا الاقتران هو $(-1, \infty)$
33	$f(x) = -3\log_4(-x)$ $-x > 0$ $x < 0$ مجال هذا الاقتران هو $(-\infty, 0)$

34	$f(x) = \log_a x$ $f(32) = \log_a 32$ $5 = \log_a 32$ $a^5 = 32$ $a^5 = (2)^5$ $a = 2$
35	$f(x) = \log_c x$ $f\left(\frac{1}{4}\right) = \log_c \frac{1}{4}$ $-4 = \log_c \frac{1}{4}$ $c^{-4} = \frac{1}{4}$ $\frac{1}{c^4} = \frac{1}{4}$ $c^4 = 4 \rightarrow c^2 = 2 \rightarrow c = \pm\sqrt{2}$ ولأن أساس اللوغاريتم لا يكون سالبًا فإن: $c = \sqrt{2}$
36	$P(a) = 10 + 20\log_5(a+1)$ $P(4) = 10 + 20\log_5(4+1)$ $= 10 + 20\log_5 5$ $= 10 + 20(1)$ $= 30$ $P(24) = 10 + 20\log_5(24+1)$ $= 10 + 20\log_5 25$ $= 10 + 20\log_5 5^2$ $= 10 + 20(2)$ $= 50$ $P(124) = 10 + 20\log_5(124+1)$ $= 10 + 20\log_5 125$ $= 10 + 20\log_5 5^3$ $= 10 + 20(3)$ $= 70$
37	القيمة $P(4) = 30$ تعني أن إنفاق JD400 على الإعلانات يحقق إيرادًا قيمته JD 30000 من بيع المنتج القيمة $P(24) = 50$ تعني أن إنفاق JD 2400 على الإعلانات يحقق إيرادًا قيمته JD 50000 من بيع المنتج القيمة $P(124) = 70$ تعني أن إنفاق JD 12400 على الإعلانات يحقق إيرادًا قيمته JD 70000 من بيع المنتج

38	$f(x) = \log_3 x$ c لأن مجال الاقتران هو $(0, \infty)$ وهو متزايد ويمر منحناه بالنقطة (3, 1) حيث $f(3) = \log_3 3 = 1$
39	$f(x) = \log_3(-x)$ b لأن مجال الاقتران هو $(-\infty, 0)$، ويمر منحناه بالنقطة (-3,1) حيث $f(-3) = \log_3(-(-3)) = \log_3(3) = 1$
40	$g(x) = -\log_3 x$ a لأن مجال الاقتران هو $(0, \infty)$ وهو متناقص ويمر منحناه بالنقطة (3,-1) حيث $f(3) = -\log_3 3 = -1$
41	$f(x) = \log_3(x^2)$ بما أنّ $x^2 > 0$ لجميع الأعداد الحقيقية عدا العدد 0 فإن مجال هذا الاقتران هو $R - \{0\}$ خط التقارب الرأسي هو $x = 0$ (المحور y)
42	$f(x) = \log_3(x^2 - x - 2)$ $x^2 - x - 2 > 0$ $(x-2)(x+1) > 0$  نلاحظ أن $(x-2)(x+1) > 0$ في الفترتين $(-\infty, -1)$، و $(2, \infty)$ إذن، مجال الاقتران هو $(-\infty, -1), (2, \infty)$ خطا التقارب الرأسيان هما $x = -1, x = 2$ وهما جذرا المعادلة $x^2 - x - 2 = 0$

43	$f(x) = \log_3\left(\frac{x+1}{x-5}\right)$ يكون $\frac{x+1}{x-5} > 0$ عندما يكون البسط والمقام موجبان معًا، أو سالبان معًا  نلاحظ أن $x+1$، و $x-5$ لهما الإشارة نفسها في الفترتين $(-\infty, -1)$، و $(5, \infty)$ إذن، مجال هذا الاقتران هو $(-\infty, -1), (5, \infty)$ خطا التقارب الرأسيان هما $x = -1, x = 5$ وهما جذرا المعادلتين $x - 5 = 0, x + 1 = 0$
44	الكتابة الصحيحة للصورة اللوغاريتمية هي: $\log_4 \frac{1}{64} = -3$

	مسألة اليوم صفحة 35
	$L = 10\log_{10} R$ $L = 10\log_{10}(100 \times 10^6)$ $= 10\log_{10} 10^8 = 10 \times 8 = 80$ شدة الصوت تساوي 80 ديسيبل
	أتحقق من فهمي صفحة 36
a	$\log_b 14 = \log_b(2 \times 7)$ $= \log_b 2 + \log_b 7$ $\approx 0.43 + 1.21$ ≈ 1.64
b	$\log_b \frac{2}{7} = \log_b 2 - \log_b 7$ $\approx 0.43 - 1.21$ ≈ -0.78
c	$\log_b 32 = \log_b 2^5$ $= 5\log_b 2$ $\approx 5 \times 0.43$ ≈ 2.15
d	$\log_b \frac{1}{49} = \log_b 1 - \log_b 49$ $= 0 - \log_b 7^2$ $= 0 - 2\log_b 7$ $\approx 0 - 2 \times 1.21$ ≈ -2.42
	أتحقق من فهمي صفحة 38
a	$\log_2 a^2 b^9 = \log_2 a^2 + \log_2 b^9$ $= 2\log_2 a + 9\log_2 b$
b	$\log_5 \frac{(x+1)^3}{8} = \log_5 (x+1)^3 - \log_5 8$ $= 3\log_5(x+1) - \log_5 8$
c	$\log_3 \frac{x^7 y^3}{z^5} = \log_3 x^7 y^3 - \log_3 z^5$ $= \log_3 x^7 + \log_3 y^3 - \log_3 z^5$ $= 7\log_3 x + 3\log_3 y - 5\log_3 z$

d	$\log_b \sqrt[3]{\frac{x^7b^2}{y^5}} = \log_b \left(\frac{x^7b^2}{y^5}\right)^{\frac{1}{3}}$ $= \frac{1}{3}\log_b \frac{x^7b^2}{y^5}$ $= \frac{1}{3}\left(\log_b x^7b^2 - \log_b y^5\right)$ $= \frac{1}{3}\left(\log_b x^7 + \log_b b^2 - \log_b y^5\right)$ $= \frac{1}{3}(7\log_b x + 2\log_b b - 5\log_b y)$ $= \frac{7}{3}\log_b x + \frac{2}{3}\log_b b - \frac{5}{3}\log_b y$ $= \frac{7}{3}\log_b x + \frac{2}{3} - \frac{5}{3}\log_b y$
	أتحقق من فهمي صفحة 39
a	$\log_5 a + 3\log_5 b = \log_5 a + \log_5 b^3$ $= \log_5 ab^3$
b	$5\log_b x + \frac{1}{2}\log_b y - 9\log_b z = \log_b x^5 + \log_b y^{\frac{1}{2}} - \log_b z^9$ $= \log_b x^5y^{\frac{1}{2}} - \log_b z^9$ $= \log_b \frac{x^5y^{\frac{1}{2}}}{z^9}$ $= \log_b \frac{x^5\sqrt{y}}{z^9}$

أتحقق من فهمي صفحة 40	
	$M(t) = 92 - 28\log_{10}(t+1)$ $M(29) = 92 - 28\log_{10}(29+1)$ $= 92 - 28\log_{10} 30$ $= 92 - 28\log_{10}(10 \times 3)$ $= 92 - 28(\log_{10} 10 + \log_{10} 3)$ $\approx 92 - 28(1 + 0.4771)$ $\approx 92 - 28(1.4771)$ $\approx 92 - 41.3588$ ≈ 51 النسبة المئوية للموضوعات التي يتذكرها هذا الطالب بعد 29 شهرًا هي 51% تقريبًا

أتدرب وأحل المسائل صفحة 40	
1	$\log_a \frac{5}{6} = \log_a 5 - \log_a 6$ $\approx 0.699 - 0.778$ ≈ -0.079
2	$\log_a 30 = \log_a(5 \times 6)$ $= \log_a 5 + \log_a 6$ $\approx 0.699 + 0.778$ ≈ 1.477
3	$\frac{\log_a 5}{\log_a 6} = \frac{0.699}{0.778} = \frac{699}{778} \approx 0.90$
4	$\log_a \frac{1}{6} = \log_a 1 - \log_a 6$ $\approx 0 - 0.778$ ≈ -0.778

5	$\log_a 900 = \log_a 30^2$ $= 2\log_a 30$ $= 2\log_a(5 \times 6)$ $= 2(\log_a 5 + \log_a 6)$ $\approx 2(0.699 + 0.778)$ $\approx 2 \times 1.477$ ≈ 2.954
6	$\log_a \frac{18}{15} = \log_a \frac{6}{5}$ $= \log_a 6 - \log_a 5$ $\approx 0.778 - 0.699$ ≈ 0.079
7	$\log_a(6a^2) = \log_a 6 + \log_a a^2$ $= \log_a 6 + 2\log_a a$ $\approx 0.778 + 2$ ≈ 2.778
8	$\log_a \sqrt[4]{25} = \log_a \sqrt[4]{5^2}$ $= \log_a 5^{\frac{2}{4}}$ $= \log_a 5^{\frac{1}{2}}$ $= \frac{1}{2}\log_a 5$ $\approx \frac{1}{2} \times 0.699$ ≈ 0.350
9	$(\log_a 5)(\log_a 6) \approx 0.699 \times 0.778$ ≈ 0.544
10	$\log_a x^2 = 2\log_a x$

11	$\log_a\left(\frac{a}{bc}\right) = \log_a a - \log_a bc$ $= \log_a a - (\log_a b + \log_a c)$ $= \log_a a - \log_a b - \log_a c$ $= 1 - \log_a b - \log_a c$
12	$\log_a(\sqrt{x}\sqrt{y}) = \log_a \sqrt{x} + \log_a \sqrt{y}$ $= \log_a x^{\frac{1}{2}} + \log_a y^{\frac{1}{2}}$ $= \frac{1}{2}\log_a x + \frac{1}{2}\log_a y$
13	$\log_a\left(\frac{\sqrt{z}}{y}\right) = \log_a \sqrt{z} - \log_a y$ $= \log_a z^{\frac{1}{2}} - \log_a y$ $= \frac{1}{2}\log_a z - \log_a y$
14	$\log_a \frac{1}{x^2y^2} = \log_a 1 - \log_a x^2y^2$ $= \log_a 1 - (\log_a x^2 + \log_a y^2)$ $= 0 - (2\log_a x + 2\log_a y)$ $= -2\log_a x - 2\log_a y$
15	$\log_a \sqrt[5]{32x^5} = \log_a\left(\sqrt[5]{32} \times \sqrt[5]{x^5}\right)$ $= \log_a 2x$ $= \log_a 2 + \log_a x$
16	$\log_a \frac{(x^2y^3)^2}{(x^2y^3)^3} = \log_a \frac{1}{x^2y^3}$ $= \log_a 1 - \log_a x^2y^3$ $= \log_a 1 - (\log_a x^2 + \log_a y^3)$ $= 0 - (2\log_a x + 3\log_a y)$ $= -2\log_a x - 3\log_a y$
17	$\log_a(x+y-z)^7 = 7\log_a(x+y-z)$

18	$\log_a \sqrt{\frac{x^{12}y}{y^3z^4}} = \log_a \sqrt{\frac{x^{12}}{y^2z^4}}$ $= \log_a \frac{\sqrt{x^{12}}}{\sqrt{y^2}\sqrt{z^4}}$ $= \log_a \frac{x^{\frac{12}{2}}}{y^{\frac{2}{2}}z^{\frac{4}{2}}}$ $= \log_a \frac{x^6}{yz^2}$ $= \log_a x^6 - \log_a yz^2$ $= 6\log_a x - (\log_a y + \log_a z^2)$ $= 6\log_a x - (\log_a y + 2\log_a z)$ $= 6\log_a x - \log_a y - 2\log_a z$
19	$\log_a x + \log_a y = \log_a xy$
20	$\log_b(x+y) - \log_b(x-y) = \log_b \frac{x+y}{x-y}$
21	$\log_a \frac{1}{\sqrt{x}} - \log_a \sqrt{x} = \log_a \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ $= \log_a \frac{1}{x}$
22	$\log_a(x^2-4) - \log_a(x+2) = \log_a \frac{(x^2-4)}{(x+2)}$ $= \log_a \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)}$ $= \log_a(x-2)$
23	$2\log_b x - 3\log_b y + \frac{1}{3}\log_b z = \log_b x^2 - \log_b y^3 + \log_b z^{\frac{1}{3}}$ $= \log_b \frac{x^2}{y^3} + \log_b z^{\frac{1}{3}}$ $= \log_b \frac{x^2 z^{\frac{1}{3}}}{y^3}$ $= \log_b \frac{x^2\sqrt[3]{z}}{y^3}$
24	$\log_b 1 + 2\log_b b = \log_b b^2 = 2$

25	$f(x) = 29 + 48.8\log_6(x+2)$ $f(10) = 29 + 48.8\log_6(10+2)$ $= 29 + 48.8\log_6 12$ $= 29 + 48.8\log_6(6\times 2)$ $= 29 + 48.8(\log_6 6 + \log_6 2)$ $\approx 29 + 48.8(1 + 0.3869)$ $\approx 29 + 48.8(1.3869)$ $\approx 29 + 67.68072$ ≈ 97 النسبة المئوية لطول طفل عمره 10 سنوات من طوله عند البلوغ هي 97% تقريبًا
26	$\frac{\log_a 216}{\log_a 36} = \frac{\log_a 6^3}{\log_a 6^2}$ $= \frac{3\log_a 6}{2\log_a 6}$ $= \frac{3}{2}$
27	$\log_2 5x = \log_2 5 + \log_2 x$
28	$\log_b(b-3) + \log_b(b^2+3b) - \log_b(b^2-9)$ $= \log_b(b-3)(b^2+3b) - \log_b(b^2-9)$ $= \log_b \frac{(b-3)(b^2+3b)}{(b^2-9)}$ $= \log_b \frac{(b-3)\times b(b+3)}{(b-3)(b+3)}$ $= \log_b b$ $= 1$

	مسألة اليوم صفحة 42
	$A(t) = 10e^{-0.0862t}$ $0.5 = 10e^{-0.0862t}$ $0.05 = e^{-0.0862t}$ $-0.0862t = \ln 0.05$ $t = -\frac{\ln 0.05}{0.0862} \approx 35$ بعد حوالي 35 يومًا سيظل من هذه العينة 0.5 g
	أتحقق من فهمي صفحة 43
a	$\log 13 \approx 1.1$
b	$\log(3.1 \times 10^4) = \log 3.1 + \log 10^4$ $= \log 3.1 + 4\log 10 \approx 0.491 + 4 \approx 4.5$
c	$\ln 0.25 \approx -1.4$
	أتحقق من فهمي صفحة 44
a	$\log_3 51 = \frac{\log 51}{\log 3} \approx 3.58$
b	$\log_{\frac{1}{2}} 13 = \frac{\log 13}{\log \frac{1}{2}} \approx -3.70$
	أتحقق من فهمي مثال 3 صفحة 48
a	$7^x = 9$ $x = \log_7 9 = \frac{\log 9}{\log 7} \approx 1.1292$

b	$2e^{5x} = 64$ $e^{5x} = 32$ $5x = \ln 32$ $x = \frac{1}{5}\ln 32 \approx 0.6931$
c	$7^{2x+1} = 2^{x-4}$ $\log 7^{2x+1} = \log 2^{x-4}$ $(2x+1)\log 7 = (x-4)\log 2$ $2x\log 7 + \log 7 = x\log 2 - 4\log 2$ $2x\log 7 - x\log 2 = -\log 7 - 4\log 2$ $x(2\log 7 - \log 2) = -\log 7 - 4\log 2$ $x = \frac{-\log 7 - 4\log 2}{2\log 7 - \log 2} \approx -1.4751$
d	$4^x + 2^x - 12 = 0$ $(2^x)^2 + 2^x - 12 = 0$ $u^2 + u - 12 = 0$ $(u+4)(u-3) = 0$ $u = -4 \quad or \quad u = 3$ $2^x = -4 \quad or \quad 2^x = 3$ المعادلة $2^x = -4$ ليس لها حل لأن $2^x > 0$ لكل قيم المتغير x $2^x = 3 \qquad \rightarrow x = \log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.5850$

أتحقق من فهمي مثال 4 صفحة 48	
	$9 = 6.5(1.014)^t$ $\frac{9}{6.5} = (1.014)^t$ $\ln\frac{9}{6.5} = \ln(1.014)^t \rightarrow \ln 9 - \ln 6.5 = t \ln 1.014$ $t = \frac{\ln 9 - \ln 6.5}{\ln 1.014} \approx 23$ إذن، سيبلغ عدد سكان العالم 9 مليارات نسمة بعد 23 سنة تقريبًا من عام 2006

أتدرب وأحل المسائل صفحة 49	
1	$\log 19 \approx 1.3$
2	$\log(2.5 \times 10^{-3}) \approx -2.6$
3	$\ln 3.1 \approx 1.1$
4	$\log_2 10 = \frac{\log 10}{\log 2} \approx 3.3$
5	$\log_3 e^2 = \frac{\ln e^2}{\ln 3} = \frac{2}{\ln 3} \approx 1.8$
6	$\ln 5 \approx 1.6$
7	$\log_3 33 = \frac{\log 33}{\log 3} \approx 3.18$
8	$\log_{\frac{1}{3}} 17 = \frac{\log 17}{\log \frac{1}{3}} = \frac{\log 17}{\log 1 - \log 3} \approx -2.58$
9	$\log_6 5 = \frac{\log 5}{\log 6} \approx 0.90$
10	$\log_7 \frac{1}{7} = \log_7 1 - \log_7 7 = 0 - 1 = -1$
11	$\log 1000 = 3$
12	$\log_3 15 = \frac{\log 15}{\log 3} \approx 2.46$

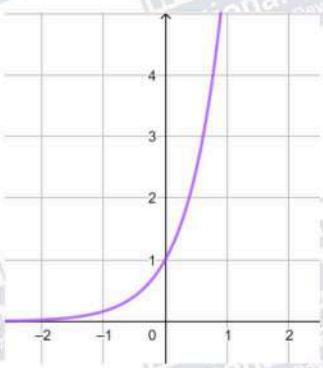
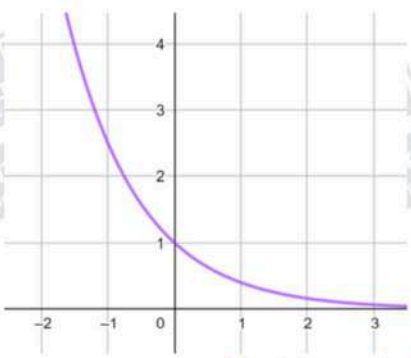
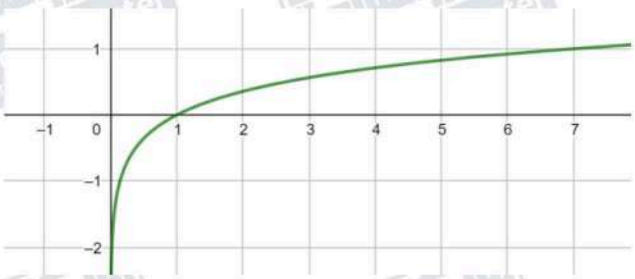
13	$6^x = 121$ $\log 6^x = \log 121 \rightarrow x \log 6 = \log 121$ $\rightarrow x = \dfrac{\log 121}{\log 6} \approx 2.6766$
14	$-3e^{4x} = -27$ $e^{4x} = 9$ $4x = \ln 9$ $x = \dfrac{1}{4}\ln 9 \approx 0.5493$
15	$5^{7x-2} = 3^{2x}$ $\log 5^{7x-2} = \log 3^{2x}$ $(7x-2)\log 5 = (2x)\log 3$ $7x\log 5 - 2\log 5 = 2x\log 3$ $7x\log 5 - 2x\log 3 = 2\log 5$ $x(7\log 5 - 2\log 3) = 2\log 5$ $x = \dfrac{2\log 5}{7\log 5 - 2\log 3} \approx 0.3549$
16	$25^x + 5^x - 42 = 0$ $(5^x)^2 + 5^x - 42 = 0$ $u^2 + u - 42 = 0$ $(u+7)(u-6) = 0$ $u = -7 \quad or \quad u = 6$ $5^x = -7 \quad or \quad 5^x = 6$ المعادلة $5^x = -7$ ليس لها حل لأن $5^x > 0$ لكل قيم المتغير x $5^x = 6 \quad \rightarrow x\log 5 = \log 6 \rightarrow x = \dfrac{\log 6}{\log 5} \approx 1.1133$
17	$2(9)^x = 32 \rightarrow 9^x = 16 \rightarrow x\log 9 = \log 16$ $\rightarrow x = \dfrac{\log 16}{\log 9} \approx 1.2619$

18	$27^{2x+3} = 2^{x-5}$ $\log 27^{2x+3} = \log 2^{x-5}$ $(2x+3)\log 27 = (x-5)\log 2$ $2x\log 27 + 3\log 27 = x\log 2 - 5\log 2$ $2x\log 27 - x\log 2 = -3\log 27 - 5\log 2$ $x(2\log 27 - \log 2) = -3\log 27 - 5\log 2$ $x = \dfrac{-3\log 27 - 5\log 2}{2\log 27 - \log 2} \approx -2.2638$
19	$2P = Pe^{0.05t}$ $2 = e^{0.05t}$ $0.05t = \ln 2$ $t = \dfrac{1}{0.05}\ln 2$ $= 20\ln 2 \approx 14$ بعد 14 سنة تقريبًا تصبح جملة المبلغ مثلي المبلغ الأصلي
20	$3P = Pe^{0.05t}$ $3 = e^{0.05t}$ $0.05t = \ln 3$ $t = 20\ln 3 \approx 22$ بعد 22 سنة تقريبًا تصبح جملة المبلغ 3 أمثال المبلغ الأصلي

21	$97 = 873e^{-0.078t}$ $\frac{97}{873} = e^{-0.078t}$ $\frac{1}{9} = e^{-0.078t}$ $-0.078t = \ln\frac{1}{9}$ $-0.078t = \ln 1 - \ln 9$ $-0.078t = 0 - \ln 9$ $-0.078t = -\ln 9$ $t = \frac{\ln 9}{0.078} \approx 28$ بعد 28سنة تقريبًا يصبح في الغابة 97 حيوانًا من الكوالا
22	$f(x) = e^{0.5x+3}$ بما أن النقطة $(-2, k)$ تقع على منحنى الاقتران، فإن إحداثياها يحققان معادلة المنحنى $f(-2) = e^{0.5(-2)+3}$ $k = e^2 \approx 7.39$ بما أن النقطة $(h, 100)$ تقع على منحنى الاقتران، فإن إحداثياها يحققان معادلة المنحنى $f(h) = e^{0.5h+3}$ $100 = e^{0.5h+3}$ $0.5h + 3 = \ln 100$ $0.5h = \ln 100 - 3$ $h = \frac{1}{0.5}\ln 100 - \frac{3}{0.5}$ $h = 2\ln 100 - 6 \approx 3.2$

23	$3^x + \frac{4}{3^x} = 5$ $3^x\left(3^x + \frac{4}{3^x}\right) = 3^x \times 5$ $3^{2x} + 4 = 5(3^x)$ $3^{2x} - 5(3^x) + 4 = 0$ $(3^x)^2 - 5(3^x) + 4 = 0$ $u^2 - 5u + 4 = 0$ $(u-4)(u-1) = 0$ $u = 4 \quad or \quad u = 1$ $3^x = 4 \quad or \quad 3^x = 1$ $3^x = 4 \quad \rightarrow x = \log_3 4 \approx 1.26$ $3^x = 1 \quad \rightarrow x = \log_3 1 = 0$

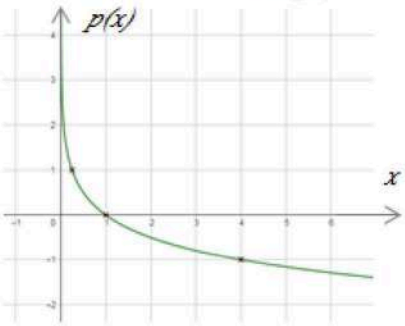
اختبار نهاية الوحدة صفحة 50	
1	d
2	c
3	a
4	c
5	a
6	b
7	b
8	a
9	b
10	$\log_5 16 = \log_5 4^2$ $= 2\log_5 4$ $= 2k$

11	$\log_5 0.25 = \log_5 \frac{25}{100}$ $= \log_5 \frac{1}{4}$ $= \log_5 1 - \log_5 4$ $= 0 - \log_5 4$ $= -k$
12	$f(x) = 6^x$  مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$
13	$g(x) = (0.4)^x$  مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$
14	$h(x) = \log_7 x$  مجال هذا الاقتران هو $(0, \infty)$ مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R

15

$p(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

$x = (\frac{1}{4})^y$	4	1	$\frac{1}{4}$
y	-1	0	1
(x, y)	(4, -1)	(1,0)	(0.25, 1)



مجال هذا الاقتران هو $(0, \infty)$

مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R

16

$$8^x = 2$$
$$2^{3x} = 2^1$$
$$3x = 1$$
$$x = \frac{1}{3} \approx 0.3333$$

17

$$-3e^{4x+1} = -96$$
$$e^{4x+1} = 32$$
$$4x + 1 = \ln 32$$
$$4x = \ln 32 - 1$$
$$x = \frac{\ln 32 - 1}{4} \approx 0.6164$$

18

$$11^{2x+3} = 5^x$$
$$\log 11^{2x+3} = \log 5^x$$
$$(2x + 3)\log 11 = (x)\log 5$$
$$2x \log 11 + 3\log 11 = x \log 5$$
$$2x \log 11 - x \log 5 = -3\log 11$$
$$x(2\log 11 - \log 5) = -3\log 11$$
$$x = \frac{-3\log 11}{2\log 11 - \log 5} \approx -2.2577$$

19	$49^x + 7^x - 72 = 0$ $(7^x)^2 + 7^x - 72 = 0$ $u^2 + u - 72 = 0$ $(u+9)(u-8) = 0$ $u = -9 \quad or \quad u = 8$ $7^x = -9 \quad or \quad 7^x = 8$ المعادلة $7^x = -9$ ليس لها حل لأن $7^x > 0$ لكل قيم المتغير x $7^x = 8 \qquad \rightarrow x = \log_7 8 = \frac{\log 8}{\log 7} \approx 1.0686$
20	$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ $A = 2500\left(1 + \frac{0.042}{12}\right)^{12\times 15} \approx 4688.87$ جملة المبلغ بعد 15 سنة هي JD 4688.87 تقريبًا
21	$A = Pe^{rt}$ $A = 800e^{0.045\times 5} \approx 1001.86$ جملة المبلغ بعد 5 سنوات هي JD1001.86 تقريبًا
22	$v(t) = 30e^{0.1t}$ $10000 = 30e^{0.1t}$ $\frac{1000}{3} = e^{0.1t}$ $0.1t = \ln\frac{1000}{3}$ $t = \frac{1}{0.1}\ln\frac{1000}{3} \approx 58.1$ الزمن اللازم لإصابة 10000 جهاز حاسوب بالفيروس هو 58.1 دقيقة تقريبًا
23	$N(t) = 100e^{0.045t}$ $N(0) = 100e^{0.045\times 0} = 100$ العدد الأصلي للخلايا البكتيرية في العيّنة هو 100 خلية
24	$N(5) = 100e^{0.045\times 5} \approx 125$ عدد الخلايا البكتيرية في العيّنة بعد 5 أيام هو 125 خلية تقريبًا

25	$1400 = 100e^{0.045t}$ $14 = e^{0.045t}$ $0.045t = \ln 14$ $t = \frac{\ln 14}{0.045} \approx 59$ بعد 59 يومًا تقريبًا يصبح عدد الخلايا البكتيرية 1400 خلية
26	$200 = 100e^{0.045t}$ $2 = e^{0.045t}$ $0.045t = \ln 2$ $t = \frac{\ln 2}{0.045} \approx 15$ بعد 15 يومًا تقريبًا يصبح عدد الخلايا البكتيرية ضعف العدد الأصلي
27	$A(h) = a(1-r)^h$ $A(h) = 1000(1-0.12)^h$ $= 1000(0.88)^h$
28	$500 = 1000(0.88)^h$ $0.5 = (0.88)^h \rightarrow \log 0.5 = h \log 0.88$ $\rightarrow h = \frac{\log 0.5}{\log 0.88} \approx 5.42$ عند ارتفاع 5.42 كيلومتر تقريبًا فوق سطح البحر تصبح قيمة الضغط الجوي مساوية نصف قيمتها عند سطح البحر
29	$S(x) = 400 + 250 \log x$ $S(10) = 400 + 250 \log 10 = 650$ أي أن إنفاق JD 10000 على الإعلانات يحقق إيرادات قيمتها JD 650000

الوحدة الثانية: التفاضل

الدرس الأول: قاعدة السلسلة

	مسألة اليوم صفحة 54
	$N(t) = 20 - \frac{30}{\sqrt{9-t^2}}$ $N'(t) = \frac{30\left(\frac{-2t}{2\sqrt{9-t^2}}\right)}{9-t^2} = \frac{-30t}{(9-t^2)\sqrt{9-t^2}}$
	أتحقق من فهمي صفحة 56
a	$y = (x^2-2)^4$ $u = x^2 - 2$ $y = u^4$ $\frac{du}{dx} = 2x$ $\frac{dy}{du} = 4u^3$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ $= 4u^3 \times 2x$ $= 8xu^3$ $= 8x(x^2-2)^3$

b	$y=\sqrt{x^3+4x}=(x^3+4x)^{\frac{1}{2}}$ $u=x^3+4x$ $y=u^{\frac{1}{2}}$ $\frac{du}{dx}=3x^2+4$ $\frac{dy}{du}=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}$ $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$ $=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\times(3x^2+4)$ $=\frac{3x^2+4}{2\sqrt{x^3+4x}}$

أتحقق من فهمي صفحة 58

a	$f'(x)=5(x^4+1)^4(4x^3)$ $=20x^3(x^4+1)^4$ $f'(1)=20(1)^3((1)^4+1)^4=20\times16=320$
b	$f(x)=\sqrt{x^2+3x+2}=(x^2+3x+2)^{\frac{1}{2}}$ $f'(x)=\frac{1}{2}(x^2+3x+2)^{-\frac{1}{2}}(2x+3)$ $=\frac{1}{2}(2x+3)(x^2+3x+2)^{-\frac{1}{2}}$ $=\frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+2}}$ $f'(2)=\frac{2(2)+3}{2\sqrt{2^2+3\times2+2}}=\frac{7}{2\sqrt{12}}$
c	$f(x)=\sqrt[4]{(2x^2-7)^5}=(2x^2-7)^{\frac{5}{4}}$ $f'(x)=\frac{5}{4}(2x^2-7)^{\frac{1}{4}}(4x)$ $=\frac{5}{4}(4x)(2x^2-7)^{\frac{1}{4}}$ $=5x\times\sqrt[4]{2x^2-7}$ $f'(4)=5\times4\times\sqrt[4]{2(4)^2-7}=20\sqrt[4]{25}$

	أتحقق من فهمي صفحة 59
a	$f'(x) = 4(1+x^3)^3(3x^2) + 8x^7$ $= 12x^2(1+x^3)^3 + 8x^7$
b	$f(x) = (2x-1)^{\frac{1}{3}} - (x-3)^3$ $f'(x) = \frac{1}{3}(2x-1)^{-\frac{2}{3}}(2) - 3(x-3)^2(1)$ $= \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}} - 3(x-3)^2$
	أتحقق من فهمي صفحة 61
a	$P'(t) = \frac{20t+1}{2\sqrt{10t^2+t+229}}$
b	$t = 2020 - 2015 = 5$ $P'(5) = \frac{101}{2\sqrt{250+5+229}} = \frac{101}{2\sqrt{484}} = \frac{101}{2\times 22} = \frac{101}{44} \approx 2.3$ إذن، في سنة 2020 يزداد إجمالي الأرباح بمعدل 2300 دينار لكل سنة.

	أتحقق من فهمي صفحة 62
	$\frac{dy}{du} = 5u^4 + 3u^2$ $\frac{du}{dx} = -4$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ $= (5u^4 + 3u^2) \times -4$ $= -4(5(3-4x)^4 + 3(3-4x)^2)$ $= -20\,(3-4x)^4 - 12(3-4x)^2$ $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=2} = -20(625) - 12(25) = -12800$
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 62
1	$f'(x) = 4(1+2x)^3(2)$ $= 8(1+2x)^3$
2	$f'(x) = -5(3-2x^2)^{-6}(-4x)$ $= 20x(3-2x^2)^{-6}$ $= \frac{20x}{(3-2x^2)^6}$
3	$f'(x) = \frac{3}{2}(x^2-7x+1)^{\frac{1}{2}}(2x-7)$ $= \frac{3}{2}(2x-7)\sqrt{x^2-7x+1}$
4	$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{7-x}}$
5	$f'(x) = 16(2+8x)^3(8)$ $= 128(2+8x)^3$
6	$f(x) = (4x-8)^{-\frac{1}{3}}$ $f'(x) = -\frac{1}{3}(4x-8)^{-\frac{4}{3}}(4)$ $= -\frac{4}{3}(4x-8)^{-\frac{4}{3}}$ $= \frac{-4}{3\sqrt[3]{(4x-8)^4}}$

7	$f'(x) = \dfrac{9x^2}{2\sqrt{5+3x^3}}$
8	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 2(x-3)$
9	$f(x) = (2x - x^5)^{\frac{1}{3}} + (4-x)^2$ $f'(x) = \dfrac{1}{3}(2x - x^5)^{-\frac{2}{3}}(2 - 5x^4) + 2(4-x)(-1)$ $= \dfrac{2 - 5x^4}{3\sqrt[3]{(2x - x^5)^2}} - 8 + 2x$
10	$f'(x) = 4(\sqrt{x} + 5)^3 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $= \dfrac{2(\sqrt{x} + 5)^3}{\sqrt{x}}$
11	$f'(x) = \dfrac{3(2x-5)^2(2)}{2\sqrt{(2x-5)^3}}$ $= \dfrac{3(2x-5)^2}{\sqrt{(2x-5)^3}} = 3\sqrt{2x-5}$
12	$f'(x) = 5(2x^3 - 3x^2 + 4x + 1)^4(6x^2 - 6x + 4)$
13	$f(x) = (4x+1)^{-2}$ $f'(x) = -2(4x+1)^{-3}(4)$ $= -\dfrac{8}{(4x+1)^3}$ $f'\left(\dfrac{1}{4}\right) = -\dfrac{8}{\left(4 \times \frac{1}{4} + 1\right)^3} = -1$
14	$f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}$ $f'(3) = \dfrac{-3}{\sqrt{25 - (3)^2}} = -\dfrac{3}{4}$

15	$\frac{dy}{du} = 10u + 3$ $\frac{du}{dx} = 3x^2$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ $= (10u + 3) \times 3x^2$ $= (10(x^3 + 1) + 3) \times 3x^2$ $= (10x^3 + 13) \times 3x^2$ $= 30x^5 + 39x^2$
16	$y = (2u + 5)^{\frac{1}{3}}$ $\frac{dy}{du} = \frac{1}{3}(2u + 5)^{-\frac{2}{3}}(2) = \frac{2}{3}(2u + 5)^{-\frac{2}{3}}$ $\frac{du}{dx} = 2x - 1$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ $= \frac{2}{3}(2u + 5)^{-\frac{2}{3}} \times (2x - 1)$ $= \frac{2}{3}(2(x^2 - x) + 5)^{-\frac{2}{3}} \times (2x - 1)$ $= \frac{4x - 2}{3\sqrt[3]{(2x^2 - 2x + 5)^2}}$

17	$\frac{dy}{du} = 6u - 5$ $\frac{du}{dx} = 2x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ $= (6u - 5) \times (2x)$ $= (6(x^2 - 1) - 5) \times (2x)$ $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=2} = (6(4 - 1) - 5) \times (4) = 52$
18	$\frac{dy}{du} = 3(1 + u^2)^2(2u) = 6u(1 + u^2)^2$ $\frac{du}{dx} = 2$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ $= 6u(1 + u^2)^2 \times (2)$ $= 12(2x - 1)(1 + (2x - 1)^2)^2$ $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=1} = 12(2 - 1)(1 + (2 - 1)^2)^2 = 48$
19	$C'(x) = \frac{1000(2x - 0.1)}{2\sqrt{x^2 - 0.1x}} = \frac{1000x - 50}{\sqrt{x^2 - 0.1x}}$
20	$C'(20) = \frac{1000(20) - 50}{\sqrt{(20)^2 - 0.1(20)}} = \frac{19950}{\sqrt{398}} \approx 1000$
21	$N(t) = 400(1 - 3(t^2 + 2)^{-2})$ $N'(t) = 400\left(6(t^2 + 2)^{-3}(2t)\right) = \frac{4800t}{(t^2 + 2)^3}$ $N'(1) = \frac{4800}{(1 + 2)^3} \approx 178$

22	$N'(4) = \dfrac{4800(4)}{(16+2)^3} \approx 3$
23	$f'(x) = g'\big(h(x)\big) \times h'(x)$ $f'(3) = g'\big(h(3)\big) \times h'(3)$ $= g'(2) \times -2$ $= 6 \times -2 = -12$
24	$f'(x) = 3\big(h(x)\big)^2 \times h'(x)$ $f'(3) = 3\big(h(3)\big)^2 \times h'(3)$ $= 3(2)^2 \times -2 = -24$
25	$h'(x) = f'\big(g(x)\big) \times g'(x)$ $h'(2) = f'\big(g(2)\big) \times g'(2)$ $= f'(3) \times -1$ نجد مشتقة f ونحسب $f'(3)$ $f(u) = u^2 - 1 \quad \rightarrow \quad f'(u) = 2u \quad \rightarrow f'(3) = 2 \times 3 = 6$ إذن، $h'(2) = f'(3) \times -1$ $= 6 \times -1 = -6$
26	$y = (x^2 - 4)^5$ $0 = (x^2 - 4)^5 \quad \rightarrow x^2 - 4 = 0 \quad \rightarrow (x-2)(x+2) = 0$ $\rightarrow \quad x = 2 \text{ or } x = -2$ $\dfrac{dy}{dx} = 5(x^2-4)^4(2x) = 10x(x^2-4)^4$ $\left.\dfrac{dy}{dx}\right\|_{x=2} = 10(2)(2^2-4)^4 = 0$ $\left.\dfrac{dy}{dx}\right\|_{x=-2} = 10(-2)((-2)^2-4)^4 = 0$
27	$p(x)$ هو الاقتران الوحيد الذي يمكن اشتقاقه بدون تطبيق قاعدة السلسلة

28	$f(x) = (2x + (x^2 + x)^4)^{\frac{1}{3}}$ $f'(x) = \frac{1}{3}(2x + (x^2 + x)^4)^{-\frac{2}{3}}\left(2 + 4(x^2 + x)^3(2x + 1)\right)$ $= \frac{2 + 4(x^2 + x)^3(2x + 1)}{3\sqrt[3]{(2x + (x^2 + x)^4)^2}}$

الدرس الثاني: مشتقتا الضرب والقسمة

مسألة اليوم صفحة 64	
	$\frac{dh}{dt} = \frac{(8 + t^3)(3t^2) - (t^3)(3t^2)}{(8 + t^3)^2}$ $= \frac{24t^2 + 3t^5 - 3t^5}{(8 + t^3)^2}$ $= \frac{24t^2}{(8 + t^3)^2}$

أتحقق من فهمي صفحة 65	
a	$f'(x) = (x^3 + 4)(14x - 4) + (7x^2 - 4x)(3x^2)$ $= 14x^4 - 4x^3 + 56x - 16 + 21x^4 - 12x^3$ $= 35x^4 - 16x^3 + 56x - 16$
b	$f'(x) = (\sqrt{x} + 1)(3) + (3x - 2)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ $= 3\sqrt{x} + 3 + \frac{3x}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ $= 3\sqrt{x} + 3 + \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ $= \frac{9}{2}\sqrt{x} + 3 - \frac{1}{\sqrt{x}}$

	أتحقق من فهمي صفحة 67
a	$f'(x) = \frac{(x-2)(3)-(3x+1)(1)}{(x-2)^2}$ $= \frac{3x-6-3x-1}{(x-2)^2}$ $= \frac{-7}{(x-2)^2}$
b	$f'(x) = \frac{(x^2+1)(-3x^{-4})-(x^{-3})(2x)}{(x^2+1)^2}$ $= \frac{-3x^{-2}-3x^{-4}-2x^{-2}}{(x^2+1)^2}$ $= \frac{-5x^{-2}-3x^{-4}}{(x^2+1)^2}$
	أتحقق من فهمي صفحة 68
a	$P'(t) = \frac{(2t^2+9)(0)-(5)(4t)}{(2t^2+9)^2}$ $= \frac{-20t}{(2t^2+9)^2}$
b	$P'(2) = \frac{-40}{(8+9)^2} = \frac{-40}{289} \approx -0.14$ يتناقص عدد السكان بمعدل 140 نسمة لكل سنة بعد سنتين من الآن
	أتحقق من فهمي صفحة 70
a	$f'(x) = \frac{-(1)(-3x^2)}{(1-x^3)^2}$ $= \frac{3x^2}{(1-x^3)^2}$

b	$f'(x) = \frac{-(3)(2)}{(2x+1)^2}$ $= \frac{-6}{(2x+1)^2}$
	أتحقق من فهمي صفحة 71
a	$f'(x) = (20x) \times 6(4x^3-1)^5(12x^2) + (4x^3-1)^6(20)$ $= (4x^3-1)^5(1520x^3-20)$
b	$f'(x) = \frac{(x+2)^4(2x) - (x^2-1) \times 4(x+2)^3 \times 1}{(x+2)^8}$ $= \frac{2x(x+2)^4 - 4(x^2-1)(x+2)^3}{(x+2)^8}$ $= \frac{(x+2)^3(2x(x+2) - 4(x^2-1))}{(x+2)^8}$ $= \frac{-2x^2+4x+4}{(x+2)^5}$
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 71
1	$f'(x) = x \times 5(1+3x)^4(3) + (1+3x)^5(1)$ $= (1+3x)^4(18x+1)$
2	$f'(x) = \frac{(x+1)(1) - (x+3)(1)}{(x+1)^2}$ $= \frac{-2}{(x+1)^2}$
3	$f'(x) = (2x+1)^5 \times 4(3x+2)^3(3) + (3x+2)^4 \times 5(2x+1)^4 \times 2$ $= 2(2x+1)^4(3x+2)^3(27x+16)$

4	$f'(x) = \dfrac{(2x-1)^2(6x) - (3x^2) \times 2(2x-1)(2)}{(2x-1)^4}$ $= \dfrac{6(2x-1)(2x^2 - x - 2x^2)}{(2x-1)^4}$ $= \dfrac{-6x}{(2x-1)^3}$
5	$f'(x) = \dfrac{(\sqrt{5x+3})(6) - (6x)\left(\dfrac{5}{2\sqrt{5x+3}}\right)}{5x+3} = \dfrac{30x + 18 - 15x}{(5x+3)\sqrt{5x+3}}$ $= \dfrac{15x + 18}{(5x+3)\sqrt{5x+3}}$
6	$f'(x) = (4x-1)(2x) + (x^2-5)(4)$ $= 8x^2 - 2x + 4x^2 - 20$ $= 12x^2 - 2x - 20$
7	$f'(x) = \dfrac{(2x-7)(2x) - (x^2+6)(2)}{(2x-7)^2}$ $= \dfrac{4x^2 - 14x - 2x^2 - 12}{(2x-7)^2}$ $= \dfrac{2x^2 - 14x - 12}{(2x-7)^2}$
8	$f'(x) = \dfrac{(1+\sqrt{x})(1) - (x)\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(1+\sqrt{x})^2}$ $= \dfrac{1 + \sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2}$ $= \dfrac{1 + \frac{1}{2}\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2}$

9	$f'(x) = (x+1) \times \frac{1}{2\sqrt{x-1}} + \left(\sqrt{x-1}\right)(1)$ $= \frac{x+1}{2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-1} = \frac{x+1+2x-2}{2\sqrt{x-1}} = \frac{3x-1}{2\sqrt{x-1}}$
10	$f'(x) = \frac{(1)(5+2x)-(x)(2)}{(5+2x)^2} - 8x^3$ $= \frac{5}{(5+2x)^2} - 8x^3$
11	$f'(x) = \frac{(-5)(2)(x+2)(1)}{(x+2)^4}$ $= \frac{-10}{(x+2)^3}$
12	$f'(x) = \left(x + \frac{2}{x}\right)(2x) + (x^2-3)\left(1 - \frac{2}{x^2}\right)$ $= 2x^2 + 4 + x^2 - 3 - 2 + \frac{6}{x^2}$ $= 3x^2 - 1 + \frac{6}{x^2}$
13	$f'(x) = \left(8x + \sqrt{x}\right)(10x) + (5x^2+3)\left(8 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ $= 80x^2 + 10x^{\frac{3}{2}} + 40x^2 + \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} + 24 + \frac{3}{2\sqrt{x}}$ $= 120x^2 + \frac{25}{2}x^{\frac{3}{2}} + 24 + \frac{3}{2\sqrt{x}}$
14	$f(x) = 5x - 25 + 50x^{-2} - 10x^{-3}$ $f'(x) = 5 - 100x^{-3} + 30x^{-4}$
15	$f'(x) = (x^2) \times 3(3x-1)^2 \times 3 + (3x-1)^3(2x)$ $f'(1) = (1)3(3-1)^2 \times 3 + (3(1)-1)^3\left(2(1)\right) = 36 + 16 = 52$

16	$f'(x) = (3x)\left(\frac{-1}{2\sqrt{5-x}}\right) + \left(\sqrt{5-x}\right)(3)$ $f'(4) = \frac{(3\times 4)(-1)}{2\sqrt{5-4}} + (\sqrt{5-4})(3)$ $= \frac{-12}{2\times 1} + 1\times 3 = -6 + 3 = -3$
17	$f'(x) = \frac{(2x+1)(1) - (x-1)(2)}{(2x+1)^2} = \frac{3}{(2x+1)^2}$ $f'(2) = \frac{3}{(4+1)^2} = \frac{3}{25}$
18	$f'(x) = (2x+3)\times 2(x-2)(1) + (x-2)^2(2)$ $f'(0) = 3\times 2(-2) + 2(-2^2) = -12 + 8 = -4$
19	$S'(t) = \frac{(4+0.3t)(2000) - 2000t(0.3)}{(4+0.3t)^2}$ $= \frac{8000}{(4+0.3t)^2}$
20	$t = 2030 - 2020 = 10$ $S'(10) = \frac{8000}{(4+3)^2} = \frac{8000}{49} \approx 163$ يتزايد إجمالي المبيعات بمقدار 163 ألف دينار لكل سنة في عام 2030م.
21	<u>ملاحظة:</u> نرجو حذف كلمة (بالآلاف) من مقدمة السؤال لتدل P على عدد السكان بوحدة الفرد الواحد (شخص أو نسمة). $P'(t) = 12(2t^2 + 100)(1) + (t+20)\times 12(4t) = 12(6t^2 + 80t + 100)$
22	$P'(6) = 12(216 + 480 + 100) = 12(796) = 9552$ يتزايد عدد السكان بمعدل 9552 نسمة كل سنة بعد 6 سنوات من الآن.

23	$M'(t) = \frac{(t+1.9)(5.8) - (5.8t)(1)}{(t+1.9)^2}$ $= \frac{11.02}{(t+1.9)^2}$ $M'(5) = \frac{11.02}{(5+1.9)^2} \approx 0.23$
24	$\frac{dy}{du} = u \times 3(u^2+3)^2(2u) + (u^2+3)^3(1) = (u^2+3)^2(7u^2+3)$ $\frac{du}{dx} = 2(x+3)(1) = 2x+6$ عندما $x = -2$، فإن $u = (-2+3)^2 = 1$ $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=-2} = \left.\frac{dy}{du}\right\|_{u=1} \times \left.\frac{du}{dx}\right\|_{x=-2}$ $\left.\frac{dy}{du}\right\|_{u=1} = (1^2+3)^2(7(1^2)+3) = 16(10) = 160$ $\left.\frac{du}{dx}\right\|_{x=-2} = 2(-2)+6 = 2$ $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=-2} = 160 \times 2 = 320$
25	$\frac{dy}{du} = \frac{(u+1) \times 3u^2 - u^3(1)}{(u+1)^2} = \frac{2u^3+3u^2}{(u+1)^2}$ $\frac{du}{dx} = 3(x^2+1)^2(2x) = 6x(x^2+1)^2$ عندما $x = 1$، فإن $u = (1^2+1)^3 = 8$ $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=1} = \left.\frac{dy}{du}\right\|_{u=8} \times \left.\frac{du}{dx}\right\|_{x=1}$ $\left.\frac{dy}{du}\right\|_{u=8} = \frac{2(8^3)+3(8^2)}{(8+1)^2} = \frac{1216}{81}$ $\left.\frac{du}{dx}\right\|_{x=1} = 6(1)(1^2+1)^2 = 24$ $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=1} = \frac{1216}{81} \times 24 = \frac{9728}{27}$

26	$(fg)'(x) = (f \times g)'(x)$ $= f(x) \times g'(x) + g(x) \times f'(x)$ $(fg)'(2) = f(2) \times g'(2) + g(2) \times f'(2)$ $= 4 \times 2 + 3 \times -1 = 5$
27	$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x) \times f'(x) - f(x) \times g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$ $\left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \frac{g(2) \times f'(2) - f(2) \times g'(2)}{\left(g(2)\right)^2} = \frac{3 \times -1 - 4 \times 2}{(3)^2} = -\frac{11}{9}$
28	$(3f + fg)'(x) = 3f'(x) + f(x) \times g'(x) + g(x) \times f'(x)$ $(3f + fg)'(2) = 3f'(2) + f(2) \times g'(2) + g(2) \times f'(2)$ $= 3 \times -1 + 4 \times 2 + 3 \times -1 = 2$
29	$f'(x) = \left(x(4x-3)^6\right) \times 9(1-4x)^8(-4) + (1-4x)^9 \times \left(x \times 6(4x-3)^5(4) + (4x-3)^6 \times (1)\right)$ $f'(x) = -36x(4x-3)^6(1-4x)^8 + (1-4x)^9\left(24x(4x-3)^5 + (4x-3)^6\right)$ $= (4x-3)^5(1-4x)^8(-36x(4x-3) + (1-4x)(24x+4x-3))$ $= (4x-3)^5(1-4x)^8(-256x^2 + 148x - 3)$
30	$f(x) = \frac{2x}{x+5} + \frac{6x}{x^2+7x+10}$ $= \frac{2x}{x+5} + \frac{6x}{(x+5)(x+2)}$ $= \frac{2x(x+2)}{(x+5)(x+2)} + \frac{6x}{(x+5)(x+2)}$ $= \frac{2x^2+10x}{(x+5)(x+2)}$ $= \frac{2x(x+5)}{(x+5)(x+2)}$ $= \frac{2x}{x+2}$
31	$f'(x) = \frac{(x+2)(2) - (2x)(1)}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2}$ $f'(3) = \frac{4}{(3+2)^2} = \frac{4}{25}$

32	$f'(x) = \dfrac{(\sqrt{x})(2) - (2x+8)\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{x}$ $0 = \dfrac{(\sqrt{x})(2) - (2x+8)\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{x}$ $(\sqrt{x})(2) - (2x+8)\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) = 0$ $2\sqrt{x} - \sqrt{x} - \dfrac{4}{\sqrt{x}} = 0$ $\sqrt{x} - \dfrac{4}{\sqrt{x}} = 0$ $\sqrt{x} = \dfrac{4}{\sqrt{x}}$ $x = 4$

	مسألة اليوم صفحة 73
	$N = 10000\left(1 - e^{-0.15d}\right)$ $N'(d) = 10000\left(0.15e^{-0.15d}\right)$ $= 1500e^{-0.15d}$
	أتحقق من فهمي صفحة 74
a	$f'(x) = 2e^x$
b	$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + e^x = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + e^x$
c	$\frac{dy}{dx} = xe^x + e^x = e^x(x+1)$
	أتحقق من فهمي صفحة 75
a	$f'(x) = 7e^{7x+1}$
b	$f'(x) = 3x^2e^{x^3}$
c	$f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$
	أتحقق من فهمي صفحة 76
a	$P'(t) = 50(-0.004)e^{-0.004t} = -0.2e^{-0.004t}$ $P'(500) = -0.2e^{-0.004(500)} = -0.2e^{-2} \approx -0.03$ تتناقص الطاقة المتبقية بمعدل 0.03 واط لكل يوم بعد 500 يوم
	أتحقق من فهمي صفحة 78
a	$f'(x) = \frac{4}{x}$
b	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$
c	$f'(x) = \frac{(x)\left(\frac{1}{x}\right) - (\ln x)(1)}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

	أتحقق من فهمي صفحة 80
a	$f'(x) = \frac{8}{8x} = \frac{1}{x}$
b	$f'(x) = 2 \times \frac{7x^6}{x^7} = \frac{14}{x}$
c	$f'(x) = \frac{9}{9x+2}$
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 80
1	$f'(x) = 2e^x$
2	$f'(x) = 3e^{3x+9}$
3	$f'(x) = (x^2 + 3x - 9)(e^x) + (e^x)(2x+3) = e^x(x^2 + 5x - 6)$
4	$f'(x) = \frac{x^4 e^x - e^x(4x^3)}{x^8} = \frac{xe^x - 4e^x}{x^5}$
5	$f'(x) = 6 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} = \frac{3}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$
6	$f'(x) = \frac{(1+e^x)(e^x) - e^x(e^x)}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$
7	$f'(x) = (e^x + 2)(e^x) + (e^x - 1)(e^x) = 2e^{2x} + e^x$
8	$f'(x) = (e^{-2x}) \times 5(2x-1)^4 \times 2 + (2x-1)^5(-2e^{-2x})$ $= 2e^{-2x}(2x-1)^4(6-2x)$
9	$f'(x) = 3x^2 - 5 \times 2e^{2x} = 3x^2 - 10e^{2x}$
10	$f'(x) = \frac{3}{x}$
11	$f'(x) = (x^3)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(3x^2) = x^2 + 3x^2 \ln x$
12	$f'(x) = \frac{x^2\left(\frac{1}{x}\right) - (\ln x)(2x)}{x^4} = \frac{x - 2x\ln x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$

13	$f'(x) = (x^2)\left(\frac{4}{4x}\right) + (\ln(4x))(2x) = x + 2x\ln(4x)$
14	$f'(x) = \frac{\frac{(x)(1)-(x+1)(1)}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} = \frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} = \frac{-1}{x^2} \times \frac{x}{x+1} = \frac{-1}{x(x+1)}$
15	$f'(x) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} \times \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{x^2-1}$
16	$f'(x) = 4(\ln x)^3 \times \frac{1}{x} = \frac{4(\ln x)^3}{x}$
17	$f'(x) = \frac{2x}{x^2-5}$
18	$f'(x) = (x^4)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(4x^3) - \frac{1}{2}e^x = x^3 + 4x^3\ln x - \frac{1}{2}e^x$
19	$f'(x) = (e^{2x})\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(2e^{2x}) = \frac{e^{2x}(1 + x\ln x)}{x}$
20	$f'(x) = (\ln 3x)\left(\frac{7}{7x}\right) + (\ln 7x)\left(\frac{3}{3x}\right) = \frac{\ln 3x + \ln 7x}{x}$
21	$f'(x) = \frac{e^x}{e^x - 2}$
22	$f'(x) = (e^{2x-1})\left(\frac{2}{2x-1}\right) + (\ln(2x-1))(2e^{2x-1})$ $f'(1) = (e^{2-1})\left(\frac{2}{2-1}\right) + (\ln(2-1))(2e^{2-1}) = 2e + 0 = 2e$
23	$f'(x) = \frac{x\left(\frac{2x}{x^2}\right) - (\ln x^2)(1)}{x^2} = \frac{2 - \ln x^2}{x^2}$ $f'(4) = \frac{2 - \ln 16}{16}$

24	$P'(t) = \frac{-100 \times -e^{3-t}}{(1+e^{3-t})^2} = \frac{100e^{3-t}}{(1+e^{3-t})^2}$ $P'(3) = \frac{100e^{3-3}}{(1+e^{3-3})^2} = \frac{100}{4} = 25$
25	$m'(t) = (t)\left(\frac{1}{t}\right) + (\ln t)(1) = 1 + \ln t$
26	$\frac{dy}{du} = 2e^{2u}$ $\frac{du}{dx} = 2x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ $= 2e^{2u} \times 2x$ $= 4xe^{2u}$ $= 4xe^{2(x^2+1)}$
27	$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u+1}$ $\frac{du}{dx} = e^x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ $= \frac{1}{u+1} \times e^x$ $= \frac{e^x}{e^x+1}$
28	$\frac{dy}{dx} = \frac{k}{kx} = \frac{1}{x}$

29	$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^{3x}) \times \left(7 \times \frac{1}{x} - 3x^2\right) - (7\ln x - x^3)(3e^{3x})}{(e^{3x})^2}$ $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=1} = \frac{(e^3) \times (7 \times 1 - 3) - (7\ln 1 - 1)(3e^3)}{(e^3)^2}$ $= \frac{4e^3 + 3e^3}{(e^3)^2}$ $= \frac{7e^3}{(e^3)^2}$ $= \frac{7}{e^3}$

	مسألة اليوم صفحة 82
	$P(t) = 100 + 20\sin 2\pi t$ $\frac{dP}{dt} = 40\pi\cos 2\pi t$
	أتحقق من فهمي صفحة 83
a	$f'(x) = \cos x$
b	$f'(x) = 3 + \sin x$
c	$f'(x) = 3\cos x - 2\sin x$
	أتحقق من فهمي صفحة 84
a	$f'(x) = (e^x)(-\sin x) + (\cos x)(e^x) = -e^x\sin x + e^x\cos x$
b	$f'(x) = \frac{(\sin x)(1-\sin x) - (x+\cos x)(\cos x)}{\sin^2 x}$ $= \frac{\sin x - \sin^2 x - x\cos x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$ $= \frac{\sin x - (\sin^2 x + \cos^2 x) - x\cos x}{\sin^2 x}$ $= \frac{\sin x - 1 - x\cos x}{\sin^2 x}$
	أتحقق من فهمي مثال 3 صفحة 86
a	$f'(x) = -5\sin 5x$
b	$f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$
c	$f'(x) = \frac{-3\sin 3x}{\cos 3x}$

	تحقق من فهمي مثال 4 صفحة 86
	$h'(x) = 4 \times \frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}t = \frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}t$
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 86
1	$f'(x) = -2\sin x + \cos x$
2	$f'(x) = -\sin x$
3	$f'(x) = \cos x + \sin x$
4	$f'(x) = (x)(\cos x) + (\sin x)(1)$ $= x\cos x + \sin x$
5	$f'(x) = (\sin x)(-\sin x) + (\cos x)(\cos x)$ $= -\sin^2 x + \cos^2 x$
6	$f'(x) = (e^x)(\cos x) + (\sin x)(e^x)$ $= e^x\cos x + e^x\sin x$
7	$f'(x) = \frac{(\cos x)(e^x) - (e^x)(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{e^x\cos x + e^x\sin x}{\cos^2 x}$
8	$f'(x) = 2x\cos(x^2+1)$
9	$f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$
10	$f'(x) = -5\sin(5x-2)$
11	$f'(x) = 3\cos 3x - 6\sin 6x$
12	$f'(x) = -(2x-3)\sin(x^2-3x-4)$
13	$f'(x) = (e^{2x})(10\cos 10x) + (\sin 10x)(2e^{2x})$ $= 10e^{2x}\cos 10x + 2e^{2x}\sin 10x$
14	$f'(x) = (\cos x^2)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(-2x\sin x^2)$ $= \frac{1}{x}(\cos x^2) - 2x(\ln x)\sin x^2$

15	$f'(x) = \left(\sqrt{x+1}\right)\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}\right) + \left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)$
16	$f(x) = 4(\sin x)^2$ $f'(x) = 4 \times 2(\sin x)(\cos x) = 8\sin x \cos x$
17	$f(x) = (\cos 2x)^3(\cos x)$ $f'(x) = (\cos 2x)^3(-\sin x) + (\cos x) \times 3(\cos 2x)^2 \times -2\sin 2x$ $= -(\cos 2x)^3(\sin x) - 6(\cos x)(\cos 2x)^2 \sin 2x$
18	$f'(x) = 5 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x} = \frac{5}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$
19	$f'(x) = 2(\cos 2x - \sin x)(-2\sin 2x - \cos x)$
20	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x} + \frac{2\cos 2x}{2\sqrt{\sin 2x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x} + \frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}$
21	$f'(x) = \frac{(\sin x)\left(2(\ln x) \times \frac{1}{x}\right) - (\ln x)^2(\cos x)}{\sin^2 x}$ $= \frac{2\sin x \ln x - x\cos x(\ln x)^2}{x\sin^2 x}$
22	$D'(t) = 400 \times 0.4\cos 0.4t = 160\cos 0.4t$
23	$H'(t) = 2.4 \times \frac{2\pi}{365}\cos\left(\frac{2\pi}{365}(t-80)\right) = \frac{4.8\pi}{365}\cos\left(\frac{2\pi}{365}(t-80)\right)$

24	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(1 - \left((\sin x)(-\sin x) + (\cos x)(\cos x)\right)\right)$ $= \frac{1}{2}\left(1 - (-\sin^2 x + \cos^2 x)\right)$ $= \frac{1}{2}(1 + \sin^2 x - \cos^2 x)$ $= \frac{1}{2}(\sin^2 x + 1 - \cos^2 x)$ $= \frac{1}{2}(\sin^2 x + \sin^2 x)$ $= \frac{1}{2}(2\sin^2 x)$ $= \sin^2 x$
25	$f(x) = (e^x \cos x)(\sin x)^2$ $f'(x) = (e^x \cos x)(2(\sin x)^1 \cos x) + (\sin x)^2\left((e^x)(-\sin x) + (\cos x)(e^x)\right)$ $= e^x \sin x(2\cos^2 x - \sin^2 x + \cos x \sin x)$
26	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

1	d
2	b
3	a
4	c
5	c
6	a
7	b
8	$(fg)'(x) = (f(x))(g'(x)) + (g(x))(f'(x))$ $(fg)'(2) = (f(2))(g'(2)) + (g(2))(f'(2))$ $= (3)(2) + (1)(-4) = 2$
9	$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{(g(x))(f'(x)) - (f(x))(g'(x))}{(g(x))^2}$ $\left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \frac{(g(2))(f'(2)) - (f(2))(g'(2))}{(g(2))^2}$ $= \frac{(1)(-4) - (3)(2)}{(1)^2} = -10$
10	$(3f - 4fg)'(x) = 3f'(x) - 4\left((f(x))(g'(x)) + (g(x))(f'(x))\right)$ $(3f - 4fg)'(2) = 3f'(2) - 4\left((f(2))(g'(2)) + (g(2))(f'(2))\right)$ $= 3(-4) - 4((3)(2) + (1)(-4))$ $= -12 - 4(2)$ $= -20$
11	$h'(t) = 0.12 \times 0.1e^{0.1t}$ $= 0.012e^{0.1t}$

12	$h'(3) = 0.012e^{0.1(3)} \approx 0.016$
13	$f'(x) = \frac{(3x+1)(1)-(x)(3)}{(3x+1)^2} = \frac{1}{(3x+1)^2}$ $f'(1) = \frac{1}{(3(1)+1)^2} = \frac{1}{16}$
14	$f'(x) = (x^2+2)\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + (x+\sqrt{x})(2x)$ $f'(4) = (4^2+2)\left(1+\frac{1}{2\sqrt{4}}\right) + (4+\sqrt{4})(2\times 4) = 18\left(1+\frac{1}{4}\right) + 6(8) = 70.5$
15	$f'(x) = 3e^{3x} - 3e^{-3x}$ $f'(1) = 3e^3 - 3e^{-3}$
16	$f'(x) = -2x$ $f'(20) = -2(20) = -40$
17	$f'(x) = (x^2)(3)(3x-1)^2(3) + (3x-1)^3(2x)$ $f'(1) = (1)(3)(3-1)^2(3) + (3-1)^3(2)$ $= 36 + 16 = 52$
18	$f'(x) = (x+3)^2(3e^{3x}) + (e^{3x})(2)(x+3)(1)$ $f'(2) = (2+3)^2(3e^6) + (e^6)(2)(2+3)(1)$ $= 75e^6 + 10e^6$ $= 85e^6$
19	$f'(x) = 3\times\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ $f'(e) = \frac{3}{e} - \frac{1}{e^2}$
20	$f'(x) = \frac{8x^3}{2\sqrt{2x^4+7}}$

21	$f'(x) = \dfrac{-1 \times 5(x^2+16)^4(2x)}{(x^2+16)^{10}}$ $= \dfrac{-10x}{(x^2+16)^6}$
22	$f(x) = (x^2-5x+2)^{\frac{1}{4}}$ $f'(x) = \dfrac{1}{4}(x^2-5x+2)^{-\frac{3}{4}}(2x-5)$ $= \dfrac{2x-5}{4\sqrt[4]{(x^2-5x+2)^3}}$
23	$f'(x) = -40(8x^2-6)^{-41}(16x)$ $= -640x(8x^2-6)^{-41}$
24	$f'(x) = \dfrac{-1 \times 2}{(3+2x)^2} = \dfrac{-2}{(3+2x)^2}$
25	$f'(x) = \dfrac{(x^2+1)(3x^2)-(x^3)(2x)}{(x^2+1)^2}$ $= \dfrac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}$
26	$f'(x) = (2x-8)^2(6x) + (3x^2-4)(2)(2x-8)^1(2)$ $= (2x-8)(6x(2x-8)+4(3x^2-4))$ $= (2x-8)(24x^2-48x-16)$
27	$f'(x) = x^5(6x+4) + (3x^2+4x-7)(5x^4)$ $= 6x^6+4x^5+15x^6+20x^5-35x^4$ $= 21x^6+24x^5-35x^4$ حل آخر: بفك الأقواس: $f(x) = 3x^7+4x^6-7x^5$ $f'(x) = 21x^6+24x^5-35x^4$

28	$f'(x) = (x^3)(4)(2x+6)^3(2) + (2x+6)^4(3x^2)$ $= 2x^2(2x+6)^3(7x+9)$
29	$f'(x) = 3(e^{-x} + e^x)^2(-e^{-x} + e^x)$
30	$f'(x) = (2x^3)(-e^{-x}) + (e^{-x})(6x^2)$ $= -2x^3e^{-x} + 6x^2e^{-x}$
31	$f'(x) = \dfrac{(x+1)(e^x) - (e^x)(1)}{(x+1)^2}$ $= \dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$
32	$f'(x) = 5 \times \dfrac{5}{5x-4} = \dfrac{25}{5x-4}$
33	$f'(x) = \dfrac{e^x}{e^x} = 1$
34	$f'(x) = \dfrac{6x+2}{3x^2+2x-1}$
35	$f'(x) = (x^5)(3\cos 3x) + (\sin 3x)(5x^4)$ $= 3x^5\cos 3x + 5x^4\sin 3x$
36	$f(x) = (\cos x)^2 + \sin x$ $f'(x) = 2(\cos x)^1(-\sin x) + \cos x$ $= -2\cos x\sin x + \cos x$
37	$f'(x) = \dfrac{(x)\left(\dfrac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}\right) - (\sqrt{\cos x})(1)}{x^2} = \dfrac{-\sin x}{2x\sqrt{\cos x}} - \dfrac{\sqrt{\cos x}}{x^2}$
38	$f'(x) = (\sin 5x)\left(\dfrac{-\sin x}{\cos x}\right) + (\ln(\cos x))(5\cos 5x)$
39	$f'(x) = \dfrac{\dfrac{-1\times 2x}{(x^2+9)^2}}{\dfrac{1}{x^2+9}} = \dfrac{-1\times 2x}{(x^2+9)^2} \times \dfrac{x^2+9}{1} = \dfrac{-2x}{x^2+9}$
40	$f'(x) = (e^{2x})(2\cos 2x) + (\sin 2x)(2e^{2x}) = 2e^{2x}(\cos 2x + \sin 2x)$

41	$N'(t) = 1000\left(\frac{3 \times 2t}{(t^2+50)^2}\right) = \frac{6000t}{(t^2+50)^2}$
42	$N'(1) = \frac{6000}{(1+50)^2} \approx 2.3$
43	$P'(t) = \frac{-2000 \times 4}{(4t+80)^2} = \frac{-8000}{(4t+80)^2}$
44	$P'(10) = \frac{-8000}{(40+80)^2} \approx -0.56$ يتناقص عدد الغزلان بمعدل 0.56 غزال كل شهر بعد 10 أشهر من الآن
45	$P'(t) = \frac{-700 \times 2t}{(t^2+1)^2} = \frac{-1400t}{(t^2+1)^2}$
46	$P'(3) = \frac{-1400 \times 3}{(9+1)^2} = -42$ يتناقص عدد السكان بمعدل 42 ألف شخصٍ لكل سنة بعد 3 سنوات.

الوحدة الثالثة: تطبيقات التفاضل

الدرس الأول: المماس والعمودي على المماس

	مسألة اليوم صفحة 92
1	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ ميل المنحنى عند النقطة$(1,1)$هو: $f'(1) = -\frac{1}{1} = -1$
2	$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-0}{0-2} = -1$
3	نلاحظ أن ميل منحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة $(1, 1)$ وميل المستقيم L متساويان، أي أن ميل المنحنى عند أي نقطة عليه يساوي ميل مماس المنحنى عند تلك النقطة.
	أتحقق من فهمي صفحة 93
	$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$ $f'(3) = 27 - 18 + 2 = 11$ معادلة المماس: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ بتعويض $a = 3$ $y - f(3) = f'(3)(x - 3)$ $y - 5 = 11(x - 3)$ $y - 5 = 11x - 33$ $y = 11x - 28$

أتحقق من فهمي صفحة 94

$f(1) = \frac{2-1}{1} = 1 \quad \rightarrow (1,1)$

$f'(x) = \frac{(x)(2)-(2x-1)(1)}{x^2} = \frac{1}{x^2}$

$f'(1) = \frac{1}{1^2} = 1$

معادلة المماس: $y - f(a) = f'(a)(x-a)$

بتعويض $a = 1$ $\quad y - f(1) = f'(1)(x-1)$

$y - 1 = 1(x-1)$

$y - 1 = x - 1$

$y = x$

أتحقق من فهمي صفحة 96

a

$f(x) = 1 - \sqrt{x}\ ,\ f'(x) = -\frac{1}{4}$

$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$-\frac{1}{4} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$2\sqrt{x} = 4$

$\sqrt{x} = 2$

$x = 4$

$f(4) = 1 - \sqrt{4} = -1$

نقطة التماس هي $(4, -1)$

b

$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2\ ,\ f'(x) = 0$

$f'(x) = -3x^2 + 6x$

$0 = -3x^2 + 6x$

$3x(-x+2) = 0$

$x = 0 \quad or \quad x = 2$

$f(0) = -2$

$f(2) = -8 + 12 - 2 = 2$

نقطتا التماس هما $(0, -2), (2, 2)$

أتحقق من فهمي صفحة 97

$f(x) = \ln x^3 \quad , \quad (1, 0)$

$f'(x) = \frac{3x^2}{x^3} = \frac{3}{x}$

$f'(1) = \frac{3}{1} = 3$

ميل المماس هو 3 إذن ميل العمودي على المماس هو $-\frac{1}{3}$

معادلة العمودي على المماس $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$

بتعويض $a = 1$ $y - f(1) = -\frac{1}{f'(1)}(x - 1)$

$y - 0 = -\frac{1}{3}(x - 1)$

$y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 98

1

$f(x) = x^3 - 6x + 3 \ , \ (2, -1) \ , \ f(2) = -1$

$f'(x) = 3x^2 - 6$

$f'(2) = 12 - 6 = 6$

معادلة المماس: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

$y - f(2) = f'(2)(x - 2)$

$y - (-1) = 6(x - 2)$

$y + 1 = 6x - 12$

$y = 6x - 13$

2

$f(x) = \frac{x^4 - 3x^3}{x} = \frac{x^4}{x} - \frac{3x^3}{x} = x^3 - 3x^2 \ , \ (1, -2) \ , \ f(1) = -2$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(1) = 3 - 6 = -3$

معادلة المماس: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$

$y - (-2) = -3(x - 1)$

$y + 2 = -3x + 3$

$y = -3x + 1$

3	$f(x)=\sqrt{x}(x^2-1)$, $(1,0)$, $f(1)=0$ $f'(x)=(\sqrt{x})(2x)+(x^2-1)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ $f'(1)=(1)(2)+(0)\left(\frac{1}{2}\right)=2$ معادلة المماس: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ $y-f(1)=f'(1)(x-1)$ $y-0=2(x-1)$ $y=2x-2$
4	$f(x)=x+\frac{4}{x}$, $(-4,-5)$, $f(-4)=-5$ $f'(x)=1-\frac{4}{x^2}$ $f'(-4)=1-\frac{4}{16}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ معادلة المماس: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ $y-f(-4)=f'(-4)(x-(-4))$ $y-(-5)=\frac{3}{4}(x+4)$ $y+5=\frac{3}{4}x+3$ $y=\frac{3}{4}x-2$
5	$f(x)=x+e^x$, $(0,1)$, $f(0)=1$ $f'(x)=1+e^x$ $f'(0)=1+e^0=1+1=2$ معادلة المماس: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ $y-f(0)=f'(0)(x-0)$ $y-1=2(x-0)$ $y-1=2x$ $y=2x+1$

6	$f(x) = \ln(x+e)$, $(0,1)$, $f(0) = 1$ $f'(x) = \frac{1}{x+e}$ $f'(0) = \frac{1}{0+e} = \frac{1}{e}$ معادلة المماس: $y - f(a) = f'(a)(x-a)$ $y - f(0) = f'(0)(x-0)$ $y - 1 = \frac{1}{e}(x-0)$ $y - 1 = \frac{1}{e}x$ $y = \frac{1}{e}x + 1$
7	$f(x) = \sqrt{x-7}$, $x = 16$ $f(16) = \sqrt{16-7} = 3 \quad \rightarrow (16,3)$ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-7}}$ $f'(16) = \frac{1}{2\sqrt{16-7}} = \frac{1}{6}$ معادلة المماس: $y - f(a) = f'(a)(x-a)$ $y - f(16) = f'(16)(x-16)$ $y - 3 = \frac{1}{6}(x-16)$ $y - 3 = \frac{1}{6}x - \frac{8}{3}$ $y = \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}$

8	$f(x) = (x-1)e^x \ , \ x = 1$ $f(1) = (1-1)e^1 = 0 \ \rightarrow \ (1,0)$ $f'(x) = (x-1)e^x + e^x(1) = xe^x$ $f'(1) = 1e^1 = e$ معادلة المماس: $y - f(a) = f'(a)(x-a)$ $y - f(1) = f'(1)(x-1)$ $y - 0 = e(x-1)$ $y = ex - e$
9	$f(x) = \frac{x+3}{x-3} \ , \ x = 4$ $f(4) = \frac{4+3}{4-3} = 7 \ \rightarrow \ (4,7)$ $f'(x) = \frac{(x-3)(1)-(x+3)(1)}{(x-3)^2} = \frac{-6}{(x-3)^2}$ $f'(4) = \frac{-6}{(4-3)^2} = -6$ معادلة المماس: $y - f(a) = f'(a)(x-a)$ $y - f(4) = f'(4)(x-4)$ $y - 7 = -6(x-4)$ $y - 7 = -6x + 24$ $y = -6x + 31$

10	$f(x) = (\ln x)^2 \ , \ x = e$ $f(e) = (\ln e)^2 = 1 \quad \rightarrow \ (e, 1)$ $f'(x) = 2(\ln x)\left(\frac{1}{x}\right)$ $f'(e) = 2(\ln e)\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e}$ معادلة المماس: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ $y - f(e) = f'(e)(x - e)$ $y - 1 = \frac{2}{e}(x - e)$ $y - 1 = \frac{2}{e}x + 2$ $y = \frac{2}{e}x + 3$
11	$f(x) = (3x + 10)^2 \ , \ (-3, 1)$ $f'(x) = 2(3x + 10)^1(3) = 6(3x + 10)$ $f'(-3) = 6(-9 + 10) = 6$ ميل المماس هو 6 إذن ميل العمودي على المماس هو $-\frac{1}{6}$ معادلة العمودي على المماس: $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$ $y - f(-3) = -\frac{1}{f'(-3)}(x - (-3))$ $y - 1 = -\frac{1}{6}(x + 3)$ $y = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{2}$

12	$f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x+1}}$, $(4,1)$ $f'(x) = \frac{-3 \times \frac{1}{\sqrt{2x+1}}}{2x+1}$ $f'(4) = \frac{-3 \times \frac{1}{\sqrt{8+1}}}{8+1} = -\frac{1}{9}$ ميل المماس هو $-\frac{1}{9}$ إذن ميل العمودي على المماس هو 9 معادلة العمودي على المماس: $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)$ $y - f(4) = 9(x-4)$ $y - 1 = 9(x-4)$ $y = 9x - 35$
13	نلاحظ من الرسم أن المنحنى يقطع المحور **x** في النقطة $(-4, 0)$ أي أنّ $f(-4) = 0$ $f'(x) = \frac{1}{x+5}$ $f'(-4) = \frac{1}{-4+5} = 1$ معادلة العمودي على المماس: $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)$ $y - f(-4) = -\frac{1}{f'(-4)}(x-(-4))$ $y - 0 = -\frac{1}{1}(x+4)$ $y = -x - 4$

14	عند تقاطع المنحنى مع المحور **y** يكون **x=0** ويكون $y = \ln(0+5) = \ln 5$ نقطة تقاطع المنحنى مع محور **y** هي : $(0, \ln 5)$ $f'(x) = \frac{1}{x+5}$ $f'(0) = \frac{1}{0+5} = \frac{1}{5}$ معادلة العمودي على المماس: $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)$ $y - f(0) = -\frac{1}{f'(0)}(x-0)$ $y - \ln 5 = -5(x-0)$ $y = -5x + \ln 5$
15	$f(x) = 4e^{2x+1}$ $f(-1) = 4e^{-2+1} = \frac{4}{e} \rightarrow \left(-1, \frac{4}{e}\right)$ $f'(x) = 8e^{2x+1}$ $f'(-1) = 8e^{-2+1} = \frac{8}{e}$ معادلة المماس: $y - f(a) = f'(a)(x-a)$ $y - f(-1) = f'(-1)(x - -1)$ $y - \frac{4}{e} = \frac{8}{e}(x+1)$ $y - \frac{4}{e} = \frac{8}{e}x + \frac{8}{e}$ $y = \frac{8}{e}x + \frac{12}{e}$

16	$y = 4e^{2(0)+1} = 4e \rightarrow (0, 4e)$ نقطة تقاطع المنحنى مع محور y هي : $(0, 4e)$ $f'(x) = 8e^{2x+1}$ $f'(0) = 8e^{0+1} = 8e$ معادلة العمودي على المماس: $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$ $y - f(0) = -\frac{1}{f'(0)}(x - 0)$ $y - 4e = -\frac{1}{8e}(x)$ $y = -\frac{1}{8e}x + 4e$
17	$f(x) = x^2 - x - 12$ $f'(x) = 2x - 1$ $3 = 2x - 1$ $4 = 2x$ $x = 2$ $f(2) = 4 - 2 - 12 = -10$ النقطة هي $(2, -10)$ معادلة المماس: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$ $y - (-10) = 3(x - 2)$ $y + 10 = 3x - 6$ $y = 3x - 16$
18	مماس المنحنى أفقي أي $f'(x) = 0$ $f'(x) = 3x^2 - 8x$ $0 = 3x^2 - 8x$ $x(3x - 8) = 0$ $x = 0 \;\; or \;\; 3x - 8 = 0 \;\; \rightarrow 3x = 8 \;\; \rightarrow \;\; x = \frac{8}{3}$ $f(0) = (0)^3 - 3(0)^2 - 4 = -4$ $f\left(\frac{8}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}\right)^3 - 4\left(\frac{8}{3}\right)^2 - 4 = -\frac{364}{27}$ النقاط هي $(0, -4), \left(2, -\frac{364}{27}\right)$

19	مماس المنحنى أفقي أي $f'(x) = 0$ $f'(x) = \dfrac{(x)\left(\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}\right) - \sqrt{2x-1}(1)}{2x-1}$ $0 = \dfrac{\left(\dfrac{x}{\sqrt{2x-1}}\right) - \sqrt{2x-1}}{2x-1}$ $\left(\dfrac{x}{\sqrt{2x-1}}\right) - \sqrt{2x-1} = 0$ $\dfrac{x}{\sqrt{2x-1}} = \sqrt{2x-1}$ $x = 2x - 1$ $x = 1$ $f(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2-1}} = 1$ النقطة هي $(1, 1)$
20	ميل مماس المنحنى يساوي 1 أي $f'(x) = 1$ $f'(x) = 10x - 49$ $1 = 10x - 49$ $10x = 50$ $x = 5$ $f(5) = 5(5)^2 - 49(5) + 12 = 125 - 245 + 12 = -108$ النقطة هي $(5, -108)$
21	$f'(x) = 6 - 2x$ $f'(1) = 6 - 2 = 4$ معادلة المماس: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$ $y - 5 = 4(x - 1)$ $y - 5 = 4x - 4$ $y = 4x + 1$

22	معادلة العمودي على المماس: $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$ $y - f(1) = -\frac{1}{f'(1)}(x - 1)$ $y - 5 = -\frac{1}{4}(x - 1)$ $y - 5 = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$ $y = -\frac{1}{4}x + \frac{21}{4}$
23	$f'(x) = -2x$ معادلة المماس عند النقطة $(-1, 5)$: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ $y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1))$ $y - 5 = 2(x + 1)$ $y - 5 = 2x + 2$ $y = 2x + 7$ معادلة المماس عند النقطة $(1, 5)$: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$ $y - 5 = -2(x - 1)$ $y - 5 = -2x + 2$ $y = -2x + 7$
24	$2x + 7 = -2x + 7$ $4x = 0$ $x = 0$ $y = -2(0) + 7 = 7$ نقطة تقاطع المماسين هي: $(0, 7)$

25	$f(x)=\sqrt{x}$ $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $f'(1)=\frac{1}{2}$ معادلة المماس عند النقطة $(1,1)$: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ $y-f(1)=f'(1)(x-1)$ $y-1=\frac{1}{2}(x-1)$ $y-1=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$
26	معادلة العمودي على المماس: $y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$ $y-f(1)=-\frac{1}{f'(1)}(x-1)$ $y-1=-2(x-1)$ $y-1=-2x+2$ $y=-2x+3$
27	$f(x)=\sqrt{x}-1$ $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ميل المستقيم $y=2x-1$ هو 2، والمماس يوازيه فميله أيضًا هو2، إذن: $\frac{1}{2\sqrt{x}}=2$ $4\sqrt{x}=1$ $\sqrt{x}=\frac{1}{4}$ $x=\frac{1}{16}$ $f\left(\frac{1}{16}\right)=\sqrt{\frac{1}{16}}-1=\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}$ النقطة هي $\left(\frac{1}{16},-\frac{3}{4}\right)$

	مسألة اليوم صفحة 100
	$v(t) = t + 15$ $t + 15 = 15 \quad \rightarrow \quad t = 0\ \mathrm{s}$
	أتحقق من فهمي صفحة 101
a	$f'(x) = 4x^3 - 6x - \sin x$ $f''(x) = 12x^2 - 6 - \cos x$
b	$f(x) = \frac{2}{x^3} = 2x^{-3}$ $f'(x) = -6x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$ $f''(x) = 24x^{-5} = \frac{24}{x^5}$
	أتحقق من فهمي صفحة 103
a	$v(t) = 6t - 3t^2$ $v(3) = 6(3) - 3(3)^2 = 18 - 27 = -9\ \mathrm{m/s}$
b	بما أن إشارة السرعة المتجهة سالبة، فإن الجسم يتحرك في الاتجاه السالب (إلى اليسار) عندما $t = 3$
c	$a(t) = 6 - 6t$ $a(3) = 6 - 6(3) = -12\ \mathrm{m/s^2}$
d	يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما تكون سرعته المتجهة 0 $6t - 3t^2 = 0$ $3t(2 - t) = 0$ $t = 0 \quad or \quad t = 2$
	أتحقق من فهمي صفحة 104
a	$v(t) = 3t^2 - 12t + 9$ $v(3) = 3(3)^2 - 12(3) + 9 = 27 - 36 + 9 = 0\ \mathrm{m/s}$
b	$a(t) = 6t - 12$ $a(3) = 6(3) - 12 = 6\ \mathrm{m/s^2}$

c	يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما تكون سرعته المتجهة 0 $3t^2 - 12t + 9 = 0$ $(3t-3)(t-3) = 0$ $t = 1 \quad or \quad t = 3$
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 104
1	$f'(x) = 9x^2 - 8x + 5$ $f''(x) = 18x - 8$
2	$f'(x) = 2e^x + 2x$ $f''(x) = 2e^x + 2$
3	$f'(x) = -2\sin x - 3x^2$ $f''(x) = -2\cos x - 6x$
4	$f'(x) = 4\left(\frac{1}{x}\right) - 9x^2 = \frac{4}{x} - 9x^2$ $f''(x) = -\frac{4}{x^2} - 18x$
5	$f'(x) = (x^3)(6)(x+6)^5(1) + (x+6)^6(3x^2)$ $= (x+6)^5(9x^3 + 18x^2)$ $f''(x) = (5)(x+6)^4(1)(9x^3 + 18x^2) + (x+6)^5(27x^2 + 36x)$ $= (x+6)^4(72x^3 + 288x^2 + 216x)$
6	$f'(x) = (x^7)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(7x^6)$ $= x^6 + (\ln x)(7x^6)$ $f''(x) = 6x^5 + (\ln x)(42x^5) + (7x^6)\left(\frac{1}{x}\right)$ $= 13x^5 + (\ln x)(42x^5)$
7	$f'(x) = \frac{(x+2)(1) - (x)(1)}{(x+2)^2} = \frac{2}{(x+2)^2}$ $f''(x) = \frac{-2 \times 2(x+2)(1)}{(x+2)^4} = \frac{-4(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{-4}{(x+2)^3}$
8	$f'(x) = 2x\cos x^2$ $f''(x) = (2x)(-2x\sin x^2) + (\cos x^2)(2) = -4x^2\sin x^2 + 2\cos x^2$
9	$f'(x) = -6x^{-4}$ $f''(x) = 24x^{-5}$

10	$f(x) = x^3 - \frac{5}{x} = x^3 - 5x^{-1}$ $f'(x) = 3x^2 + 5x^{-2}$ $f''(x) = 6x - 10x^{-3}$
11	$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$
12	$f'(x) = -4 + 2x - 3x^2$ $f''(x) = 2 - 6x$
13	$f(x) = 8x^3 - 3x + \frac{4}{x} = 8x^3 - 3x + 4x^{-1}$ $f'(x) = 24x^2 - 3 - 4x^{-2}$ $f''(x) = 48x + 8x^{-3}$ $f''(-2) = 48(-2) + 8(-2)^{-3} = -96 - 1 = -97$
14	$f'(x) = \frac{-2}{(2x-4)^2}$ $f''(x) = \frac{2 \times 2 \times (2x-4)^1 \times 2}{(2x-4)^4} = \frac{8}{(2x-4)^3}$ $f''(3) = \frac{8}{(2(3)-4)^3} = \frac{8}{8} = 1$
15	$f'(x) = 3px^2 - 6px + 1$ $f''(x) = 6px - 6p$ $f''(2) = 6p(2) - 6p$ $-1 = 12p - 6p$ $6p = -1$ $p = -\frac{1}{6}$
16	$v(t) = 5t^4 - 40t$ $v(3) = 5(3)^4 - 40(3) = 405 - 120 = 285 \text{ m/s}$
17	بما أن إشارة السرعة المتجهة موجبة، فإن الجسم يتحرك في الاتجاه الموجب (إلى اليمين) عندما $t = 3$

18	$a(t) = 20t^3 - 40$ $a(3) = 20(3)^3 - 40 = 540 - 40 = 500\ \mathrm{m/s^2}$
19	يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما تكون سرعته المتجهة 0 $5t^4 - 40t = 0$ $5t(t^3 - 8) = 0$ $t = 0 \quad or \quad t = 2$
20	$s(t) = \dfrac{3t}{1+t}$ $v(t) = \dfrac{(1+t)(3) - (3t)(1)}{(1+t)^2} = \dfrac{3}{(1+t)^2}$ $v(4) = \dfrac{3}{(1+4)^2} = \dfrac{3}{25} = 0.12\ \mathrm{m/s}$
21	بما أن إشارة السرعة المتجهة موجبة، فإن الجسم يتحرك في الاتجاه الموجب (إلى اليمين) عندما $t = 4$
22	$a(t) = \dfrac{-3 \times 2(1+t)(1)}{(1+t)^4} = \dfrac{-6}{(1+t)^3}$ $a(4) = \dfrac{-6}{(1+4)^3} = \dfrac{-6}{125} = -0.048\ \mathrm{m/s^2}$
23	$v(t) = 2t - 8$ $v(6) = 2(6) - 8 = 4\ \mathrm{m/s}$
24	$a(t) = 2$ $a(6) = 2\ \mathrm{m/s^2}$
25	يكون رامي في حالة سكون لحظي عندما تكون سرعته المتجهة 0 $2t - 8 = 0 \quad \rightarrow \quad t = 4$

26	$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(5-3x^2)^6(1) - (x)(6)(5-3x^2)^5(-6x)}{(5-3x^2)^{12}}$ $= \frac{(5-3x^2)^5(5-3x^2+36x^2)}{(5-3x^2)^{12}}$ $= \frac{5+33x^2}{(5-3x^2)^7}$
27	$v(t) = 3t^2 - 12$ $a(t) = 6t$ $a(t) = 0 \quad \rightarrow \quad 6t = 0 \quad \rightarrow \quad t = 0$ $v(0) = 3(0)^2 - 12 = -12 \text{ m/s}$
28	$v(t) = 6t^2 - 24$ $a(t) = 12t$ $v(t) = 0 \quad \rightarrow \quad 6t^2 - 24 = 0 \quad \rightarrow \quad t^2 = 4 \quad \rightarrow \quad t = 2$ $a(2) = 12(2) = 24 \text{ m/s}^2$

مسألة اليوم صفحة 106

مساحة سطح الحوض المفتوح من الأعلى : $S = 4xy + x^2$

حجم الحوض : $V = x^2 y$

$$0.2 = x^2 y \quad \rightarrow \quad y = \frac{0.2}{x^2}$$

$$S = 4xy + x^2$$

$$S(x) = 4x\left(\frac{0.2}{x^2}\right) + x^2 = \frac{0.8}{x} + x^2$$

$$S'(x) = \frac{-0.8}{x^2} + 2x$$

$$\frac{-0.8}{x^2} + 2x = 0 \quad \rightarrow \quad 2x = \frac{0.8}{x^2} \rightarrow 2x^3 = 0.8 \quad \rightarrow x^3 = 0.4 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt[3]{0.4}$$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = \sqrt[3]{0.4}$

$$S''(x) = \frac{1.6}{x^3} + 2$$

$$S''\left(\sqrt[3]{0.4}\right) = \frac{1.2}{\left(\sqrt[3]{0.4}\right)^3} + 2 = 5 > 0$$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = \sqrt[3]{0.4}$ ،

وتكون أبعاد الحوض التي تجعل كمية الزجاج المستعملة لصنعه أقل ما يمكن هي:

$$x = \sqrt[3]{0.4}\ \text{m}\ , \qquad y = \frac{0.2}{\left(\sqrt[3]{0.4}\right)^2}\ \text{m}$$

أتحقق من فهمي صفحة 108

$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$

$3x^2 - 4x - 4 = 0$

$(3x+2)(x-2) = 0$

$x = -\frac{2}{3} \quad or \quad x = 2$

القيم الحرجة هي: $x = 2$ و $x = -\frac{2}{3}$

$f''(x) = 6x - 4$

$f''\left(-\frac{2}{3}\right) = 6\left(-\frac{2}{3}\right) - 4 = -8 < 0$

$f''(2) = 6(2) - 4 = 8 > 0$

توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = -\frac{2}{3}$ وهي $f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{-8}{27} - \frac{8}{9} + \frac{8}{3} + 5 = \frac{175}{27}$

توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 2$ وهي $f(2) = 8 - 2(4) - 4(2) + 5 = -3$

أتحقق من فهمي صفحة 110

مساحة المستطيل $A = xy$

محيط المستطيل $P = 2x + 2y$

$54 = 2x + 2y$

$27 = x + y \quad \rightarrow \quad y = 27 - x$

$A = xy$

$A(x) = x(27 - x)$

$= 27x - x^2$

$A'(x) = 27 - 2x$

$27 - 2x = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{27}{2}$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = \frac{27}{2}$

$A''(x) = -2 \rightarrow A''\left(\frac{27}{2}\right) = -2 < 0$

إذن توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = \frac{27}{2}$ ، وتكون أكبر مساحة ممكنة لسطح الحظيرة هي:

$A\left(\frac{27}{2}\right) = \frac{729}{4} = 182.25 \text{ m}^2$

أتحقق من فهمي صفحة 111

المساحة الكلية لسطح الخزان $S = 4xh + 2x^2$

حجم الخزان $V = x^2h$

$$2 = x^2h \quad \rightarrow \quad h = \frac{2}{x^2}$$

$$S = 4xh + 2x^2$$

$$S(x) = 4x\left(\frac{2}{x^2}\right) + 2x^2 = \frac{8}{x} + 2x^2$$

$$S'(x) = \frac{-8}{x^2} + 4x$$

$$\frac{-8}{x^2} + 4x = 0 \quad \rightarrow \quad 4x = \frac{8}{x^2} \quad \rightarrow 4x^3 = 8 \quad \rightarrow \quad x^3 = 2 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt[3]{2}$$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = \sqrt[3]{2}$

$$S''(x) = \frac{16}{x^3} + 4$$

$$S''\left(\sqrt[3]{2}\right) = \frac{16}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3} + 4 = 12 > 0$$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = \sqrt[3]{2}$ ،

وتكون أبعاد الخزان التي تجعل كمية المعدن المستعملة لصنعه أقل ما يمكن هي:

$$l = x = \sqrt[3]{2}\ \text{m}, \qquad w = x = \sqrt[3]{2}\ \text{m}, \qquad h = \frac{2}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2} = \sqrt[3]{2}\ \text{m}$$

أتحقق من فهمي صفحة 113

حجم الخزان $V = x^2 h$

مساحة سطح الخزان المفتوح من الأعلى $A = 4xh + x^2$

$$54 = 4xh + x^2 \quad \rightarrow \quad 4xh = 54 - x^2 \quad \rightarrow \quad h = \frac{54 - x^2}{4x}$$

$$V = x^2 h$$

$$V(x) = x^2\left(\frac{54 - x^2}{4x}\right)$$

$$= \frac{54x - x^3}{4}$$

$$= \frac{54}{4}x - \frac{1}{4}x^3$$

$$V'(x) = \frac{54}{4} - \frac{3}{4}x^2$$

$$\frac{54}{4} - \frac{3}{4}x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad 54 - 3x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = \frac{54}{3} = 18 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{18}$$

بما أن الطول لا يمكن ان يكون سالبًا، فإنه توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = \sqrt{18}$

$$V''(x) = -\frac{3}{2}x$$

$$V''(\sqrt{18}) = -\frac{3}{2}\sqrt{18} < 0$$

إذن توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = \sqrt{18}$ ، وتكون أبعاد الخزان التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن هي:

$$l = x = \sqrt{18}\, m, \qquad w = x = \sqrt{18}\, m, \qquad h = \frac{54 - 18}{4\sqrt{18}} = \frac{9}{\sqrt{18}}\, m$$

أتحقق من فهمي صفحة 115

اقتران الإيراد $R(x) = (1750 - 2x)x = 1750x - 2x^2$

اقتران التكلفة $C(x) = 2250 + 18x$

اقتران الربح $P(x) = R(x) - C(x)$

$$P(x) = 1750x - 2x^2 - 2250 - 18x$$
$$= 1732x - 2x^2 - 2250$$
$$P'(x) = 1732 - 4x$$
$$1732 - 4x = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1732}{4} = 433$$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = 433$

$$P''(x) = -4 \rightarrow P''(433) = -4 < 0$$

إذن توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 433$

ومنه فإنه لتحقيق أكبر ربح ممكن يجب إنتاج وبيع 433 ثلاجة.

أتدرب وأحل المسائل صفحة 116

1

$$f'(x) = 2x - 2$$
$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow 2x - 2 = 0$$
$$\rightarrow 2x = 2$$
$$\rightarrow x = 1$$

القيمة الحرجة هي: $x = 1$

$$f''(x) = 2$$
$$f''(1) = 2 > 0$$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 1$ وهي: $f(1) = 1 - 2 + 5 = 4$

2

$$f'(x) = 15 - 2x - x^2$$
$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow 15 - 2x - x^2 = 0$$
$$\rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0$$
$$\rightarrow (x + 5)(x - 3) = 0$$
$$\rightarrow x = -5 \quad or \quad x = 3$$

القيم الحرجة هي: $x = -5 \ , \ x = 3$

$$f''(x) = -2 - 2x$$
$$f''(-5) = -2 + 10 = 8 > 0$$
$$f''(3) = -2 - 6 = -8 < 0$$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = -5$ وهي:

$$f(-5) = 20 - 75 - 25 - \frac{125}{3} = -\frac{365}{3}$$

و توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 3$ وهي: $f(3) = 20 + 45 - 9 - 9 = 47$

3	$f'(x) = 4x^3 - 4x$ $f'(x) = 0 \rightarrow 4x^3 - 4x = 0$ $\rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0$ $\rightarrow x = 0 \ , x = \pm 1$ القيم الحرجة هي: $x = 0 \ , x = 1, x = -1$ $f''(x) = 12x^2 - 4$ $f''(0) = 0 - 4 = -4 < 0$ $f''(1) = 12 - 4 = 8 > 0$ $f''(-1) = 12 - 4 = 8 > 0$ إذن توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 0$ وهي: $f(0) = 0 - 0 - 2 = -2$ و توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 1$ و $x = -1$ هي: $f(1) = f(-1) = 1 - 2 - 2 = -3$
4	محيط الحديقة من دون الجدار $P = AB + BC + CD$ $300 = AB + x + AB$ $300 = 2AB + x$ $300 - x = 2AB$ $AB = \frac{300 - x}{2} = 150 - \frac{1}{2}x$
5	مساحة الحديقة المستطيلة $A = BC \times AB$ $A(x) = x \times \left(150 - \frac{1}{2}x\right)$ $= 150x - \frac{1}{2}x^2$
6	$A'(x) = 150 - x$ $150 - x = 0$ $x = 150$ توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = 150$ $A''(x) = -1$ $A''(150) = -1 < 0$ إذن توجد قيمة عظمى عندما $x = 150$ ، ويكون بعدا الحديقة اللذان يجعلان مساحتها أكبر ما يمكن هما: $BC = x = 150 \text{ m} \ , \ AB = 150 - \frac{1}{2}x = 150 - \frac{1}{2}(150) = 75 \text{ m}$

7	حجم العلبة $V = lwh$ $V(x) = (48 - 2x)(30 - 2x)x \ , \quad 0 \le x \le 15$ $= (1440 - 96x - 60x + 4x^2)x$ $= (1440 - 156x + 4x^2)x$ $= 1440x - 156x^2 + 4x^3$
8	$V'(x) = 1440 - 312x + 12x^2$ $12x^2 - 312x + 1440 = 0$ $x^2 - 26x + 120 = 0$ $(x - 20)(x - 6) = 0$ $x = 20 \quad or \quad x = 6$ توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = 6$ والقيمة $x = 20$ خارج مجال اقتران الحجم. إذ يستحيل قص مربعات طول ضلع كل منها 20 cm من زوايا الورقة التي عرضها 30 cm $V''(x) = -312 + 24x$ $V''(6) = -312 + 24(6) = -312 + 144 = -168 < 0 \rightarrow$ قيمة عظمى $V(6)$ إذن يكون حجم العلبة أكبر ما يمكن عندما $x = 6$
9	سعر المنتج الواحد هو $p(x) = 500 - 0.002x$ اقتران الإيراد $R(x) = (500 - 0.002x)x = 500x - 0.002x^2$
10	اقتران الربح $P(x) = R(x) - C(x)$ $= (500x - 0.002x^2) - (300 + 1.10x)$ $= 500x - 0.002x^2 - 300 - 1.10x$ $= 498.9x - 0.002x^2 - 300$

11	$P'(x) = 498.9 - 0.004x$ $498.9 - 0.004x = 0$ $498.9 = 0.004x$ $x = \frac{498.9}{0.004} = \frac{498900}{4} = 124725$ توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = 124725$ $P''(x) = -0.004$ $P''(124725) = -0.004 < 0$ إذن توجد قيمة عظمى عندما $x = 124725$ ، فيكون عدد القطع اللازم بيعها لتحقيق أكبر ربح ممكن هو 124725 قطعة أكبر ربح ممكن هو: $P(124725) = 498.9(124725) - 0.002(124725)^2 - 300 = 31112351.25$
12	سعر الوحدة الواحدة من المنتج الذي يحقق أكبر ربح ممكن $p(124725) = 500 - 0.002(124725)$ $= 250.55$

حجم المنشور الثلاثي القائم = مساحة القاعدة المثلثة × ارتفاع المنشور

مساحة المثلث = نصف طول القاعدة المثلث × ارتفاع المثلث

مساحة المثلث: $A_1 = \frac{1}{2}x(x) = \frac{1}{2}x^2$

حجم المنشور: $V = \frac{1}{2}x^2 l$

$$1000 = \frac{1}{2}x^2 l$$

$$2000 = x^2 l$$

$$l = \frac{2000}{x^2}$$

مساحة سطح القالب = مساحتي القاعدتين المثلثيتين + مساحتي الوجهين اللذين إحدى حافيتيهما ضلع القائمة x

$$A = 2\left(\frac{1}{2}x^2\right) + 2(xl) = x^2 + 2xl$$

$$A(x) = x^2 + 2x\left(\frac{2000}{x^2}\right)$$

$$= x^2 + \frac{4000}{x}$$

13 $$A'(x) = 2x - \frac{4000}{x^2}$$

$$2x - \frac{4000}{x^2} = 0$$

$$2x = \frac{4000}{x^2}$$

$$2x^3 = 4000$$

$$x^3 = 2000$$

$$x = \sqrt[3]{2000}$$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = \sqrt[3]{2000}$

$$A''(x) = 2 + \frac{8000}{x^3}$$

$$A''(x) = 1 + \frac{8000}{\left(\sqrt[3]{2000}\right)^3} = 1 + \frac{8000}{2000} = 5 > 0$$

توجد قيمة صغرى عندما $x = \sqrt[3]{2000}$

إذن أبعاد القالب التي تجعل المواد المستعملة لصنعه أقل ما يمكن هي:

$$x = \sqrt[3]{2000}\ \text{cm}\ ,\ \ l = \frac{2000}{x^2} = \frac{2000}{\left(\sqrt[3]{2000}\right)^2} = \sqrt[3]{2000}\ \text{cm}$$

مسألة اليوم صفحة 117

معدل التغير المعطى: $\frac{dV}{dt} = 0.5$

معدل التغير المطلوب: $\left.\frac{dh}{dt}\right|_{r=1}$

العلاقة التي تربط بين حجم الخزان وارتفاعه: $V = \pi r^2 h$

$$\frac{dV}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt}$$

$$0.5 = \pi (1)^2 \frac{dh}{dt}$$

$$0.5 = \pi \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{0.5}{\pi} \approx 0.16$$

إذن يزداد ارتفاع الوقود في الخزان بمعدل $0.16\ m/min$ تقريبا

أتحقق من فهمي صفحة 119

a

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

b

$$10y\frac{dy}{dx} - 2e^x = 4\frac{dy}{dx}$$

$$10y\frac{dy}{dx} - 4\frac{dy}{dx} = 2e^x$$

$$\frac{dy}{dx}(10y - 4) = 2e^x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2e^x}{10y - 4}$$

c	$(x)\left(\frac{dy}{dx}\right)+(y)(1)+2y\frac{dy}{dx}=-4\sin x$ $(x)\left(\frac{dy}{dx}\right)+2y\frac{dy}{dx}=-4\sin x-y$ $\frac{dy}{dx}(x+2y)=-4\sin x-y$ $\frac{dy}{dx}=-\frac{y+4\sin x}{x+2y}$

أتحقق من فهمي صفحة 120

	$x^3+2y^3=6 \qquad ,(2,-1)$ $3x^2+6y^2\frac{dy}{dx}=0$ $3(2)^2+6(-1)^2\frac{dy}{dx}=0$ بتعويض $(x,y)=(2,-1)$ $12+6\frac{dy}{dx}=0$ $\frac{dy}{dx}=-\frac{12}{6}=-2$ ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة $(2,-1)$ هو -2 معادلة المماس: $y-y_1=m(x-x_1)$ $y-(-1)=-2(x-2)$ $y+1=-2x+4$ $y=-2x+3$

أتحقق من فهمي صفحة 121

معدل التغير المعطى: $\frac{dr}{dt} = 3$

معدل التغير المطلوب: $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{r=4}$

العلاقة التي تربط بين حجم البالون ونصف قطره: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$
$$= 4\pi(4)^2(3)$$
$$= 192\pi$$

إذن يزداد حجم البالون بمعدل $192\pi \text{ cm}^3/\text{s}$ عندما يكون طول نصف قطره 4 cm

أتدرب وأحل المسائل صفحة 121

1

$$2x - 4y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$4y\frac{dy}{dx} = 2x$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{4y} = \frac{x}{2y}$$

2

$$2x + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$
$$3y^2\frac{dy}{dx} = -2x$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{3y^2}$$

3

$$2x + 2\frac{dy}{dx} - 2y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$2\frac{dy}{dx} - 2y\frac{dy}{dx} = -2x$$
$$\frac{dy}{dx}(2 - 2y) = -2x$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2 - 2y} = \frac{-x}{1 - y}$$

4	$2x\frac{dy}{dx}+2y-3\frac{dy}{dx}=2y\frac{dy}{dx}-7$ $2x\frac{dy}{dx}-3\frac{dy}{dx}-2y\frac{dy}{dx}=-7-2y$ $\frac{dy}{dx}(2x-3-2y)=-7-2y$ $\frac{dy}{dx}=\frac{-7-2y}{2x-3-2y}$
5	$5y^4\frac{dy}{dx}=3x^2$ $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2}{5y^4}$
6	$(x^2)\left(3y^2\frac{dy}{dx}\right)+(y^3)(2x)+\frac{dy}{dx}=0$ $3x^2y^2\frac{dy}{dx}+2xy^3+\frac{dy}{dx}=0$ $3x^2y^2\frac{dy}{dx}+\frac{dy}{dx}=-2xy^3$ $\frac{dy}{dx}(3x^2y^2+1)=-2xy^3$ $\frac{dy}{dx}=\frac{-2xy^3}{3x^2y^2+1}$
7	$\sqrt{x}+\sin y=16$ $\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{dy}{dx}\cos y=0$ $\frac{dy}{dx}\cos y=-\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2\sqrt{x}\cos y}$
8	$(e^x)\left(\frac{dy}{dx}\right)+(y)(e^x)=(x)\left(\frac{dy}{dx}e^y\right)+(e^y)(1)$ $e^x\frac{dy}{dx}-xe^y\frac{dy}{dx}=e^y-ye^x$ $\frac{dy}{dx}(e^x-xe^y)=e^y-ye^x$ $\frac{dy}{dx}=\frac{e^y-ye^x}{e^x-xe^y}$

9	$\sin x + \frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} = 0$ $\frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} = -\sin x$ $\frac{dy}{dx} = -y \sin x$
10	$32y\frac{dy}{dx} - 2x = 0$ $32y\frac{dy}{dx} = 2x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{32y} = \frac{x}{16y}$
11	$2x + 2y\frac{dy}{dx} - 4 + 6\frac{dy}{dx} = 0$ $2y\frac{dy}{dx} + 6\frac{dy}{dx} = 4 - 2x$ $\frac{dy}{dx}(2y + 6) = 4 - 2x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{4 - 2x}{2y + 6}$
12	$9x^2 - 2y\frac{dy}{dx} = 0$ $9(2)^2 - 2(4)\frac{dy}{dx} = 0$ بتعويض $(x, y) = (2, 4)$ $36 - 8\frac{dy}{dx} = 0$ $8\frac{dy}{dx} = 36$ $\frac{dy}{dx} = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}$

13	$4x - 9y^2\frac{dy}{dx} = 0$ $4(-2) - 9(1)^2\frac{dy}{dx} = 0$ بتعويض $(x, y) = (-2, 1)$ $-8 - 9\frac{dy}{dx} = 0$ $9\frac{dy}{dx} = -8$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{8}{9}$
14	$2y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ $2(1)\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e}$ بتعويض $(x, y) = (e, 1)$ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2e}$
15	$2(y-3)^1\frac{dy}{dx} = 4$ $2(1-3)^1\frac{dy}{dx} = 4$ بتعويض $(x, y) = (6, 1)$ $-4\frac{dy}{dx} = 4$ $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{-4} = -1$
16	$4x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$ $4(3) + 2(4)\frac{dy}{dx} = 0$ بتعويض $(x, y) = (3, 4)$ $12 + 8\frac{dy}{dx} = 0$ $8\frac{dy}{dx} = -12$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2}$ ميل المماس عند النقطة $(3, 4)$ هو $-\frac{3}{2}$

17	معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$ $y - 4 = -\frac{3}{2}(x - 3)$ $y - 4 = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$ $y = -\frac{3}{2}x + \frac{17}{2}$
18	$2y\frac{dy}{dx} + (x)\left(\frac{dy}{dx}\right) + y + 2x = 0$ $2(-2)\frac{dy}{dx} + (3)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (-2) + 2(3) = 0$ بتعويض $(x, y) = (3, -2)$ $-4\frac{dy}{dx} + 3\frac{dy}{dx} - 2 + 6 = 0$ $-\frac{dy}{dx} = -4$ $\frac{dy}{dx} = 4$ ميل المماس عند النقطة $(3, -2)$ هو 4
19	معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$ $y - (-2) = 4(x - 3)$ $y + 2 = 4x - 12$ $y = 4x - 14$
20	معادلة العمودي على المماس: $y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$ $y - (-2) = -\frac{1}{4}(x - 3)$ $y + 2 = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$ $y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$

21	معدل التغير المعطى: $\frac{dx}{dt} = -6$ معدل التغير المطلوب: $\left.\frac{dV}{dt}\right\|_{x=30}$ العلاقة التي تربط بين حجم المكعب وطول ضلعه: $V = x^3$ $\frac{dV}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt}$ $= 3(30)^2(-6)$ $= -16200$ إذن يتناقص حجم المكعب بمعدل $16200\ cm^3/s$ عندما يكون طول ضلعه $30\ cm$
22	معدل التغير المعطى: $\frac{dr}{dt} = 0.5$ معدل التغير المطلوب: $\left.\frac{dA}{dt}\right\|_{r=3}$ العلاقة التي تربط بين مساحة سطح الفقاعة ونصف قطرها: $A = 4\pi r^2$ $\frac{dA}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}$ $= 8\pi(3)(0.5)$ $= 12\pi$ إذن تتزايد مساحة سطح الفقاعة بمعدل $12\pi\ cm^2/s$ عندما يكون طول نصف قطرها $3\ cm$
23	معدل التغير المعطى: $\frac{dr}{dt} = 0.13$ معدل التغير المطلوب $\left.\frac{dV}{dt}\right\|_{r=0.45}$ العلاقة التي تربط بين حجم الورم ونصف قطره: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$ $= 4\pi(0.45)^2(0.13)$ $= 0.1053\pi$ إذن يزداد حجم الورم بمعدل $0.1053\pi\ cm^3/s$ عندما يكون طول نصف قطره $0.13\ cm$

$$x^2 + 6y^2 = 10$$

$$(2)^2 + 6y^2 = 10 \quad \rightarrow \quad 6y^2 = 6 \quad \rightarrow \quad y^2 = 1 \quad \rightarrow \quad y = \pm 1$$

$$2x + 12y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{6y}$$

عند النقطة $(2, 1)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{6y} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 2)$$

24

$$y - 1 = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

عند النقطة $(2, -1)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{6y} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$$

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - (-1) = \frac{1}{3}(x - 2)$$

$$y + 1 = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$$

25	$\ln(xy) = x^2 + y^2$ $\frac{(x)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y)(1)}{xy} = 2x + 2y\frac{dy}{dx}$ $(x)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y)(1) = 2x^2y + 2xy^2\frac{dy}{dx}$ $x\frac{dy}{dx} + y = 2x^2y + 2xy^2\frac{dy}{dx}$ $x\frac{dy}{dx} - 2xy^2\frac{dy}{dx} = 2x^2y - y$ $\frac{dy}{dx}(x - 2xy^2) = 2x^2y - y$ $\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2y - y}{x - 2xy^2}$
26	معدل التغير المطلوب $\left.\frac{du}{dt}\right\|_{w=64}$ العلاقة التي تربط u مع w هي: $u = 150\sqrt[3]{w^2}$ $u = 150w^{\frac{2}{3}}$ $\frac{du}{dt} = 150 \times \frac{2}{3}w^{-\frac{1}{3}}\frac{dw}{dt}$ لكن $w = 0.05t + 8$ ، إذن: $\frac{dw}{dt} = 0.05$ $\left.\frac{du}{dt}\right\|_{w=64} = 150 \times \frac{2}{3}(64)^{-\frac{1}{3}}(0.05)$ $= 150 \times \frac{2}{3}\frac{1}{(64)^{\frac{1}{3}}}(0.05)$ $= 150 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4}(0.05) = 1.25$

1	c
2	d
3	c
4	d
5	a
6	d
7	c
8	$f(x) = x^2 - 7x + 10 \qquad (2, 0)$ $f'(x) = 2x - 7$ $f'(2) = 4 - 7 = -3$ معادلة المماس: $y - 0 = -3(x - 2)$ $y = -3x + 6$
9	$f(x) = x^2 - \frac{8}{\sqrt{x}} \qquad (4, 12)$ $f'(x) = 2x + \frac{8\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{x} = 2x + \frac{4}{x\sqrt{x}}$ $f'(4) = 2(4) + \frac{4}{4\sqrt{4}} = 8 + \frac{1}{2} = \frac{17}{2}$ معادلة المماس: $y - 12 = \frac{17}{2}(x - 4)$ $y - 12 = \frac{17}{2}x - 34$ $y = \frac{17}{2}x - 22$

10	$f(x)=\frac{2x-1}{x}$ $(1,1)$ $f'(x)=\frac{(x)(2)-(2x-1)(1)}{x^2}=\frac{1}{x^2}$ $f'(1)=\frac{1}{1}=1$ $y-1=1(x-1)$ معادلة المماس: $y-1=x-1$ $y=x$
11	$f(x)=\frac{3}{\sqrt{2x+1}}$ $(4,1)$ $f'(x)=\frac{-3\left(\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\right)}{2x+1}=\frac{-3}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$ $f'(4)=\frac{-3}{(8+1)\sqrt{8+1}}=-\frac{1}{9}$ $y-1=-\frac{1}{9}(x-4)$ معادلة المماس: $y-1=-\frac{1}{9}x+\frac{4}{9}$ $y=-\frac{1}{9}x+\frac{13}{9}$
12	$f(x)=(x-7)(x+4)$ $,x=1$ $f(1)=(1-7)(1+4)=-30$ $\rightarrow$ $(1,-30)$ $f'(x)=(x-7)(1)+(x+4)(1)$ $f'(1)=(1-7)+(1+4)=-1$ $y-(-30)=-1(x-1)$ معادلة المماس: $y+30=-x+1$ $y=-x-29$

13	$f(x)=\frac{x}{x+4}$ $,x=-5$ $f(-5)=\frac{-5}{-5+4}=5$ $\rightarrow$ $(-5,5)$ $f'(x)=\frac{(x+4)(1)-(x)(1)}{(x+4)^2}=\frac{4}{(x+4)^2}$ $f'(-5)=\frac{4}{(-5+4)^2}=4$ معادلة المماس: $y-5=4(x+5)$ $y-5=4x+20$ $y=4x+25$
14	$f(x)=2x^4+9x^3+x$ $,x=-2$ $(-2,-42)$ $f(-2)=2(-2)^4+9(-2)^3+(-2)=-42$ $f'(x)=8x^3+27x^2+1$ $f'(-2)=8(-2)^3+27(-2)^2+1=45$ معادلة المماس: $y-(-42)=45(x+2)$ $y+42=45x+90$ $y=45x+48$
15	$f(x)=7x^3+6x-5$, $x=2$ $f(2)=7(2)^3+6(2)-5=63$ $f'(x)=21x^2+6$ $f'(2)=21(2)^2+6=90$ معادلة العمودي على المماس $y-63=-\frac{1}{90}(x-2)$ $y-63=-\frac{1}{90}x+\frac{1}{45}$ $y=-\frac{1}{90}x+\frac{2836}{45}$

16	$f(x)=\frac{6x^2-x^3}{4x^4}=\frac{3}{2}x^{-2}-\frac{1}{4}x^{-1}$, $x=-2$ $f(-2)=\frac{3}{2}(-2)^{-2}-\frac{1}{4}(-2)^{-1}=\frac{3}{2\times(-2)^2}-\frac{1}{4\times(-2)^1}=\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$ $f'(x)=-3x^{-3}+\frac{1}{4}x^{-2}$ $f'(-2)=\frac{-3}{(-2)^3}+\frac{1}{4\times(-2)^2}=\frac{3}{8}+\frac{1}{16}=\frac{7}{16}$ معادلة العمودي على المماس $y-\frac{1}{2}=-\frac{16}{7}(x+2)$ $y-\frac{1}{2}=-\frac{16}{7}x-\frac{32}{7}$ $y=-\frac{16}{7}x-\frac{32}{7}+\frac{1}{2}$ $y=-\frac{16}{7}x-\frac{57}{14}$
17	مماس المنحنى أفقي أي $f'(x)=0$ $f'(x)=4x^3-9x^2$ $4x^3-9x^2=0$ $x^2(4x-9)=0$ $x=0$ or $4x-9=0\rightarrow 4x=9 \rightarrow x=\frac{9}{4}$ $f(0)=(0)^4-3(0)^3+1=1$ $f\left(\frac{9}{4}\right)=\left(\frac{9}{4}\right)^4-3\left(\frac{9}{4}\right)^3+1=-\frac{1931}{256}$ النقاط هي $(0,1),\left(2,-\frac{1931}{256}\right)$
18	ميل مماس المنحنى 12 أي $f'(x)=12$ $f'(x)=3x^2$ $3x^2=12$ $x^2=4\rightarrow x=2$ or $x=-2$ $f(2)=(2)^3-3=5$ $f(-2)=(-2)^3-3=-11$ النقاط هي $(2,5),(-2,-11)$

19	$f'(x) = 8x - 5$ $f''(x) = 8$
20	$f'(x) = \frac{1}{x} - 9e^x$ $f''(x) = -\frac{1}{x^2} - 9e^x$
21	$f'(x) = 10 - \left((2x)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + (\sqrt{x})(2)\right)$ $= 10 - (\sqrt{x} + 2\sqrt{x})$ $= 10 - 3\sqrt{x}$ $f''(x) = -3\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{-3}{2\sqrt{x}}$
22	$f(x) = \sqrt{x}(x+2) = x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}}$ $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}$ $f''(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$ $f''(2) = \frac{3}{4}(2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(2)^{-\frac{3}{2}}$ $= \frac{3}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{2}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$
23	$f(x) = 2x^4 - 3x^3 - x^2 \quad , x = 1$ $f'(x) = 8x^3 - 9x^2 - 2x$ $f''(x) = 24x^2 - 18x - 2$ $f''(1) = 24 - 18 - 2 = 4$

24	معدل التغير المعطى: $\frac{dA}{dt} = 50$ معدل التغير المطلوب $\left.\frac{dr}{dt}\right\|_{r=20}$ العلاقة التي تربط بين مساحة الدائرة ونصف قطرها: $A = \pi r^2$ $\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$ $50 = 2\pi(20)\frac{dr}{dt}$ $\frac{dr}{dt} = \frac{5}{4\pi}$ إذن يزداد طول نصف قطر البقعة بمعدل $\frac{5}{4\pi}$ m/min عندما يكون طول نصف قطرها 20 m
25	$v(t) = 3t^2 - 12t + 12$ $v(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 12 = 0$ m/s
26	بما أن السرعة المتجهة صفر، إذن الجسم في حالة سكون لحظي.
27	$a(t) = 6t - 12$ $a(2) = 12 - 12 = 0$ m/s^2
28	يكون الجسم في حالة سكون عندما تكون السرعة المتجهة صفرًا $3t^2 - 12t + 12 = 0$ $t^2 - 4t + 4 = 0$ $(t-2)(t-2) = 0$ $t = 2$
29	$v(t) = \frac{1}{2}t^2 + t + \frac{1}{2}$ $v(3) = \frac{9}{2} + 3 + \frac{1}{2} = 8$ m/s
30	$a(t) = t + 1$ $a(3) = 3 + 1 = 4$ m/s^2
31	يكون الشخص في حالة سكون عندما تكون السرعة المتجهة صفرًا لكن السرعة هنا هي $\frac{1}{2}t^2 + t + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(t^2 + 2t + 1) = \frac{1}{2}(t+1)^2$ وهذا مقدار موجب لجميع قيم $t \geq 0$، ولا يمكن أن يكون صفرًا، فلا يكون الشخص في حالة سكون لحظي أبدًا.

32	$f'(x) = 24 - 6x^2$ $24 - 6x^2 = 0$ $6x^2 = 24 \quad \rightarrow \quad x^2 = 4 \quad \rightarrow \quad x = \pm 2$ القيم الحرجة هي: $x = -2$ و $x = 2$ $f''(x) = -12x$ $f''(-2) = 24 > 0$ $f''(2) = -24 < 0$ إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = -2$ وهي $f(-2) = 9 - 48 + 16 = -23$ و توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 2$ وهي $f(2) = 9 + 48 - 16 = 41$
33	$f'(x) = 3(3x-2)^2(3) - 9$ $= 9(3x-2)^2 - 9$ $9(3x-2)^2 - 9 = 0$ $(3x-2)^2 = 1 \quad \rightarrow \quad 3x - 2 = \pm 1 \quad \rightarrow \quad x = 1 \; or \; x = \frac{1}{3}$ القيمة الحرجة هي: $x = 1,\ x = \frac{1}{3}$ $f''(x) = 18(3x-2)^1(3) = 54(3x-2)$ $f''(1) = 54 > 0$ $f''\left(\frac{1}{3}\right) = -54 < 0$ إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 1$ وهي $f(1) = (3-2)^3 - 9 = -8$ وتوجد قيمة عظمى محلية عندما $x = \frac{1}{3}$ وهي $f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(3(\frac{1}{3}) - 2\right)^3 - 9(\frac{1}{3}) = -4$

34	$f(x) = 4x^5 - 10x^2$ $f'(x) = 20x^4 - 20x$ $20x^4 - 20x = 0$ $20\,x(x^3 - 1) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \;\; or \;\; x = 1$ القيم الحرجة هي: $x = 0$ و $x = 1$ $f''(x) = 80x^3 - 20$ $f''(0) = -20 < 0$ $f''(1) = 60 > 0$ إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 1$ وهي $f(1) = -6$ و توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 0$ وهي $f(0) = 0$
35	معدل التغير المعطى: $\frac{dV}{dt} = 800$ معدل التغير المطلوب $\left.\frac{dr}{dt}\right\|_{r=60}$ العلاقة التي تربط بين حجم البالون ونصف قطره: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$ $800 = 2\pi(60)^2 \frac{dr}{dt}$ $\frac{dr}{dt} = \frac{800}{7200\pi} = \frac{1}{9\pi}$ إذن يزداد طول نصف قطر البالون بمعدل $\frac{1}{9\pi}$ cm/s عندما يكون طول نصف قطره 60 cm

36	طول السياج مساحة الحظيرة المستطيلة $P = x + 2y$ $A = xy$ $245000 = xy \quad \rightarrow \quad y = \frac{245000}{x}$ $P = x + 2y$ $P(x) = x + 2\left(\frac{245000}{x}\right)$ $= x + \frac{490000}{x}$ $P'(x) = 1 - \frac{490000}{x^2}$ $1 - \frac{490000}{x^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{490000}{x^2} = 1 \quad \rightarrow \quad x^2 = 490000 \quad \rightarrow \quad x = \pm 700$ لكن الأطوال لا تكون سالبة، لذا فإن $x = 700$ $P''(x) = \frac{980000}{x^3}$ $P''(700) = \frac{980000}{(700)^3} = 2 > 0$ إذن توجد قيمة صغرى عندما $x = 700$ وتكون أبعاد الحظيرة التي تجعل طول السياج أقل ما يمكن هي: $x = 700\text{ m}$ و $y = \frac{245000}{700} = 350\text{ m}$
37	$2x + 2y\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}$ $2y\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = -2x$ $\frac{dy}{dx}(2y - 1) = -2x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y - 1}$

38	$2x+6-8\frac{dy}{dx}+10y\frac{dy}{dx}=0$ $-8\frac{dy}{dx}+10y\frac{dy}{dx}=-2x-6$ $\frac{dy}{dx}(10y-8)=-2x-6$ $\frac{dy}{dx}=\frac{-2x-6}{10y-8}$
39	$2y\frac{dy}{dx}+(x)\left(\frac{dy}{dx}\right)+(y)(1)+2x=0$ بتعويض $(x,y)=(-4,3)$ ينتج أنّ: $2(3)\frac{dy}{dx}+(-4)\left(\frac{dy}{dx}\right)+(3)(1)+2(-4)=0$ $6\frac{dy}{dx}-4\frac{dy}{dx}+3-8=0$ $2\frac{dy}{dx}=5$ $\frac{dy}{dx}=\frac{5}{2}$ ميل المماس عند النقطة $(-4,3)$ هو $\frac{5}{2}$
40	معادلة المماس: $y-y_1=m(x-x_1)$ $y-3=\frac{5}{2}(x-(-4))$ $y-3=\frac{5}{2}x+10$ $y=\frac{5}{2}x+13$
41	مساحة المستطيل $A(x)=x(10-x)=10x-x^2$ $A'(x)=10-2x$ $10-2x=0 \quad \rightarrow \quad x=5$ توجد قيمة حرجة واحدة هي $x=5$ $A''(x)=-2$ $A''(5)=-2<0$ توجد قيمة عظمى عندما $x=5$ إذن أكبر مساحة ممكنة هي $A(5)=10(5)-(5)^2=25\text{ cm}^2$

42	حجم الصندوق $V = x^2y$ مجموع أطوال الأحرف $S = 8x + 4y$ $144 = 8x + 4y$ $4y = 144 - 8x$ $y = 36 - 2x$ حجم الصندوق بدلالة x $V(x) = x^2(36 - 2x)$ $= 36x^2 - 2x^3$
43	$V'(x) = 72x - 6x^2$ $72x - 6x^2 = 0$ $6x(12 - x) = 0$ $x = 0 \quad or \quad x = 12$ توجد قيمتان حرجتان هما $x = 12$ و $x = 0$ $V''(x) = 72 - 12x$ $V''(0) = 72 > 0$ $V''(12) = 72 - 144 = -72 < 0$ توجد قيمة عظمى عندما $x = 12$ إذن قيمة x التي تجعل حجم الصندوق أكبر ما يمكن هي $x = 12$
44	$6x^2 + 8y\frac{dy}{dx} = 0$ بتعويض $(x, y) = (-2, -1)$ ينتج أنّ: $6(-2)^2 + 8(-1)\frac{dy}{dx} = 0$ $24 - 8\frac{dy}{dx} = 0$ $\frac{dy}{dx} = 3$

45	$3x^2-(x^2)\left(2y\frac{dy}{dx}\right)-(y^2)(2x)=0$ بتعويض $(x,y)=(3,-2)$ ينتج أنّ: $3(3)^2-(3)^2\left(2(-2)\frac{dy}{dx}\right)-((-2)^2)\big(2(3)\big)=0$ $27+36\frac{dy}{dx}-24=0$ $\frac{dy}{dx}=-\frac{3}{36}=-\frac{1}{12}$

الرياضيات

الصف الثاني عشر- الفرع الأدبي

الفصل الدراسي الأول

12

إجابات كتاب التمارين

إجابات كتاب التمارين– مادة الرياضيات– الصف الثاني عشر الأدبي ف1

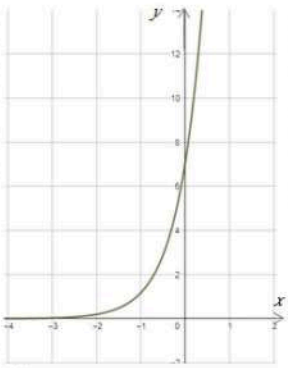
الوحدة الأولى: الاقترانات الأسية واللوغاريتمية

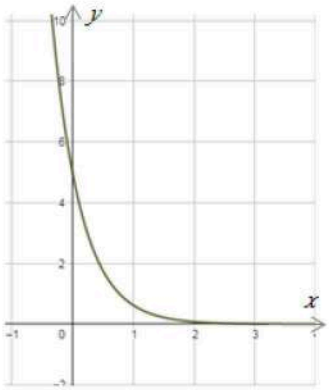
أستعد لدراسة الوحدة

تبسيط المقادير الأسية صفحة 6	
1	$(16)^{\frac{3}{4}} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^3 = (2)^3 = 8$
2	$\sqrt[3]{64a^6} = \sqrt[3]{64} \times \sqrt[3]{a^6} = 4a^2$
3	$\frac{20a^5b^2}{12ab^{-3}} = \frac{20}{12} \times \frac{a^5}{a} \times \frac{b^2}{b^{-3}} = \frac{5}{3}a^4b^5$
حل المعادلات الأسية صفحة 6	
4	$3^{x+1} = 27$ $3^{x+1} = 3^3$ $x + 1 = 3$ $x = 2$
5	$\left(\frac{1}{5}\right)^x = 625$ $(5^{-1})^x = 5^4$ $5^{-x} = 5^4$ $-x = 4$ $x = -4$

6	$4^{-x} = \frac{1}{256}$ $4^{-x} = \frac{1}{4^4}$ $4^{-x} = 4^{-4}$ $-x = -4$ $x = 4$
إيجاد الاقتران العكسي صفحة 7	
7	$f(x) = x + 3$ $y = x + 3$ $y - 3 = x$ $x - 3 = y$ $f^{-1}(x) = x - 3$
8	$f(x) = \frac{x}{4} + 1$ $y = \frac{x}{4} + 1$ $y - 1 = \frac{x}{4}$ $4y - 4 = x$ $4x - 4 = y$ $f^{-1}(x) = 4x - 4$

9	$f(x) = 2x^3$ $y = 2x^3$ $\frac{y}{2} = x^3$ $\sqrt[3]{\frac{y}{2}} = x$ $\sqrt[3]{\frac{x}{2}} = y$ $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{2}}$

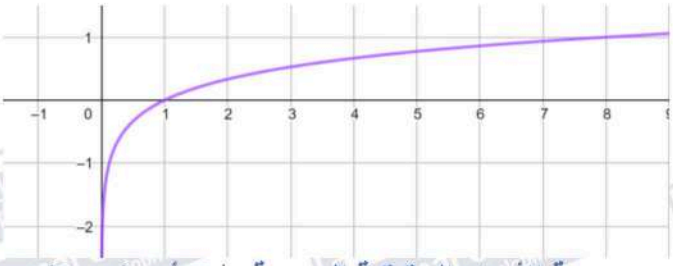
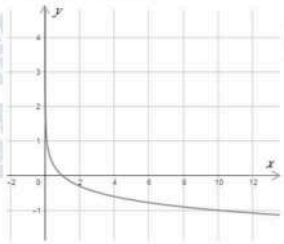
1	$f(2) = (13)^2 = 169$
2	$f(3) = 4(5)^3 = 4 \times 125 = 500$
3	$f(3) = 7\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 7 \times \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$
4	$f(4) = -(3)^4 + 7 = -81 + 7 = -74$
5	$f(6) = -(2)^6 + 1 = -64 + 1 = -63$
6	$f(3) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 - 12 = \frac{1}{64} - 12 = -\frac{767}{64}$
7	$f(x) = 7(6)^x$  مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$
8	$f(x) = (7)^{-x}$  مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$

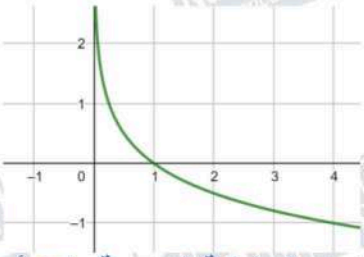
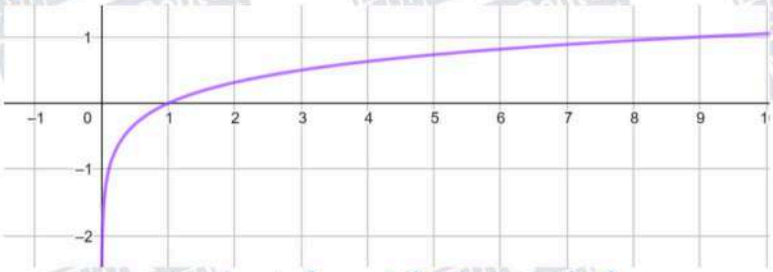
9	$f(x) = 5\left(\frac{1}{8}\right)^x$  مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$
10	$f(x) = 2(9)^x$  مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$
11	$f(x) = 7^{x-2} + 1$ لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = 1$ مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R مدى هذا الاقتران هو $(1, \infty)$ الاقتران $f(x)$ متزايد
12	$f(x) = \left(\frac{1}{7}\right)^{x+1} - 3$ لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = -3$ مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R مدى هذا الاقتران هو $(-3, \infty)$ الاقتران $f(x)$ متناقص

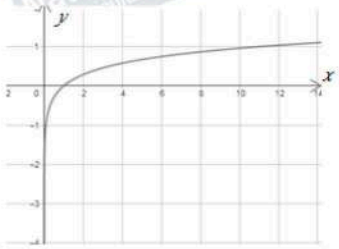
13	$f(x) = 5\left(\frac{1}{4}\right)^{x+3} - 7$ لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = -7$ مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R مدى هذا الاقتران هو $(-7, \infty)$ الاقتران $f(x)$ متناقص
14	$f(x) = 7(4)^{x-5} + 3$ لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = 3$ مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R مدى هذا الاقتران هو $(3, \infty)$ الاقتران $f(x)$ متزايد
15	$f(x) = 400(2)^{\frac{x}{3}}$ $f(0) = 400(2)^0 = 400$
16	$f(12) = 400(2)^{\frac{12}{3}} = 400(2)^4 = 400 \times 16 = 6400$
17	$102400 = 400(2)^{\frac{x}{3}}$ $256 = (2)^{\frac{x}{3}}$ $(2)^8 = (2)^{\frac{x}{3}}$ $\frac{x}{3} = 8$ $x = 24$ إذن، يصبح عدد الخلايا البكتيرية 102400 بعد 24 ساعة.
18	$f(1) = 2(0.75)^1 = 1.5\ \text{m}^3$
19	$\frac{9}{8} = 2(0.75)^x$ $\frac{9}{16} = (0.75)^x$ $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ $x = 2$

1	$A(t) = a(1+r)^t$ $A(t) = 35000(1+0.02)^t$ $A(t) = 35000(1.02)^t$
2	$A(7) = 35000(1.02)^7 \approx 40204$
3	$A(t) = a(1-r)^t$ $A(t) = 12000(1-0.2)^t$ $A(t) = 12000(0.8)^t$
4	$A(3) = 12000(0.8)^3 = 6144$
5	$A(t) = a(1+r)^t$ $A(t) = 84370(1+0.024)^t$ $A(t) = 84370(1.024)^t$
6	$2030 - 2015 = 15$ $A(15) = 84370(1.024)^{15} \approx 120417$
7	$A(t) = a(1-r)^t$ $A(t) = 19725(1-0.03)^t$ $A(t) = 19725(0.97)^t$
8	$A(4) = 19725(0.97)^4 \approx$ JD17462
9	$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$ $A = 8000\left(1+\frac{0.055}{12}\right)^{12t}$
10	$A = 8000\left(1+\frac{0.055}{12}\right)^{12\times 3} \approx$ JD 9431.59
11	$A = Pe^{rt}$ $A = 60000e^{0.06\times 17} \approx$ JD166391.69

1	$\log_3 729 = 6 \quad \rightarrow \quad 3^6 = 729$
2	$\log_5 625 = 4 \quad \rightarrow \quad 5^4 = 625$
3	$\log_{64} 4 = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad 64^{\frac{1}{3}} = 4$
4	$\log_{64} 8 = 0.5 \quad \rightarrow \quad 64^{0.5} = 8$
5	$\log_7 1 = 0 \quad \rightarrow \quad 7^0 = 1$
6	$\log_{43} 43 = 1 \quad \rightarrow \quad 43^1 = 43$
7	$4^5 = 1024 \quad \rightarrow \quad \log_4 1024 = 5$
8	$3^{-4} = \frac{1}{81} \quad \rightarrow \quad \log_3 \frac{1}{81} = -4$
9	$7^3 = 343 \quad \rightarrow \quad \log_7 343 = 3$
10	$5^{-2} = 0.04 \quad \rightarrow \quad \log_5 0.04 = -2$
11	$32^1 = 32 \quad \rightarrow \quad \log_{32} 32 = 1$
12	$8^0 = 1 \quad \rightarrow \quad \log_8 1 = 0$
13	$\log_2 64 = \log_2 2^6 = 6$
14	$\log_{81} 9 = y \quad \rightarrow \quad 81^y = 9$ $(9^2)^y = 9$ $9^{2y} = 9$ $2y = 1$ $y = \frac{1}{2}$ إذن، $\log_{81} 9 = \frac{1}{2}$
15	$\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$
16	$\log_{25} 125 = y \quad \rightarrow \quad 25^y = 125$ $(5^2)^y = 5^3$ $5^{2y} = 5^3$ $2y = 3$ $y = \frac{3}{2}$ إذن، $\log_{25} 125 = \frac{3}{2}$
17	$\log_{10} 0.0001 = \log_{10} 10^{-4} = -4$
18	$\log_{\frac{5}{3}} 1 = 0$

19	$\log_{\frac{1}{6}} 6 = y \rightarrow \left(\frac{1}{6}\right)^y = 6$ $(6^{-1})^y = 6^1$ $6^{-y} = 6^1$ $-y = 1$ $y = -1$ إذن، $\log_{\frac{1}{6}} 6 = -1$
20	$(10)^{\log_{10}\frac{1}{9}} = \frac{1}{9}$
21	$\log_3 \frac{1}{\sqrt{3^6}} = \log_3 \frac{1}{3^3} = \log_3 3^{-3} = -3$
22	$\log_b \sqrt[7]{b} = \log_b b^{\frac{1}{7}} = \frac{1}{7}$
23	$\log_{10}(1 \times 10^{-5}) = \log_{10} 10^{-5} = -5$
24	$4^{\log_4 3} = 3$
25	$f(x) = \log_8 x$  مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$ مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y الاقتران متزايد
26	$f(x) = \log_{\frac{1}{10}} x$  مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$ مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y الاقتران متناقص

27	$f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$  مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$ مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y الاقتران متناقص
28	$f(x) = \log_{\frac{1}{9}} x$  مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$ مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y الاقتران متناقص
29	$f(x) = \log_9 x$  مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$ مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y الاقتران متزايد

30	$f(x) = \log_{11} x$  مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$ مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y الاقتران متزايد
31	$f(x) = \log_2(x+3)$ $x + 3 > 0$ $x > -3$ مجال هذا الاقتران هو $(-3, \infty)$
32	$f(x) = 7 + 2\log_5(x-2)$ $x - 2 > 0$ $x > 2$ مجال هذا الاقتران هو $(2, \infty)$
33	$f(x) = -5\log_7(-x)$ $-x > 0$ $x < 0$ مجال هذا الاقتران هو $(-\infty, 0)$
34	$\log_{10}\left(\frac{I}{12}\right) = -0.0125(10)$ $\log_{10}\left(\frac{I}{12}\right) = -0.125$ $10^{-0.125} = \frac{I}{12}$ $I = 12 \times 10^{-0.125} \approx 118.5$ lumen

1	$\log_a \frac{3}{7} = \log_a 3 - \log_a 7$ $\approx 0.528 - 0.936$ ≈ -0.408
2	$\log_a 21 = \log_a 3 \times 7$ $= \log_a 3 + \log_a 7$ $\approx 0.528 + 0.936$ ≈ 1.464
3	$\frac{\log_a 3}{\log_a 7} \approx \frac{0.528}{0.936} \approx \frac{528}{936} \approx 0.56$
4	$\log_a \frac{1}{7} = \log_a 1 - \log_a 7$ $\approx 0 - 0.936$ ≈ -0.936
5	$\log_a 441 = \log_a 21^2$ $= 2\log_a 21$ $= 2\log_a(3 \times 7)$ $= 2(\log_a 3 + \log_a 7)$ $\approx 2(0.528 + 0.936)$ $\approx 2 \times 1.464$ ≈ 2.928
6	$\log_a \frac{49}{27} = \log_a 49 - \log_a 27$ $= \log_a 7^2 - \log_a 3^3$ $= 2\log_a 7 - 3\log_a 3$ $\approx 2(0.936) - 3(0.528)$ $\approx 1.872 - 1.584$ ≈ 0.288
7	$\log_a(7a^2) = \log_a 7 + \log_a a^2$ $= \log_a 7 + 2\log_a a$ $\approx 0.936 + 2$ ≈ 2.936
8	$\log_a \sqrt[4]{81} = \log_a \sqrt[4]{3^4}$ $= \log_a 3$ ≈ 0.528

9	$(\log_a 3)(\log_a 7) \approx 0.528 \times 0.936$ ≈ 0.494
10	$\log_a x^7 = 7\log_a x$
11	$\log_a\left(\frac{ac}{b}\right) = \log_a ac - \log_a b$ $= \log_a a + \log_a c - \log_a b$ $= 1 + \log_a c - \log_a b$
12	$\log_a(\sqrt{x}) = \log_a x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_a x$
13	$\log_a\left(\frac{\sqrt{xy}}{z}\right) = \log_a \sqrt{xy} - \log_a z$ $= \log_a (xy)^{\frac{1}{2}} - \log_a z$ $= \log_a x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} - \log_a z$ $= \log_a x^{\frac{1}{2}} + \log_a y^{\frac{1}{2}} - \log_a z$ $= \frac{1}{2}\log_a x + \frac{1}{2}\log_a y - \log_a z$
14	$\log_a \frac{1}{x^3y^4} = \log_a 1 - \log_a x^3y^4$ $= \log_a 1 - (\log_a x^3 + \log_a y^4)$ $= 0 - (3\log_a x + 4\log_a y)$ $= -3\log_a x - 4\log_a y$
15	$\log_a \sqrt[7]{128x^7} = \log_a \sqrt[7]{128} \times \sqrt[7]{x^7}$ $= \log_a 2x$ $= \log_a 2 + \log_a x$
16	$\log_a \frac{(x^{-1}y^2)^4}{(x^5y^{-2})^3} = \log_a \frac{x^{-4}y^8}{x^{15}y^{-6}}$ $= \log_a x^{-19}y^{14}$ $= \log_a x^{-19} + \log_a y^{14}$ $= -19\log_a x + 14\log_a y$

17	$\log_a \sqrt{\frac{x^2y^3}{z^3}} = \log_a \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{y^3}}{\sqrt{z^3}}$ $= \log_a \frac{xy^{\frac{3}{2}}}{z^{\frac{3}{2}}}$ $= \log_a xy^{\frac{3}{2}} - \log_a z^{\frac{3}{2}}$ $= \log_a x + \log_a y^{\frac{3}{2}} - \log_a z^{\frac{3}{2}}$ $= \log_a x + \frac{3}{2}\log_a y - \frac{3}{2}\log_a z$
18	$\log_a(x-y+z)^9 = 9\log_a(x-y+z)$
19	$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$
20	$\log_b(b-1) + 2\log_b b = \log_b(b-1) + \log_b b^2$ $= \log_b \frac{b-1}{b^2}$
21	$\log_a \sqrt{x} - \log_a \frac{1}{\sqrt{x}} = \log_a \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \log x$
22	$\log_a(x^2-25) - \log_a(x+5) = \log_a \frac{(x^2-25)}{(x+5)}$ $= \log_a \frac{(x+5)(x-5)}{(x+5)}$ $= \log_a(x-5)$
23	$3\log_b 1 - \log_b b = 3(0) - 1 = -1$
24	$8\log_b x + 4\log_b y - \frac{1}{2}\log_b z = \log_b x^8 + \log_b y^4 - \log_b z^{\frac{1}{2}}$ $= \log_b x^8y^4 - \log_b z^{\frac{1}{2}}$ $= \log_b \frac{x^8y^4}{z^{\frac{1}{2}}} = \log_b \frac{x^8y^4}{\sqrt{z}}$

25	$T(a) = 10 + 20\log_6(a+1)$ $f(11) = 10 + 20\log_6(11+1)$ $= 10 + 20\log_6(12)$ $= 10 + 20\log_6(6 \times 2)$ $= 10 + 20(\log_6 6 + \log_6 2)$ $\approx 10 + 20(1 + 0.3869)$ $\approx 10 + 20(1.3869)$ $\approx 10 + 27.738$ ≈ 37.738 قيمة إيرادات الشركة بعد إنفاقها مبلغ JD 11000 على الإعلانات هو JD 37738

1	$\log 17 \approx 1.2$
2	$\log(1.5 \times 10^{-4}) \approx -3.8$
3	$\ln 2.3 \approx 0.8$
4	$\log_2 15 = \frac{\log 15}{\log 2} \approx 3.9$
5	$\log_5 e^7 = 7 \times \frac{\ln e}{\ln 5} \approx 4.3$
6	$\ln 7 \approx 1.95$
7	$\log_5 27 = \frac{\log 27}{\log 5} \approx 2.05$
8	$\log_{\frac{1}{4}} 19 = \frac{\log 19}{\log \frac{1}{4}} = \frac{\log 19}{-\log 4} \approx -2.12$
9	$\log_7 8 = \frac{\log 8}{\log 7} \approx 1.07$
10	$\log_8 \frac{1}{8} = -1$
11	$\log 10000 = 4$
12	$\log_3 18 = \frac{\log 18}{\log 3} \approx 2.63$
13	$5^x = 120$ $x = \log_5 120 = \frac{\log 120}{\log 5} \approx 2.9746$
14	$-4e^{4x} = -64$ $e^{4x} = 16$ $4x = \ln 16$ $x = \frac{1}{4}\ln 16 \approx 0.9631$

15	$3^{2x+1} = 7^{5x}$ $\log 3^{2x+1} = \log 7^{5x}$ $(2x+1)\log 3 = (5x)\log 7$ $2x\log 3 + \log 3 = 5x\log 7$ $2x\log 3 - 5x\log 7 = \log 3$ $x(2\log 3 - 5\log 7) = \log 3$ $x = \dfrac{\log 3}{2\log 3 - 5\log 7} \approx -0.1459$
16	$64^x + 2(8)^x - 3 = 0$ $(8^x)^2 + 2(8)^x - 3 = 0$ $u^2 + 2u - 3 = 0$ $(u+3)(u-1) = 0$ $u = -3 \quad or \quad u = 1$ $8^x = -3 \quad or \quad 8^x = 1$ المعادلة $8^x = -3$ ليس لها حل لأن $8^x > 0$ لجميع قيم x. $8^x = 1 \qquad \rightarrow x = \log_8 1 = 0$
17	$7(4)^x = 49$ $(4)^x = 7$ $x = \log_4 7 = \dfrac{\log 7}{\log 4} \approx 1.4037$
18	$21^{x-1} = 3^{7x+1}$ $\log 21^{x-1} = \log 3^{7x+1}$ $(x-1)\log 21 = (7x+1)\log 3$ $x\log 21 - \log 21 = 7x\log 3 + \log 3$ $x\log 21 - 7x\log 3 = \log 21 + \log 3$ $x(\log 21 - 7\log 3) = \log 21 + \log 3$ $x = \dfrac{\log 21 + \log 3}{\log 21 - 7\log 3} \approx -0.8918$

19	$T = 27 + 219e^{-0.032t}$ $100 = 27 + 219e^{-0.032t}$ $73 = 219e^{-0.032t}$ $73 = 219e^{-0.032t}$ $\frac{73}{219} = e^{-0.032t}$ $-0.032t = \ln\frac{73}{219}$ $t = -\frac{1}{0.032}\ln\frac{73}{219} = -\frac{\ln 73 - \ln 219}{0.032} \approx 34.3$ إذن، تصبح درجة حرارة المعدن 100 °C بعد حوالي 34.3 min من بدء تبريده.
20	$N(t) = \frac{2000}{1 + 3e^{-0.05t}}$ $N(0) = \frac{2000}{1 + 3e^{-0.05(0)}} = \frac{2000}{4} = 500$
21	$700 = \frac{2000}{1 + 3e^{-0.05t}}$ $1 + 3e^{-0.05t} = \frac{2000}{700}$ $3e^{-0.05t} = \frac{13}{7}$ $e^{-0.05t} = \frac{13}{21}$ $-0.05t = \ln\frac{13}{21}$ $t = -\frac{1}{0.05}\ln\frac{13}{21} = -\frac{\ln 13 - \ln 21}{0.05} \approx 9.6$ بعد 9.6 سنة تقريبًا يصبح عدد الأرانب في المحمية 700 أرنب.
22	$P(t) = 200e^{t}$ $P(0) = 200e^{0} = 200$
23	$4000 = 200e^{t}$ $20 = e^{t}$ $t = \ln 20 \approx 3$

الوحدة الثانية: التفاضل

أستعد لدراسة الوحدة

	كتابة المقدار الجبري في أبسط صورة صفحة 13
1	$2x(x-4)=2x^2-8x$
2	$(x+4)(x-5)=x^2-5x+4x-20=x^2-x-20$
3	$(3x+1)^2=9x^2+6x+1$
	التحويل من الصيغة الجذرية إلى الصيغة الأسية صفحة 13
4	$\sqrt[5]{x^4}=x^{\frac{4}{5}}$
5	$\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$
6	$\sqrt{x-1}=(x-1)^{\frac{1}{2}}$
7	$\frac{5}{\sqrt[7]{x^4}}=\frac{5}{x^{\frac{4}{7}}}=5x^{-\frac{4}{7}}$
	مشتقة اقتران القوة صفحة 14
8	$f'(x)=21x^2$
9	$f'(x)=12\times\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}=16x^{\frac{1}{3}}$
10	$f(x)=3x^2-5x^{\frac{1}{2}}$ $f'(x)=6x-\frac{5}{2}x^{-\frac{1}{2}}=6x-\frac{5}{2\sqrt{x}}$
11	$f(x)=-3x^{-7}$ $f'(x)=21x^{-8}=\frac{21}{x^8}$
12	$f(x)=x^2(x^3-2x)=x^5-2x^3$ $f'(x)=5x^4-6x^2$
13	$y=7x^{-3}+3x^{-1}-2$ $\frac{dy}{dx}=-21x^{-4}-3x^{-2}=\frac{-21}{x^4}-\frac{3}{x^2}$

1	$f'(x) = \frac{4}{2\sqrt{4x-1}} = \frac{2}{\sqrt{4x-1}}$
2	$f(x) = 3(3-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ $f'(x) = -\frac{3}{2}(3-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x) = \frac{3x}{\sqrt{(3-x^2)^3}}$
3	$f'(x) = \frac{5}{2}(3+4x)^{\frac{3}{2}}(4) = 10(3+4x)^{\frac{3}{2}}$
4	$f'(x) = 100(8-x)^{99}(-1) = -100(8-x)^{99}$
5	$f'(x) = 2x + 2(200-x)^1(-1) = 2x - 2(200-x)$ $= 2x - 400 + 2x$ $= 4x - 400$
6	$f'(x) = 7(x+5)^6(1) + 6(2x+3)^5(2)$ $= 7(x+5)^6 + 12(2x+3)^5$
7	$f(x) = (x^5+6x)^{\frac{1}{3}}$ $f'(x) = \frac{1}{3}(x^5+6x)^{-\frac{2}{3}}(5x^4+6) = \frac{5x^4+6}{3\sqrt[3]{(5x^4+6x)^2}}$
8	$f(x) = (x^2-3)^{-3}$ $f'(x) = -3(x^2-3)^{-4}(2x) = \frac{-6x}{(x^2-3)^4}$
9	$f'(x) = x + \frac{-2x}{2\sqrt{16-x^2}} = x - \frac{x}{\sqrt{16-x^2}}$
10	$f'(x) = 12x^2 + 4(x-2)^3$ $f'(2) = 12(4) + 4(2-2)^3 = 48$
11	$f'(x) = \frac{2x+8}{2\sqrt{x^2+8x}} = \frac{x+4}{\sqrt{x^2+8x}}$ $f'(8) = \frac{8+4}{\sqrt{64+64}} = \frac{12}{\sqrt{128}} = \frac{12}{8\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

12	$\frac{dy}{du} = 3u^2 - 14u$ $\frac{du}{dx} = 2x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ $= (3u^2 - 14u) \times 2x$ $= 6x(x^2+3)^2 - 28x(x^2+3)$
13	$\frac{dy}{du} = \frac{-3}{2\sqrt{7-3u}}$ $\frac{du}{dx} = 2x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ $= \frac{-3}{2\sqrt{7-3u}} \times 2x$ $= \frac{-3x}{\sqrt{7-3(x^2-9)}} = \frac{-3x}{\sqrt{34-3x^2}}$
14	$\frac{dy}{du} = 3u^2 - 10(u^3 - 7u)(3u^2 - 7)$ $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ عندما $x = 4$، فإن $u = 2$ $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=4} = \left.\frac{dy}{du}\right\|_{u=2} \times \left.\frac{du}{dx}\right\|_{x=4}$ $\left.\frac{dy}{du}\right\|_{u=2} = 3(4) - 10(8-14)(12-7) = 312$ $\left.\frac{du}{dx}\right\|_{x=4} = \frac{1}{4}$ $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=4} = 312 \times \frac{1}{4} = 78$

15	$\frac{dy}{du} = 6u^2 + 6u$ $\frac{du}{dx} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ عندما $x = 1$، فإن $u = 2$ $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=1} = \left.\frac{dy}{du}\right\|_{u=2} \times \left.\frac{du}{dx}\right\|_{x=1}$ $\left.\frac{dy}{du}\right\|_{u=2} = 6(4) + 6(2) = 36$ $\left.\frac{du}{dx}\right\|_{x=1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=1} = 36 \times \frac{3}{2} = 54$
16	$P'(t) = 3\left(t^{\frac{1}{4}} + 3\right)^2 \times \frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}} = \frac{3\left(t^{\frac{1}{4}} + 3\right)^2}{4t^{\frac{3}{4}}}$
17	$P'(16) = \frac{3(2+3)^2}{4(8)} = \frac{75}{32} \approx 2.34$
18	$f'(x) = g'\big(h(x)\big) \times h'(x)$ $f'(5) = g'\big(h(5)\big) \times h'(5)$ $= g'(-2) \times 6$ $= 4 \times 6 = 24$
19	$f'(x) = 8\big(h(x)\big) \times h'(x)$ $f'(5) = 8\big(h(5)\big) \times h'(5)$ $= 8 \times -2 \times 6 = -96$

1	$f'(x) = (2x) \times 3(1+3x^2)^2(6x) + (1+3x^2)^3(2)$ $= 36x^2(1+3x^2)^2 + 2(1+3x^2)^3$ $= (1+3x^2)^2(42x^2+2)$
2	$f'(x) = \dfrac{(x+2)(1)-(x-2)(1)}{(x+2)^2} = \dfrac{4}{(x+2)^2}$
3	$f'(x) = \dfrac{(x^2+1)(3x^2)-(x^3-1)(2x)}{(x^2+1)^2} + 12x^2$ $= \dfrac{3x^4+3x^2-2x^4+2x}{(x^2+1)^2} + 12x^2$ $= \dfrac{x^4+3x^2+2x}{(x^2+1)^2} + 12x^2$
4	$f'(x) = (1-x^2)^4 \times 3(2x+6)^2(2) + (2x+6)^3 \times 4(1-x^2)^3(-2x)$ $= 6(1-x^2)^4(2x+6)^2 - 8x(2x+6)^3(1-x^2)^3$ $= 2(1-x^2)^3(2x+6)^2(3-24x-11x^2)$
5	$f'(x) = \dfrac{(x+1)^2(3)-(3x+5)(2)(x+1)}{(x+1)^4}$ $= \dfrac{-3x^2-10x-7}{(x+1)^4}$
6	$f'(x) = (5x^2+4x-3)(4x-3) + (2x^2-3x+1)(10x+4)$ $= 40x^3-21x^2-26x+13$
7	$f(x) = 3x^6 - 15x^4 - x^3 + 5x$ بفك الأقواس $f'(x) = 18x^5 - 60x^3 - 3x^2 + 5$ أو بتطبيق قاعدة مشتقة ضرب اقترانين: $f'(x) = (3x^5 - x^2)\left(1+\dfrac{5}{x^2}\right) + \left(x - \dfrac{5}{x}\right)(15x^4 - 2x)$ $= 18x^5 - 60x^3 - 3x^2 + 5$
8	$f'(x) = \dfrac{(2x^3+3)(10x)-(5x^2-1)(6x^2)}{(2x^3+3)^2} = \dfrac{-10x^4+6x^2+30x}{(2x^3+3)^2}$
9	$f'(x) = \dfrac{-1}{(x-4)^2}$

10	$f'(x) = (x^5)\left(\frac{5}{\sqrt{10x+6}}\right) + (\sqrt{10x+6})(5x^4)$ $f'(1) = (1)\left(\frac{5}{\sqrt{10+6}}\right) + (\sqrt{10+6})(5) = \frac{85}{4} = 21.25$
11	$f'(x) = \frac{(\sqrt{x+4})(1) - (x+3)\left(\frac{1}{2\sqrt{x+4}}\right)}{x+4}$ $f'(12) = \frac{(\sqrt{12+4})(1) - (12+3)\left(\frac{1}{2\sqrt{12+4}}\right)}{12+4} = \frac{17}{128}$
12	$\frac{dy}{du} = 10u + 3$ $\frac{du}{dx} = \frac{-36x}{(x^2+5)^2}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ $= (10u+3) \times \frac{-36x}{(x^2+5)^2}$ $= \left(\frac{180}{x^2+5} + 3\right) \times \frac{-36x}{(x^2+5)^2}$ $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=2} = \left(\frac{180}{4+5} + 3\right) \times \frac{-72}{(4+5)^2} = -\frac{184}{9}$
13	$\frac{dy}{du} = \frac{-1}{(u+1)^2}$ $\frac{du}{dx} = 3x^2 - 2$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ $= \frac{-1}{(u+1)^2} \times (3x^2 - 2)$ $= \frac{-1}{(x^3 - 2x + 6)^2} \times (3x^2 - 2)$ $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=0} = \frac{-1}{(6)^2} \times (-2) = \frac{1}{18}$

14	$P'(t) = \frac{6}{(t+1)^2}$
15	$P'(9) = \frac{6}{(9+1)^2} = 0.06$ بعد 9 سنوات من الآن سيتزايد عدد السكان بمعدل 60 نسمة لكل سنة.
16	$h'(t) = \frac{(4+t^2)(6t) - (3t^2)(2t)}{(4+t^2)^2} = \frac{24t}{(4+t^2)^2}$
17	$(fg)'(x) = f(x) \times g'(x) + g(x) \times f'(x)$ $(fg)'(0) = f(0) \times g'(0) + g(0) \times f'(0)$ $= 5 \times 2 - 1 \times -3 = 13$
18	$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x) \times f'(x) - f(x) \times g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$ $\left(\frac{f}{g}\right)'(0) = \frac{g(0) \times f'(0) - f(0) \times g'(0)}{\left(g(0)\right)^2} = \frac{-1 \times -3 - 5 \times 2}{1} = -7$
19	$(7f + 2fg)'(x) = 7f'(x) + 2\left(f(x) \times g'(x) + g(x) \times f'(x)\right)$ $(7f + 2fg)'(0) = 7f'(0) + 2\left(f(0) \times g'(0) + g(0) \times f'(0)\right)$ $= 7 \times -3 + 2(5 \times 2 - 1 \times -3)$ $= -21 + 2 \times 13 = 5$

1	$f'(x) = (x^{10})(e^x) + (e^x)(10x^9)$ $= x^9e^x(x+10)$
2	$f'(x) = 3 \times 2e^{2x-1}$ $= 6e^{2x-1}$
3	$f'(x) = 3e^x - 2 \times 4e^{4x}$ $= 3e^x - 8e^{4x}$
4	$f'(x) = (9x-1)(3e^{3x}) + (e^{3x})(9)$ $= 27xe^{3x} - 3e^{3x} + 9e^{3x}$ $= 27xe^{3x} + 6e^{3x}$
5	$f'(x) = \dfrac{(\sqrt{x+1})(-2e^{-2x}) - (e^{-2x})\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)}{x+1}$ $= -\dfrac{e^{-2x}(4x+5)}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$
6	$f'(x) = \dfrac{(x)(3(e^x+2)^2 \times e^x) - (e^x+2)^3(1)}{x^2}$ $= \dfrac{3xe^x(e^x+2)^2 - (e^x+2)^3}{x^2}$
7	$f'(x) = (2x+7)e^{x^2+7x}$
8	$f'(x) = 2(2e^{3x}-1)(6e^{3x}) = 12e^{3x}(2e^{3x}-1) = 24e^{6x} - 12e^{3x}$
9	$f'(x) = \dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x+1}}$
10	$f'(x) = \dfrac{(x+2)\left(\dfrac{1}{x}\right) - (\ln x)(1)}{(x+2)^2}$
11	$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$
12	$f'(x) = (e^x)\left(\dfrac{2x}{x^2}\right) + (\ln x^2)(e^x) = \dfrac{2e^x}{x} + e^x \ln x^2$
13	$f'(x) = (3+x)\left(\dfrac{1}{x}\right) + (\ln x)(1) = \dfrac{3}{x} + 1 + \ln x$

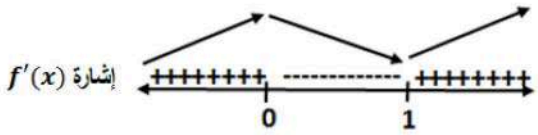
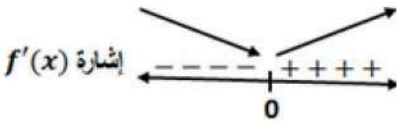
14	$f'(x) = \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = -\dfrac{1}{x^2} \times \dfrac{x}{1} = -\dfrac{1}{x}$ حل آخر: $f(x) = \ln 1 - \ln x \rightarrow f'(x) = 0 - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x}$
15	$f'(x) = (x^5)\left(\dfrac{3}{3x}\right) + (\ln(3x))(5x^4) = x^4 + 5x^4 \ln(3x)$
16	$f'(x) = e^{-1} \times 2x$ $f'(-1) = e^{-1} \times -2 = -\dfrac{2}{e}$
17	$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ $f'(3) = \dfrac{6}{9+1} = \dfrac{3}{5}$
18	$N(t) = 1000\left(30 + e^{-\frac{t}{30}}\right)$ $N(0) = 1000\left(30 + e^{-\frac{0}{30}}\right) = 1000 \times 31 = 31000$
19	$N'(t) = 1000\left(-\dfrac{1}{30}e^{-\frac{t}{30}}\right) = -\dfrac{100}{3}e^{-\frac{t}{30}}$
20	$N'(20) = -\dfrac{100}{3}e^{-\frac{20}{30}} \approx -17.11$
21	$N'(a) = 500 \times \dfrac{1}{a} = \dfrac{500}{a}$
22	$N'(10) = \dfrac{500}{10} = 50$

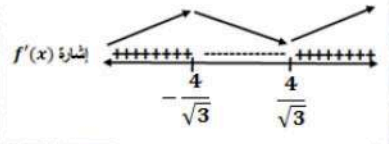
1	$f(x) = (\sin(5x-1))^3$ $f'(x) = 3(\sin(5x-1))^2(5\cos(5x-1))$ $= 15(\sin(5x-1))^2\cos(5x-1)$
2	$f'(x) = (3x^2-2)\cos(x^3-2x+4)$
3	$f'(x) = 2\times -4\times -\sin(-4x) = 8\sin(-4x)$
4	$f'(x) = 3\times 3\cos(3x+7) = 9\cos(3x+7)$
5	$f'(x) = (2x^3)(\cos x) + (\sin x)(6x^2) - \big((3x)(-\sin x) + (\cos x)(3)\big)$ $= 2x^3\cos x + 6x^2\sin x + 3x\sin x - 3\cos x$
6	$f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $f'(x) = 0$
7	$f'(x) = -\frac{1}{x}\sin(\ln x)$
8	$f'(x) = (e^x)(-\sin x + \cos x) + (\cos x + \sin x)(e^x) = 2e^x\cos x$
9	$f'(x) = 2(1-2x)(-2)\times -\sin(1-2x)^2 = (4-8x)\sin(1-2x)^2$
10	$f'(x) = 4\times\frac{-\sin x + \cos x}{2\sqrt{\cos x + \sin x}} = \frac{-2\sin x + 2\cos x}{\sqrt{\cos x + \sin x}}$
11	$f'(x) = 3(1+\cos 2x)^2(-2\sin 2x) = -6(\sin 2x)(1+\cos 2x)^2$
12	$f(x) = (\sin x)^3(\cos 4x)$ $f'(x) = (\sin x)^3(-4\sin 4x) + (\cos 4x)\times 3(\sin x)^2\cos x$
13	$f'(x) = \frac{(1+e^x)(e^x) - (e^x)(e^x)}{(1+e^x)^2}\cos\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)$ $= \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\cos\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)$
14	$f'(x) = \frac{(e^x)(-2x\sin x^2) - (\cos x^2)(e^x)}{(e^x)^2}$ $= \frac{-2x\sin x^2 - \cos x^2}{e^x}$
15	$f'(x) = \frac{(1-\sin x)(-\sin x) - (\cos x)(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}$ $= \frac{-\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{(1-\sin x)^2}$ $= \frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2}$ $= \frac{1}{1-\sin x}$

16	$f'(x) = \dfrac{(1+x)(x\cos x + \sin x) - (x\sin x)(1)}{(1+x)^2}$ $= \dfrac{x^2\cos x + \sin x + x\cos x}{(1+x)^2}$
17	$f'(x) = \dfrac{(2-\cos x)(1) - (x)(\sin x)}{(2-\cos x)^2}$ $= \dfrac{2 - \cos x - x\sin x}{(2-\cos x)^2}$
18	$f'(x) = \dfrac{-\sin x - \cos x}{\cos x - \sin x}$
19	$D'(t) = 200(0.4)\cos\big(0.4(t-2)\big) = 80\cos\big(0.4(t-2)\big)$
20	$C'(t) = 21.6\left(\dfrac{2\pi}{365}\right)\cos\left(\dfrac{2\pi t}{365} + 10.9\right)$
21	$f'(x) = (\cos x)(\cos x) + (\sin x)(-\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ الخطأ في الحل هو اعتبار $\cos^2 x - \sin^2 x = 1$ وهذا غير صحيح لأن $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ويمكن التعبير عن النتيجة $(\cos^2 x - \sin^2 x)$ بالصورة $(1 - 2\sin^2 x)$ أو $(2\cos^2 x - 1)$

الوحدة الثالثة: تطبيقات التفاضل

أستعد لدراسة الوحدة

	إيجاد ميل المنحنى صفحة 19
1	$f'(x) = 1 - 3x^2$ $f'(1) = 1 - 3(1)^2 = -2$
2	$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 1 - 3x^2 = 0$ $1 = 3x^2$ $\rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \rightarrow \; x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$
	إيجاد القيم الحرجة لاقتران ما صفحة 19
3	$f'(x) = 6x^2 - 6x$ $6x^2 - 6x = 0 \quad \rightarrow \quad 6x(x-1) = 0$ $\rightarrow x = 0 \;\; or \;\; x = 1$ القيم الحرجة لهذا الاقتران هي: $x = 1$ و $x = 0$  توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 0$ توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 1$
4	$f'(x) = 2x$ $2x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$ القيمة الحرجة لهذا الاقتران هي: $x = 0$  توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 0$

5	$f'(x) = 3x^2 - 16$ $3x^2 - 16 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = \frac{16}{3} \quad \rightarrow \quad x = \pm\frac{4}{\sqrt{3}}$ القيم الحرجة لهذا الاقتران هي: $x = -\frac{4}{\sqrt{3}}$ و $x = \frac{4}{\sqrt{3}}$  توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = -\frac{4}{\sqrt{3}}$ توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = \frac{4}{\sqrt{3}}$

1	$f'(x) = 6x^2 + 6$ $f'(-1) = 6 + 6 = 12$ معادلة المماس: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ $y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1))$ $y - 2 = 12(x + 1)$ $y - 2 = 12x + 12$ $y = 12x + 14$
2	$f'(x) = \frac{(x+4)(e^x) - (e^x)(1)}{(x+4)^2}$ $f'(0) = \frac{(4)(1) - (1)(1)}{16} = \frac{3}{16}$ معادلة المماس: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ $y - \frac{1}{4} = \frac{3}{16}(x)$ $y = \frac{3}{16}x + \frac{1}{4}$
3	$f'(x) = 2x - \frac{-(7)(2x)}{x^4} = 2x + \frac{14}{x^3}$ $f'(1) = 2 + \frac{14}{1} = 16$ معادلة المماس: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$ $y - (-6) = 16(x - 1)$ $y + 6 = 16x - 16$ $y = 16x - 22$

4	$f'(x) = 2x - \frac{-(8)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{x} = 2x + \frac{\frac{4}{\sqrt{x}}}{x}$ $f'(4) = 8 + \frac{\frac{4}{2}}{4} = \frac{17}{2}$ معادلة المماس: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ $y - f(4) = f'(4)(x - 4)$ $y - 12 = \frac{17}{2}(x - 4)$ $y - 12 = \frac{17}{2}x - 34$ $y = \frac{17}{2}x - 22$
5	$f'(x) = 4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$ $f'(9) = \frac{2}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$ معادلة المماس: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ $y - f(9) = f'(9)(x - 9)$ $y - 12 = \frac{2}{3}(x - 9)$ $y - 12 = \frac{2}{3}x - 6$ $y = \frac{2}{3}x + 6$
6	$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}$ $f'(3) = \frac{-3}{\sqrt{25 - 9}} = -\frac{3}{4}$ معادلة المماس: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ $y - f(3) = f'(3)(x - 3)$ $y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3)$ $y - 4 = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$ $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$

7	$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}, \quad x = 8$ $f(8) = \sqrt[3]{8} = 2$ $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $f'(8) = \frac{1}{3\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{12}$ $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ $y - f(8) = f'(8)(x - 8)$ $y - 2 = \frac{1}{12}(x - 8)$ $y - 2 = \frac{1}{12}x - \frac{2}{3}$ $y = \frac{1}{12}x + \frac{4}{3}$	معادلة المماس:
8	$f(8) = \frac{4+8}{8-2} = 2$ $f'(x) = \frac{(x-2)(1) - (4+x)(1)}{(x-2)^2} = \frac{-6}{(x-2)^2}$ $f'(8) = \frac{-6}{(8-2)^2} = \frac{-6}{36} = -\frac{1}{6}$ $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ $y - f(8) = f'(8)(x - 8)$ $y - 2 = -\frac{1}{6}(x - 8)$ $y - 2 = -\frac{1}{6}x + \frac{4}{3}$ $y = -\frac{1}{6}x + \frac{10}{3}$	معادلة المماس:

9	$f(5)=\frac{8}{\sqrt{5+11}}=2$ $f'(x)=\frac{-(8)\left(\frac{1}{2\sqrt{x+11}}\right)}{x+11}$ $f'(5)=\frac{-(8)\left(\frac{1}{2\sqrt{5+11}}\right)}{5+11}=-\frac{1}{16}$ معادلة المماس: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ $y-f(5)=f'(5)(x-5)$ $y-2=-\frac{1}{16}(x-5)$ $y-2=-\frac{1}{16}x+\frac{5}{16}$ $y=-\frac{1}{16}x+\frac{37}{16}$
10	$f'(x)=15x^2+2x$ $f'(-1)=15-2=13$ معادلة العمودي على المماس: $y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$ $y-f(-1)=-\frac{1}{f'(-1)}(x-(-1))$ $y-(-6)=-\frac{1}{13}(x+1)$ $y+6=-\frac{1}{13}x-\frac{1}{13}$ $y=-\frac{1}{13}x-\frac{79}{13}$

11	$f(5) = 2(5)^2(6-5) = 50$ $f'(x) = (2x^2)(-1) + (6-x)(4x)$ $f'(5) = (50)(-1) + (6-5)(20) = -30$ معادلة العمودي على المماس: $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)$ $y - f(5) = -\frac{1}{f'(5)}(x-5)$ $y - 50 = -\frac{1}{-30}(x-5)$ $y - 50 = \frac{1}{30}x - \frac{1}{6}$ $y = \frac{1}{30}x + \frac{299}{6}$
12	مماس المنحنى أفقي أي $f'(x) = 0$ $f'(x) = 12x^5 - 4x^3$ $12x^5 - 4x^3 = 0$ $4x^3(3x^2-1) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \quad or \quad x^2 = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ $f(0) = 2(0)^6 - (0)^4 - 2 = -2$ $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^6 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 - 2 = \frac{2}{27} - \frac{1}{9} - 2 = -\frac{55}{27}$ $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^6 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 - 2 = \frac{2}{27} - \frac{1}{9} - 2 = -\frac{55}{27}$ النقاط هي $(0,-2), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{55}{27}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{55}{27}\right)$
13	مماس المنحنى أفقي أي $f'(x) = 0$ $f'(x) = 60x^2 - 15x^4$ $60x^2 - 15x^4 = 0$ $15x^2(4-x^2) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \quad or \quad x^2 = 4 \quad \rightarrow \quad x = \pm 2$ $f(0) = 20(0)^3 - 3(0)^5 = 0$ $f(-2) = 20(-2)^3 - 3(-2)^5 = -160 + 96 = -64$ $f(2) = 20(2)^3 - 3(2)^5 = 160 - 96 = 64$ النقاط هي $(0,0), (-2,-64), (2,64)$

14	ميل المماس 6 أي $f'(x) = 6$ $f'(x) = x^4 - 10$ $x^4 - 10 = 6$ $x^4 = 16 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt[4]{16} \quad \rightarrow \quad x = \pm 2$ $f(-2) = \frac{1}{5}(-2)^5 - 10(-2) = -\frac{32}{5} + 20 = \frac{68}{5}$ $f(2) = \frac{1}{5}(2)^5 - 10(2) = \frac{32}{5} - 20 = -\frac{68}{5}$ النقاط هي $\left(-2, \frac{68}{5}\right), \left(2, -\frac{68}{5}\right)$
15	معادلة المماس عند $x = 1$ هي $y = 2x + 5$ إذن ميل المماس يساوي 2، ومنه $f'(1) = 2$ $f(x) = kx^3 + h$ $f'(x) = 3kx^2$ $f'(1) = 3k$ $3k = 2$ $k = \frac{2}{3}$
16	لإيجاد إحداثيي نقاط التقاطع بين $f(x)$ و $g(x)$ نحل المعادلة $f(x) = g(x)$ المستقيم الذي معادلته $2y = x + 5$ تصبح $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ $x^2 - 4x + 7 = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ $x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{9}{2} = 0$ $2x^2 - 9x + 9 = 0$ $(2x - 3)(x - 3) = 0$ $x = \frac{3}{2} \quad or \quad x = 3$ $f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{3}{2}\right) + 7 = \frac{9}{4} + 1 = \frac{13}{4}$ $f(3) = (3)^2 - 4(3) + 7 = 9 - 12 + 7 = 4$ $A\left(\frac{3}{2}, \frac{13}{4}\right), B(3, 4)$

17	معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة $A\left(\frac{3}{2},\frac{13}{4}\right)$ $f'(x)=2x-4$ $f'\left(\frac{3}{2}\right)=2\left(\frac{3}{2}\right)-4=-1$ معادلة المماس: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ $y-f\left(\frac{3}{2}\right)=f'\left(\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)$ $y-\frac{13}{4}=-\left(x-\frac{3}{2}\right)$ $y-\frac{13}{4}=-x+\frac{3}{2}$ $y=-x+\frac{19}{4}$ معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة $B(3,4)$ $f'(3)=2(3)-4=2$ معادلة المماس: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ $y-f(3)=f'(3)(x-3)$ $y-4=2(x-3)$ $y-4=2x-6$ $y=2x-2$

1	$f'(x) = 15x^2 + 4$ $f''(x) = 30x$
2	$f'(x) = 20e^{4x}$ $f''(x) = 80e^{4x}$
3	$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}$
4	$f'(x) = \frac{7}{x}$ $f''(x) = \frac{-7}{x^2}$
5	$f(x) = (x-1)(2x+3) = 2x^2 + 3x - 2x - 3 = 2x^2 + x - 3$ $f'(x) = 4x + 1$ $f''(x) = 4$
6	$f'(x) = (e^x)(\cos x) + (\sin x)(e^x)$ $= e^x(\cos x + \sin x)$ $f''(x) = e^x(-\sin x + \cos x) + e^x(\cos x + \sin x)$ $= -e^x \sin x + e^x \cos x + e^x \cos x + e^x \sin x$ $= 2e^x \cos x$
7	$f'(x) = \frac{-4 \times \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}}{3x-2} = \frac{-6}{(3x-2)^{\frac{3}{2}}}$ $f''(x) = \frac{6 \times \frac{3}{2}(3x-2)^{\frac{1}{2}} \times 3}{(3x-2)^3} = \frac{27}{(3x-2)^{\frac{5}{2}}}$ $f''(2) = \frac{27}{(6-2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{27}{\sqrt{4^5}} = \frac{27}{32}$
8	$f'(x) = -14x$ $f''(x) = -14$ $f''(-3) = -14$

9	$f'(x) = 4ax^3 - 6x$ $f''(x) = 12ax^2 - 6$ $f''(2) = 12a(2)^2 - 6$ $42 = 48a - 6$ $48 = 48a$ $a = 1$
10	$v(t) = 3t^2 - 8t + 5$ $v(1) = 3(1)^2 - 8(1) + 5 = 0\ \mathrm{m/s}$
11	بما أن السرعة صفر، فإن الجسم في حالة سكون لحظي عندما $t = 1$
12	$a(t) = 6t - 8$ $a(1) = 6(1) - 8 = -2\ \mathrm{m/s^2}$
13	يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما تكون سرعته المتجهة 0 $3t^2 - 8t + 5 = 0$ $(3t - 5)(t - 1) = 0$ $t = \frac{5}{3}\ \ or\ \ t = 1$
14	$v(t) = 3(t - 3)^2$ $v(5) = 3(5 - 3)^2 = 12\ \mathrm{m/s}$
15	بما أن إشارة السرعة المتجهة موجبة، فإن الجسم يتحرك في الاتجاه الموجب (إلى اليمين) عندما $t = 5$
16	$a(t) = 6(t - 3)$ $a(5) = 6(5 - 3) = 12\ \mathrm{m/s^2}$
17	يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما تكون سرعته المتجهة 0 $3(t - 3)^2 = 0$ $(t - 3)^2 = 0$ $t - 3 = 0$ $t = 3$
18	$v(t) = 12t - 2$ $v(5) = 12(5) - 2 = 58\ \mathrm{m/s}$
19	$a(t) = 12$ $a(5) = 12\ m/s^2$
20	تكون السيارة في حالة سكون لحظي عندما تكون سرعتها المتجهة 0 $v(t) = 12t - 2 = 0 \rightarrow 12t = 2 \rightarrow t = \frac{1}{6}$

1	$f'(x) = 4x + 4$ $4x + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -1$ توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = -1$ $f''(x) = 4$ $f''(-1) = 4 > 0$ إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = -1$ هي: $f(-1) = 2(-1)^2 + 4(-1) - 3 = -5$
2	$f'(x) = 3x^2 - 10x + 3$ $3x^2 - 10x + 3 = 0$ $(3x - 1)(x - 3) = 0$ $x = \frac{1}{3} \quad or \quad x = 3$ توجد قيمتان حرجتان هما $x = 3$ و $x = \frac{1}{3}$ $f''(x) = 6x - 10$ $f''\left(\frac{1}{3}\right) = 6\left(\frac{1}{3}\right) - 10 = -8 < 0$ $f''(3) = 6(3) - 10 = 8 > 0$ إذن توجد قيمة صغرى عندما $x = 3$ ، هي: $f(3) = (3)^3 - 5(3)^2 + 3(3) + 1 = -8$ وتوجد قيمة عظمى عندما $x = \frac{1}{3}$ هي: $f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 5\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{3}\right) + 1 = \frac{40}{27}$

3	$f(x) = x^3(x-2) = x^4 - 2x^3$ $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$ $4x^3 - 6x^2 = 0$ $2x^2(2x-3) = 0$ $x = 0 \quad or \quad x = \frac{3}{2}$ توجد قيمتان حرجتان هما $x = \frac{3}{2}$ و $x = 0$ $f''(x) = 12x^2 - 12x$ $f''\left(\frac{3}{2}\right) = 12\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 12\left(\frac{3}{2}\right) = 9 > 0$ إذن توجد قيمة صغرى عندما $x = \frac{3}{2}$ ، هي $f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^4 - 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{16}$ $f''(0) = 12(0)^2 - 12(0) = 0$ يفشل اختبار المشتقة الثانية في تحديد نوع النقطة الحرجة$(0, 0)$ لذلك نلجأ لاختبار المشتقة الأولى: $f'(-1) = 4(-1)^3 - 6(-1)^2 = -4 - 6 = -10 < 0$ $f'(1) = 4(1)^3 - 6(1)^2 = 4 - 6 = -2 < 0$ إشارة $f'(x)$ سالبة على يسار $x = 0$ وعلى يمينها، فالنقطة $(0,0)$ ليست نقطة قيمة قصوى.
4	حجم القالب: $V = lwh = yx(2x) = 2x^2y$ مساحة سطح القالب: $A = 2xy + (2x+2y)(2x) = 6xy + 4x^2$ $600 = 6xy + 4x^2$ $600 - 4x^2 = 6xy$ $y = \frac{600 - 4x^2}{6x}$ حجم القالب بدلالة x : $V(x) = 2x^2\left(\frac{600-4x^2}{6x}\right)$ $V(x) = 200x - \frac{4}{3}x^3$
5	$V'(x) = 200 - 4x^2$ $200 - 4x^2 = 0$ $200 = 4x^2$ $x^2 = \frac{200}{4} = 50 \quad \rightarrow \quad x = \pm 5\sqrt{2}$ لكن الطول لا يكون سالبا، لذا فإن $x = 5\sqrt{2}$ cm $V''(x) = -8x$ $V''(5\sqrt{2}) = -40\sqrt{2} < 0$ توجد قيمة عظمى عندما $x = 5\sqrt{2}$ ، ويكون حجم القالب أكبر ما يمكن عندما $x = 5\sqrt{2}$ cm

6	سعر البدلة الواحدة $s(x) = 150 - 0.5x$ اقتران الإيراد: $R(x) = x(150 - 0.5x) = 150x - 0.5x^2$
7	اقتران الربح: $P(x) = R(x) - C(x)$ $= 150x - 0.5x^2 - 4000 - 0.25x^2$ $= 150x - 0.75x^2 - 4000$
8	$P'(x) = 150 - 1.5x$ $150 - 1.5x = 0$ $150 = 1.5x$ $x = \frac{150}{1.5} = \frac{1500}{15} = 100$ توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = 100$ $P''(x) = -1.5$ $P''(100) = -1.5 < 0$ توجد قيمة عظمى لهذا الاقتران عندما $x = 100$ ويكون أكبر ربح ممكن عندما تكون عدد البدلات المبيعة 100، ويكون أكبر ربح ممكن هو: $P(100) = 150(100) - 0.75(100)^2 - 4000$ $= 15000 - 7500 - 4000 = 3500$
9	ويكون حينها سعر البدلة الواحدة: $s(100) = 150 - 0.5(100) = 100$

	حجم الخزان $V = x^2 h$ مساحة سطح الخزان المفتوح من الأعلى $A = 4xh + x^2$ $500 = x^2 h \quad \rightarrow \quad h = \frac{500}{x^2}$ $A = 4xh + x^2$ $A(x) = 4x\left(\frac{500}{x^2}\right) + x^2$ $= \frac{2000}{x} + x^2$ $A'(x) = -\frac{2000}{x^2} + 2x$
10	$-\frac{2000}{x^2} + 2x = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{2000}{x^2} = 2x$ $\rightarrow \quad 2x^3 = 2000$ $\rightarrow \quad x^3 = 1000$ $\rightarrow \quad x = 10$ توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = 10$ $A''(x) = \frac{4000}{x^3} + 2$ $A''(10) = \frac{4000}{(10)^3} + 2 = 6 > 0$ إذن توجد قيمة صغرى عندما $x = 10$ ، وتكون أبعاد الخزان التي تجعل مساحة سطحه أقل ما يمكن هي: $l = x = 10\ m,\ w = x = 10\ m,\ h = \frac{500}{(10)^2} = 5\ m$

1	$2x + 10y\frac{dy}{dx} = 0$ $10y\frac{dy}{dx} = -2x$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{10y} = -\frac{x}{5y}$
2	$2x + 2x\left(\frac{dy}{dx}\right) + 2y(1) = 6y\frac{dy}{dx}$ $2x\frac{dy}{dx} - 6y\frac{dy}{dx} = -2y - 2x$ $(2x - 6y)\frac{dy}{dx} = -2x - 2y$ $\frac{dy}{dx} = \frac{-2y - 2x}{2x - 6y} = \frac{y + x}{3y - x}$
3	$(y)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)\left(\frac{dy}{dx}\right) = 1$ $\frac{y}{x} + \ln x\frac{dy}{dx} = 1$ $\ln x\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{y}{x}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \frac{y}{x}}{\ln x} = \frac{x - y}{x\ln x}$
4	$\frac{dy}{dx} + 3y^2\frac{dy}{dx} = -\sin x + 2x$ $\frac{dy}{dx}(1 + 3y^2) = -\sin x + 2x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin x + 2x}{1 + 3y^2}$

5	$(x)\left(e^y\frac{dy}{dx}\right)+(e^y)(1)-3=0$ $xe^y\frac{dy}{dx}+e^y-3=0$ $xe^y\frac{dy}{dx}=3-e^y$ $\frac{dy}{dx}=\frac{3-e^y}{xe^y}$
6	$3x^2+(x)\left(2y\frac{dy}{dx}\right)+(y^2)(1)=5$ $3x^2+2xy\frac{dy}{dx}+y^2=5$ $2xy\frac{dy}{dx}=5-y^2-3x^2$ $\frac{dy}{dx}=\frac{5-y^2-3x^2}{2xy}$
7	$(x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)+(y)(2x)-6x^2-3y^2\frac{dy}{dx}=0$ بتعويض $(x,y)=(2,-3)$ ينتج أنّ: $4\frac{dy}{dx}-12-24-27\frac{dy}{dx}=0$ $-23\frac{dy}{dx}-36=0$ $\frac{dy}{dx}=-\frac{36}{23}$

8	$3y^2\frac{dy}{dx}-2x=0$ بتعويض $(x,y)=(2,2)$ ينتج أنّ: $3(2)^2\frac{dy}{dx}-2(2)=0$ $12\frac{dy}{dx}-4=0$ $12\frac{dy}{dx}=4$ $\frac{dy}{dx}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$
9	ميل المماس عند النقطة $(3,5)$ $2y\frac{dy}{dx}-2x=0$ بتعويض $(x,y)=(3,5)$ $2(5)\frac{dy}{dx}-2(3)=0$ $10\frac{dy}{dx}-6=0$ $10\frac{dy}{dx}=6$ $\frac{dy}{dx}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$
10	معادلة المماس عند النقطة $(3,5)$ $y-y_1=m(x-x_1)$ $y-5=\frac{3}{5}(x-3)$ $y-5=\frac{3}{5}x-\frac{9}{5}$ $y=\frac{3}{5}x+\frac{16}{5}$

11	ميل المماس عند النقطة $(2,1)$ $(x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)+(y)(2x)=-4\frac{dy}{dx}$ بتعويض $(x,y)=(2,1)$ $(4)\left(\frac{dy}{dx}\right)+(1)(4)=-4\frac{dy}{dx}$ $4\frac{dy}{dx}+4=-4\frac{dy}{dx}$ $4\frac{dy}{dx}+4\frac{dy}{dx}=-4$ $8\frac{dy}{dx}=-4$ $\frac{dy}{dx}=-\frac{4}{8}=-\frac{1}{2}$
12	معادلة المماس عند النقطة $(2,1)$ $y-y_1=m(x-x_1)$ $y-1=-\frac{1}{2}(x-2)$ $y-1=-\frac{1}{2}x+1$ $y=-\frac{1}{2}x+2$
13	ميل المماس عند النقطة $(0,5)$ $2x+(4x)\left(\frac{dy}{dx}\right)+(y)(4)+2y\frac{dy}{dx}=0$ بتعويض $(x,y)=(0,5)$ $0+0\frac{dy}{dx}+20+10\frac{dy}{dx}=0$ $10\frac{dy}{dx}=-20$ $\frac{dy}{dx}=-\frac{20}{10}=-2$

14	معادلة المماس عند النقطة $(0,5)$ $y - y_1 = m(x - x_1)$ $y - 5 = -2(x - 0)$ $y - 1 = -2x$ $y = -2x + 1$
15	معدل التغير المعطى: $\frac{dV}{dt} = -0.6$ معدل التغير المطلوب $\left.\frac{dr}{dt}\right\|_{r=250}$ العلاقة التي تربط بين حجم المنطاد ونصف قطره: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$ $-0.6 = 4\pi(250)^2 \frac{dr}{dt}$ $\frac{dr}{dt} = -\frac{0.6}{4\pi(250)^2} = -\frac{0.6}{250000\pi} = -\frac{6}{2500000\pi}$ إذن يتناقص طول نصف قطر المنطاد بمعدل $\frac{6}{2500000\pi}$ cm/s عندما يكون طول نصف قطره 250 cm
16	معدل التغير المعطى: $\frac{dV}{dt} = 0.4$ معدل التغير المطلوب: $\left.\frac{dh}{dt}\right\|_{r=250}$ العلاقة التي تربط بين حجم الخزان وارتفاعه: $V = \pi r^2 h$ $\frac{dV}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt}$ $0.4 = \pi(0.3)^2 \frac{dh}{dt}$ $\frac{dh}{dt} = \frac{0.4}{\pi(0.3)^2} = \frac{0.4}{0.09\pi} = \frac{40}{9\pi}$ إذن يتزايد عمق الماء في الخزان بمعدل $\frac{40}{9\pi}$ m/s