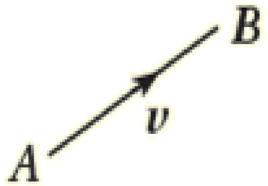
ملخص قوانين المتجهات

رموزٌ رياضيةٌ

يُرمز إلى المتجه الذي نقطة بدايته A ، ونقطة نهايته B بالرمز $\overrightarrow{AB}$ أو بالرمز $\boldsymbol{v}$ مكتوبا بالخط الغامق، ويُرمز إلَيْهِ أيضًا بالرمز $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ ، وبخاصة عند كتابته بالقلم؛ نظرًا إلى صعوبة كتابيه بخط غامق.



نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد

❖ لغة الرياضيات:

ينتج من إضافة المحور z ما يُسمّى نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد.

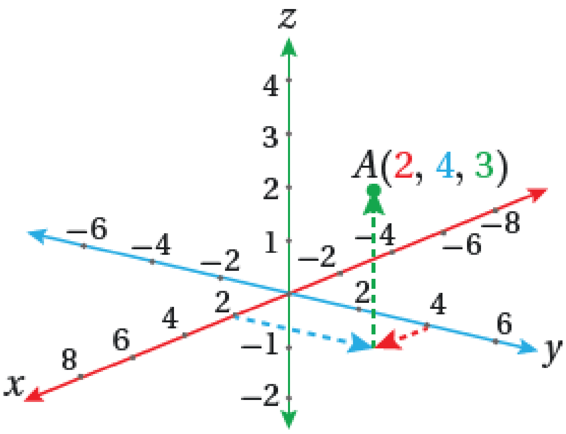
❖ أتعلَّم:

يُطلَق على نقطة تقاطع المحاور الإحداثية الثلاثة اسم نقطة الأصل، وهي: $O(0\,,0\,,0)$

مثال (1):

أُعيّن كل نقطة ممّا يأتي في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد

$A(2\,,4\,,3)$



المسافة بين نقطتين، وإحداثيات نقطة المنتصف في الفضاء

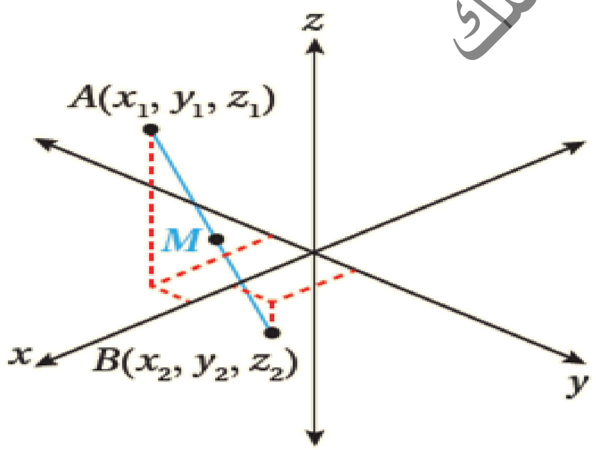
مفهوم أساسي

إذا كانت: $A(x_1\,,y_1\,,z_1)\,,B(x_2\,,y_2\,,z_2)$ ، فإنَّ المسافة بين النقطتين A و B تعطى بالصيغة:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_2)^2+(z_2-z_1)^2}$$

وإحداثيات نقطة منتصف $\overline{AB}$ هي:

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}\,,\frac{y_1+y_2}{2}\,,\frac{z_1+z_2}{2}\right)$$



المتجهات في الفضاء

❖ رموز رياضية:

يُرمَز إلى المتجه بحرفين

فوقهما الرمز (⇀) ، أو بحرف غامق فوقه الرمز (⇀)

❖ أتعلَّم:

تُسمّى v_1, v_2, v_3 إحداثيات المتجه $\vec{v}$، ويُعبِّر كلٌّ

منها عن مقدار الإزاحة بالنسبة إلى المحور x، أو المحور

y، أو المحور z.

مفهوم أساسي

إذا كانت: $A(x_1 , y_1 , z_1) , B(x_2 , y_2 , z_2)$ ، نقطتي

بداية المتجه $\overrightarrow{AB}$ ، ونهايته، فإنَّ:

$$|\vec{v}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

وإذا كان: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \langle v_1 , v_2 , v_3 \rangle$ ، فإنَّ:

$$|\vec{v}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2}$$

❖ أتذكَّر:

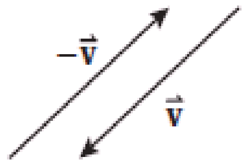
يُرمَز إلى مقدار المتجه AB بالرمز $|\overrightarrow{AB}|$.

جمع المتجهات وطرحها وضربها في عدد حقيقي هندسيًّا

❖ أتذكَّر:

معكوس المتجه $\vec{v}$ هو متجه له نفس مقدار المتجه $\vec{v}$، لكنَّه

يكون في اتجاه مُعاكِس له، ويُرمَز إليه بالرمز $-\vec{v}$.



جمع المتجهات وطرحها وضربها في عدد حقيقي جبريًّا

مفهوم أساسي

إذا كان: $\vec{v} = \langle v_1 , v_2 , v_3 \rangle , \vec{w} = \langle w_1 , w_2 , w_3 \rangle$

متجهين في الفضاء، وكان c عددًا حقيقيًّا، فإنَّ:

$$\vec{v} + \vec{w} = \langle (v_1 + w_1) , (v_2 + w_2) , (v_3 + w_3) \rangle$$
$$\vec{v} - \vec{w} = \langle (v_1 - w_1) , (v_2 - w_2) , (v_3 - w_3) \rangle$$
$$c\vec{v} = \langle cv_1 , cv_2 , cv_3 \rangle$$

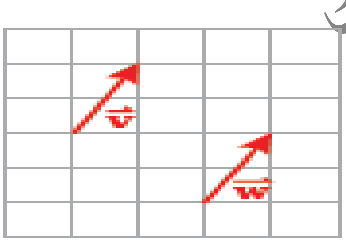
تساوي المتجهات

❖ أتعلَّم:

قد يتساوى المتجهان $\vec{v}$ و $\vec{w}$ بالرغم من اختلاف موقعيهما

في حال تساوى الاتجاه والمقدار لكلٍّ منهما كما في الشكل

الآتي:



مفهوم أساسي

إذا كان: $\vec{v} = \langle v_1 , v_2 , v_3 \rangle , \vec{w} = \langle w_1 , w_2 , w_3 \rangle$ ،

فإنَّ:

$\vec{v} = \vec{w}$ إذا وفقط إذا كان:

$$v_1 = w_1 , v_2 = w_2 , v_3 = w_3$$

متجها الموقع والإزاحة

❖ لغة الرياضيات:

سُمِّي متجه الموقع بهذا الاسم لأنَّه يُحدِّد موقع النقطة A بالنسبة إلى نقطة الأصل.

مثال

إذا كانت: $A(-11\,,2\,,21)\,,B(3\,,-5\,,7)$ ، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1) متجه موقع كلٍّ من النقطة A والنقطة B

متجه موقع النقطة A هو: $\overrightarrow{OA} = \langle -11\,,2\,,21\rangle$

متجه موقع النقطة B هو: $\overrightarrow{OB} = \langle 3\,,-5\,,7\rangle$

2) متجه الإزاحة من النقطة A والنقطة B

يُمكِن إيجاد متجه الإزاحة $\overrightarrow{AB}$ بطرح متجه الموقع للنقطة A من متجه الموقع للنقطة B

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$
$$= \langle 3\,,-5\,,7\rangle - \langle -11\,,2\,,21\rangle$$
$$= \langle 14\,,-7\,,-14\rangle$$

3) المسافة بين النقطة A والنقطة B

المسافة بين النقطة A والنقطة B هي مقدار متجه الإزاحة $\overrightarrow{AB}$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2}$$
$$= \sqrt{(14)^2 + (-7)^2 + (-14)^2}$$
$$= \sqrt{441} = 21$$

إذن، المسافة بين A و B هي: 21 وحدة طول.

متجهات الوحدة الأساسية: $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$

❖ أتعلَّم:

الرمز $\hat{\imath}$ يُقرَأ: i hat

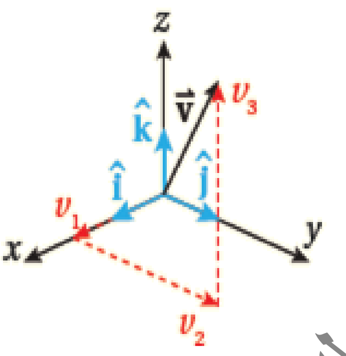
والرمز $\hat{\jmath}$ يُقرَأ: j hat

والرمز $\hat{k}$ يُقرَأ: k hat

مفهوم أساسي

يُمكِن كتابة المتجه: $\vec{v} = \langle v_1\,,v_2\,,v_3\rangle$ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية كما يأتي:

$$\vec{v} = v_1\hat{\imath} + v_2\hat{\jmath} + v_3\hat{k}$$



❖ أتعلَّم:

ألاحِظ في الشكل المجاور أنَّ $\vec{v}$ هو مُحصِّلة (ناتج جمع) ثلاثة متجهات، هي:

$$v_1\hat{\imath}\,, v_2\hat{\jmath}\,, v_3\hat{k}$$

مثال :

1) أكتب المتجه: $\vec{u} = \langle 5\,,-3\,,6\rangle$ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية.

$$\vec{u} = 5\hat{\imath} + (-3)\hat{\jmath} + 6\hat{k}$$
$$= 5\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 6\hat{k}$$

إيجاد متجه وحدة في اتجاه أيّ متجه

وذلك بقسمة ذلك المتجه على مقداره فيصبح مقدار المتجة الناتج وحدة واحدة

مثال

إذا كان: $A(3\,,4\,,-7)\,,B(-5\,,16\,,2)$ ، فأجد متجه وحدة في اتجاه $\overrightarrow{AB}$

الخطوة 1: أكتب $\overrightarrow{AB}$ بالصورة الإحداثية.

$$\overrightarrow{AB} = \langle -5-3\,,16-4\,,2-(-7)\rangle$$

$$= \langle -8\,,12\,,9\rangle$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2}$$

$$= \sqrt{(-8)^2 + (12)^2 + (9)^2}$$

$$= \sqrt{289} = 17$$

$$\hat{u} = \frac{1}{17}\langle -8\,,12\,,9\rangle = \langle \frac{-8}{17}\,,\frac{12}{17}\,,\frac{9}{17}\rangle$$

❖ رموز رياضية:

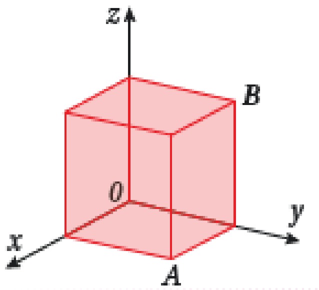
توجد صور مختلفة للتعبير عن المتجه $\vec{a}$ مثل:

$\langle a_1\,,a_2\,,a_3\rangle$ ، و $a_1\,\hat{i} + a_2\,\hat{j} + a_3\,\hat{k}$

و $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$.

سؤال

يُمثِّل الشكل المجاور مُكعَّبًا طول ضلعه $5\ cm$ ، ما إحداثيات كلٍّ من الرأس A، والرأس B ؟



$A(5\,,5\,,0)$

$B(0\,,5\,,5)$

الدرس2: المستقيمات في الفضاء

إيجاد متجه وحدة في اتجاه أيّ متجه

❖ أتذكَّر:

إذا ضُرِب المتجه $\vec{v}$ في العدد الحقيقي k، فإنَّ المتجه $k\,\vec{v}$ يأخذ اتجاه $\vec{v}$ نفسه إذا كان $k > 0$ ، ويكون عكس اتجاه $\vec{v}$ إذا كان $k < 0$

مفهوم أساسي

إذا كان: $\vec{u} = \langle u_1 , u_2 , u_3 \rangle , \vec{v} = \langle v_1 , v_2 , v_3 \rangle$، فإنَّ: $\vec{u} \parallel \vec{v}$ إذا وفقط إذا وُجِد عدد حقيقي k، حيث: $k \neq 0$ ، بحيث يكون:

$$\langle v_1 , v_2 , v_3 \rangle = k \langle u_1 , u_2 , u_3 \rangle$$

❖ أتعلَّم:

إذا كان: $\vec{u} = \langle u_1 , u_2 , u_3 \rangle$, $\vec{v} = \langle v_1 , v_2 , v_3 \rangle$ وكان كلٌّ من: v_1 , v_2 , v_3 لا يساوي صفرًا، فإنَّ شرط توازي $\vec{v}$ و $\vec{u}$ هو أنْ تكون النسب: $\frac{u_1}{v_1} , \frac{u_2}{v_2} , \frac{u_1}{v_3}$ متساوية.

مثال:

إذا كان: $G(7 , 5 , -11) , H(4 , 4 , -4)$, $K(4 , 5 , 3) , L(7 , 7 , 3)$ ، فأُحدِّد إنْ كان كل متجهين ممّا يأتي متوازيين أم لا:

1) $\overrightarrow{GH} , \overrightarrow{KL}$

2) $\overrightarrow{GL} , \overrightarrow{HK}$

a) $\overrightarrow{GH} = \langle -3 , -1 , 7 \rangle$

$\overrightarrow{KL} = \langle 3 , 2 , 0 \rangle$

نلاحظ أنه لا يوجد عدد حقيقي c يجعل العبارة $\overrightarrow{GH} = c\left(\overrightarrow{KL}\right)$ صحيحة

ونستنتج أن $\overrightarrow{GH} , \overrightarrow{KL}$ غير متوازيين

b) $\overrightarrow{GL} = \langle 0 , 2 , 14 \rangle$

$\overrightarrow{HK} = \langle 0 , 1 , 7 \rangle$

نلاحظ أن $\overrightarrow{GL} = 2\,\overrightarrow{HK}$

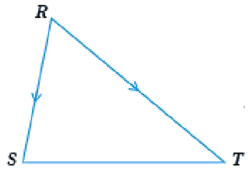
ونستنتج أن $\overrightarrow{GL} \parallel \overrightarrow{HK}$

❖ أتعلَّم:

لإثبات توازي قطعتين مستقيمتين بوجه عام، يكفي إثبات توازي متجهين يقعان على هاتين القطعتين المستقيمتين.

مثال

في المثلث RST المجاور، إذا كان: $\overrightarrow{RS} = 4\,\vec{a} , \overrightarrow{RT} = 6\,\vec{b}$، والنقطة U منتصف $\overrightarrow{RS}$ ، والنقطة V منتصف $\overrightarrow{RT}$ ، فأُثبِت أنَّ $\overrightarrow{ST}$ يوازي $\overrightarrow{UV}$



$\overrightarrow{UV} = \overrightarrow{UR} + \overrightarrow{RV}$

$= \frac{1}{2}(-4\vec{a}) + \frac{1}{2}(6\vec{b}) = 3\vec{b} - 2\vec{a}$

$\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{SR} + \overrightarrow{RT}$

$= -4\vec{a} + 6\vec{b} = 2\left(3\vec{b} - 2\vec{a}\right)$

إذن $\overrightarrow{ST} = 2\,\overrightarrow{UV}$

ومنه المتجهان $\overrightarrow{ST}\,,\,\overrightarrow{UV}$ متوازيان

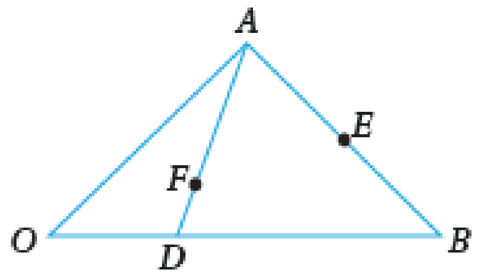
❖ أتعلَّم:

لا يُمكِن الاستناد إلى تمثيل النقاط في الفضاء لتحديد إذا كانت تقع على استقامة واحدة أم لا؛ لذا تُستعمَل المتجهات بوصفها طريقة جبرية للحلِّ.

مثال:

يظهر في الشكل المجاور المثلث OAB .

إذا كان: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}\,,\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ، وكانت النقطة D تقع على $\overrightarrow{OB}$ ، والنقطة E منتصف $\overrightarrow{AB}$ ، والنقطة F تقع على $\overrightarrow{AD}$، حيث: $\overrightarrow{OF} = \frac{2}{5}(\vec{a}+\vec{b})$ ، فأُثبِت أنَّ O، و F، و E تقع على استقامة واحدة.



$$\overrightarrow{OF} = \frac{2}{5}(\vec{a}+\vec{b}) \Rightarrow \vec{a}+\vec{b} = \frac{5}{2}\overrightarrow{OF} \cdots (1)$$

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BE}$$
$$= \vec{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$$
$$= \vec{b} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA})$$
$$= \vec{b} + \frac{1}{2}(-\vec{b}+\vec{a})$$
$$= \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$$
$$\Rightarrow \vec{a}+\vec{b} = 2\,\overrightarrow{OE} \cdots (2)$$

من العلاقتين (1)، (2) نستنتج أن:

$$\frac{5}{2}\overrightarrow{OF} = 2\,\overrightarrow{OE} \Longrightarrow \overrightarrow{OF} = \frac{4}{5}\overrightarrow{OE}$$

وهذا يعني أن المتجهين $\overrightarrow{OF}\,,\,\overrightarrow{OE}$ متوازيان،

وبما أنهما ينطلقان من النقطة O نفسها، إذن،

النقاط $O\,,E\,,F$ تقع على استقامة واحدة.

المعادلة المتجهة للمستقيم

❖ أتعلَّم:

لا يُمكِنني استعمال الصيغة: $y = mx + b$ لكتابة معادلة المستقيم في الفضاء.

❖ لغة الرياضيات:

يُسمّى المتجه $\vec{v}$ اتجاه المستقيم l .

❖ أتعلَّم:

إذا كان $\vec{v}$ اتجاهًا للمستقيم l، فإنَّ $k\vec{v}$ ، حيث: $k \neq 0$ ، هو أيضًا اتجاه للمستقيم l .

مفهوم أساسي

المعادلة المتجهة للمستقيم l الذي يوازي المتجه $\vec{v}$، ويمرُّ بنقطة متجه الموقع لها $\vec{r}_0$

هي: $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$

مثال

أجد معادلة متجهة للمستقيم l الذي يوازي المتجه: $\vec{v} = \langle 1\,,-4\,,-5\rangle$ ، ويمرُّ بالنقطة $U(0,-6,9)$

$$\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{v}$$

$$\vec{r} = \langle 0\,,-6\,,9\rangle + t\langle 1\,,-4\,,-5\rangle$$

مثال

أجد معادلة متجهة للمستقيم l المارِّ بالنقطتين: $M(3,7,-9)$ ، و $N\big(2,-4,3\big)$

$$\overline{NM} = \langle 3-2\,,7-(-4)\,,-9-3\rangle$$

$$= \langle 1\,,11\,,-12\rangle$$

$$\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{v}$$

$$\vec{r} = \langle 3,7,-9\rangle + t\langle 1,11,-12\rangle$$

مثال :

تُمثِّل: المعادلة $\vec{r} = 11\,\hat{\imath} + 5\,\hat{\jmath} - 6\,\hat{k} + t\big(7\,\hat{\imath} - 2\,\hat{\jmath} + 5\,\hat{k}\big)$ متجهة للمستقيم l :

a) أُبيِّن أنَّ النقطة التي متجه الموقع لها هو $\big(39\,\hat{\imath} - 3\,\hat{\jmath} + 14\,\hat{k}\big)$ تقع على المستقيم l

b) أجد متجه الموقع للنقطة التي تقع على هذا المستقيم، وتُقابِل القيمة: $t = -3$

c) إذا كانت النقطة $(\,v,-3v,5v-1)$ تقع على المستقيم l، فما قيمة v ؟

a) $\vec{r} = (11+7t)\hat{\imath} + (5-2t)\hat{\jmath} + (-6+5t)\hat{k}$

نبحث عن قيمة t لـ تحقق:

$$39\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 14\hat{k}$$

$$= (11+7t)\hat{\imath} + (5-2t)\hat{\jmath} + (-6+5t)\hat{k}$$

$$39 = 11 + 7t \Rightarrow t = 4$$

$$-3 = 5 - 2t \Rightarrow t = 4$$

$$14 = -6 + 5t \Rightarrow t = 4$$

بما أن للمعادلات الثلاث الحل نفسه $(t = 4)$ ، فإن النقطة التي متجه موقعها $39\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 14\hat{k}$ وهي النقطة $(39\,,-3\,,14)$ تقع على المستقيم l لأنها تنتج من تعويض $t = 4$ في معادلته.

b) $t = -3$

$$\Rightarrow \vec{r} =$$

$$\big(11+7(-3)\big)\hat{\imath} + \big(5-2(-3)\big)\hat{\jmath} + \big(-6+5(-3)\big)\hat{k}$$

$$= -10\hat{\imath} + +11\hat{\jmath} - 21\hat{k}$$

c) متجه الموقع للنقطة $(v\,,-3v\,,5v-1)$ هو $v\hat{\imath} - 3v\hat{\jmath} + (5v-1)\hat{k}$

$$v\hat{\imath} - 3v\hat{\jmath} + (5v-1)\hat{k}$$

$$= (11+7t)\hat{\imath} + (5-2t)\hat{\jmath} + (-6+5t)\hat{k}$$

$$v = 11 + 7t \ \cdots (1)$$

$$-3v = 5 - 2t \ (2)$$

$$5v - 1 = -6 + 5t \ \cdots (3)$$

$$(1)\times 3 + (2) \Rightarrow 0 = 38 + 19t$$

$$\Rightarrow t = -2$$

$\Rightarrow v = -3$

تتحقق من أنّ $t = -2$ ، $v = -3$ تحقق المعادلة (3)

$5(-3) - 1 \overset{?}{=} -6 + 5(-2)$

$-16 = -16$ ✓

إذن، قيمة v التي تجعل النقطة $(v, -3v, 5v - 1)$ واقعة على المستقيم l هي: $v = -3$

المستقيمات المتوازية والمتقاطعة والمتخالفة

مفهوم أساسي

إذا كانت: $\vec{r} = \vec{a} + t\,\vec{b}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1 ، وكانت: معادلة $\vec{r} = \vec{c} + u\,\vec{d}$ متجهة للمستقيم l_2 ، فإنَّ: $l_1 \parallel l_2$ إذا وفقط إذا كان $\vec{b} \parallel \vec{d}$

مثال:

إذا كانت:

معادلة متجهة $\vec{r} = \langle 3, 7, -9 \rangle + t\langle 1, 11, -12 \rangle$ للمستقيم l_1 ، وكانت:

معادلة متجهة $\vec{r} = \langle -30, -6, 30 \rangle + u\langle 4, -6, 3 \rangle$ للمستقيم l_2 ، فأُحدِّد إذا كان المستقيمان: l_1 ، و l_2 متوازيين، أو متقاطعين، أو متخالفين، ثم أجد إحداثيات نقطة تقاطعهما إذا كانا متقاطعين.

اتجاه المستقيم l_1 هو $\overrightarrow{v_1} = \langle 1, 11, -12 \rangle$

واتجاه المستقيم l_2 هو $\overrightarrow{v_2} = \langle 4, -6, 3 \rangle$

وبما أنه لا يوجد عدد حقيقي k بحيث $\overrightarrow{v_1} = k\overrightarrow{v_2}$ فإن المستقيمين غير متوازيين.

نساوي $\vec{r}$ من معادلتي المستقيمين:

$$\langle 3, 7, -9 \rangle + t\langle 1, 11, -12 \rangle = \langle -30, -6, 30 \rangle + u\langle 4, -6, 3 \rangle$$

$3 + t = -30 + 4u \Rightarrow t - 4u = -33 \cdots (1)$

$7 + 11t = -6 - 6u \Rightarrow$

$11t + 6u = -13 \cdots (2)$

$-9 - 12t = 30 + 3u \Rightarrow$

$12 + 3u = -39 \cdots (3)$

$3 \times (1) + 2 \times (2) \Rightarrow$

$25t = -125 \Rightarrow t = -5, u = 7$

تتحقق من أنّ $t = -5$ ، $u = 7$ تحقق المعادلة (3)

$12(-5) + 3(7) \overset{?}{=} -39$

$-39 = -39$ ✓

بما أن قيمة t وقيمة u حققتا المعادلات الثلاث، فإن المستقيمين متقاطعان، لإيجاد إحداثيات نقطة التقاطع نعوض $t = -5$ في معادلة l_1 :

$$\vec{r} = \langle 3, 7, -9 \rangle - 5\langle 1, 11, -12 \rangle = \langle -2, -48, 51 \rangle$$

إذن، يتقاطع المستقيمان في النقطة $(-2, -48, 51)$

مثال:

عرض جوي: أقلعت طائرة من موقعٍ إحداثياته: $(0,7,0)$. وفي الوقت نفسه، أقلعت طائرة ثانية من موقعٍ إحداثياته: $(-2,0,0)$. وبعد التحليق مدّة قصيرة في مسارين مستقيمين، أصبحت الطائرة الأولى عند الموقع الذي إحداثياته: $(8,15,16)$ ، وأصبحت الطائرة الثانية عند الموقع الذي إحداثياته: $(22,24,48)$. هل خطّا سير الطائرتين متوازيان أم متقاطعان، أم متخالفان؟

اتجاه الطائرة الأولى هو:

$$\vec{v_1} = \langle 8-0\,,15-7\,,16-0\rangle = \langle 8\,,8\,,16\rangle$$

ويمكن تبسيطه بالقسمة على 8 ليصبح $\langle 1\,,1\,,2\rangle$

معادلة مسار الأولى:

$$\vec{r} = \langle 0\,,7\,,0\rangle + t\langle 1\,,1\,,2\rangle$$

واتجاه الثانية هو:

$$\langle 22-(-2)\,,24-0\,,48-0\rangle = \langle 24\,,24\,,48\rangle$$

ويمكن تبسيطه بالقسمة على 24 دون تغيير اتجاهه ليصبح

$$\vec{v_2} = \langle 1\,,1\,,2\rangle$$

معادلة مسار الثانية:

$$\vec{r} = \langle -2\,,0\,,0\rangle + u\langle 1,1\,,2\rangle$$

نلاحظ أن المسارين متوازيان لأن لهما الاتجاه نفسه.

الدرس3: الضرب القياسي

لأيّ ثلاثة متجهات: $\vec{u}$,$\vec{w}$, $\vec{v}$ ، وأيّ عدد حقيقي c، فإنَّ:

- $\vec{v}.\vec{w} = \vec{w}.\vec{v}$
- $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
- $c(\vec{u}.\vec{v}) = (c\vec{u}).\vec{v}$

مفهوم أساسي

إذا كان: $\vec{v} = \langle v_1\,,v_2\,,v_3\rangle\,,\vec{w} = \langle w_1\,,w_2\,,w_3\rangle$ ، فإنَّ:

$$\vec{v}.\vec{w} = v_1w_1 + v_2\,w_2 + v_3\,w_3$$

❖ أتذكَّر:

ناتج الضرب القياسي لمتجهين هو عدد، وليس متجهًا.

مثال

أجد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $\vec{v} = 5\,\hat{\imath} + 4\,\hat{\jmath} + 8\,\hat{k}\,,$ $\quad \vec{w} = 4\,\hat{\imath} + 3\,\hat{\jmath} - 4\,\hat{k}$

$$\begin{aligned}\vec{v}.\vec{w} &= v_1w_1 + v_2\,w_2 + v_3\,w_3\\ &= 5(4)+4(3)+8(-4)\\ &= 20+12-32 = 0\end{aligned}$$

2) $\vec{a} = \langle 4,-6,5\rangle\,,\vec{b} = \langle 3,7,2\rangle$

$$\begin{aligned}\vec{a}.\vec{b} &= a_1b_1 + a_2\,b_2 + a_3\,b_3\\ &= 4(3)+(-6)(7)+5(2)\\ &= 12-42+10 = -20\end{aligned}$$

الزاوية بين متجهين في الفضاء

❖ أتعلَّم:

الزاوية بين متجهين هي الزاوية الصغرى المحصورة بينهما عند رسمهما بَدْءًا بالنقطة نفسها؛ أيْ إنَّ: $0 \leq \theta \leq \pi$.

مفهوم أساسي

إذا كان $\vec{v}$ و $\vec{w}$ متجهين غير صفريين، فإنَّه يُمكِن إيجاد قياس الزاوية بينهما θ باستعمال الصيغة الآتية:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{v}.\vec{w}}{|\vec{v}|\ |\vec{w}|}\right)$$

وينتج كذلك

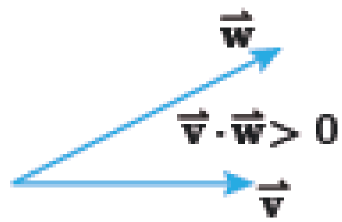
$$\vec{v}.\vec{w} = |\vec{v}|\ |\vec{w}| \cos\theta$$

❖ أتعلَّم:

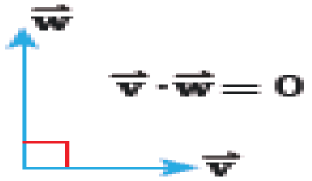
أستنتج ما يأتي من العلاقة المجاورة:

* إذا كان: $\vec{v}.\vec{w} < 0$ فإنَّ الزاوية بين المتجه $\vec{v}$ والمتجه $\vec{w}$ مُنفرِجة.

* إذا كان: $\vec{v}.\vec{w} > 0$ فإنَّ الزاوية بين المتجه $\vec{v}$ والمتجه $\vec{w}$ حادَّة.



* إذا كان: $\vec{v}.\vec{w} = 0$ فإنَّ الزاوية بين المتجه $\vec{v}$ والمتجه $\vec{w}$ قائمة؛ أيْ إنَّ هذين المتجهين مُتعامِدان.



مثال

أجد قياس الزاوية θ بين المتجه $\vec{v}$ والمتجه $\vec{w}$ في كلٍّ ممّا يأتي، مُقرِّبًا الناتج إلى أقرب عُشر درجة

a) $\vec{u} = 3\,\hat{\imath} + 5\,\hat{\jmath} - 4\,\hat{k}$,

$\vec{w} = 4\,\hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath} - 3\,\hat{k}$

b) $\vec{u} = \langle 2, -10, 6\rangle$,

$\vec{w} = \langle -3, 15, -9\rangle$

$$a)\ |\vec{u}| = \sqrt{9+25+16} = \sqrt{50}$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{16+4+9} = \sqrt{29}$$

$$\vec{u}.\vec{w} = -3(4) + 5(2) - 4(-3)$$

$$= -12 + 10 + 12 = 10$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}.\vec{w}}{|\vec{u}||\vec{w}|}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{50}\times\sqrt{29}}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{1450}}\right) \approx 74.8^\circ$$

$$b)\ |\vec{u}| = \sqrt{4+100+36} = \sqrt{140}$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{9+225+81} = \sqrt{315}$$

$$\vec{u}.\vec{w} = 2(-3) - 10(15) + 6(9)$$

$$= -6 - 150 - 54 = -210$$

$$\boldsymbol{\theta = cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}.\vec{w}}{|\vec{u}||\vec{w}|}\right)}$$
$$\boldsymbol{= cos^{-1}\left(\frac{-210}{\sqrt{140}\times\sqrt{315}}\right)}$$
$$\boldsymbol{= cos^{-1}\left(\frac{-210}{\sqrt{44100}}\right) = cos^{-1}(-1)}$$
$$\boldsymbol{= 180°}$$

الزاوية بين مستقيمين في الفضاء

❖ أتعلَّم:

إذا تقاطع مستقيمان غير مُتعامِدين، فإنَّه ينتج من تقاطعهما زاويتان حادَّتان ومُتقابِلتان بالرأس، وزاويتان مُنفرِجتان ومُتقابِلتان بالرأس. ويُمكِن إيجاد قياس الزاوية الحادَّة بينهما بطرح الزاوية المُنفرِجة من $180°$.

مثال

إذا كانت: $\vec{r} = \begin{pmatrix}6\\-3\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}8\\2\\-3\end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1 ، وكانت: $\vec{r} = \begin{pmatrix}3\\3\\5\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}-4\\9\\-1\end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_2 ، فأجد قياس الزاوية الحادَّة بين المستقيم l_1 والمستقيم l_2 إلى أقرب عُشر درجة.

الخطوة 1: أُحدِّد اتجاه كلٍّ من المستقيم l_1 والمستقيم l_2 .

اتجاه المستقيم l_1 هو $\vec{v} = \begin{pmatrix}8\\2\\-3\end{pmatrix}$ ، واتجاه المستقيم l_2 هو: $\vec{w} = \begin{pmatrix}-4\\9\\-1\end{pmatrix}$

الخطوة 2: أجد قيمة: $\vec{v}.\vec{w}$

$$\vec{v}.\vec{w} = 8(-4) + 2(9) + (-3)(-1) = -11$$

الخطوة 3: أجد مقدار كلٍّ من المتجه $\vec{v}$ والمتجه $\vec{w}$.

$$|\vec{v}| = \sqrt{8^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{77}$$
$$|\vec{w}| = \sqrt{(-4)^2 + 9^2 + (-1)^2} = \sqrt{98}$$

الخطوة 4: أجد قياس الزاوية بين اتجاهي المستقيمين

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{v}.\vec{w}}{|\vec{v}|\,|\vec{w}|}\right)$$
$$= \cos^{-1}\left(\frac{-11}{\sqrt{77}\times\sqrt{98}}\right)$$
$$= \cos^{-1}\left(\frac{-11}{\sqrt{7546}}\right)$$
$$\approx 97.3°$$

إذن، قياس الزاوية المُنفرِجة بين المستقيم l_1 والمستقيم l_2 هو $97.3°$ تقريبًا، وقياس الزاوية الحادَّة بينهما هو: $180° - 97.3° \approx 82.7°$ تقريبًا.

❖ أتعلَّم:

ينتج من المعادلة:

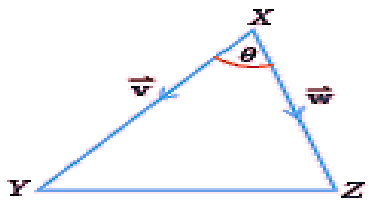
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{v}.\vec{w}}{|\vec{v}|\,|\vec{w}|}\right)$$

أنَّ:

$$\vec{v}.\vec{w} = |\vec{v}|\,|\vec{w}|\cos\theta$$

إيجاد مساحة المثلث باستعمال المتجهات

❖ أتعلَّم:



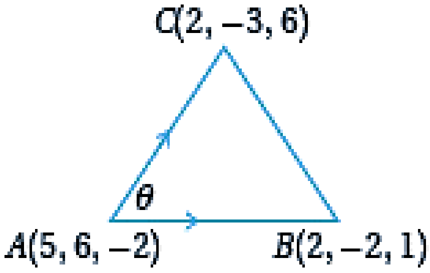
مساحة المثلث XYZ هي:

$$\text{Area} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{XY}||\overrightarrow{XZ}|\sin\theta$$
$$= \frac{1}{2}|\vec{v}||\vec{w}|\sin\theta$$

مثال

أجد مساحة المثلث ABC الذي إحداثيات رؤوسه هي:

$A(5,6,-2)\ ,B(2,-2,1)\ ,C(2,-3,6)$



الخطوة 1: أُحدِّد متجهين لهما نقطة البداية نفسها.

يُمثِّل المتجه $\overrightarrow{AB}$ والمتجه $\overrightarrow{AC}$ ضلعين في المثلث ABC كما في الشكل المجاور، ويوجد لكلا المتجهين نقطة البداية نفسها.

أكتب هذين المتجهين بالصورة الإحداثية على النحو الآتي:

$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1\ , y_2 - y_1\ , z_2 - z_1 \rangle$

$= \langle 2-5\ , -2-6\ , 1-(-2) \rangle$

$= \langle -3\ , -8\ , 3 \rangle$

$\overrightarrow{AC} = \langle 2-5\ , -3-6\ , 6-(-2) \rangle$

$= \langle -3\ , -9\ , 8 \rangle$

الخطوة 2: أجد مقدار كلٍّ من المتجه $\overrightarrow{AB}$، والمتجه $\overrightarrow{AC}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + (-8)^2 + 3^2} = \sqrt{82}$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-3)^2 + (-9)^2 + 8^2} = \sqrt{154}$

الخطوة 3: أجد قيمة: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -3(-3) + (-8)(-9) + 3(8) = 105$

الخطوة 4: أجد قيمة θ التي تُمثِّل قياس الزاوية المحصورة بين المتجه $\overrightarrow{AB}$ والمتجه $\overrightarrow{AC}$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{105}{\sqrt{82} \times \sqrt{154}}\right)$$

$$\approx 20.9°$$

الخطوة 5: أجد مساحة المثلث.

$$\text{Area} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}| \times |\overrightarrow{AC}| \sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{82} \times \sqrt{154}\ \sin(20.9°)$$

$$\approx 20.0$$

مسقط العمود على مستقيم من نقطة خارجه

❖ أتذكَّر

البُعْد بين مستقيم ونقطة لا تقع عليه هو طول القطعة المستقيمة العمودية على المستقيم من تلك النقطة، التي تُمثِّل أقصر مسافة بين النقطة والمستقيم.

❖ أتعلَّم:

لإيجاد المسافة بين النقطة P والمستقيم l الذي لا يمرُّ بها، أتَّبِع الخطوتين الآتيتين:

الخطوة 1: أجد النقطة F التي تُمثِّل مسقط العمود من النقطة P على المستقيم l .

الخطوة 2: أجد طول $\overline{PF}$.

مثال

إذا كانت: $\vec{r} = 16\,\hat{\imath} + 11\,\hat{\jmath} - 3\,\hat{k} + t(5\,\hat{\imath} + 7\,\hat{\jmath} - 3\,\hat{k})$ معادلة متجهة للمستقيم l ، والنقطة $P\left(2\,,0\,,\frac{10}{3}\right)$ غير واقعة على المستقيم l، فأُجيب عن السؤالين الآتيين:

a) أُحدِّد مسقط العمود من النقطة P على المستقيم l .

b) أجد البُعْد بين النقطة P والمستقيم l .

اتجاه المستقيم المعطى هو:

$\vec{v} = \langle 5,7,-3 \rangle$

افرض أن مسقط النقطة $\boldsymbol{p}$ على $\boldsymbol{l}$ هو النقطة فيكون متجه موقعها هو:

$\overrightarrow{OF} = (16+5t)\hat{\imath} + (11+7t)\hat{\jmath} - (3+3t)\hat{k}$

ويكون العمود من p على l هو حيث :

$$\Rightarrow \overrightarrow{PF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OP} = (16+5t)\hat{\imath} + (11+7t)\hat{\jmath} - (3+3t)\hat{k} - \left(2\hat{\imath} + \frac{10}{3}\hat{k}\right)$$

$$\overrightarrow{PF} = (14+5t)\hat{\imath} + (11+7t)\hat{\jmath} - \left(\frac{19}{3}+3t\right)\hat{k}$$

ولأن المتجهين $\overrightarrow{PF}, \vec{v}$ متعامدان فإن: $\overrightarrow{PF}.\vec{v} = 0$

$$\Rightarrow 5(14+5t) + 7(11+7t) - 3\left(-\frac{19}{3} - 3t\right) = 0 \Rightarrow t = -2$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OF} = \left(16+5(-2)\right)\hat{\imath} + \left(11+7(-2)\right)\hat{\jmath} - \left(3+3(-2)\right)\hat{k} = 6\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 3\hat{k}$$

إذن ، مسقط العمود من النقطة p على المستقيم l هو النقطة $\boldsymbol{F(6,-3,3)}$

$$b)\ PF = \sqrt{(6-2)^2 + (-3-0)^2 + \left(3 - \frac{10}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{226}}{3}$$

استعمال المتجهات لتحديد قياسات في أشكال ثلاثية الأبعاد

❖ أتذكَّر:

يشير الرمز $m\angle AEC$ إلى قياس الزاوية AEC ، والحرف m هو اختصار للكلمة الإنجليزية (measure) التي تعني القياس.

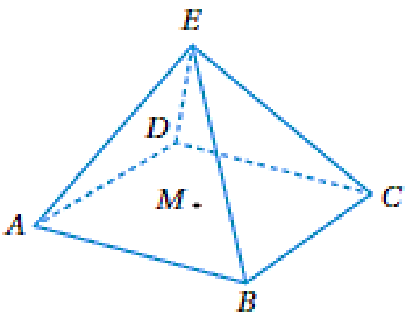
❖ أتعلَّم:

يُمكِن إيجاد النقطة M بوصفها نقطة منتصف القُطْر $\overline{BD}$ أيضًا.

❖ أتذكَّر:

حجم الهرم يساوي ثلث مساحة قاعدته في ارتفاعه.

مثال :



a) أجد قياس $\angle EDB$ في الهرم المُبيَّن

b) أجد حجم الهرم.

$$a)\ \overrightarrow{DE} = \langle 7,8,2\rangle$$

$$|\overrightarrow{DE}| = \sqrt{49+64+4} = \sqrt{117}$$

$$\overrightarrow{DB} = \langle 8,4,-8\rangle$$

$$|\overrightarrow{DB}| = \sqrt{64+16+64} = 12$$

$$\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DB} = 7(8) + 8(4) + 2(-8) = 72$$

$$\theta = cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DB}}{|\overrightarrow{DE}||\overrightarrow{DB}|}\right) = cos^{-1}\left(\frac{72}{12\sqrt{117}}\right) = cos^{-1}\left(\frac{6}{\sqrt{117}}\right) \approx 56.3°$$

$$b)\ AB = \sqrt{8^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{72}$$

ارتفاع الهرم هو طول العمود المرسوم من الرأس $\boldsymbol{E}$ إلى قاعدته وهو $\boldsymbol{EM}$، حيث $\boldsymbol{M}$ هي نقطة منتصف أحد قطري القاعدة المربعة :

$$M = \left(\frac{1+9}{2}, \frac{1-7}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) = (5,-3,1)$$

$$EM = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2 + (-6)^2} = 9$$

حجم الهرم يساوي ثلث مساحة قاعدته في ارتفاعه $\boldsymbol{p}$

$$v = \frac{1}{3}\left(\sqrt{72}\right)^2(9) = 72(3) = 216$$

مسألة

: أُطلِق صاروخ من النقطة (1,2,1)، ثم وصل بعد ثانيتين إلى النقطة $(9, 13, 21)$. وفي الوقت نفسه، أُطلِق صاروخ آخر من النقطة $(4, -3, 2)$ ، ووصل بعد ثانيتين إلى النقطة $(14, 1, 18)$. ما قياس الزاوية بين مساري الصاروخين؟

الحل :

اتجاه مسار الصاروخ الأول :

$$\vec{v} = \langle 8,11,20\rangle$$

اتجاه مسار الصاروخ الثاني :

$$\vec{u} = \langle 10,4,16\rangle$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{64+121+400} = \sqrt{585} = 3\sqrt{65}$$

$$|u| = \sqrt{100+16+256} = \sqrt{372} = 2\sqrt{93}$$

$$\vec{u}.\vec{v} = 8(10) + 11(4) + 20(16)$$

$$= 80 + 44 + 320 = 444$$

لتكن قياس الزاوية بين مساري الصاروخين ، إذن : θ

$$\theta = cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{v}||\vec{u}|}\right) = cos^{-1}\left(\frac{444}{3\sqrt{65}\times 2\sqrt{93}}\right)$$

$$= cos^{-1}\left(\frac{74}{\sqrt{6045}}\right) \approx 17.9°$$