الجوكر في الرياضيات

الوحدة الثالثة

الأعداد المركبة

الفرع العلمي والصناعي

ا.محمد السواعير

المنهاج الجديد

0787468840

الدرس الأول

الاعداد المركبة

Complex Numbers

مثال 1

أجد قيمة الجذر الرئيس في كلٍّ ممّا يأتي بدلالة i:

1. $\sqrt{-16}$
2. $\sqrt{-72}$

أتحقّق من فهمي

أجد قيمة الجذر الرئيس في كلٍّ ممّا يأتي بدلالة i:

a) $\sqrt{-75}$
b) $\sqrt{-49}$

مثال 2

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي في أبسط صورة مُفترِضًا أنّ $i = \sqrt{-1}$:

1. $\sqrt{-8} \times \sqrt{-18}$
2. $5i \times \sqrt{-4}$
3. i^{15}

أتحقّق من فهمي

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي في أبسط صورة مُفترِضًا أنّ $i = \sqrt{-1}$:

a) $\sqrt{-27} \times \sqrt{-48}$
b) $\sqrt{-50} \times -4i$
c) i^{2021}

مثال 3

أجد قيمة x، وقيمة y الحقيقيتين اللتين تجعلان المعادلة: $2x - 6 + (3y + 2)i = 4x + 8i$ صحيحة.

أتحقّق من فهمي

أجـد قيمة x، وقيمة y الحقيقيتين اللتين تجعلان المعادلة: $x + 5 + (4y - 9)i = 12 - 5i$ صحيحة.

مثال 4

أُمثِّل العدد المُركَّب ومُرافِقه بيانيًّا في المستوى المُركَّب في كلٍّ ممّا يأتي:

1 $z = -3 + 5i$ 2 $z = 6 - 4i$ 3 $z = 2i$

أتحقَّق من فهمي

أُمثِّل العدد المُركَّب ومُرافِقه بيانيًّا في المستوى المُركَّب في كلٍّ ممّا يأتي:

a) $z = 2 + 7i$ b) $z = -3 - 2i$ c) $z = -3i$

مثال 5

أجد مقياس كل عدد مُركَّب ممّا يأتي:

1 $z = 3 - 4i$ 2 $z = 12i$

أتحقَّق من فهمي

أجد مقياس كل عدد مُركَّب ممّا يأتي:

a) $z = -3 - 6i\sqrt{2}$ b) $z = -2i$ c) $z = 4 + \sqrt{-20}$

مثال 6

أجد سعة كلٍّ من الأعداد المُركَّبة الآتية، مقربًا إجابتي لأقرب منزلتين عشريتين:

1 $z = 4 + 3i$ 2 $z = -3 + 8i$ 3 $z = -1 - 6i$ 4 $z = 8 - 4i$

أتحقَّق من فهمي

أجد سعة كلٍّ من الأعداد المُركَّبة الآتية، مقربًا إجابتي لأقرب منزلتين عشريتين:

a) $z = 8 + 2i$ b) $z = -5 + 12i$

c) $z = -2 - 3i$ d) $z = 8 - 8i\sqrt{3}$

مثال 7

أكتب العدد المُركَّب z في كل مما يأتي بالصورة المثلثية:

1 $|z| = 4, \text{Arg}(z) = \frac{\pi}{6}$ 2 $z = -2 - 5i$

أتحقّق من فهمي

أكتب العدد المُركَّب z في كل مما يأتي بالصورة المثلثية:

a) $|z| = 4\sqrt{2}$, $\text{Arg}(z) = -\frac{3\pi}{4}$ b) $z = -4 - 4i$ c) $z = 2i$

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد قيمة الجذر الرئيس في كلٍّ ممّا يأتي بدلالة i:

1. $\sqrt{-19}$
2. $\sqrt{\frac{-12}{25}}$
3. $\sqrt{\frac{-9}{32}}$
4. $\sqrt{-53}$

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي في أبسط صورة مُفترِضًا أنَّ $i = \sqrt{-1}$:

5. i^{26}
6. i^{39}
7. $(i)(2i)(-7i)$
8. $\sqrt{-6} \times \sqrt{-6}$
9. $\sqrt{-4} \times \sqrt{-8}$
10. $2i \times \sqrt{-9}$

أكتب في كلٍّ ممّا يأتي العدد المُركَّب z بالصورة القياسية:

11. $\frac{2 + \sqrt{-4}}{2}$
12. $\frac{8 + \sqrt{-16}}{2}$
13. $\frac{10 - \sqrt{-50}}{5}$

أُحدِّد الجزء الحقيقي والجزء التخيُّلي لكلٍّ من الأعداد المُركَّبة الآتية، ثم أُمثِّلها جميعًا في المستوى المُركَّب نفسه:

14. $z = 2 + 15i$
15. $z = 10i$
16. $z = -16 - 2i$

أُمثِّل العدد المُركَّب ومُرافِقه بيانيًّا في المستوى المُركَّب في كلٍّ ممّا يأتي:

17. $z = -15 + 3i$
18. $z = 8 - 7i$
19. $z = 12 + 17i$
20. $z = -3 - 25i$
21. $3i$
22. 15

أجد $|z|$، و $\bar{z}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

23. $z = -5 + 5i$
24. $z = 3 + 3i\sqrt{3}$
25. $z = 6 - 8i$

أجد قِيَم كلٍّ من x، وy الحقيقية التي تجعل كُلًّا من المعادلات الآتية صحيحة:

26) $x^2 - 1 + i(2y - 5) = 8 + 9i$

27) $2x + 3y + i(x - 2y) = 8 - 3i$

28) $y - 3 + i(3x + 2) = 9 + i(y - 4)$

29) $i(2x - 5y) + 3x + 5y = 7 + 3i$

أجد سعة كلٍّ من الأعداد المُركَّبة الآتية، مقربًا إجابتي لأقرب منزلتين عشريتين:

30) 1

31) $3i$

32) $-5 - 5i$

33) $1 - i\sqrt{3}$

34) $6\sqrt{3} + 6i$

35) $3 - 4i$

36) $-12 + 5i$

37) $-58 - 93i$

38) $2i - 4$

أكتب في كلٍّ ممّا يأتي العدد المُركَّب z في صورة مثلثية:

39) $|z| = 2, \operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{2}$

40) $|z| = 3, \operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{3}$

41) $|z| = 7, \operatorname{Arg} z = \frac{5\pi}{6}$

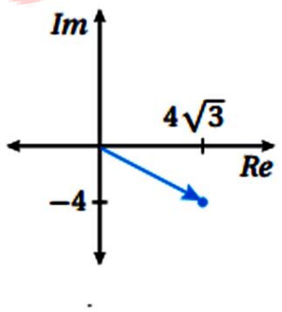
42) $|z| = 1, \operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{4}$

43) $z = 6$

44) $z = 1 + i$

45) يُبيِّن الشكل المجاور التمثيل البياني للعدد المُركَّب z_1 في المستوى المُركَّب. أجد العدد المُركَّب z_2 الذي يُحقِّق ما يأتي:

$$|z_2| = 40 \quad \text{and} \quad \operatorname{Arg} z_2 = \operatorname{Arg} \overline{z_1}$$



بافتراض أنَّ: $z = a + ib$، حيث: $|z| = 10\sqrt{2}$، وأنَّ: $\operatorname{Arg}(z) = \frac{3\pi}{4}$:

46) أكتب العدد المُركَّب z بالصورة القياسية.

47) أجد قياس الزاوية المحصورة بين z و $\bar{z}$.

إذا كان: $z = -8 + 8i$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

48) $|z|$

49) $\operatorname{Arg}(z)$

50) $|\bar{z}|$

51) $\operatorname{Arg}(\bar{z})$

مهارات التفكير العليا

تبرير: إذا كان: $\mathrm{Arg}(5 + 2i) = \alpha$، فأجد سعة كلٍّ ممّا يأتي بدلالة α، مُبرِّرًا إجابتي:

52 $-5 - 2i$ 53 $5 - 2i$ 54 $-5 + 2i$ 55 $2 + 5i$ 56 $-2 + 5i$

57 تحدٍّ: إذا كان: $z = 5 + im$، حيث: $|z| = 6$، و $0 < \mathrm{Arg}(z) < \frac{\pi}{2}$، فأجد قيمة العدد الحقيقي m.

58 تبرير: إذا كان: $z = 5 + 3ik$، حيث: $|z| = 13$، فأجد جميع قِيَم k الحقيقية المُمكِنة، مُبرِّرًا إجابتي.

تحدٍّ: بافتراض أنَّ z_1 عدد مُركَّب، مقياسه: $4\sqrt{5}$، وسعته: $\theta = \tan^{-1}(2)$:

59 أكتب z_1 في الصورة القياسية.

60 إذا كان: $z_2 = 7 - 3i, z_3 = -5 + i$، فأجد مساحة المثلث الذي رؤوسه: z_1, z_2, z_3 في المستوى المُركَّب.

الدرس 1

الأعداد المُركَّبة
Complex Numbers

أجد قيمة الجذر الرئيس في كلٍّ ممّا يأتي بدلالة i:

1) $\sqrt{-128}$ 2) $\sqrt{-14}$ 3) $\sqrt{-81}$

4) $\sqrt{-125}$ 5) $3\sqrt{-32}$ 6) $\sqrt{\frac{-28}{9}}$

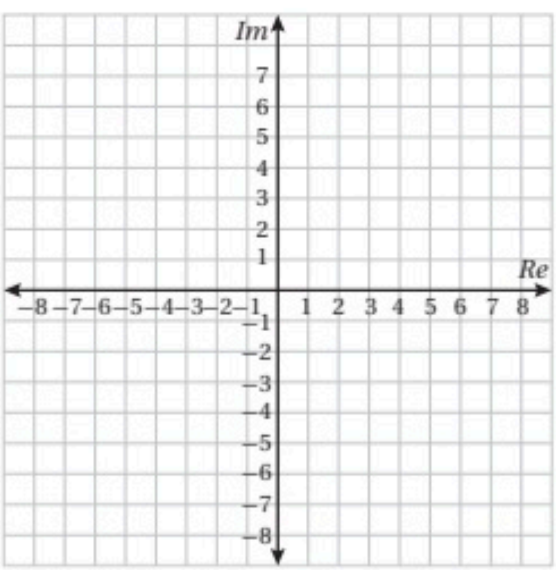
أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي في أبسط صورة، مُفترِضًا أنَّ $i = \sqrt{-1}$:

7) i^7 8) i^{12} 9) i^{98} 10) i^{121}

11) أملأ الفراغ بما هو مُناسِب في الجدول الآتي:

z	$Re(z)$	$Im(z)$
$-4+6i$		
-3		
$8i$		
	-8	3

أُمثِّل كُلًّا من الأعداد المُركَّبة الآتية في المستوى المُركَّب المجاور:



12) 5 13) -4

14) $4i$ 15) $-3i$

16) $4-2i$ 17) $-3+5i$

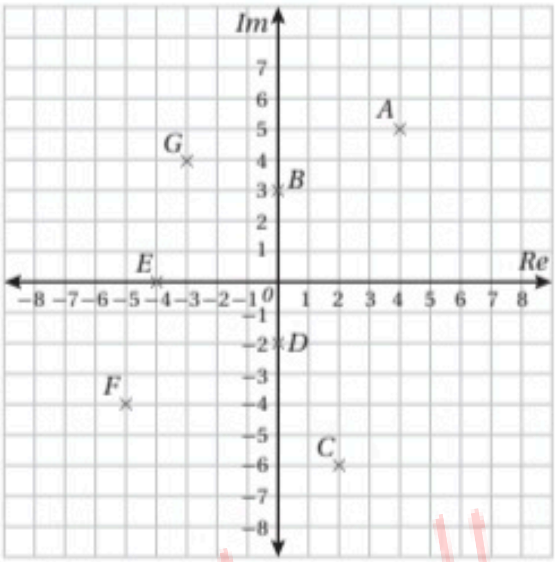
18) $-3-5i$ 19) i

20) $7-4i$ 21) $-5+4i$

22) $-7-2i$ 23) $5+5i$

الأعداد المُركَّبة
Complex Numbers

24 أكتب كُلًّا من الأعداد المُركَّبة المُمثَّلة بيانيًا في المستوى المُركَّب المجاور بالصورة القياسية، ثم أجد مقياسه وسعته.



أجد قيمة x، وقيمة y الحقيقيتين اللتين تجعلان كل معادلة ممّا يأتي صحيحة:

25 $(2x+1)+4i=7-i(y-3)$

26 $i(2x-4y)+x+3y=26+32i$

أكتب كُلًّا من الأعداد المُركَّبة الآتية بالصورة المثلثية:

27 6

28 $-5i$

29 $-2\sqrt{3}-2i$

30 $-1+i$

31 $4-2i$

32 $2+8i$

أكتب كُلًّا من الأعداد المُركَّبة الآتية بالصورة القياسية:

33 $6(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$

34 $12(\cos\pi+i\sin\pi)$

35 $8(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$

36 $3(\cos\frac{-\pi}{4}+i\sin\frac{-\pi}{4})$

أجد مُرافِق كلٍّ من الأعداد المُركَّبة الآتية، ثم أُمثِّلها جميعًا في المستوى المُركَّب نفسه:

37 $-1-i\sqrt{5}$

38 $9-i$

39 $2-8i$

40 $-9i$

41 12

42 $i-8$

الدرس الثاني

العمليات على الاعداد المركبة

Operations with Complex Numbers

مثال 1

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي:

1 $(5+7i)+(-9-4i)$

2 $(8-5i)-(2-11i)$

أتحقّق من فهمي

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي:

a) $(7+8i)+(-9+14i)$

b) $(11+9i)-(4i-6i)$

مثال 2

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي، ثم أكتبه بالصورة القياسية:

1 $5i(3-7i)$

2 $(6+2i)(7-3i)$

3 $(5+4i)(5-4i)$

أتحقّق من فهمي

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي، ثم أكتبه بالصورة القياسية:

a) $-3i(4-5i)$

b) $(5+4i)(7-4i)$

c) $(3+6i)^2$

مثال 3

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي، ثم أكتبه بالصورة القياسية:

1 $\dfrac{8-5i}{3-2i}$

2 $\dfrac{3+5i}{2i}$

أتحقّق من فهمي

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي، ثم أكتبه بالصورة القياسية:

a) $\dfrac{-4+3i}{1+i}$

b) $\dfrac{2-6i}{-3i}$

c) $\dfrac{7i}{4-4i}$

مثال 4

إذا كان: $z_1 = 10\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{7}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{7}\right)\right)$، وكان: $z_2 = 2\left(\cos\frac{6\pi}{7} + i\sin\frac{6\pi}{7}\right)$،

فأجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي بالصورة المثلثية:

1) $z_1 z_2$

2) $\frac{z_1}{z_2}$

أتحقّق من فهمي

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي بالصورة المثلثية:

a) $6\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \times 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

b) $6\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) \div 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

مثال 5

أجد الجذرين التربيعيين للعدد المُركَّب: $z = 21 - 20i$.

أتحقّق من فهمي

أجد الجذرين التربيعيين لكلٍّ من الأعداد المُركَّبة الآتية:

a) $-5 - 12i$

b) $-9i$

c) $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

مثال 6

أجد جميع الجذور الحقيقية والجذور المُركَّبة للمعادلة: $z^3 + 4z^2 + z = 26$.

أتحقّق من فهمي

أجد جميع الجذور الحقيقية والجذور المُركَّبة للمعادلة: $z^3 - 8z^2 + 9z - 72 = 0$.

مثال 7

إذا كان: $3 + 9i$ هو أحد جذور المعادلة: $x^2 + ax + b = 0$، فأجد قيمة كلٍّ من a، وb.

أتحقّق من فهمي

إذا كان: $2 - i$ هو أحد جذور المعادلة: $x^2 + ax + b = 0$، فأجد قيمة كلٍّ من a، وb.

أتدرّب وأحُلّ المسائل

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي، ثم أكتبه بالصورة القياسية:

1. $(7+2i)+(3-11i)$
2. $(5-9i)-(-4+7i)$
3. $(4-3i)(1+3i)$
4. $(4-6i)(1-2i)(2-3i)$
5. $(9-2i)^2$
6. $\frac{48+19i}{5-4i}$

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي بالصورة المثلثية:

7. $6(\cos\pi+i\sin\pi)\times 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$
8. $\left(\cos\frac{3\pi}{10}+i\sin\frac{3\pi}{10}\right)\div\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)$
9. $12\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\div 4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$
10. $11\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\times 2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

أجد القِيَم الحقيقية للثابتين a و b في كلٍّ ممّا يأتي:

11. $(a+6i)+(7-ib)=-2+5i$
12. $(11-ia)-(b-9i)=7-6i$
13. $(a+ib)(2-i)=5+5i$
14. $\frac{a-6i}{1-2i}=b+4i$

15. أضرِب العدد المُركَّب $8\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ في مُرافِقه.

إذا كان: $z_1=2-3i, z_2=21-i, z_3=17(1-i)$، فأجد المقياس والسعة لكلٍّ ممّا يأتي:

16. $\frac{z_2}{z_1}$
17. $\frac{1}{z_3}$
18. $\frac{z_3}{\overline{z_2}}$

إذا كان: $z=8\left(\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

19. أُمثِّل العدد z بيانيًّا في المستوى المُركَّب.
20. أجد الجذرين التربيعيين للعدد z.

أجد الجذرين التربيعيين لكلٍّ من الأعداد المُركَّبة الآتية:

21. $3-4i$
22. $-15+8i$
23. $5-12i$
24. $-7-24i$

25. إذا كان: $(a-3i)$، و $(b+ic)$ هما الجذرين التربيعيين للعدد المُركَّب: $55-48i$، فأجد قيمة كلٍّ من الثوابت الحقيقية: a، و b، و c.

إذا كان: $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right), w = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ ، فأجد كُلًّا ممّا يأتي بالصورة المثلثية:

26 zw

27 $\frac{z}{w}$

28 $\frac{w}{z}$

29 $\frac{1}{z}$

30 w^2

31 $5iz$

أحُلُّ كُلًّا من المعادلات الآتية:

32 $z^2 + 104 = 20z$

33 $z^2 + 18z + 202 = 0$

34 $9z^2 + 68 = 0$

35 $z^3 - 8z^2 + 9z - 72 = 0$

36 $z^3 + 4z + 10 = 5z^2$

37 $2z^3 = 8z^2 + 13z - 8$

أجد معادلة تربيعية لها الجذران المُركَّبان المعطيان في كلٍّ ممّا يأتي:

38 $2 \pm 5i$

39 $7 \pm 4i$

40 $-8 \pm 20i$

41 $-3 \pm 2i$

أحُلُّ المعادلة المعطى أحد جذورها في كلٍّ ممّا يأتي:

42 $x^3 + x^2 + 15x = 225, 5$

43 $x^3 + 7x^2 - 13x + 45 = 0, -7$

44 $3x(x^2 + 45) = 2(19x^2 + 37), 6 - i$

45 $x^3 + 10x^2 + 29x + 30 = 0, -2 + i$

إذا كان: $(4 + 11i)$ هو أحد جذري المعادلة: $z^2 - 8z + k = 0$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

46 أجد الجذر الآخر للمعادلة.

47 أجد قيمة الثابت k.

مهارات التفكير العليا

تبرير: أُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا، مُبرِّرًا إجابتي:

48 أجد ناتج: $(p + iq)^2$، حيث p و q عددان حقيقيان.

49 إذا كان: $(p + iq)^2 = 45 + im$ ، حيث p و q عددان صحيحان موجبان، و$p > q$، فأجد ثلاث قِيَم مُمكِنة للعدد الحقيقي m.

50 أستعمل إجابة السؤال السابق لإيجاد الجذرين التربيعيين للعدد المُركَّب: $45 - 108i$.

51 برهان: أُثبِت أنَّ: $|z\bar{z}| = z\bar{z}$ لأيِّ عدد مُركَّب z.

52 برهان: إذا كان z عددًا مُركَّبًا، حيث: $|z| = 5\sqrt{5}$, $\text{Arg}(z) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$، وكان:
$\frac{z}{3+4i} = p + iq$، فأُثبِت أنَّ: $p + q = 1$.

53 تحدٍّ: العدد المُركَّب: $z = (10 - i) - (2 - 7i)$ هو أحد جذور المعادلة: $z^3 - 20z^2 + 164z - 400 = 0$.
أجد بقية جذور هذه المعادلة، ثم أحُلُّ المعادلة الآتية: $x^6 + 164x^2 = 20(x^4 + 20)$.

الدرس 2

العمليات على الأعداد المُركَّبة
Operations With Complex Numbers

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي، ثم أكتبه بالصورة القياسية:

1 $(6+8i)+(3-5i)$

2 $(-6-3i)-(-8+2i)$

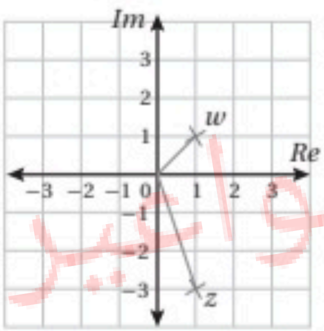
3 $4i(7-3i)$

4 $(8-6i)(8+6i)$

5 $(-2+2i\sqrt{3})^3$

6 $\frac{(2+i)(1-i)}{4-3i}$

مُعتمِدًا المستوى المُركَّب المجاور الذي يُبيِّن العددين المُركَّبين z و w، أُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:



7 أكتب كُلًّا من العددين z و w بالصورة القياسية.

8 أجد السعة والمقياس لكلٍّ من العددين المُركَّبين wz و $\frac{w}{z}$

9 أُمثِّل العددين wz و $\frac{w}{z}$ في المستوى المُركَّب.

إذا كان: $z=-3+3i\sqrt{3}$، وكان: $|w|=18, \text{Arg}(w)=-\frac{\pi}{6}$، فأجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي:

10 $\text{Arg}(z)$

11 $|z|$

12 $\text{Arg}(zw)$

13 $|zw|$

أجد الجذرين التربيعيين لكل عدد مُركَّب ممّا يأتي:

14 $-15+8i$

15 $-7-24i$

16 $105+88i$

17 إذا كان: $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=$ ω، فأكتبه بالصورة المثلثية، مُبيِّنًا أنَّ $-1=$ ω^3.

العمليات على الأعداد المُركَّبة

Operations with Complex Numbers

إذا كان: $z_1 = 3(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5})$، وكان: $z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي بالصورة المثلثية:

18 $z_1 z_2$

19 $z_1(\overline{z_1})$

20 z_2^3

21 $\frac{z_2}{z_1}$

22 إذا كان: $\left|\frac{u-9i}{3+i}\right| = 5$، فما قيمة u، علمًا بأنّها سالبة؟

23 إذا كان: $(1 + 4i)$ جذرًا للمعادلة: $x^3 + 5x^2 + ax + b = 0$، فأجد قيمة كلٍّ من العددين الحقيقيين a، وb، والجذرين الآخرين لهذه المعادلة.

24 أجد قيمتي الجذر التربيعي: $\sqrt{\frac{362 - 153i}{2 - 3i}}$

25 أُثبِت أنَّ أحد الجذرين التربيعيين للعدد: $(7 + 24i)$ هو $(4 + 3i)$، ثم أجد الجذر التربيعي الآخر.

26 أُثبِت أنَّ سعة $(7 + 24i)$ تساوي ضعف سعة $(4 + 3i)$.

27 أُثبِت أنَّ مقياس $(7 + 24i)$ يساوي مربع مقياس $(4 + 3i)$.

28 إذا كان: $\frac{a}{3+i} + \frac{b}{1+2i} = 1 - i$، فأجد قيمة كلٍّ من العددين الحقيقيين a، وb.

أحُلُّ كل معادلة ممّا يأتي:

29 $2z^3 = 8z^2 + 13z - 87$

30 $z^3 + 4z^2 - 10z + 12 = 0$

31 إذا كان: $-2 + i$ هــو أحد جذور المعادلة: $z^4 + az^3 + bz^2 + 10z + 25 = 0$، فأجد قيمة a، وقيمة b، ثم أجد جميع الجذور الحقيقية والجذور المُركَّبة للمعادلة.

الدرس الثالث

المحل الهندسي في المستوى المركب

Locus in the Complex Plane

مثال 1

أجد المحل الهندسـي الذي تُمثّله المعادلـة: $|z-2+8i|=3$، ثم أكتب المعادلة بالصيغة الديكارتية.

أتحقّق من فهمي

أجد المحل الهندسـي الذي تُمثّله المعادلة: $|z+5-4i|=7$ ، ثم أكتب المعادلة بالصيغة الديكارتية.

مثال 2

إذا كانت: $|z-5-3i|=3$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

1) أرسم المحل الهندسي الذي تُمثّله المعادلة في المستوى المُركَّب.

2) أجد القيمة العظمى لسعة الأعداد المُركَّبة z التي تُحقِّق المعادلة.

أتحقّق من فهمي

إذا كانت: $|z+4-4\sqrt{3}\,i|=4$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

a) أرسم المحل الهندسي الذي تُمثّله المعادلة في المستوى المُركَّب.

b) أجد القيمة العظمى لسعة الأعداد المُركَّبة z التي تُحقِّق المعادلة.

مثال 3

أجد المحل الهندسـي الذي تُمثّله المعادلـة: $|z-2i|=|z-3|$، ثم أكتب المعادلة بالصيغة الديكارتية.

أتحقّق من فهمي

أجد المحل الهندسـي الذي تُمثّله المعادلة: $|z-5i|=|z+1|$، ثم أكتب المعادلة بالصيغة الديكارتية.

مثال 4

أجد المحل الهندسي الذي تُمثِّله كل معادلة ممّا يأتي، ثم أرسمه في المستوى المُركَّب:

1) $\text{Arg}(z-4i)=0$

2) $\text{Arg}(z+1+2i)=\frac{3\pi}{4}$

أتحقَّق من فهمي

أجد المحل الهندسي الذي تُمثِّله كل معادلة ممّا يأتي، ثم أرسمه في المستوى المُركَّب:

a) $\text{Arg}(z)=\frac{\pi}{3}$

b) $\text{Arg}(z-5)=-\frac{2\pi}{3}$

مثال 5

أُمثِّل في المستوى المُركَّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقِّق كل متباينة ممّا يأتي:

1) $|z-3|>5$

2) $|z-7|\leq|z+3i|$

أتحقَّق من فهمي

أُمثِّل في المستوى المُركَّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقِّق كل متباينة ممّا يأتي:

a) $|z+3+i|\leq 6$

b) $|z+3+i|<|z-4|$

c) $\frac{\pi}{4}<\text{Arg}(z+5)\leq\frac{\pi}{2}$

مثال 6

أُمثِّل في المستوى المُركَّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقِّق المتباينة: $|z-1-2i|\leq 5$،

والمتباينة: $\frac{\pi}{4}<\text{Arg}(z-1-2i)<\frac{2\pi}{3}$.

أتحقَّق من فهمي

أُمثِّل في المستوى المُركَّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقِّق المتباينة: $|z+3-2i|\geq 4$،

والمتباينة: $\frac{-\pi}{2}<\text{Arg}(z-2+i)<\frac{\pi}{4}$.

أتدرّب وأحُلّ المسائل

أجد المحل الهندسي الذي تُمثِّله كل معادلة ممّا يأتي، ثم أُمثِّله في المستوى المُركَّب، ثم أجد معادلته الديكارتية:

1. $|z| = 10$
2. $|z-9| = 4$
3. $|z+2i| = 8$
4. $|z-5+6i| = 2$
5. $|z+\sqrt{2}+i\sqrt{2}| = 2$
6. $|z+6-i| = 7$
7. $|z-5| = |z-3i|$
8. $|z+3i| = |z-7i|$
9. $|z+5+2i| = |z-7|$
10. $|z-3| = |z-2-i|$
11. $\dfrac{|z+6-i|}{|z-10-5i|} = 1$
12. $|z+7+2i| = |z-4-3i|$

أجد المحل الهندسي الذي تُمثِّله كلٌّ من المعادلات الآتية، ثم أرسمه في المستوى المُركَّب:

13. $\text{Arg}(z+2-5i) = \frac{\pi}{4}$
14. $\text{Arg}(z-1+i\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$
15. $\text{Arg}(z-4i) = -\frac{3\pi}{4}$

أُمثِّل في المستوى المُركَّب المنطقة التي تُحدِّدها كل متباينة ممّا يأتي:

16. $|z-2| < |z+2|$
17. $|z-4-2i| \leq 2$
18. $|z-4| > |z-6|$
19. $0 < \text{Arg}(z-2-2i) < \frac{\pi}{4}$
20. $-\frac{\pi}{4} \leq \text{Arg}(z-3+4i) \leq \frac{\pi}{4}$
21. $2 \leq |z-3-4i| \leq 4$

إذا كانت: $|z-\sqrt{5}-2i| = 2$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

22. أرسم المحل الهندسي الذي تُمثِّله المعادلة في المستوى المُركَّب.
23. أجد القيمة العظمى لسعة الأعداد المُركَّبة z التي تُحقِّق المعادلة.

24. أُمثِّل في المستوى المُركَّب نفسه المحل الهندسي الذي تُمثِّله كلٌّ من المعادلة: $|z-3+2i| = \sqrt{10}$، والمعادلة: $|z-7+i| = |z-6i|$، ثم أجد الأعداد المُركَّبة التي تُحقِّق المعادلتين معًا.

25. أجد العدد المُركَّب الذي يُحقِّق كُلًّا من المحل الهندسي: $|z+2i| = |z-3|$، والمحل الهندسي: $|z+3-i| = |z-1+5i|$.

26 أمثِّل في المستوى المُركَّب نفسه المحل الهندسي الذي تُمثِّله كلٌّ من المعادلات الآتية:

$$\text{Arg}(z+2-5i)=\frac{\pi}{4}\,,\ \text{Arg}(z+2-5i)=\frac{-\pi}{2}\,,\ |z+2-5i|=\sqrt{29}$$

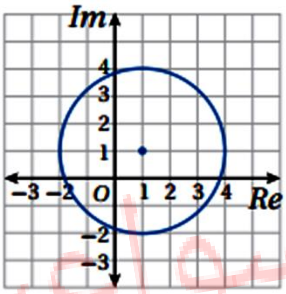
27 أمثِّل في المستوى المُركَّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقِّق المتباينة: $|z+2i|>|z-3|$، والمتباينة: $|z+3-i|<|z-1+5i|$.

28 أمثِّل في المستوى المُركَّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقِّق المتباينة: $\frac{-\pi}{2}<\text{Arg}(z+2-5i)<\frac{\pi}{4}$، والمتباينة: $|z+2-5i|>\sqrt{29}$.

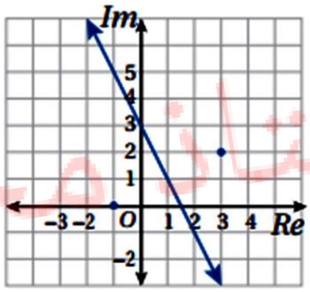
29 أمثِّل في المستوى المُركَّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقِّق المتباينة: $\frac{-\pi}{4}\le \text{Arg}(z-2i)\le\frac{\pi}{3}$، والمتباينة: $2<|z-3+i|\le 5$

أكتب (بدلالة z) معادلة المحل الهندسي المُمثَّل بيانيًّا في كلٍّ ممّا يأتي:

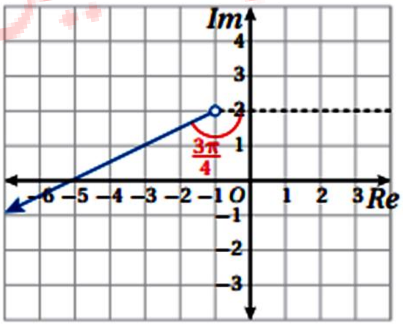
30



31

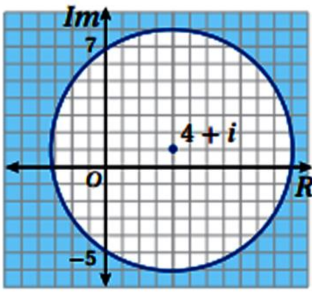


32 أكتب معادلة في صورة: $\text{Arg}(z-a)=\theta$، حيث a عدد مُركَّب، و $-\pi<\theta\le\pi$ تُمثِّل المحل الهندسي المُبيَّن في الشكل المجاور.

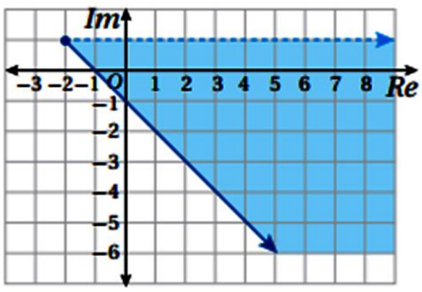


أكتب (بدلالة z) متباينة المحل الهندسي الذي تُمثِّله المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ ممّا يأتي:

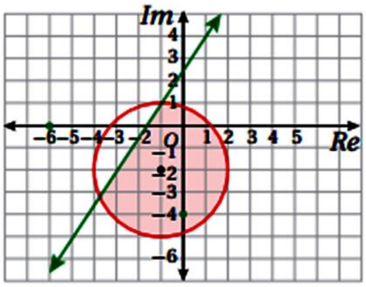
33



34



35 أكتب (بدلالة z) نظام متباينات يُمثِّل المحل الهندسي المُبيَّن في الشكل المجاور.



مهارات التفكير العليا

36 **تحدٍّ**: أجد (بدلالة الثابت الحقيقي a) العددين المُركَّبين اللذين يُحقِّقان المعادلة: $|z-a| = 2a$، والمعادلة: $|z-a| = |z + a(2+i)|$.

37 **تبريـر**: إذا كان العدد المُركَّـب z يُحقِّق المعادلة: $|z-3+4i| = 2$، فأجد أكبر قيمة لِـ $|z|$ وأقل قيمة له، مُبرِّرًا إجابتي.

تحدٍّ: إذا كانت: $z = 5 + 2i$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

38 أُبيِّن أنَّ: $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{1}{29}(21 + 20i)$.

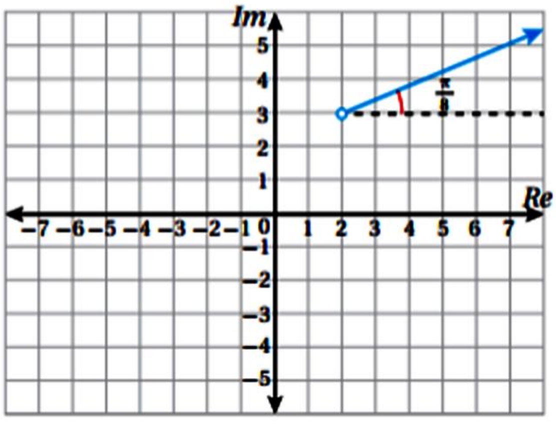
39 بناءً على البحث في سعة كلٍّ من الأعداد المُركَّبة: z، و $\bar{z}$، و $\frac{z}{\bar{z}}$، أُبيِّن أنَّ:

$$2\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{20}{21}\right)$$

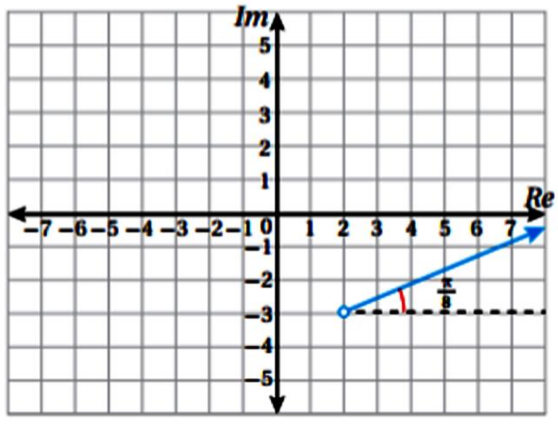
40 **تحدٍّ**: أُثبِت أنَّ المعادلة: $|z-6| = 2|z+6-9i|$ تُمثِّل دائرة، ثم أجد مركزها وطول نصف قُطْرها.

41 **تبرير**: أيُّ الآتية هو المحل الهندسي الذي معادلته: $\text{Arg}(z-2+3i) = \frac{\pi}{8}$، مُبرِّرًا إجابتي؟

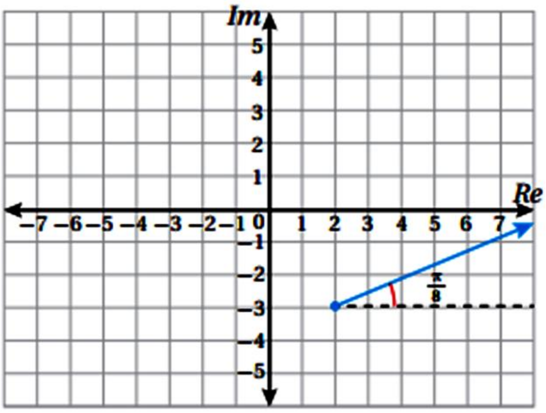
)



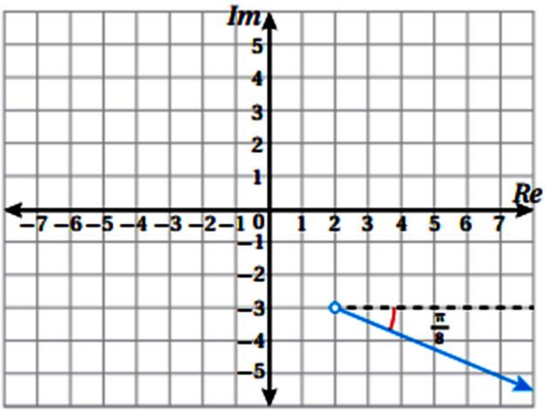
b)



c)



d)



الدرس 3

المحل الهندسي في المستوى المُركَّب

Locus in the Complex Plane

أجد المحل الهندسي الذي تُمثِّله كل معادلة ممّا يأتي، ثم أُمثِّله في المستوى المُركَّب، وأجد معادلته الديكارتية:

1) $|z+5i|-3=1$

2) $|z-2+8i|=13$

3) $|z+4-3i|=7$

4) $|z+3+5i|=|z-i|$

5) $\dfrac{|z+3i|}{|z-6i|}=1$

6) $|6-2i-z|=|z+4i|$

أجد المحل الهندسي الذي تُمثِّله كلٌّ من المعادلات الآتية، ثم أُمثِّله في المستوى المُركَّب:

7) $\text{Arg}(z+3)=\dfrac{\pi}{4}$

8) $\text{Arg}(z+3-2i)=\dfrac{2\pi}{3}$

9) $\text{Arg}(z+2+2i)=-\dfrac{\pi}{4}$

أُمثِّل في المستوى المُركَّب المحل الهندسي الذي تُمثِّله كل متباينة ممّا يأتي:

10) $0\le \arg(z-3i)\le \dfrac{3\pi}{4}$

11) $|z-2i|>2$

12) $|z|\le 8$

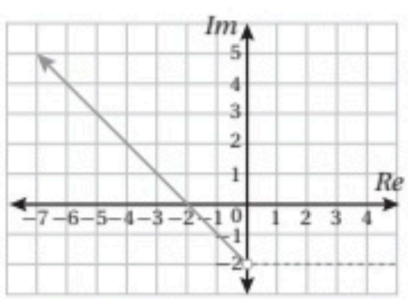
إذا كانت: $|z-5i|=3$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

13) أرسم المحل الهندسي الذي تُمثِّله المعادلة في المستوى المُركَّب.

14) أجد القيمة العظمى لسعة الأعداد المُركَّبة z التي تُحقِّق المعادلة.

15) أُمثِّل في المستوى المُركَّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقِّق المتباينة: $1\le|z-1+i|$، والمتباينة: $-\dfrac{\pi}{3}<\text{Arg}(z)<0$.

16) أكتب (بدلالة z) معادلة المحل الهندسي لمجموعة النقاط المُمثَّلة في المستوى المُركَّب المجاور.



الدرس 3

يتبع

المحل الهندسي في المستوى المُركَّب
Locus in the Complex Plane

17 إذا كانت: $u = -7 + 7i$، وكانت: $v = 7 + 7i$، فأجد بصيغة: $|z - z_1| = r$ معادلة الدائرة التي تمرُّ بنقطة الأصل، والنقطتين اللتين تُمثّلان العددين المُركَّبين u، و v.

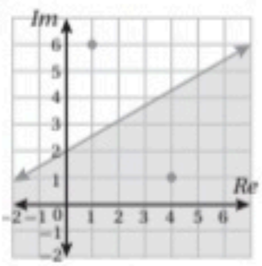
18 إذا كانت: $u = -1 - i$، فأجد u^2، ثم أُمثّل في المستوى المُركَّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقّق المتباينة: $|z| < 2$، والمتباينة: $|z - u^2| < |z - u|$.

19 أُمثّل في المستوى المُركَّب المعادلة: $|z - 3i| = 13$، والمعادلة: $\mathrm{Arg}(z - 4) = \frac{\pi}{4}$، ثم أجد العدد المُركَّب z الذي يُحقّقهما معًا.

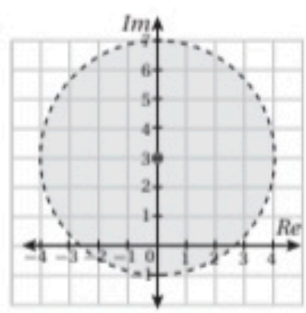
20 أُمثّل في المستوى المُركَّب المعادلة: $|z - 3 - 2i| = 5$، والمعادلة: $|z - 6i| = |z - 7 + i|$، ثم أجد العددين المُركَّبين اللذين يُحقّقان المعادلتين معًا.

أكتب (بدلالة z) متباينة المحل الهندسي الذي تُمثّله المنطقة المُظلّلة في كلٍّ ممّا يأتي:

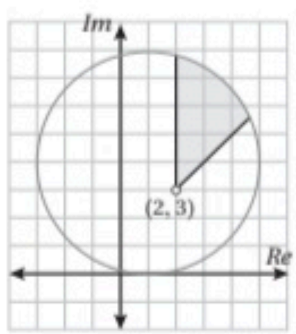
21



22



23 أكتب (بدلالة z) نظام متباينات يُمثّل المحل الهندسي الذي تُمثّله المنطقة المُظلّلة في الشكل الآتي:



اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 إذا كان: $i = \sqrt{-1}$، فإنَّ i^{343} تساوي:

a) -1 b) 1 c) $-i$ d) i

2 ناتج $(1-i)^3$ هو:

a) $-2+2i$ b) $-2-2i$

c) $2-2i$ d) $2+2i$

3 إذا كان $2i$ هو أحد جذور المعادلة:
$az^3 + 5z^2 + 8z + 20 = 0$، فإنَّ قيمة a هي:

a) -8 b) -2 c) 2 d) 8

4 الصورة المثلثية للعدد المُركَّب: $z = -1 + i\sqrt{3}$ هي:

a) $2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

b) $2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$

c) $2(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3})$

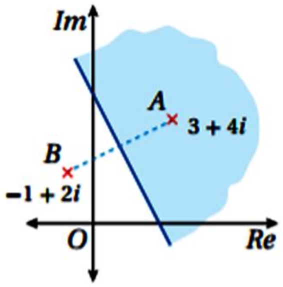
d) $2(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3})$

5 الصورة القياسية لناتج:
$8\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \div 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
هي:

a) $4i$ b) -4

c) $-4+4i$ d) $4-4i$

6 إحدى الآتية تصف المنطقة المُظلَّلة في الشكل المجاور:



a) $|z-1+2i| < |z+3+4i|$

b) $|z-1+2i| > |z+3+4i|$

c) $|z+1-2i| < |z-3-4i|$

d) $|z+1-2i| > |z-3-4i|$

7 أجد الجذرين التربيعيين للعدد المُركَّب: $z = 45 - 28i$.

8 أجد مقياس العدد المُركَّب: $w = -\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}i$، وسعته.

9 إذا كان: $z = -8 + 8i$، وكان: $w = a + 2i$، حيث $a < 0$، فأجد قيمة a، علمًا بأنَّ: $|z + w| = 26$.

إذا كان: $w = \frac{14-31i}{3-2i}$ ، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

10 أكتب العدد w في صورة: $x + iy$.

11 إذا كان العدد w هو أحد جذور المعادلة: $z^2 + cz + d = 0$، فأجد قيمة كلٍّ من العددين الحقيقيين c، وd.

أُمثِّل في المستوى المُركَّب المنطقة التي تُحدِّدها كل متباينة ممّا يأتي:

12 $|z-6| \leq 3$

13 $\frac{\pi}{4} \leq \text{Arg}(z-2) \leq \frac{2\pi}{3}$

14 $|z+1+i| > |z-3-3i|$

إذا مثّلت النقطة M العـدد: $z_1 = 1 - 8i$، ومثّلت النقطة N العـدد: $z_2 = 4 + 7i$، وكانت O هي نقطة الأصل، فأُجيب عن الأسئلة الآتية تباعًا:

15 أُبيّن أنَّ المثلث OMN متطابق الضلعين.

16 أُبيّن أنَّ جيب تمام الزاوية MON يساوي $-\frac{4}{5}$.

17 أجد مساحة المثلث OMN.

18 أُمثّل في المستوى المُركّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقّق المتباينة: $|z-8| > |z+2i|$، والمتباينة: $-\frac{\pi}{4} < \text{Arg}(z+3-6i) < \frac{\pi}{4}$.

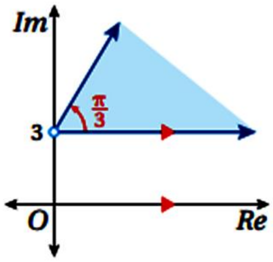
19 تقع رؤوس مثلث متطابق الأضلاع على دائرة مركزها نقطة الأصل في المستوى المُركّب. إذا كان أحد هذه الرؤوس يُمثّل العـدد المُركّـب: $(4 + 2i)$، فأجد العددين المُركّبين اللذين يُمثّلهما الرأسان الآخران، ثم أكتب الإجابة في صورة: $x + iy$، حيث x، وy عددان حقيقيان.

تُمثّل النقاط: A، وB، وC، وD جذور المعادلة:
$z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 64z + 680 = 0$:

20 إذا كان العدد: $(-2 + 4i)$ هو أحد هذه الجذور، فأجد الجذور الثلاثة الأُخرى لهذه المعادلة.

21 أُمثّل الجذور الأربعة في المستوى المُركّب، ثم أجد مساحة الشكل الرباعي $ABCD$.

22 أكتب (بدلالة z) متباينة تُمثّل المحل الهندسي المعطى في الشكل الآتي:



إذا كان: $z^2 + 2z + 10 = 0$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

23 أُبيّن أنَّ لجذري المعادلة المقياس نفسه.

24 أجد سعة كل جذر من جذري المعادلة.

إذا كان: $w = \frac{22+4i}{(2-i)^2}$ ، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

25 أُبيّن أنَّ الصورة القياسية لهذا العدد هي: $w = 2+4i$.

26 إذا كان: $\frac{\pi}{4} \leq \text{Arg}\,(w+p) \leq \frac{3\pi}{4}$ ، فأجد مجموعة القِيَم المُمكِنة للعدد الثابت p.

27 يُحقّق العددان المُركّبان u، و v المعادلة: $u + 2v = 2i$، والمعادلة: $iu + v = 3$. أحُلُّ المعادلتين لإيجاد العدد u، والعدد v.

28 أُمثّل في المستوى المُركّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقّق المتباينة: $\frac{\pi}{2} \leq \text{Arg}\, z \leq \frac{2\pi}{3}$، والمتباينة: $|z-2i| \leq 2$.