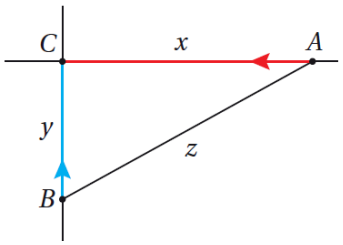
مكثف تطبيقات التفاضل

مثال1:

تتحـرك السـيّارة A فـي اتجـاه الغـرب بسـرعة 80km/h وتتحـرك السيارة B فـي اتجـاه الشـمال بسـرعة 100km/h، وهما تتجهان نحو تقاطع مروري. أجد معدل تغير البعد بين السـيارتين عنـدما تكـون السـيارة A والسـيارة B علـى بعـد 0.3km و 0.4 km (على الترتيب) من التقاطع.

الحل:



$$\frac{dx}{dt}=-80,\ \frac{dy}{dt}=-100$$

$$z=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{2x\dfrac{dx}{dt}+2y\dfrac{dy}{dt}}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\frac{2(0.3)(-80)+2(0.4)(-100)}{2\sqrt{(0.3)^2+(0.4)^2}}=-128$$

مثال 2 :

عند سقوط قطرة ماء مُسطَّح مائي ، تتكوَّن موجات دائرية مُتحدة المركز. إذا كان نصف قُطر إحدى الدوائر يزداد بمُعدل 3 cm/s، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1) مُعدل تغيُّر محيط الدائرة عندما يكون نصف قُطرُها 5cm.

الحل:

$$C=2\pi r$$

$$\frac{dC}{dt}=2\pi\times\frac{dr}{dt}=2\pi(3)=6\pi$$

2) مُعدل تغيُّر مساحة الدائرة عندما يكون نصف قُطرُها 9cm

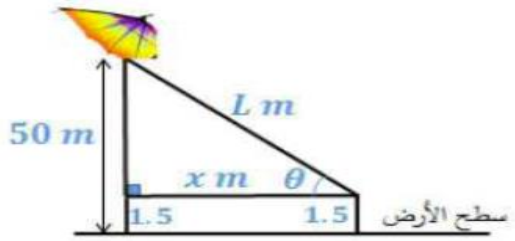
$$A=\pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt}=2\pi r\times\frac{dr}{dt}=2\pi(9)(3)=54\pi$$

مثال 3 :

أمسك ولد ببكرة خيط ورقية تُحلق على ارتفاع 50m فوق سطح الأرض، وتتحرك أفقيًا بسرعة 2m/s. أجد معدل تغير الزاوية بين الخيط والمستوى الأفقي عندما يكون طول الخيط 100m، علمًا بأن ارتفاع يد الولد عن الأرض 1.5m.

الحل:



$$\tan\theta=\frac{50-1.5}{x}=\frac{48.5}{x}$$

$$\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt}=-\frac{48.5\dfrac{dx}{dt}}{x^2}$$

$$\frac{L^2}{x^2}\times\frac{d\theta}{dt}=-\frac{48.5\dfrac{dx}{dt}}{x^2}$$

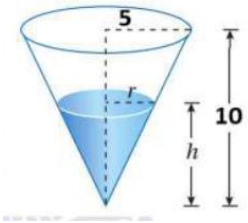
$$\frac{d\theta}{dt}=-\frac{48.5\dfrac{dx}{dt}}{x^2}\times\frac{x^2}{L^2}=\frac{48.5\dfrac{dx}{dt}}{L^2}$$

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{L=100} = -\frac{48.5(2)}{(100)^2} \approx -0.0097 \text{ rad/s}$$

مثال 4 :

خزّان ماء على شكل مخروط دائري قائم رأسه إلى الأسفل، وارتفاعه 10m، ونصف قُطر قاعدته 5m. صُبَّ الماء في الخزان بِمُعدَّل π m^3/min. ما مُعدَّل تغيُّر ارتفاع الماء الخزان عندما يكون ارتفاعه 8m ؟

الحل:



من التشابه $\frac{r}{h} = \frac{5}{10} \Rightarrow r = \frac{1}{2}h$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}h\right)^2 h$$

$$V = \frac{\pi}{12}h^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$$

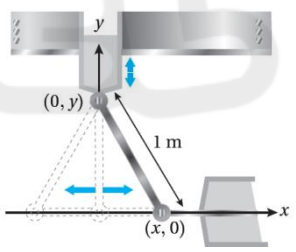
$$\pi = \frac{\pi}{4}(8)^2\frac{dh}{dt}$$

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=8} = \frac{1}{16} \text{ m/min}$$

مثال 5 :

يبـين الشـكل المجـاور ذراعًـا معدنيـة مُتحركـة طولهـا 1m وإحـداثيات نهايتهـا

$(0,y),(x,0)$



ويُمثِّل الاقتران: $x(t) = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi t}{6}$ موقع طرف الذراع على المحور x حيث t الزمن بالثواني

أجد سرعة طرف الذراع الواقع على المحور y عندما يكون الطرف الآخر عند النقطة $\left(\frac{1}{4},0\right)$

الحل:

عندما $x = \frac{1}{4}$ ، فإن:

$$\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}t = \frac{1}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{6}t = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{6}t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = 1$$

$$x(t) = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}t$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{6}t$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=\frac{1}{4}} = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=1} = \frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}\pi}{24}$$

من نظرية فيثاغورس $x^2 + y^2 = 1$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2\sqrt{1-x^2}\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x\frac{dx}{dt}}{\sqrt{1-x^2}}$$

الاستاذ إياد عباد

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=\frac{1}{4}} = -\frac{\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{24}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{16}}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\pi}{96}\times\frac{4}{\sqrt{15}} = -\frac{\pi}{24\sqrt{5}}\ \text{m/s}$$

مثال 6 :

يُمثِّـــل الاقتـــران: $T(x)=\frac{200}{1+x^2}$ درجـــة الحـــرارة (بالسيليسيوس) التي يشعر بها شخص على بُعد x مترًا من النار. إذا كان الشخص يبتعد عن النار بِمُعدَّل 2m/s ، فأجد سرعة تغيُّر درجة الحرارة التي يشعُر بها الشخص عندما يكون على بُعد 5m من النار.

الحل:

$$T(x)=\frac{200}{1+x^2}$$

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{400x\frac{dx}{dt}}{\left(1+x^2\right)^2}$$

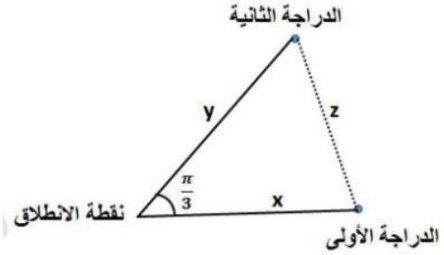
$$\left.\frac{dT}{dt}\right|_{x=5} = -\frac{400(5)(2)}{\left(1+(5)^2\right)^2} = -5.9\ ^\circ\text{C/s}$$

مثال 7 :

تحرَّكت درّاجتان في الوقت نفسه، ومن النقطة نفسها، على طريقين مستقيمين، قياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{3}$ rad . إذا كانت سرعة الدرّاجة الأولى 15km/h، وسرعة الدرّاجة الثانية 20km/h، فأجد سرعة ابتعاد كلّ منهما عن الأُخرى بعد ساعتين من انطلاقهما.

الحل:

لتكن المسافات كما في الشكل ادناه



المعطى

$$\frac{dx}{dt}=15\ \text{km/h}\quad,\quad \frac{dy}{dt}=20\ \text{km/h}$$

بعد t ساعة من انطلاقهما يكون $x=15t, y=20t$

$$z=\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\frac{\pi}{3}}$$

$$z=\sqrt{(15t)^2+(20t)^2-2(15t)(20t)\left(\frac{1}{2}\right)}=5\sqrt{13}t$$

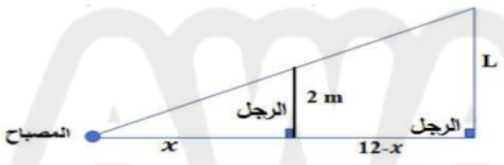
$$\frac{dz}{dt}=5\sqrt{13}\ \text{km/h}$$

مثال 8 :

مصباح مُثبت بالأرض، وهو يضئ على جدار يبعد عنه مسافة 12m. إذا سار رجل طوله 2m من موقع المصباح إلى الجدار بسرعة 1.6m/s فأجد معدّل تغيّر طول ظلّه على الجدار عندما يكون على بُعد 4m من الجدار.

الحل:

ليكن بعد الرجل عن المصباح أفقيا x وطول ظله على الجدار L



المعطى $\frac{dx}{dt}=1.6\ \text{m/s}$

الاستاذ إياد عباد

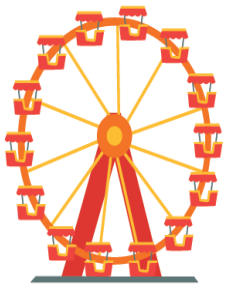
من تشابه المثلثات

$$\frac{L}{2}=\frac{12}{x}\Rightarrow L=\frac{24}{x}$$

$$\frac{dL}{dt}=\frac{-24\dfrac{dx}{dt}}{x^2}$$

$$\left.\frac{dL}{dt}\right|_{x=8}=\frac{-24(1.6)}{64}=-0.6\text{ m/s}$$

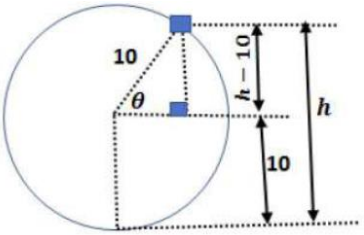
مثال 9 :



عجلة دوّارة في في مدينة الألعاب، طول نصف قُطرها 10m، وهي تدور بِمُعدل دورة واحدة كل دقيقتين، أجد سرعة تغير ارتفاع راكب فيها عندما يكون على ارتفاع 16m فوق سطح الأرض (أُهمِل ارتفاع العربة عن الأرض)

الحل:

ليكن L ارتفاع الراكب عن سطح الارض



المعطى $\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{2\pi}{2}=\pi\text{ rad/min}$

المطلوب $\left.\dfrac{dh}{dt}\right|_{h=16}=?$

بما أن $\sin\theta=\dfrac{h-10}{10}$

فعندما $h=16$

يكون $\sin\theta=0.6$

ومنه $\cos\theta=0.8$

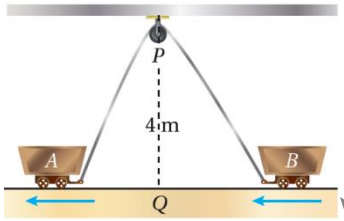
$$h=10+10\sin\theta$$

$$\frac{dh}{dt}=10\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

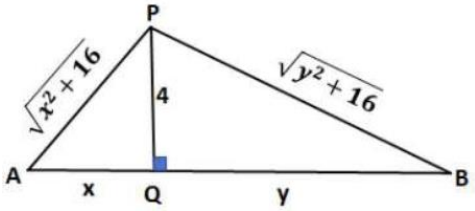
$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=16}=10\times0.8\times\pi=8\pi\text{ m/min}$$

مثال 10 :

رُبِطت العربتان A و B بحبل طوله 12m، وهو يمرّ بالبكرة P كما في الشكل المجاور. إذا كانت النقطة Q تقع على الأرض بين العربيتين أسفل P مباشرة، وتبعد عنها مسافة 4m، وكانت العربة A تتحرك بعيدًا عن النقطة Q بسرعة 0.5m/s، فأجد سرعة اقتراب العربة B من النقطة Q في اللحظة التي تكون فيها العربة A على بُعد 3m من النقطة Q، مُبررًا إجابتي.



لتكن الابعاد كما في الشكل



طول الحبل

$$AP+BP=\sqrt{x^2+16}+\sqrt{y^2+16}=12$$

عندما $x=3$ فإن

$$\sqrt{9+16}+\sqrt{y^2+16}=12$$

$$\sqrt{x^2+16}=7\Rightarrow y=\sqrt{33}$$

الاستاذ إياد عباد

$$\frac{x\frac{dx}{dt}}{\sqrt{x^2+16}}+\frac{y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{y^2+16}}=0$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{x\sqrt{y^2+16}}{y\sqrt{x^2+16}}\frac{dx}{dt}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=3}=\frac{3\sqrt{33+16}}{\sqrt{33}\sqrt{25}}\times 0.5=-\frac{21}{10\sqrt{33}}\ m/s$$

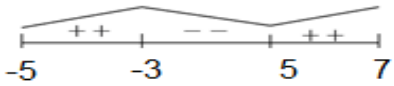
مثال 11 :

اوجد فترات التزايد والتناقص لكل مما يلي:

$$f(x)=\frac{x^3}{3}-2x-15x-12,\ [-5,7]$$

الحل :

$$f'(x)=x^2-2x-15=0$$
$$(x-5)(x+3)=0$$
$$x=5,-3$$



متزايد $(-5,-3)\ (5,7)$

متناقص $(-3,5)$

مثال 12 :

$$f(x)=x\sin x+\cos x \quad [0,\pi]$$

الحل:

$$f'(x)=x\cos x+\sin x-\sin x$$

$$x\cos x=0\rightarrow x=0,\ \frac{\pi}{2}$$

$f(2)=\frac{\pi}{2}$ عظمى محلية ومطلقة

$f(0)=1$ صغرى

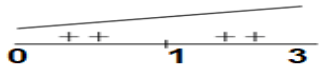
$f(\pi)=-1$ صغرى محلية ومطلقة

مثال 13 :

$$(13)\quad f(x)=\frac{e^x}{1+x^2}\ [0,3]$$

,

$$f'(x)=\frac{(1+x^2)e^x-e^x 2x}{(1+x^2)^2}=0$$
$$(1+x^2)e^x-e^x 2x=0$$
$$e^x((1+x^2)-2x)=0$$
$$e^x\neq 0,\quad ((1+x^2)-2x)=0$$
$$x^2-2x+1=0$$
$$(x-1)(x-1)=0\Rightarrow x=1$$



$f(0)=1$ قيمة صغرى مطلقة

$f(3)=\frac{e^3}{10}$ قيمة عظمى مطلقة

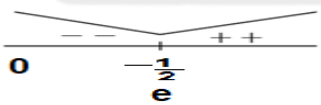
مثال 14 :

$$f(x)=x^2\ln x$$

نلاحظ ان المجال هو x>0

$$f'(x)=x^2(\frac{1}{x})+\ln x(2x)=0$$
$$x+2x\ln x=0$$
$$x(1+2\ln x)=0$$
$$x=0 \quad \text{ل تهمل}$$

$$1+2\ln x=0\Rightarrow \ln x=\frac{-1}{2}\Rightarrow x=e^{\frac{-1}{2}}$$



الاستاذ إياد عباد

متناقص على $\left(0,e^{\frac{-1}{2}}\right)$ متزايد على $\left(e^{\frac{-1}{2}},\infty\right)$

قيمة صغرى محلية ومطلقة $f\left(e^{\frac{-1}{2}}\right)=\frac{-1}{2}e^{-1}$

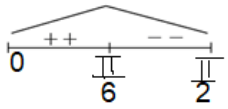
مثال 15 :

$$f(x)=2\cos x+\sin 2x \quad , \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2\sin x+2\cos 2x \\ &= -\sin x+\cos 2x=0 \\ &= -\sin x+1-2\sin^2 x=0 \\ &= 2\sin^2 x+\sin x-1=0 \\ &= (2\sin x-1)(\sin x+1)=0 \end{aligned}$$

$$2\sin x-1=0\Rightarrow \sin x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{6}$$

$$\sin x=-1\Rightarrow x=\frac{3\pi}{2}$$



صغرى مطلقة $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

صغرى $f(0)=2$

عظمى محلية ومطلقة $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

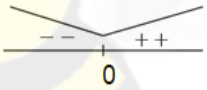
$$f(x)=\sec x \quad , \left[\frac{-\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$$

الحل:

$$f'(x)=\sec x\tan x=0$$

$$\sec x=0$$

$$\tan x=0\Rightarrow x=0$$



عظمى مطلقة $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2$

عظمى $f\left(\frac{-\pi}{6}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}$

صغرى مطلقة $f(0)=1$

مثال 16 : احسب التقعر والانعطاف :

(7) $f(x)=\ln(1+x^2)$

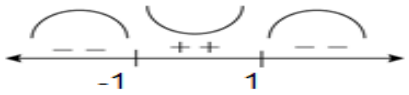
الحل :

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$$

$$f''(x)=\frac{(x^2+1)(2)-2x(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}=0$$

$$2-2x^2=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=1,-1$$



مقعر للأعلى $(-1,1)$

مقعر للأسفل $(1,\infty)$ $(-\infty,-1)$

الانعطاف $((1,\ln 2)$ $(-1,\ln 2)$

مثال 17 :

(8) $f(x)=e^{\frac{-x^2}{2}}$

$$f'(x)=-xe^{\frac{-x^2}{2}}$$

$$f''(x)=(-x)(-x)e^{\frac{-x^2}{2}}+(-1)e^{\frac{-x^2}{2}}$$

$$=x^2e^{\frac{-x^2}{2}}-e^{\frac{-x^2}{2}}=e^{\frac{-x^2}{2}}(x^2-1)=0$$

$$e^{\frac{-x^2}{2}}\neq 0$$

$$x^2-1=0\Rightarrow x=-1,1$$

مقعر للأعلى $(-\infty,-1)$ $(1,\infty)$

مقعر للأسفل $(-1,1)$

الاستاذ إياد عباد

الانعطاف $(1,e^{\frac{-1}{2}})$ $(-1,e^{\frac{-1}{2}})$

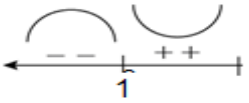
مثال 18 :

$(10)\quad f(x)=\dfrac{x}{x-1}$

$f'(x)=\dfrac{-1}{(x-1)^2}$

$f''(x)=\dfrac{2(x-1)}{(x-1)^4}$

$x=1$



مقعر للأعلى $(1,\infty)$

مقعر للأسفل $(-\infty,1)$

الانعطاف لا يوجد

مثال 19 :

$f(x)=\sin^2\dfrac{x}{2}-\cos x \quad ,[0,2\pi]$

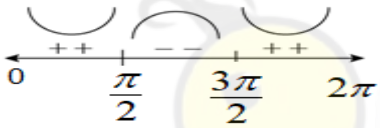
الحل :

$f'(x)=2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}(\dfrac{1}{2})+\sin x$

$=\dfrac{1}{2}\sin x+\sin x=\dfrac{3}{2}\sin x$

$f''(x)=\dfrac{3}{2}\cos x=0$

$\cos x=0\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}$



مقعر للأسفل $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$

مقعر للأعلى $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$

مثال 20 :

$f(x)=\dfrac{x}{2^x}$ ، فما القيم القصوى باستخدام المشتقة الثانية

الحل :

$f'(x)=\dfrac{2^x-x(2^x)\ln 2}{(2^x)^2}$

$=\dfrac{2^x(1-x\ln 2)}{(2^x)^2}=\dfrac{1-x\ln 2}{(2^x)}$

$1-x\ln 2=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{\ln 2}$

$f''(x)=\dfrac{2^x(-\ln 2)-(1-x\ln 2)(\ln 2(2^x))}{2^{2x}}$

$f''(\dfrac{1}{\ln 2})<0$

$x=\dfrac{1}{\ln 2}$ عظمى محلية عندما $\Leftarrow$

مثال 21 :

يمثل الاقتران $s(t)=t^3-5t^2+4t \quad ,t>0$ موقع جسم يتحرك فيمسار مستقيم ، حيث t الزمن بالثواني ، و s الموقع بالامتار:

1) ما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاة الموجب والسالب؟
2) ما الفترات التي تتزايد و تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهه؟

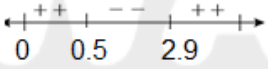
الحل :

$(1)\quad v(t)=3t^2-10t+4=0$

المميز

$p=100-4(3)(4)=52$

$t=\dfrac{10\pm\sqrt{52}}{6}=2.9\quad ,0.5$



الاتجاه الموجب $(0,0.5)$ $(2.9,\infty)$

الاتجاه السالب $(0.5,2.9)$

الاستاذ إياد عباد

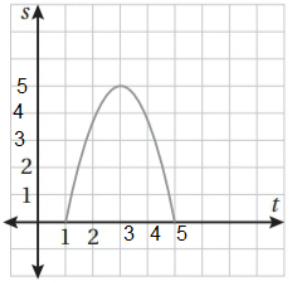
$$(2)\ a(t)=6t-10=0\Rightarrow t=\frac{5}{3}$$

السرعة متزايدة على $\left(\frac{5}{3},\infty\right)$

السرعة متناقصة على $\left(0,\frac{5}{3}\right)$

مثال(22):

يمثل الاقتران s(t) المبين في الشكل المجاور لموقع جسم يتحرك في مسار مستقيم



1- اوجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون.

الحل : t=3

2- ما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه الموجب والسالب

الحل:

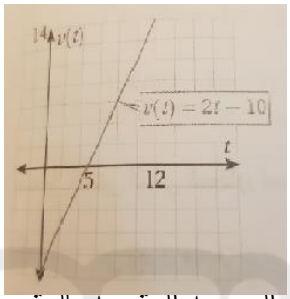
$(1,3)$ في $v(t)>0$ تكون الحركة في الاتجاه الموجب

$(3,5)$ في $v(t)<0$ تكون الحركة في الاتجاه السالب

3- ما الفترات التي تتزايد وتتناقص السرعة المتجهه؟

تتناقص على (5,1)

مثال (23) :



بين الاقتران $v(t)$ المبين منحناه في الشكل المجاور السرعة المتجهة لجسم يتحرك في مسارمستقيم ، حيث v السرعة المتجهه بالمتر لكل ثانية، و t الزمن بالثواني :

1- أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون.

الحل: عند t=5

2- ما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب؟

الحل:

في الاتجاه الموجب في (5، 12)

في الاتجاه السالب في (0، 5)

3- ما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة؟

وما الفترات التي تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهة؟

الحل:

السرعة المتجهة متزايدة في (0، 12)

مثال 24 :

اذا كان للاقتران $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ قيمة عظمى محلية عندما x=-3 وقيمة صغرى محلية عند $(1,-14)$ فاوجد قيمة a,b,c .

الحل :

$$f(1)=-14\Rightarrow$$
$$a+b+c=-15.....(1)$$
$$f'(x)=3x^2+2ax+b=0$$
$$f'(-3)=0\Rightarrow$$
$$-6a+b=-27.....(2)$$
$$f'(1)=0\Rightarrow$$
$$2a+b=-3.....(3)$$

بحل المعادلات

$a=$, $b=$, $c=$

مثال 25 :

اذا كان $f(x)=ax^2+bx+c$ للاقتران قيمة عظمى محلية عند $(3,12)$ وقطع محور y عند $(0,1)$ فما قيم a,b,c

الحل:

الاستاذ إياد عباد

$f(0)=1 \Rightarrow c=1$

$f(3)=12 \Rightarrow 9a+3b+1=12$

$9a+3b=11.....(1)$

$f'(x)=2ax+b$

$f'(3)=6a+b=0.....(2)$

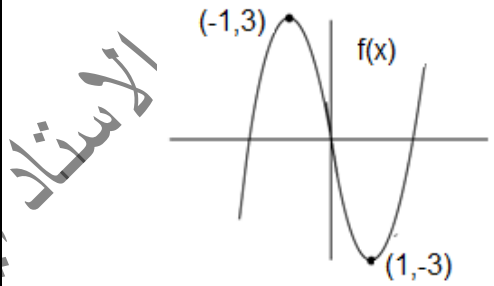
بحل المعادلات

$a=\frac{-11}{9}$,$b=\frac{22}{3}$

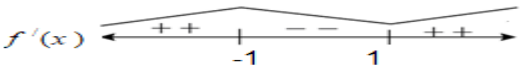
مثال 26 :

الرسم المجاور يمثل $f(x)$ كثير حدود

اوجد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى وفترات التقعر ونقاط الانعطاف



الحل :

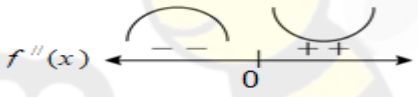


متزايد في $(1,\infty)$ $(-\infty,-1)$

متناقص $(-1,1)$

$f(-1)=3$ قيمة عظمى محلية

$f(1)=-3$ قيمة صغرى محلية



مقعر للاسفل $(-\infty,0)$

مقعر للاعلى $(0,\infty)$

نقطة الانعطاف $(0,0)$

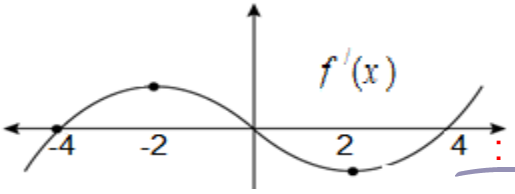
مثال 27 :

الشكل المجاور يمثل $f'(x)$ (

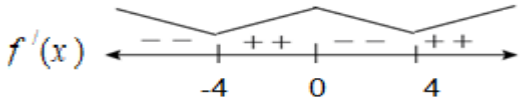
أ) ما القيم الحرجة

ب) اوجد فترات التزايد والتناقص

ج) فترات التقعر للأعلى وللأسفل



الحل :



أ) القيم الحرجة

$\{-4,0,4\}$

ب) متزايد في $(-4,0)$ $(4,\infty)$

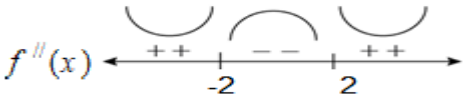
متناقص $(0,4)$ $(-\infty,-4)$

$f(-4)$ قيمة صغرى محلية

$f(4)$ قيمة صغرى محلية

$f(0)$ قيمة عظمى محلية

ج)



مقعر للاسفل $(-2,2)$

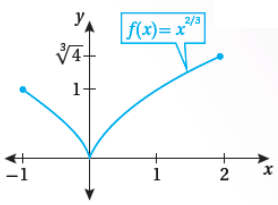
مقعر للأعلى $(-\infty,-2)$ $(2,\infty)$

نقاط الانعطاف $(-2,f(-2))$ $(2,f(2))$

الاستاذ إياد عباد

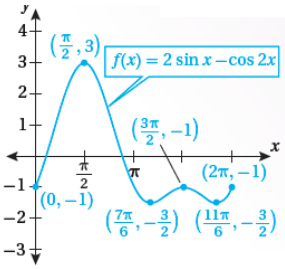
مثال 28 :

1



يُبيِّن التمثيل البياني المجاور لمنحنى الاقتران: $f(x)=x^{2/3}$ في الفترة $[-1,2]$ أنَّ القيمة العظمى المُطلَقة هي $\sqrt[3]{4}$، وأنَّ القيمة الصغرى المُطلَقة هي 0.

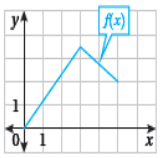
2



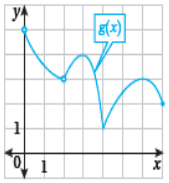
يُبيِّن التمثيل البياني المجاور لمنحنى الاقتران: $f(x)=2\sin x-\cos 2x$ في الفترة $[0,2\pi]$ أنَّ القيمة العظمى المُطلَقة هي 3، وأنَّ القيمة الصغرى المُطلَقة هي $-\frac{3}{2}$.

أجد القِيَم الحرجة والقِيَم القصوى المحلية والمُطلَقة (إنْ وُجِدت) للاقتران المُمثَّل بيانيًّا في كلٍّ ممّا يأتي:

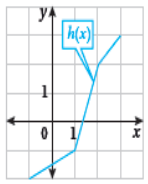
1



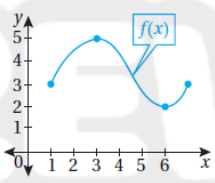
2



3



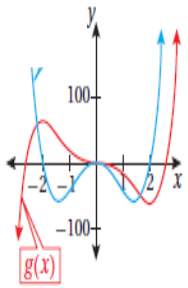
1



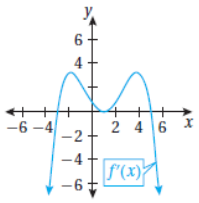
ألاحِظ من التمثيل البياني لمنحنى $f(x)$ وجود:

- قيمة عظمى محلية ومُطلَقة للاقتران f، هي: $f(3)=5$.
- قيمة صغرى محلية ومُطلَقة للاقتران f، هي: $f(6)=2$.

تحدٍّ: أستعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنيي الاقترانين $h(x)$ و $g(x)$ لتحديد الاقتران الذي يُمثِّل مشتقة للآخر، مُبرِّرًا إجابتي.



تبرير: أستعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f'(x)$ لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي، مُبرِّرًا إجابتي:



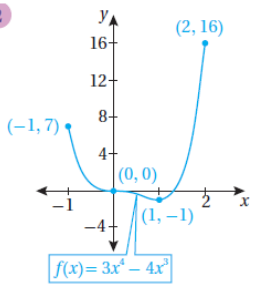
قِيَم x التي يكون عندها للاقتران f قِيَم قصوى محلية، مُبيِّنًا نوعها.

فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران f.

فترات التقعُّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران f.

الإحداثي x لنقاط الانعطاف.

2



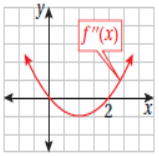
ألاحِظ من التمثيل البياني لمنحنى $f(x)$ وجود:

- قيمة صغرى محلية ومُطلَقة للاقتران f، هي: $f(1)=-1$.
- قيمة عظمى مُطلَقة للاقتران f، هي: $f(2)=16$ (ليست قيمة عظمى محلية؛ لأنَّها ليست داخلية، فهي طرف فترة).

الاستاذ : إياد عباد

9

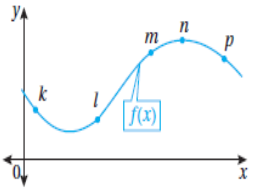
أستعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f''(x)$ لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي:



فترات التقعُّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران f.

الإحداثي x لنقاط انعطاف منحنى الاقتران f.

تبرير: يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)$. أُحدِّد النقطة (النقاط) من بين مجموعة النقاط: $\{k, l, m, n, p\}$ على منحنى الاقتران التي تُحقِّق كُلًّا من الشروط الآتية، مُبرِّرًا إجابتي:

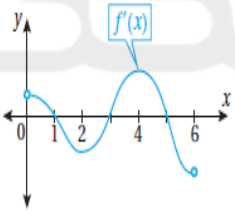


أنْ تكون إشارة كلٍّ من $f'(x)$ و $f''(x)$ موجبة.

أنْ تكون إشارة كلٍّ من $f'(x)$ و $f''(x)$ سالبة.

أنْ تكون إشارة $f'(x)$ سالبة، وإشارة $f''(x)$ موجبة.

يُبيِّن الشكل المجاور منحنى المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ المتصل على الفترة $[0, 6]$. أستعمل التمثيل البياني لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي:

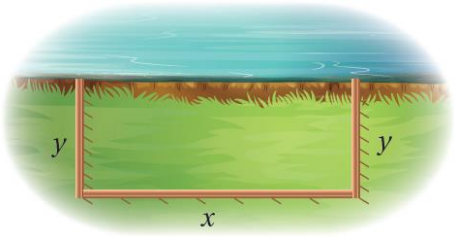


قِيَم x التي يكون عندها للاقتران f قِيَم قصوى محلية، مُبيِّنًا نوعها.

فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران f.

مثال 29 :

خطط مزارع لتسييج حظيرة مستطيلة الشكل قرب نهر كما في الشكل المجاور، وحدد مساحة الحظيرة بـ 245000m^2 لتوفير كمية عشب كافية لاغنامه أجد أبعاد الحظيرة التي تجعل طول السياج أقل ما يمكن علماً بأن الجزء المقابل للنهر لا يحتاج إلى تسييج



الحل:

ليكن طول السياج L ومساحة الحظيرة A

$$A = xy = 245000$$

$$y = \frac{245000}{x}$$

$$L = x + 2y$$

$$L(x) = x + \frac{490000}{x}, x > 0$$

$$L'(x) = 1 - \frac{490000}{x^2}$$

$$L'(x) = 0 \Rightarrow x = 700$$

$$L''(x) = \frac{980000}{x^3}$$

$$L''(700) = \frac{980000}{700^3} > 0$$

اذن يكون طول سياج اقل ما يمكن عندما

$$x = 700 \text{ m} \text{ و } y = \frac{245000}{700} = 350 \text{ m}$$

اياد عباد

مثال 30 :

أجد النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x)=\sqrt{8x}$ التي هي أقرب ما يمكن إلى النقطة $(4,2)$

الحل:

$$L=\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}$$

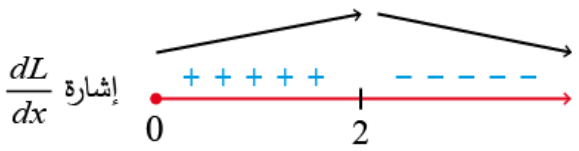
$$L=\sqrt{(x-4)^2+\left(\sqrt{8x}-2\right)^2}$$

$$\frac{dL}{dx}=\frac{x-4+\left(\sqrt{8x}-2\right)\left(\frac{4}{\sqrt{8x}}\right)}{\sqrt{(x-4)^2+\left(\sqrt{8x}-2\right)^2}}$$

$$=\frac{x-\frac{8}{\sqrt{8x}}}{\sqrt{(x-4)^2+\left(\sqrt{8x}-2\right)^2}}$$

$$x=\frac{8}{\sqrt{8x}}\Rightarrow x\sqrt{8x}=8$$

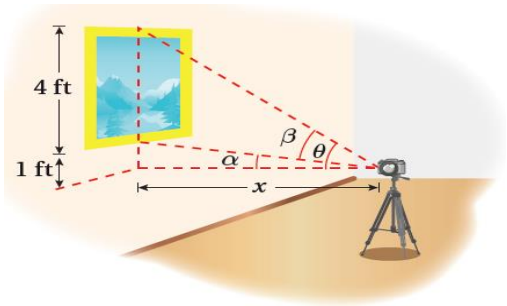
$$8x^3=64\Rightarrow x^3=8\Rightarrow x=2$$



اذن اقرب نقطة من نقاط المنحنى f للنقطة $(4,2)$ هي $(2,4)$

مثال 31 :

يريد مصور التقاط صورة للوحة ارتفاعها 4ft وهي معلقة في معرض فني إذا كانت عدسة الكاميرا تقع أسفل الحافة السفلية للوحة بمقدار 1ft كما يظهر في الشكل المجاور، فأجد بعد الكاميرا اللازم عن اللوحة لتكون زاوية تصوير عدستها β أكبر ما يمكن



الحل:

$$\tan\beta=\tan(\theta-\alpha)$$

$$=\frac{\tan\theta-\tan\alpha}{1+\tan\theta\tan\alpha}$$

بتعويض $\tan\theta=\frac{5}{x},\tan\alpha=\frac{1}{x}$

$$=\frac{\frac{5}{x}-\frac{1}{x}}{1+\frac{5}{x}\times\frac{1}{x}}=\frac{\frac{4}{x}}{\frac{x^2+5}{x^2}}$$

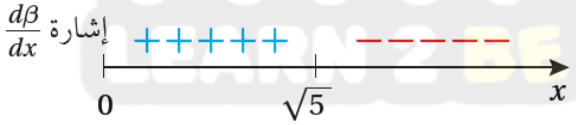
$$\tan\beta=\frac{4x}{x^2+5}$$

$$\sec^2\beta\times\frac{d\beta}{dx}=\frac{(x^2+5)(4)-(4x)(2x)}{(x^2+5)^2}$$

$$\sec^2\beta\times\frac{d\beta}{dx}=\frac{20-4x^2}{(x^2+5)^2}$$

$$\frac{20-4x^2}{(x^2+5)^2}=0$$

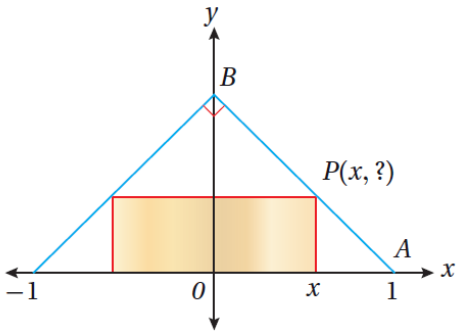
$$20-4x^2=0\Rightarrow x=\sqrt{5}$$



الاستاذ إياد عباد

مثال 32 :

يبين الشكل المجاور مستطيلاً مرسوماً داخل المثلث قائم الزاويـة وهـو متطـابق الضـلعين وطـول قاعدتـه 2 وحـدة طول:



1) أجد الإحداثي y للنقطة P بدلالة x

المثلث قائم ومتطابق الضلعين اذن قياس كل زاوية من زوايا قاعدته $\frac{\pi}{4}$

ميل المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ هو $\tan\frac{3\pi}{4}=-1$

وهو يمر بالنقطة $A(1,0)$

معادلة $\overleftrightarrow{AB}$ هي

$$y-0=-1(x-1)\Rightarrow y=1-x$$

2) أكتب مساحة المستطيل بدلالة x

مساحة المستطيل = طوله عرضه

$$A=2xy=2x(1-x)$$

$$=2x-2x^2, 0<x<1$$

3) أجد أكبر مساحة ممكنة للمستطيل

$$A'(x)=2-4x$$

$$A'(x)=0$$

$$2-4x=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

$$A(0)=A(1)=0, A\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

للاقتران A قيمة عظمى محلية هي $A\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

اذن اكبر مساحة ممكنة للمستطيل هي $\frac{1}{2}$ وحدة مربعة

مثال 33 :

تنتج مزرعة للتفاح 30 صندوقاً من الشجرة الواحدة تقريباً عند زراعة 20 شجرة في كل فدان من الأرض ويقل إنتاج الشجرة الواحدة بمقدار صندوق عند زراعة شجرة إضافية في كل فدان بسبب قرب الإشجار الشديد بعضها من بعض ما عدد الأشجار التي يجب زراعتها في كل فدان لتحقيق أكبر إنتاج ممكن؟

الحل:

ليكن عدد الاشجار التي ستزرع في الفدان هو x شجرة حيث $x\geq 20$

اذن عدد الاشجار الزائدة على العشرين هو $x-20$

سنقص عدد الصناديق التي تنتجها كل شجرة بمقدار $(x-20)$ صندوق

ويكون عدد الصناديق التي تنتجها كل شجرة $30-(x-20)=50-x$

سيكون اقتران الانتاج الكلي من الفدان

(عدد الاشجار × عدد الصناديق من كل شجرة)

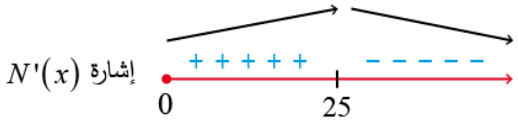
$$N(x)=x(50-x)=50x-x^2$$

$$N'(x)=50-2x$$

$$N'(x)=0$$

الاستاذ إياد عباد

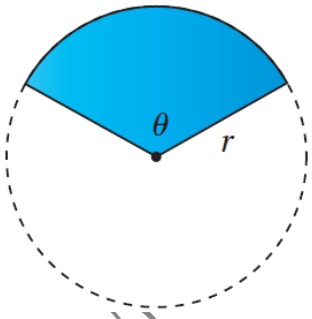
$$50-2x=0\Rightarrow x=25$$



اذن يتحقق اكبر انتاج عندما يتم زرع 25 شجرة في كل فدان

مثال 34 :

لدى مزارع P متراً طولياً من سياج، يرغب في استعماله كاملاً لتسييج حقل رعي على شكل قطاع دائري، زاويته θ بالراديان، في دائرة نصف قطرها r متراً كما في الشكل المجاور:



1) أثبت أن طول السياج اللازم إحاطة الحقل به هو: $P=r(\theta+2)$

الحل:

ليكن L طول قوس القطاع الدائري المظلل اذن

$$P=r+r+L=2r+r\theta=r(2+\theta)$$

2) أثبت أن مساحة القطاع هي: $A=\frac{1}{2}Pr-r^2$

الحل:

لتكن A مساحة القطاع الدائري المظلل اذن

$$A=\frac{1}{2}r^2\theta$$

وبما ان $P=r(2+\theta)$ فإن:

$$\theta=\frac{P-2r}{r}=\frac{P}{r}-2$$

$$A=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}r^2\left(\frac{P}{r}-2\right)=\frac{1}{2}Pr-r^2$$

3) أجد نصف قطر القطاع بدلالة P الذي تكون عنده مساحة الحقل أكبر ما يمكن

الحل:

$$A'(r)=\frac{1}{2}P-2r$$

$$A'(r)=0$$

$$\frac{1}{2}P-2r=0\Rightarrow r=\frac{1}{4}P$$

$$A''(r)=-2$$

$$A''\left(\frac{1}{4}P\right)=-2<0$$

تكون مساحة الحقل اكبر ما يمكن عندما $r=\frac{1}{4}P$

مثال 35 :

يبين الشكل المجاور نافذة مكونة من جزأين أحدهما علوي على شكل نصف دائرة قطرها xm والآخر على شكل مستطيل عرضه xm وارتفاعه ym صُنع الجزء العلوي من زجاج ملون يسمح بمرور 1 وحدة ضوء لكل متر مربع وصُنع الجزء السفلي من زجاج شفاف يسمح بمرور 3 وحدات ضوء لكل متر مربع. أجد قيمة كل من x و y التي تجعل كمية الضوء المار خلال النافذة أكبر ما يمكن، علماً بأن 10m من المعدن الرقيق

الاستاذ إياد عباد

استعمل في تشكيل إطار النافذة كاملاً بما في ذلك القطعة الفاصلة بين الجزأين

الحل:

لتكن كمية الضوء المارة خلال النافذة كاملة Q

$$Q=3xy+\frac{1}{2}\times\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2=3xy+\frac{1}{8}\pi x^2$$

محيط النافذة بالاضافة الى القطعة الفاصلة بين الجزأين هو

L

$$L=2x+2y+\pi\frac{x}{2}=10$$

$$y=5-\left(1+\frac{\pi}{4}\right)x$$

ومنع فإن كمية الضوء تصبح

$$Q(x)=3x\left(5-\left(1+\frac{\pi}{4}\right)x\right)+\frac{1}{8}\pi x^2$$

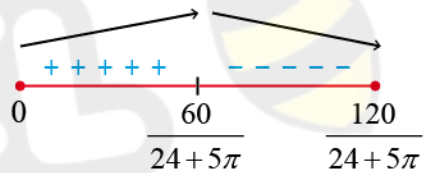
حيث $0\le x\le\frac{120}{24+5\pi}$

$$=15x-\left(3+\frac{5\pi}{8}\right)x^2$$

$$Q'(x)=15-\left(6+\frac{5\pi}{4}\right)x$$

$$Q'(x)=0\Rightarrow x=\frac{60}{24+5\pi}$$

إشارة $Q'(x)$

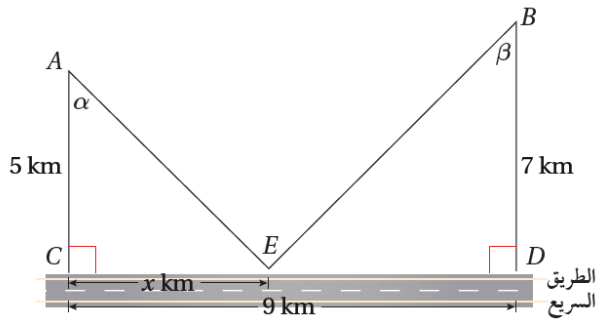


اذن تكون كمية الضوء المار خلال النافذة اكبر ما يمكن عندما

$$x=\frac{60}{24+5\pi},y=\frac{60+10\pi}{24+5\pi}$$

مثال 36 :

يمارس يوسف هواية ركوب الدراجات وفي أحد الأيام، انطلق على دراجته من البيت عند النقطة A إلى المدرسة عند النقطة B ، ماراً بالنقطة E الواقعة على حافة الطريق السريع كما في الشكل المجاور:



1) إذا كان الاقتران L يمثل المسافة التي يقطعها يوسف من البيت إلى المدرسة فأكتب L بدلالة x

الحل:

$$L=AE+EB$$

$$=\sqrt{x^2+25}+\sqrt{(9-x)^2+49},0\le x\le 9$$

2) أثبت أنه إذا كان: $\frac{dL}{dt}=0$ فإن: $\sin\alpha=\sin\beta$

الحل:

$$\frac{dL}{dx}=\frac{x}{\sqrt{x^2+25}}+\frac{-(9-x)}{\sqrt{(9-x)^2+49}}$$

$$\frac{dL}{dx}=0$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+25}}=\frac{9-x}{\sqrt{(9-x)^2+49}}$$

$$\sin\alpha=\sin\beta$$

الأستاذ إياد عباد

3) أجد قيمة x التي تجعل المسافة التي يقطعها يوسف أقل ما يمكن

الحل:

من الفرع السابق

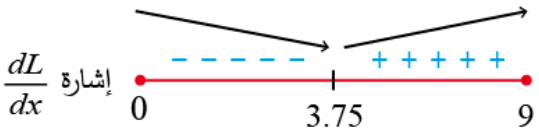
بما ان $\sin\alpha=\sin\beta$ والزاويتان α,β حادتان اذن $\alpha=\beta$

ومنه فان $\tan\alpha=\tan\beta$ اي:

$$\frac{x}{5}=\frac{9-x}{7}$$

$$7x=45-5x$$

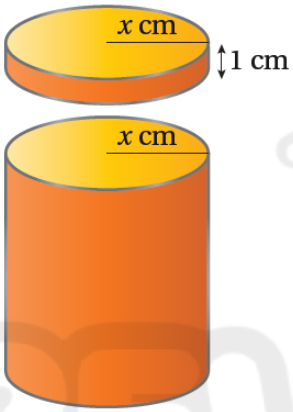
$$12x=45\Rightarrow x=\frac{15}{4}=3.75$$



اذن قيمة التي تجعل المسافة التي يقطعها يوسف اقل ما يمكن هي 3.75 km

مثال 37 :

علبة بسكويت أسطوانية الشكل، لها غطاء محكم يتداخل مع العلبة بمقدار 1cm كما في الشكل المجاور. إذا كان نصف قطر العلبة والغطاء $x\,\text{cm}$ وصنعت العلبة والغطاء من صفيحة رقيقة ملائمة للأغذية، مساحتها $80\pi\,\text{cm}^2$ من دون أي هدر في المواد في أثناء عملية التصنيع فأجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعاً:



1) أجد قيمة x التي تجعل حجم العلبة المغلقة أكبر ما يمكن

الحل:

ليكن حجم العلبة ومساحة سطحها الكلية مع الغطاء وارتفاعها

$$A=2\left(\pi x^2\right)+2\pi xh+2\pi x=80\pi$$

$$x^2+(1+h)x=40$$

$$h=\frac{40}{x}-x-1$$

$$V=\pi x^2h=\pi x^2\left(\frac{40}{x}-x-1\right)$$

$$=\pi\left(40x-x^3-x^2\right)$$

$$\frac{dV}{dx}=\pi\left(40-3x^2-2x\right)$$

$$\frac{dV}{dx}=0$$

$$\pi\left(40-3x^2-2x\right)=0$$

$$3x^2+2x-40=0$$

$$(3x-10)(x+4)=0\Rightarrow x=\frac{10}{3}$$

$$\frac{d^2V}{dx^2}=\pi(-6x-2)$$

$$\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=\frac{10}{3}}=-22\pi<0$$

استاذ إياد عباد

اذن قيمة x التي تجعل حجم العلبة اكبر ما يمكن هي

$$x=\frac{10}{3}$$

2) أجد أكبر حجم ممكن للعلبة

الحل:

$$V\left(\frac{10}{3}\right)=\pi\left(40\left(\frac{10}{3}\right)-\left(\frac{10}{3}\right)^3-\left(\frac{10}{3}\right)^2\right)$$

$$=\frac{2300}{27}\pi\ \text{cm}^3$$

3) أجد النسبة المئوية للجزء الذي استعمل من الصفيحة لصنع الغطاء عندما كان الحجم أكبر ما يمكن

الحل:

لتكن مساحة الغطاء الكلية A_C

$$A_C=\pi x^2+2\pi x(1)=\pi x(x+2)$$

$$A_C\left(\frac{10}{3}\right)=\pi\left(\frac{10}{3}\right)\left(\frac{10}{3}+2\right)=\frac{160\pi}{9}$$

النسبة المئوية للجزء المستعمل لصنع الغطاء من مساحة الصفيحة هي:

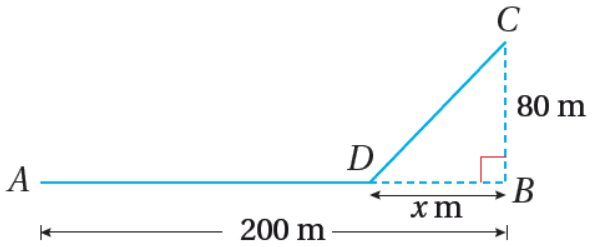
$$\frac{A_C}{80\pi}\times 100\%=\frac{\frac{160\pi}{9}}{80\pi}\times 100\%$$

$$=\frac{200}{9}\%\approx 22.2\%$$

مثال 38:

يمتد مسار للركض شرقاً من النقطة A إلى النقطة B مسافة 200m وتقع النقطة C على بعد 80m شمال النقطة B

انطلق راكب على دراجة من النقطة A إلى النقطة D بسرعة 10m/s ، حيث تقع النقطة D على بُعد x متراً غرب النقطة B ، ثم سار في طريق مستقيم ومر من النقطة D إلى النقطة C بسرعة 6 m/s:



1) أجد اقترانـاً بدلالـة x يمثل الـزمن الـذي سيستغرقه راكب الدراجة في الانتقال من النقطة A إلى النقطة C

الحل:

$$T=T_{AD}+T_{DC}$$

$$=\frac{200-x}{10}+\frac{\sqrt{x^2+6400}}{6}$$

2) بافتراض أن x قيمة متغيرة أجد قيمة x التي يكون عندها الزمن اللازم للانتقال من النقطة A إلى النقطة C أقل ما يمكن

الحل:

$$\frac{dT}{dx}=\frac{-1}{10}+\frac{x}{6\sqrt{x^2+6400}}$$

الاستاذ إياد عباد

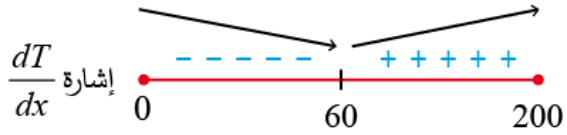
$$\frac{dT}{dx}=0$$

$$\frac{x}{6\sqrt{x^2+6400}}=\frac{1}{10}$$

$$10x=6\sqrt{x^2+6400}$$

$$25x^2=9\left(x^2+6400\right)$$

$$16x^2=9(6400)\Rightarrow x=60\text{ m}$$

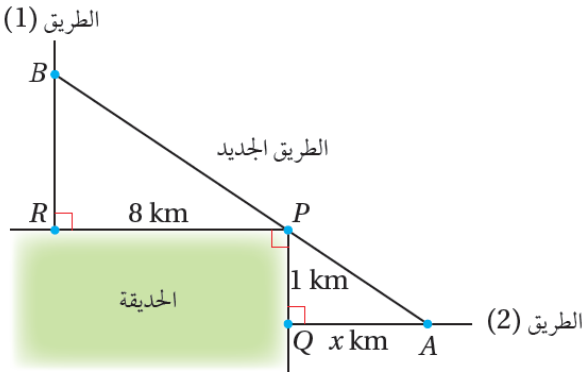


اذن قيمة x التي يكون عندها الزمن T اقل ما يمكن هي

$$x=60\text{ m}$$

مثال 39:

يبين الشكل المجاور مدخلين لحديقة عامة عند النقطة R والنقطة Q ويمكن الوصول إلى هذين المدخلين من طريقين عموديين على ضلعي الحديقة. أرادت البلدية إنشاء طريق جديد يصل بين الطريقين القديمين، ويمر بالنقطة P التي تمثل زاوية الحديقة فاختارت النقطة A والنقطة B على الطريقين ليكون طول الطريق الجديد أقصر ما يمكن، علماً بأن النقطة A تقع على بُعد $x\,\text{km}$ من النقطة Q أجد قيمة x التي تجعل طول الطريق الجديد أقصر ما يمكن



الحل:

ليكن L طول AB

النقاط A,B,P على استقامة واحدة

اذن المثلثان القائمان AQP,PRB متشابهان

ينتج عن ذلك

$$\frac{BR}{1}=\frac{8}{x}\Rightarrow BR=\frac{8}{x}$$

$$L=AP+PB$$

$$=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{64+\left(\frac{8}{x}\right)^2}$$

$$=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{\frac{64x^2+64}{x^2}}$$

$$=\sqrt{1+x^2}+\frac{8}{x}\sqrt{1+x^2}$$

$$=\sqrt{1+x^2}\left(1+\frac{8}{x}\right),x>0$$

$$\frac{dL}{dx}=\sqrt{1+x^2}\left(-\frac{8}{x^2}\right)+\left(1+\frac{8}{x}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$=\frac{-8\sqrt{1+x^2}}{x^2}+\frac{8+x}{\sqrt{1+x^2}}$$

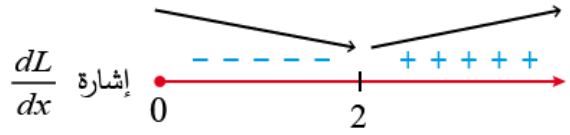
الاستاذ إياد عباد

$$\frac{dL}{dx}=0$$

$$\frac{8\sqrt{1+x^2}}{x^2}=\frac{8+x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$8\left(1+x^2\right)=8x^2+x^3$$

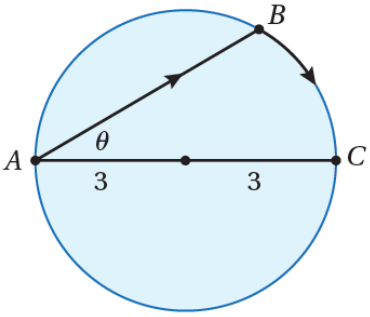
$$x^3=8\Rightarrow x=2$$



اذن قيمة x التي تجعل طول الطريق الجديد اقصر ما يمكن هي $x=2\text{ km}$

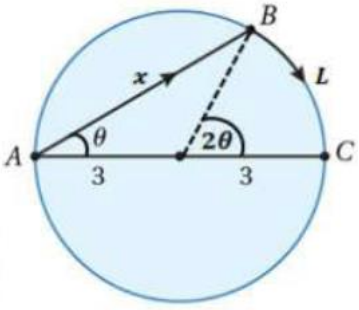
مثال 40 :

يقف رجل عند النقطة A على شاطئ بحيرة دائرية نصف قطرها 3km وهو يريد الوصول إلى النقطة C المقابلة تماماً للنقطة A على الجانب الآخر من البحيرة، في أقصر وقت ممكن كما في الشكل المجاور يمكن للرجل أن يجدف بزورق من النقطة A إلى النقطة B بسرعة 3km/h ثم يركض حول حافة البحيرة بسرعة 6km/h أحدد موقع النقطة B ليصل الرجل من النقطة A إلى النقطة C في أقل وقت ممكن؟ أبرر إجابتي



الحل:

المثلث ABC قائم الزاوية في B لان الزاوية ABC محيطية على قطر ومنه فإن $\cos\theta=\frac{x}{6}$



قياس الزاوية COB يساوي 2θ لانها مركزية مشتركة مع المحيطية CAB بالقوس نفسه

ليكن الزمن الكلي الذي يحتاجه الرجل للوصول الى النقطة C هو T

$$T=T_{A\to B}+T_{B\to C}=\frac{x}{3}+\frac{L}{6}$$

$$=\frac{6\cos\theta}{3}+\frac{3(2\theta)}{6}$$

$$=2\cos\theta+\theta\quad,0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{dT}{d\theta}=1-2\sin\theta$$

$$\frac{dT}{d\theta}=0\Rightarrow\sin\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{6}$$

نقارن الزمن عند النقطة الحرجة مع الزمن عند طرفي المجال وهما $0,\frac{\pi}{6}$

$$T(0)=2\text{ h}$$

الاستاذ : إياد عباد

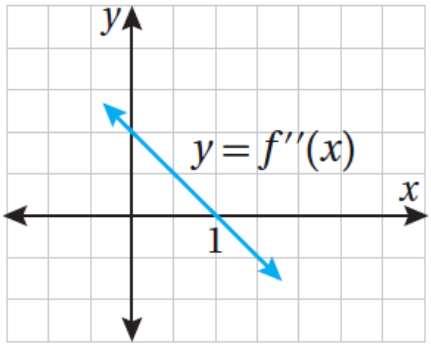
$$T\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}\approx 2.25\,\text{h}$$

$$T\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\approx 1.57\,\text{h}$$

اذن القيمة الصغرى للزمن تكون عندما $\theta=\frac{\pi}{2}$ اي عندما تنطبق B على A ويقطع الرجل القوس AB كاملا راكضا على اليابسة دون تجديف في الماء

مثال 41 :

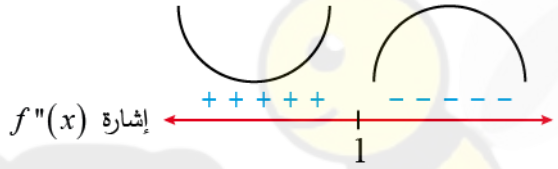
أستعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f''(x)$ لإيجاد كل مما يأتي:



1) فترات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران f

الحل:

نلاحظ من الشكل ان اشارة الاقتران f'' كالآتي:



مقعر للأعلى في $(-\infty,1)$ ، مقعر للأسفل في $(1,\infty)$

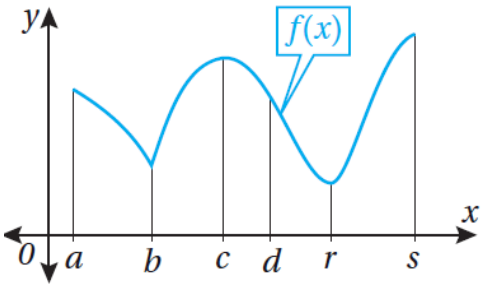
2) الإحداثي x لنقاط انعطاف منحنى الاقتران f

الحل:

للاقتران f نقطة انعطاف عند $x=1$

مثال 42 :

يبين الشكل التالي منحنى الاقتران $f(x)$ أي النقاط الواقعة على المنحنى تمثل نقطة صغرى أو نقطة عظمى محلية؟ أيها تمثل قيمة صغرى أو قيمة عظمى مطلقة؟ أبرر أجابتي



الحل:

$(b, f(b))$ نقطة قيمة صغرى محلية

$(c, f(c))$ نقطة قيمة عظمى محلية

$(r, f(r))$ نقطة قيمة صغرى محلية ومطلقة

$(s, f(s))$ نقطة قيمة عظمى مطلقة

الاستاذ إياد عباد