مكثف وحدة التكامل

مثال (1): احسب التكاملات التالي

1) $\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx$

$= \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\, dx$

$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi}$

$= \left(\frac{1}{2}\left(\pi - \frac{1}{2}\sin 2(\pi)\right)\right) - \left(\frac{1}{2}\left(0 - \frac{1}{2}\sin 2(0)\right)\right)$

$= \frac{1}{2}\pi$

2) $\int \sin 4x \cos 5x \, dx$

$= \int \frac{1}{2}(\sin(4x - 5x) + \sin(4x + 5x))\, dx$

$\int \frac{1}{2}(-\sin(x) + \sin(9x))\, dx$

$\frac{1}{2}\left(\cos(x) - \frac{1}{9}\cos(9x)\right) + C$

3) $\int \cos^4 x \, dx$

$\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2$

$= \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)$

$= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2}\right)$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x$

$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$

$\int \cos^4 x \, dx$

$= \int \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x\right) dx$

$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$

4) $\int \frac{dx}{1 - \cos x}$

$\int \left(\frac{1}{1 - \cos x} \times \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x}\right) dx$

$= \int \frac{1 + \cos x}{1 - \cos^2 x}\, dx$

$= \int \frac{1 + \cos x}{\sin^2 x}\, dx$

$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{\cos x}{\sin^2 x}\right) dx$

$\int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin x} \times \frac{\cos x}{\sin x}\right) dx$

$= \int (\csc^2 x + \csc x \cot x)\, dx$

$= -\cot x - \csc x + C$

5) $\int \frac{x^2+x+1}{x+1}\, dx$

$\int \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}\, dx = \int \left(x + \frac{1}{x + 1}\right) dx$

$= \frac{1}{2}x^2 + \ln|x + 1| + C$

$$= \int (5 + 5\cos 2x - 1 - 3\sin 2x)\, dx$$

$$= \int (4 + 5\cos 2x - 3\sin 2x)\, dx$$

$$= 4x + \frac{5}{2}\sin 2x + \frac{3}{2}\cos x + C$$

$$\int_0^{\pi} 2\cos\frac{1}{2}x\, dx$$

$$= 4\sin\frac{1}{2}x\Big|_0^{\pi}$$

$$= 4\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 4$$

9) $\int_0^{2\pi} |\sin x|\, dx$

$$|\sin x| = \begin{cases} \sin x & , \quad 0 \le x \le \pi \\ -\sin x & , \quad \pi < x \le 2\pi \end{cases}$$

$$= \int_0^{\pi} \sin x\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin x\, dx$$

$$= -\cos x|_0^{\pi} + \cos x|_{\pi}^{2\pi}$$

$$= -(\cos\pi - \cos 0) + \cos 2\pi - \cos\pi$$

$$= -(-2) + 1 - (-1) = 4$$

10)

$$\int (\cos^4 x - \sin^4 x)\, dx$$

$$= \int (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)\, dx$$

$$= \int (\cos^2 x - \sin^2 x)\, dx$$

$$= \int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

11) $\int \frac{\sec x}{\sin x - \cos x}\, dx$

نقسم البسط والمقام على $\cos x$

$$\int_0^3 |4 - x^2|\, dx$$

$$f(x) = |4 - x^2|$$

$$F(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & , \quad x \le -2 \\ 4 - x^2 & , \quad -2 < x < 2 \\ x^2 - 4 & , \quad x \ge 2 \end{cases}$$

$$\int_0^2 (4 - x^2)\, dx + \int_2^3 (x^2 - 4)\, dx$$

$$= \left(4x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^2 + \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x\right)\Big|_2^3 = \frac{23}{3}$$

7)

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x \cos x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin 4x + \sin 2x)\, dx$$

$$= \left(-\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{4}\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= -\frac{1}{8}\cos\frac{4\pi}{6} - \frac{1}{4}\cos\frac{2\pi}{6} - \left(\frac{1}{8}\cos 0 - \frac{1}{4}\cos 0\right)$$

$$= \frac{5}{16}$$

8) $\int (9\cos^2 x - \sin^2 x - 6\sin x\cos x)\, dx$

$$= \int (9\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - 6\sin x\cos x)\, dx$$

$$= \int (10\cos^2 x - 1 - 6\sin x\cos x)\, dx$$

$$= \int \left(10\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) - 1 - 3\sin 2x\right) dx$$

$$v = \sin u \Longrightarrow \frac{dv}{dx} = \cos u$$

$$\Longrightarrow \cos x \, dx = dv$$

$$\int \cos u \, (1 - \sin^2 u) \, du$$

$$= \int (1 - v^2) \, dv = v - \frac{1}{3} v^3 + C$$

$$= \sin u - \frac{1}{3} \sin^3 u + C$$

$$= \sin(\tan x) - \frac{1}{3} \sin^3(\tan x) + C$$

$$\int_6^{20} \frac{8x}{\sqrt{4x+1}} dx$$

$$u = 4x + 1$$

$$\Longrightarrow 4dx = du \,, \qquad 4x = u - 1$$

$$x = 20 \Longrightarrow u = 81$$

$$x = 6 \Longrightarrow u = 25$$

$$= \int_{25}^{81} \frac{u-1}{2\sqrt{u}} du$$

$$= \int_{25}^{81} \left(\frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \right) du$$

$$= \left(\frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}} \right) \Big|_{25}^{81}$$

$$= (243 - 9) - \left(\frac{125}{3} - 5 \right) = \frac{592}{3}$$

$$\int_2^5 \frac{1}{1 + \sqrt{x-1}} dx$$

$$u = \sqrt{x-1} \Longrightarrow u^2 = x - 1$$

$$\Longrightarrow 2udu = dx$$

$$x = 5 \Longrightarrow u = 2$$

$$x = 2 \Longrightarrow u = 1$$

$$\int \frac{\sec x}{\sin x - \cos x} dx$$

$$= \int \frac{\frac{\sec x}{\cos x}}{\left(\frac{\sin x}{\cos x} - 1 \right)} dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x}{(\tan x - 1)} dx$$

$$= \ln|\tan x - 1| + C$$

$$\int \frac{\sin(\ln 4x^2)}{x} dx$$

$$= \int \frac{\sin(2 \ln 2x)}{x} dx$$

$$u = 2 \ln 2x \Longrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{2}{x}$$

$$\Longrightarrow dx = \frac{x}{2} du$$

$$\int \frac{\sin(\ln 4x^2)}{x} dx = \int \frac{\sin u}{x} \times \frac{x}{2} du$$

$$= \frac{1}{2} \int \sin u \, du = -\frac{1}{2} \cos u + C$$

$$= -\frac{1}{2} \cos(2 \ln 2x) + C = -\frac{1}{2} \cos(\ln 4x^2) + C$$

$$\int \sec^2 x \cos^3(\tan x) \, dx$$

$$u = \tan x \Longrightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x$$

$$\Longrightarrow dx = \frac{2du}{\sec^2 x}$$

$$\int \sec^2 x \cos^3(\tan x) \, dx$$

$$= \int \cos^3 u \, du = \int \cos u \cos^2 u \, du$$

$$= \int \cos u \, (1 - \sin^2 u) \, du$$

$$\int_1^4 \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}\,dx = \int_2^3 \frac{u^3}{\sqrt{x}} \times 2\sqrt{x}\,du$$

$$= \int_2^3 2u^3\,du = \frac{1}{2}u^4\Big|_2^3 = \frac{65}{2}$$

14) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx$

$$u = \tan x \Longrightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x$$

$$\Longrightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x} = \cos^2 x\,du$$

$$x = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow u = 1$$

$$x = 0 \Longrightarrow u = 0$$

$$= \int_0^1 \frac{e^u}{\cos^2 x} \times \cos^2 x\,du$$

$$= \int_0^1 e^u\,du = e^u\big|_0^1 = e - 1$$

15) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x \sin^3 x\,dx$

$$\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2\sin x \cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+\sin^2 x) + C$$

$$= \int_1^2 \frac{2u}{1+u}\,du = \int_1^2 \left(2 - \frac{2}{u+1}\right)du$$

$$= (2u - 2\ln|u+1|)\big|_1^2$$

$$= (4 - 2\ln 3) - (2 - 2\ln 2) = 2 - 2\ln\frac{2}{3}$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+\cos x}\,dx$$

$$u = 1 + \cos x \Longrightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x$$

$$\Longrightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$x = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow u = 1$$

$$x = 0 \Longrightarrow u = 2$$

$$= \int_2^1 \frac{2\sin x \cos x}{u} \times \frac{du}{-\sin x}$$

$$= \int_2^1 -\frac{2(u-1)}{u}\,du = \int_2^1 \frac{2-2u}{u}\,du$$

$$= \int_1^2 \frac{2u-2}{u}\,du = \int_1^2 \left(2 - \frac{2}{u}\right)du$$

$$= (2u - 2\ln|u|)\big|_1^2$$

$$= (4 - 2\ln 2) - (2 - 0)$$

$$= 2 - 2\ln 2$$

$$\int_1^4 \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$u = 1 + \sqrt{x} \Longrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Longrightarrow dx = 2\sqrt{x}\,du$$

$$x = 4 \Longrightarrow u = 3$$

$$x = 1 \Longrightarrow u = 2$$

$$= \frac{3}{7}u^{\frac{7}{3}} - \frac{15}{2}u^{\frac{4}{3}} + C$$

$$= \frac{3}{7}(x+10)^{\frac{7}{3}} - \frac{15}{2}(x+10)^{\frac{4}{3}} + C$$

$$\int \left(\sec^2\frac{x}{2}\tan^7\frac{x}{2}\right)dx$$

$$u = \tan\frac{x}{2} \Longrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}$$

$$\Longrightarrow dx = \frac{2du}{\sec^2\frac{x}{2}}$$

$$= \int \sec^2\frac{x}{2}u^7 \times \frac{2du}{\sec^2\frac{x}{2}}$$

$$= 2\int u^7\,du = \frac{1}{4}u^8 + C$$

$$= \frac{1}{4}\tan^8\frac{x}{2} + C$$

$$\int \frac{\sec^3 x + e^{\sin x}}{\sec x}dx$$

$$= \int (\sec^2 x + \cos x\, e^{\sin x})\,dx$$

$$= \int \sec^2 x\,dx + \int \cos x\, e^{\sin x}\,dx$$

$$u = \sin x \Longrightarrow \frac{du}{dx} = \cos x$$

$$\Longrightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$= \int \sec^2 x\,dx + \int \cos x\, e^u \times \frac{du}{\cos x}$$

$$= \tan x + \int e^u\,du$$

$$= \tan x + e^u + C$$

$$\int \frac{2e^x - 2e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2}dx$$

$$u = e^x + e^{-x} \Longrightarrow \frac{du}{dx} = e^x - e^{-x} \Longrightarrow dx = \frac{du}{e^x - e^{-x}}$$

$$= \int \frac{2(e^x - e^{-x})}{u^2} \times \frac{du}{e^x - e^{-x}}$$

$$= \int 2u^{-2}\,du = -2u^{-1} + C$$

$$= -\frac{2}{e^x + e^{-x}} + C$$

$$\int \frac{-x}{(x+1)\sqrt{x+1}}dx$$

$$u = x + 1 \Longrightarrow dx = du\ \ x = u - 1$$

$$= \int \frac{1-u}{u\sqrt{u}}du = \int \frac{1-u}{u^{\frac{3}{2}}}du$$

$$= \int \left(u^{-\frac{3}{2}} - u^{-\frac{1}{2}}\right)du$$

$$= -2u^{-\frac{1}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= -2(x+1)^{-\frac{1}{2}} - 2(x+1)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{x+1}} - 2\sqrt{x+1} + C$$

$$\int x\sqrt[3]{x+10}\,dx$$

$$u = x + 10$$

$$\Longrightarrow dx = du, \qquad x = u - 10$$

$$= \int (u-10)u^{\frac{1}{3}}\,du$$

$$= \int \left(u^{\frac{4}{3}} - 10u^{\frac{1}{3}}\right)du$$

$$= -\int u^{-5}\,du = \frac{1}{4}u^{-4} + C$$

$$= \frac{1}{4}\cos^{-4}x + C = \frac{1}{4}\sec^4 x + C$$

$$\int \frac{x-10}{x^2-2x-8}\,dx$$

$$\frac{x-10}{x^2-2x-8}$$

$$= \frac{x-10}{(x-4)(x+2)}$$

$$= \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2}$$

$$A(x+2) + B(x-4) = x - 10$$

$$x = 4 \Longrightarrow A = -1$$

$$x = -2 \Longrightarrow B = 2$$

$$\int \frac{x-10}{x^2-2x-8}\,dx$$

$$x = -2 \Longrightarrow B = 2$$

$$\int \frac{x-10}{x^2-2x-8}\,dx$$

$$= \int \left(-\frac{1}{x-4} + \frac{2}{x+2}\right) dx$$

$$= -\ln|x-4| + 2\ln|x+2| + C$$

$$= \int \left(-\frac{1}{x-4} + \frac{2}{x+2}\right) dx$$

$$= -\ln|x-4| + 2\ln|x+2| + C$$

$$\int \frac{8x+24}{(x+1)(x-3)^2}\,dx$$

$$\frac{8x+24}{(x+1)(x-3)^2}$$

$$= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2}$$

$$= \tan x + e^{\sin x} + C$$

$$\int \left(1 + \sqrt[3]{\sin x}\right)\cos^3 x\,dx$$

$$u = \sin x \Longrightarrow \frac{du}{dx} = \cos x$$

$$\Longrightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$= \int \left(1 + u^{\frac{1}{3}}\right)\cos^3 x \frac{du}{\cos x}$$

$$= \int \left(1 + u^{\frac{1}{3}}\right)\cos^2 x\,du$$

$$= \int \left(1 + u^{\frac{1}{3}}\right)(1 - \sin^2 x)\,du$$

$$= \int \left(1 + u^{\frac{1}{3}}\right)(1 - u^2)\,du$$

$$= \int \left(1 + u^{\frac{1}{3}}\right)(1 - u^2)\,du$$

$$= \int \left(1 - u^2 + u^{\frac{1}{3}} - u^{\frac{7}{3}}\right) du$$

$$= u - \frac{1}{3}u^3 + \frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{10}u^{\frac{10}{3}} + C$$

$$= \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + \frac{3}{4}\sin^{\frac{4}{3}} x - \frac{3}{10}\sin^{\frac{10}{3}} x + C$$

$$\int \sin x \sec^5 x\,dx$$

$$= \int \sin x \cos^{-5} x\,dx$$

$$u = \cos x \Longrightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x$$

$$\Longrightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$= \int \sin x\, u^{-5} \times \frac{du}{-\sin x}$$

$$A(x-3)^2 + B(x+1)(x-3) + C(x+1)$$
$$= 8x + 24$$

$x = -1 \Longrightarrow A = 1$

$x = 3 \Longrightarrow C = 12$

$x = 0 \Longrightarrow 9A - 3B + C = 24$
$\Longrightarrow 9 - 3B + 12 = 24$

$\Longrightarrow B = -1$

$$\int \frac{8x+24}{(x+1)(x-3)^2}\,dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{-1}{x-3} + \frac{12}{(x-3)^2}\right) dx$$

$$= \ln|x+1| - \ln|x-3| - \frac{12}{x-3} + C$$

$$\int \frac{4}{x^3 - 2x^2}\,dx$$

$$\frac{4}{x^3 - 2x^2} = \frac{4}{x^2(x-2)}$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2}$$

$$A(x)(x-2) + B(x-2) + C(x^2) = 4$$

$x = 0 \Longrightarrow B = -2$

$x = 2 \Longrightarrow C = 1$

$x = 1 \Longrightarrow -A - B + C = 4 \Longrightarrow -A + 2 +$
$= 4 \Longrightarrow A = -1$

$$\int \frac{4}{x^3 - 2x^2}\,dx$$

$$= \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{-2}{x^2} + \frac{1}{x-2}\right) dx$$

$$= -\ln|x| + \frac{2}{x} + \ln|x-2| + C$$

$$= \ln\left|\frac{x-2}{x}\right| + \frac{2}{x} + C$$

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

18) $\displaystyle\int \frac{e^{2x} + e^x}{(e^{2x}+1)(e^x - 1)}\,dx$

19) $\displaystyle\int \frac{5\cos x}{\sin^2 x + 3\sin x - 4}\,dx$

20) $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x + 5\tan x + 6}\,dx$

18) $u = e^x \Longrightarrow du = e^x dx$

$$\Longrightarrow dx = \frac{du}{e^x}$$

$$\int \frac{e^{2x} + e^x}{(e^{2x}+1)(e^x - 1)}\,dx$$

$$= \int \frac{e^x(u+1)}{(u^2+1)(u-1)} \times \frac{du}{e^x}$$

$$= \int \frac{u+1}{(u^2+1)(u-1)}\,du$$

$$\frac{u+1}{(u^2+1)(u-1)}$$
$$= \frac{Au+B}{u^2+1} + \frac{C}{u-1}$$

$$(Au+B)(u-1) + C(u^2+1)$$
$$= u + 1$$

$u = 1 \Longrightarrow C = 1$

$u = 0 \Longrightarrow -B + C = 1 \Longrightarrow -B + 1$
$= 1 \Longrightarrow B = 0$

$u = -1 \Longrightarrow 2A - 2B + 2C = 0$
$\Longrightarrow 2A + 2 = 0 \Longrightarrow A$
$= -1$

$$\int \frac{e^{2x} + e^x}{(e^{2x}+1)(e^x - 1)}\,du$$

$$= \int \left(\frac{-u}{u^2+1} + \frac{1}{u-1}\right) du$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(u^2+1) + \ln|u-1| + ($$

$$= -\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + \ln|e^x-1| \cdot$$

19) $u = \sin x$

$$\Longrightarrow \frac{du}{dx} = \cos x$$

$$\Longrightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$\int \frac{5\cos x}{\sin^2 x + 3\sin x - 4}\,dx$$

$$= \int \frac{5\cos x}{u^2+3u-4} \times \frac{du}{\cos x}$$

$$= \int \frac{5}{u^2+3u-4}\,du$$

$$\frac{5}{u^2+3u-4} = \frac{5}{(u+4)(u-1)}$$

$$= \frac{A}{u+4} + \frac{B}{u-1}$$

$$A(u-1) + B(u+4) = 5$$

$$u = 1 \Longrightarrow B = 1$$

$$u = -4 \Longrightarrow A = -1$$

$$\int \frac{5}{u^2+3u-4}\,du$$

$$= \int \left(\frac{-1}{u+4} + \frac{1}{u-1}\right) du$$

$$= -\ln|u+4| + \ln|u-1| + C$$

$$\Longrightarrow \int \frac{5\cos x}{\sin^2 x + 3\sin x - 4}\,dx = -\ln|4+\sin x| + \ln|-1+\sin x| + C$$

$$= \ln\left|\frac{-1+\sin x}{4+\sin x}\right|$$

20) $u = \tan x \Longrightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x$

$$\Longrightarrow du = \sec^2 x\,dx$$

$$\int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x + 5\tan x + 6}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{u^2+5u+6}\,du$$

$$\frac{1}{u^2+5u+6} = \frac{1}{(u+3)(u+2)}$$

$$= \frac{A}{u+3} + \frac{B}{u+2}$$

$$A(u+2) + B(u+3) = 1$$

$$u = -3 \Longrightarrow A = -1$$

$$u = -2 \Longrightarrow B = 1$$

$$\Longrightarrow \int \frac{1}{u^2+5u+6}\,du$$

$$= \int \left(\frac{-1}{u+3} + \frac{1}{u+2}\right) du$$

$$= \ln|u+2| - \ln|u+3| + C$$

$$\Longrightarrow \int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x + 5\tan x + 6}\,dx$$

$$= \ln\left|\frac{2+\tan x}{3+\tan x}\right| + c$$

أُثبِت أنَّ:

$$\int_0^1 \frac{4x}{x^2-2x-3}\,dx = \ln\left(\frac{16}{27}\right)$$

$$\frac{4x}{x^2-2x-3} = \frac{4x}{(x-3)(x+1)}$$

$$= \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$$

$$= 2 - \ln|2| + \frac{1}{2}\ln 5 - 0 + \ln 1 - \frac{1}{2}\ln 3$$

$$= 2 - \frac{1}{2}\ln 4 + \frac{1}{2}\ln 5 - \frac{1}{2}\ln 3$$

$$= 2 + \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 4 - \ln 3)$$

$$= 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{5}{12}$$

$$\int \cos x \ln \sin x \, dx$$

$u = \ln \sin x \qquad dv = \cos x dx$

$du = \frac{\cos x}{\sin x} dx \qquad v = \sin x$

$$= \sin x \ln \sin x - \int \cos x \, dx$$

$$= \sin x \ln \sin x - \sin x + C$$

$$\int e^x \ln(1+e^x)\, dx$$

$u = \ln\left(1+e^x\right) \qquad dv = e^x dx$

$du = \frac{e^x}{1+e^x} dx \qquad v = e^x$

$$= e^x \ln\left(1+e^x\right) - \int \frac{e^{2x} \ln}{1+e^x} dx$$

$$= e^x \ln\left(1+e^x\right) - \int \left(e^x + \frac{-1}{1+e^x}\right) dx$$

$$= e^x \ln\left(1+e^x\right) - \int \left(e^x + \frac{-e^{-x}}{1+e^x}\right) dx$$

$$= e^x \ln\left(1+e^x\right) - e^x + \ln\left(1+e^x\right) + C$$

$A(x+1) + B(x-3) = 4x$

$x = 3 \Longrightarrow A = 3$

$x = -1 \Longrightarrow B = 1$

$$\int_0^1 \frac{4x}{x^2 - 2x - 3} dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{3}{x-3} + \frac{1}{x+1}\right) dx$$

$$= (3\ln|x-3| + \ln|x+1|)|_0^1$$

$$= (3\ln 2 + \ln 2) - (3\ln 3)$$

$$= \ln 8 + \ln 2 - \ln 27 = \ln\frac{16}{27}$$

$$\int_0^1 \frac{4x^2 + 9x + 4}{2x^2 + 5x + 3} dx$$

37) $\frac{4x^2 + 9x + 4}{2x^2 + 5x + 3} = 2 - \frac{x+2}{2x^2 + 5x +}$

$$\frac{x+2}{2x^2 + 5x + 3} = \frac{x+2}{(x+1)(2x+3)}$$

$$= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x+3}$$

$$\Longrightarrow x + 2 = A(2x+3) + B(x+1)$$

$x = -1 \Longrightarrow A = 1$

$x = -\frac{3}{2} \Longrightarrow B = -1$

$$\int_0^1 \frac{4x^2 + 9x + 4}{2x^2 + 5x + 3} dx = \int_0^1 \left(2 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2x+3}\right) dx$$

$$= \left(2x - \ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|2x+3|\right)$$

$$\int_1^2 \ln x\,dx = x\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 dx$$

$$= x\ln x\Big|_1^2 - x\Big|_1^2 = 2\ln 2 - \ln 1 - 2 + 1$$

$$= 2\ln 2 - 1$$

$$\int_1^2 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_1^2 = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\int_1^2 \ln\left(xe^x\right)dx = 2\ln 2 - 1 + \frac{3}{2} = 2\ln 2 + \frac{1}{2}$$

$$\int_{\pi/12}^{\pi/9} x\sec^2 3x\,dx$$

$u = x$ $\qquad dv = \sec^2 3x dx$

$du = dx$ $\qquad v = \frac{1}{3}\tan 3x$

$$= \frac{1}{3}x\tan 3x\Big|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} - \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} \frac{1}{3}\tan 3x\,dx$$

$$= \frac{1}{3}x\tan 3x\Big|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} - \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} \frac{1}{3}\frac{\sin 3x}{\cos 3x}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}x\tan 3x\Big|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} + \frac{1}{9}\ln\cos 3x\Big|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}}$$

$$= \frac{\pi}{27}\tan\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{36}\tan\frac{\pi}{4} + \frac{1}{9}\ln\cos\frac{\pi}{3} - \frac{1}{9}\ln\cos\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\pi\sqrt{3}}{27} - \frac{\pi}{36} + \frac{1}{9}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{9}\ln\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\int_1^e x^4\ln x\,dx$$

$u = \ln x$ $\qquad dv = x^4 dx$

$$\int_0^{\pi/2} e^x\cos x\,dx$$

وجدنا في المثال 3 أن:

$$\int e^x\cos x\,dx = \frac{1}{2}e^x\left(\sin x + \cos x\right) + C$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\,dx = \frac{1}{2}e^x\left(\sin x + \cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}$$

$$\int_1^e \ln x^2\,dx$$

$u = 2\ln x$ $\qquad dv = dx$

$du = \frac{2}{x}dx$ $\qquad v = x$

$$\int e^x\cos x\,dx = \frac{1}{2}e^x\left(\sin x + \cos x\right) + C$$

$$= 2x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e 2\,dx = 2x\ln x\Big|_1^e - 2x\Big|_1^e$$

$$= 2e\ln e - 2\ln 1 - 2e + 2$$

$$= 2e - 0 - 2e + 2 = 2$$

$$\int_1^2 \ln(xe^x)\,dx$$

$$\int_1^2 \ln\left(xe^x\right)dx = \int_1^2 \left(\ln x + \ln e^x\right)dx$$

$$= \int_1^2 \left(\ln x + x\right)dx = \int_1^2 \ln x\,dx + \int_1^2 x\,dx$$

$u = \ln x$ $\qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{x}dx$ $\qquad v = x$

$$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = \frac{1}{5}x^5$$

$$= \frac{1}{5}x^5 \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{5}x^4 \, dx$$

$$= \frac{1}{5}x^5 \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{25}x^5 \Big|_1^e$$

$$= \frac{1}{5}e^5 - 0 - \frac{1}{25}e^5 + \frac{1}{25} = \frac{4e^5+1}{25}$$

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x \, dx$$

$f(x)$ ومشـــتقاته المتكررة		$g(x)$ وتكاملاتـــه المتكررة
x^2	$+$	$\sin x$
$2x$	$-$	$-\cos x$
2	$+$	$-\sin x$
0		$\cos x$

$$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2$$

$$\int_0^1 x(e^{-2x} + e^{-x}) \, dx$$

$$u = x \qquad dv = \left(e^{-2x} + e^{-x}\right)dx$$

$$du = dx \qquad v = -\frac{1}{2}e^{-2x} - e^{-x}$$

$$= -\frac{1}{2}xe^{-2x} - xe^{-x}\Big|_0^1 - \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}e^{-2x} - e^{-x}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{2}xe^{-2x} - xe^{-x}\Big|_0^1 - \left(\frac{1}{4}e^{-2x} + e^{-x}\right)\Big|_0^1$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2} - e^{-1} - \frac{1}{4}e^{-2} - e^{-1} + \frac{1}{4} + 1$$

$$= -\frac{3}{4}e^{-2} - 2e^{-1} + \frac{5}{4}$$

$$\int_0^1 \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx$$

$$u = xe^x \qquad dv = (1+x)^{-2}\, dx$$

$$du = \left(xe^x + e^x\right)dx \qquad v = -(1+x)^{-1}$$

$$= e^x(x+1)dx$$

$$= -xe^x(1+x)^{-1}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{e^x(x+1)}{(1+x)} dx$$

$$= -\frac{xe^x}{1+x}\Big|_0^1 - e^x\Big|_0^1$$

$$= -\frac{e}{2} - e - 1 = \frac{1}{2}e - 1$$

$$\int_0^1 x\, 3^x \, dx$$

$$u = x \qquad dv = 3^x dx$$

$$du = dx \qquad v = \frac{3^x}{\ln 3}$$

$$= x\frac{3^x}{\ln 3}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{3^x}{\ln 3} dx$$

$$\int \cos(\ln x)\,dx = \frac{1}{2}e^{\ln x}(\sin\ln x + \cos\ln x) + C$$

$$= \frac{1}{2}x(\sin\ln x + \cos\ln x) + C$$

$$\int x^3 \sin x^2\,dx$$

$$y = x^2 \Rightarrow dx = \frac{dy}{2x}$$

$$\Rightarrow \int x^3 \sin y\,\frac{dy}{2x} = \int \frac{1}{2}x^2 \sin y\,dy$$

$$= \int \frac{1}{2} y \sin y\,dy$$

$u = \frac{1}{2}y \qquad dv = \sin y\,dy$

$du = \frac{1}{2}dy \qquad v = -\cos y$

$$\int \frac{1}{2} y \sin y\,dy = -\frac{1}{2}y\cos y + \int \frac{1}{2}\cos y\,dy$$

$$= -\frac{1}{2}y\cos y + \frac{1}{2}\sin y + C$$

$$\int x^3 \sin x^2\,dx = -\frac{1}{2}x^2\cos x^2 + \frac{1}{2}\sin x^2 + C$$

$$\int e^{\cos x}\sin 2x\,dx$$

$$y = \cos x \Rightarrow dx = \frac{dy}{-\sin x}$$

$$\int e^{\cos x}\sin 2x\,dx = \int e^y(2\sin x\cos x)\frac{dy}{-\sin x}$$

$$= \int -2ye^y\,dy$$

$u = -2y \qquad dv = e^y dy$

$du = -2dy \qquad v = e^y$

$$= x\frac{3^x}{\ln 3}\Big|_0^1 - \frac{3^x}{(\ln 3)^2}\Big|_0^1$$

$$= \frac{3}{\ln 2} - \frac{3}{(\ln 3)^2} + \frac{1}{(\ln 3)^2} = \frac{3\ln 3 - 2}{(\ln 3)^2}$$

$$\int x^3 e^{x^2}\,dx$$

$$y = x^2 \Rightarrow dx = \frac{dy}{2x}$$

$$\int x^3 e^{x^2}\,dx = \int x^3 e^y\,\frac{dy}{dx}$$

$$= \int \frac{1}{2}x^2 e^y\,dy = \int \frac{1}{2}ye^y\,dy$$

$u = \frac{1}{2}y \qquad dv = e^y dy$

$du = \frac{1}{2}dy \qquad v = e^y$

$$\int \frac{1}{2}ye^y\,dy = \frac{1}{2}ye^y - \int \frac{1}{2}e^y\,dy$$

$$= \frac{1}{2}ye^y - \frac{1}{2}e^y + C$$

$$\int x^3 e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

$$\int \cos(\ln x)\,dx$$

$y = \ln x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x\,dy \quad , \quad x = e^y$

$$\int \cos(\ln x)\,dx = \int x\cos y\,dy = \int e^y\cos y\,dy$$

$$\int e^y\cos y\,dy = \frac{1}{2}e^y(\sin y + \cos y) + C$$

$$\int \frac{1}{x\ln x^3}dx = \int \frac{1}{3x\ln x}dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|\ln x| + C$$

إذا كان:

$\int_1^a \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x+3}\right)dx = 0.5\ln 5$ ،

فأجد قيمة الثابت a

$$\int_1^a \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x+3}\right)dx$$

$$= \left(\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|2x+3|\right)\Big|_1^a$$

$$= \left(\ln a - \frac{1}{2}\ln(2a+3)\right) - \left(-\frac{1}{2}\ln 5\right)$$

$$= \ln a - \frac{1}{2}\ln(2a+3) + \frac{1}{2}\ln 5$$

$$= \ln\frac{a}{\sqrt{2a+3}} + \frac{1}{2}\ln 5$$

$$\Rightarrow \ln\frac{a}{\sqrt{2a+3}} + \frac{1}{2}\ln 5 = 0.5\ln 5$$

$$\Rightarrow \ln\frac{a}{\sqrt{2a+3}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sqrt{2a+3}} = 1$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{2a+3}$$

$$\Rightarrow a^2 = 2a+3$$

$$\Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (a-3)(a+1) = 0$$

$$\int -2ye^y\,dy = -2ye^y - \int 2e^y\,dy$$

$$= -2ye^y + 2e^y + C$$

$$\int e^{\cos x}\sin 2x\,dx = -2\cos x e^{\cos x} + 2e^{\cos x} + C$$

$$\int \sin\sqrt{x}\,dx$$

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2y} \Rightarrow dx = 2y\,dy$$

$$\int \sin\sqrt{x}\,dx = \int 2y\sin y\,dy$$

$u = 2y$ $\quad dv = \sin y\,dy$

$du = 2dy$ $\quad v = -\cos y$

$$\int 2y\sin y\,dy = -2y\cos y + \int 2\cos y\,dy$$

$$= -2y\cos y + 2\sin y + C$$

$$\int \sin\sqrt{x}\,dx = -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + C$$

إذا كان: $\int_0^{\ln a}(e^x + e^{-x})\,dx = \frac{48}{7}$ ، فأجد قيمة الثابت a، حيث: $a > 0$

$$\int_0^{\ln a}(e^x + e^{-x})\,dx = \frac{48}{7}$$

$$\Rightarrow \left(a - \frac{1}{a}\right) - (1-1) = \frac{48}{7}$$

$$\Rightarrow a - \frac{1}{a} = \frac{48}{7}$$

$$\Rightarrow 7a^2 - 48a - 7 = 0$$

$$\Rightarrow (7a+1)(a-7) = 0$$

$\Rightarrow a = -\frac{1}{7}$ (تُرفض), $a = 7$

$$\Rightarrow a = 3 \,, a = -1$$

مثال:

: تسرب نفط من ناقلة بحرية، مكوناً بقعة دائرية الشكل على سطح الماء، نصف قطرها $R(t)$ قدماً بعد دقيقة من بدء التسرب. إذا كان نصف قطر الدائرة يزداد بمعدل: $R'(t) = \frac{21}{0.07t+5}$، فأجد $R(t)$، علماً بأن $R = 0$ عندما $t = 0$

$$R(t) = \int \frac{21}{0.07t+5}\,dt$$
$$= \frac{21}{0.07}\int \frac{0.07}{0.07t+5}\,dt = 300\ln|0.07t+5| + C$$
$$R(0) = 300\ln 5 + C$$
$$0 = 300\ln 5 + C \Longrightarrow C = -300\ln 5$$
$$R(t) = 300\ln\left|\frac{0.07t+5}{5}\right|$$
$$\Rightarrow 300\ln|0.014t+1|$$

مثال:

يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = 3\cos t$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية:

1) إذا بدأ الجُسيم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقع الجُسيم بعد $\frac{\pi}{6}$ ثانية من بدء الحركة.

2) أجد إزاحة الجُسيم في الفترة $[0, 2\pi]$

3) أجد المسافة الكلية التي قطعها الجُسيم في الفترة $[0, 2\pi]$

1)
$$s(t) = \int v(t)\,dt = \int 3\cos t\,dt$$
$$= 3\sin t + C$$
$$s(0) = 3\sin 0 + C$$
$$0 = 3\sin 0 + C \Longrightarrow C = 0$$
$$s(t) = 3\sin t$$
$$s\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1.5\text{ m}$$

2)
$$s(2\pi) - s(0) = 3\sin(2\pi) - 3\sin(0)$$
$$= 0\text{ m}$$

3)
$$|v(t)| = |3\cos t|$$
$$= \begin{cases} 3\cos t &, \quad 0 \le t < \frac{\pi}{2} \\ -3\cos t &, \quad \frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3\pi}{2} \\ 3\cos t &, \quad \frac{3\pi}{2} < t \le 2\pi \end{cases}$$
$$\int_0^{2\pi} |v(t)|\,dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} -3\cos t\,dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 3\cos t\,dt$$
$$= 3\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 3\sin t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + 3\sin t\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$$
$$= (3-0) - (-3-3) + \big(0 - (-3)\big)$$
$$= 12\text{ m}$$

ممّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ ، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y = f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

$$f'(x) = e^{-x} + x^2\ ;\ (0\,,4)$$

$$f(x) = \int (e^{-x} + x^2)\, dx$$

$$= -e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$f(x) = -e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$f(0) = -1 + C$$

$$4 = -1 + C \Rightarrow C = 5$$

$$\Rightarrow f(x) = -e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 + 5$$

يُمثِّل الاقتران: $\frac{dy}{dx} = e^{2x} - 2e^{-x}$ ميل المماس لمنحنى الاقتران y. أجد قاعدة الاقتران y إذا علمتُ أنَّ منحناه يمرُّ بالنقطة $(0\,,1)$

$$y = \int (e^{2x} - 2e^{-x})\, dx$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^{-x} + C$$

$$y|_{x=0} = \frac{1}{2} + 2 + C$$

$$1 = \frac{5}{2} + C \Rightarrow C = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^{-x} - \frac{3}{2}$$

اذا كان: $\int_{\pi/9}^{\pi} (9 + \sin 3x)\, dx = a\pi + b$ ، فأجد قيمة الثابتين النسبيين: $a\ \ b$،

$$\int_{\frac{\pi}{9}}^{\pi} (9 + \sin 3x)\, dx$$

$$= \left(9x - \frac{1}{3}\cos 3x\right)\Big|_{\frac{\pi}{9}}^{\pi}$$

$$= 9\pi - \frac{1}{3}\cos 3\pi - \pi + \frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{3}$$

$$= 8\pi + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 8\pi + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\ 8\pi + \frac{1}{2} = a\pi + b$$

ونظراً لأن a و b نسبيان، فلا يوجد حل لهذه المعادلة سوى أ

يكون $a = 8\,, b = \frac{1}{2}$

يُمثِّل الاقتران: $f'(x) = \cos^2 x =$ ميل المماس لمنحنـ الاقتران $f(x)$. أجد قاعدة الاقتران f إذا علمتُ أنَّ منحناه يمرُّ بنقطة الأصل

$$f(x) = \int \cos^2 x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (1 + \cos 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C$$

$$f(0) = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{2}\sin 0\right) + C$$

$$0 = 0 + C \Rightarrow C = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$$

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = e^{-2t}$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَيْم هو $3\ m$ ، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1) موقع الجُسَيْم بعد t ثانية.

2) موقع الجُسَيْم بعد 100 ثانية.

$$s(t) = \int e^{-2t}\,dt = -\frac{1}{2}e^{-2t} + C$$

$$s(0) = -\frac{1}{2} + C = 3 \Rightarrow C = \frac{7}{2}$$

$$3 = -\frac{1}{2} + C \Rightarrow \ C = \frac{7}{2}$$

$$s(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{7}{2}$$

$$s(100) = -\frac{1}{2}e^{-200} + \frac{7}{2} \approx 3.5\ \text{m}$$

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = \sin\omega t\cos^2\omega t$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية، و ω ثابت. إذا انطلق الجُسَيْم من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد t ثانية

$$s(t) = \int \sin\omega t\cos^2\omega t\,dt$$

$$u = \cos\omega t$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = -\omega\sin\omega t$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{-\omega\sin\omega t}$$

$$s(t) = \int \sin\omega t\,u^2\frac{du}{-\omega\sin\omega t}$$

$$= -\frac{1}{\omega}\int u^2\,du = \frac{-1}{3\omega}u^3 + C$$

$$\Rightarrow s(t) = \frac{-1}{3\omega}\cos^3\omega t + C$$

لكن $s(0) = 0$ أن الجسيم انطلق من نقطة الأصل

$$s(0) = \frac{-1}{3\omega} + C$$

$$0 = \frac{-1}{3\omega} + C \Rightarrow C = \frac{1}{3\omega}$$

$$\Rightarrow s(t) = -\frac{1}{3\omega}\cos^3\omega t + \frac{1}{3\omega}$$

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = t\,e^{-t/2}$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم الحركة من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد t ثانية.

) $s(t) = \int t\,e^{\frac{-t}{2}}\,dt$

$u = t \qquad dv = e^{-\frac{t}{2}}dx$

$du = dt \qquad v = -2e^{-\frac{t}{2}}$

$$= -2t\,e^{\frac{-t}{2}} - \int -2e^{\frac{-t}{2}}\,dt$$

$$= -2t\,e^{\frac{-t}{2}} - 4e^{\frac{-t}{2}} + C$$

$$s(0) = 0 - 4 + C$$

$$0 = 0 - 4 + C \Rightarrow C = 4$$

$$s(t) = -2t\, e^{\frac{-t}{2}} - 4e^{\frac{-t}{2}} + 4$$

في كلٍّ ممّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ ، ونقطة يمر بها منحنى $y = f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

1) $f'(x) = (x+2)\sin x \, ; (0\,,2)$

2) $f'(x) = 2xe^{-x} ; (0\,,3)$

1) $f(x) = \int (x+2)\sin x \, dx$

$u = x+2 \qquad dv = \sin x dx$

$du = dx \qquad v = -\cos x$

$f(x) = -(x+2)\cos x + \int \cos x \, dx$

$= -(x+2)\cos x + \sin x + C$

$f(0) = -2 + 0 + C$

$2 = -2 + 0 + C \Rightarrow C = 4$

$f(x) = -(x+2)\cos x + \sin x + 4$

2) $f(x) = \int 2xe^{-x} \, dx$

$u = 2x \qquad dv = e^{-x} dx$

$du = 2dx \qquad v = -e^{-x}$

$f(x) = -2xe^{-x} + \int 2e^{-x} \, dx$

$= -2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$

$f(0) = 0 - 2 + C$

$3 = -2 + C \Rightarrow C = 5$

$f(x) = -2xe^{-x} - 2e^{-x} + 5$

دورة تدريبية: تقدَّمت دعاء لدورة تدريبية مُتقدِّمة في الطباعة. إذا كان عدد الكلمات التي تطبعها دعاء في الدقيقة يزداد بمُعدَّل: $N'(t) = (t+6)e^{-0.25t}$ ، حيث $N(t)$ عدد الكلمات التي تطبعها دعاء في الدقيقة بعد t أسبوعًا من التحاقها بالدورة، فأجد $N(t)$ ، علمًا بأنَّ دعاء كانت تطبع 40 كلمة في الدقيقة عند بَدْء الدورة.

$N(t) = \int (t+6)e^{-0.25t} \, dt$

$u = t+6 \qquad dv = e^{-0.25t} dt$

$du = dx \qquad v = -4e^{-0.25t}$

$N(t) = -4(t+6)e^{-0.25t} + \int 4e^{-0.25t} \, dt$

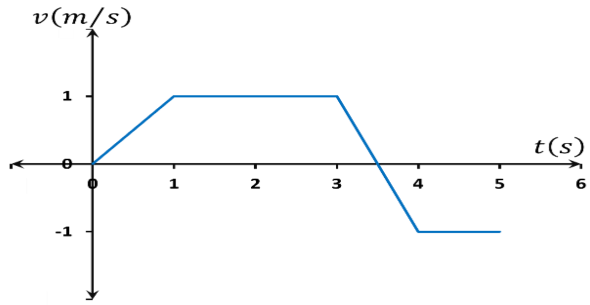
$= -4(t+6)e^{-0.25t} - 16e^{-0.25t} + C$

$N(0) = -24 - 16 + C$

$40 = -24 - 16 + C \Rightarrow C = 80$

$N(t) = -4(t+6)e^{-0.25t} - 16e^{-0.25t} + 80$

يبين الشكل المجاور منحنى السرعة المتجهة - الزمن لجسيم يتحرك على المحور x في الفترة الزمنية $[0,5]$
إذا بدأ الجسيم الحركة من $x=3$ عندما $t=0$ فأجد كلاً مما يأتي:



1) إزاحة الجسيم في الفترة الزمنية المعطاة.

2) المسافة التي قطعها الجسيم في الفترة الزمنية المعطاة.

3) الموقع النهائي للجسيم.

a) لتكن الازاحة D

$$D=s(5)-s(0)$$

$$=\int_0^5 v(t)\,dt=A(R_1)-A(R_2)$$

$$=\frac{1}{2}(2+3.5)(1)-\frac{1}{2}(1+1.5)(1)=1.5\text{m}$$

b) المسافة التي قطعها الجسيم هي:

$$\int_0^5 |v(t)|\,dt=A(R_1)+A(R_2)$$

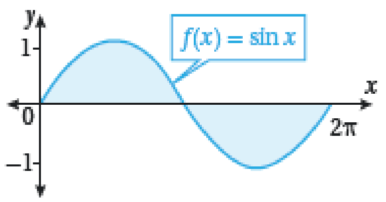
$$=\frac{1}{2}(5.5)+\frac{1}{2}(2.5)=4\text{m}$$

c) $s(5)-s(0)=1.5$

$s(0)=3$

$s(5)-3=1.5 \Rightarrow s(5)=4.5$

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلين البيانيين الآتيين، مُبرِّرًا إجابتي:



$\sin x=0 \Rightarrow x=0,\pi,2\pi$

$$A=\int_0^{\pi}\sin x\,dx+\left(-\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\,dx\right)$$

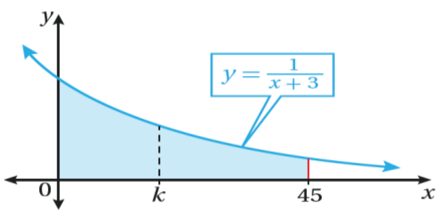
$$=(-\cos x)|_0^{\pi}+(\cos x)|_{\pi}^{2\pi}$$

$$=-\cos\pi+\cos 0+\cos 2\pi-\cos\pi$$

$$=4$$

يُبيّن الشكل المجاور المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $y=\frac{1}{x+3}$ ، والمحور x، والمستقيمين: $x=0$ ، و $x=45$

التي تقسم المنطقة المُظلَّلة إلى منطقتين متساويتين في المساحة. أجد قيمة k



$$A=\int_0^{45}\frac{1}{x+3}\,dx$$

$$=\ln|x+3||_0^{45}$$

$$=\ln 48-\ln 3=\ln 16$$

$$\frac{1}{2}A=\int_0^{k}\frac{1}{x+3}\,dx$$

$$=\ln|x+3||_0^{k}$$

$$= \ln(k+3) - \ln 3 = \ln\frac{k+3}{3}$$

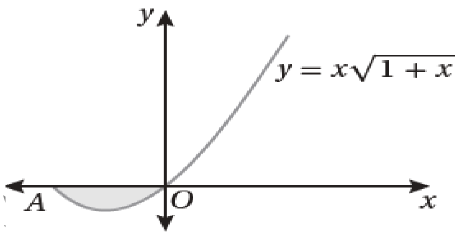
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln 16 = \ln\frac{k+3}{3}$$

$$\ln 16^{1/2} = \ln\frac{k+3}{3}$$

$$\Rightarrow 4 = \frac{k+3}{3} \Rightarrow k = 9$$

(يُبيِّن الشكل المجاور جزءًا من منحنى الاقتران:

$f(x) = x\sqrt{x+1}$ ، أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في هذا الشكل



$$x\sqrt{1+x} = 0 \Rightarrow x = 0\,, x = 1$$

$$A = -\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} -x\sqrt{1+x}\,dx$$

$$u = 1 + x \Rightarrow dx = du\,, x = u - 1$$

$$x = 0 \Rightarrow u = 1$$

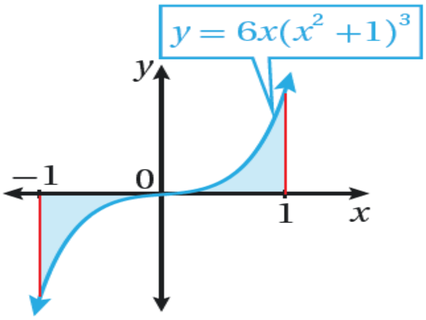
$$x = -1 \Rightarrow u = 0$$

$$= \int_{0}^{1} -x\sqrt{u}\,du = \int_{0}^{1} (1-u)\sqrt{u}\,du$$

$$= \int_{0}^{1} \left(u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{3}{2}}\right) du$$

$$= \left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{4}{5}$$

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة



$$= \int_{-1}^{0} 6x(x^2+1)^3\,dx + \int_{0}^{1} 6x(x^2+1)^3\,dx$$

$$u = x^2 + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$x = -1 \Rightarrow u = 2$$

$$x = 0 \Rightarrow u = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow u = 2$$

$$A = -\int_{2}^{1} 6xu^3\frac{du}{2x} + \int_{1}^{2} 6xu^3\frac{du}{2x}$$

$$= \int_{1}^{2} 3u^3\,du + \int_{1}^{2} 3u^3\,du$$

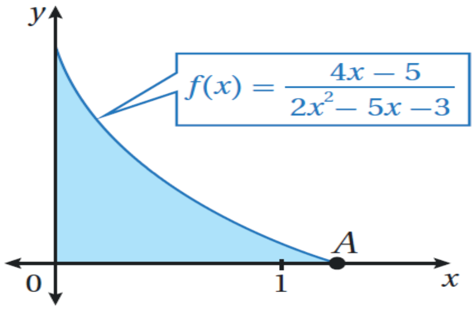
$$= \int_{1}^{2} 6u^3\,du = \frac{6}{4}u^4\Big|_{1}^{2} = \frac{45}{2}$$

يُبيِّن الشكل المجاور جزءًا من منحنى الاقتران:

$$f(x) = \frac{4x-5}{2x^2-5x-3}$$

1) أجد إحداثيي النقطة A

2) أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة.



1) $f(x) = 0 \Rightarrow 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{4}$

$\Rightarrow A\left(\frac{5}{4}, 0\right)$

2) $A = \int_0^{\frac{5}{4}} \frac{4x-5}{2x^2-5x-3}\,dx$

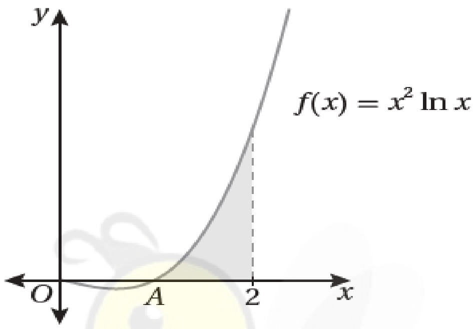
$= \ln|2x^2 - 5x - 3|\Big|_0^{\frac{5}{4}} = \ln\frac{49}{8} - \ln 3$

$= \ln\frac{49}{24}$

إذا كان الشكل المجاور يُمثِّل منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 \ln x$ ، حيث: $x \geq 0$ ، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

1) أجد إحداثيي كلٍّ من النقطة A .

2) أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة.



1) $f(x) = 0$

$\Rightarrow x^2 \ln x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$

$\therefore A(1,0)$

2) $A = \int_1^2 x^2 \ln x\,dx$

$u = \ln x \qquad dv = x^2 dx$

$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = \frac{1}{3}x^3$

$= \frac{1}{3}x^3 \ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{3}x^2\,dx$

$= \frac{1}{3}x^3 \ln x\Big|_1^2 - \frac{1}{9}x^3\Big|_1^2$

$= \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9}$

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين:

$f(x) = \frac{1}{x}$ ، و $g(x) = \frac{1}{x^2}$ ، والمستقيم $x = 2$

$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0$

$x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad , \quad x = 1$

لكن $x \neq 0$ لأن الاقترانين غير معرفين عند $x = 0$

اذن يتقاطع المنحنيان في نقطة واحدة $x = 1$

$A = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx = \left(\ln|x| + \frac{1}{x}\right)\Big|_1^2$

$= \left(\ln 2 + \frac{1}{2}\right) - (\ln 1 + 1) = \ln 2 - \frac{1}{2}$

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين:

$f(x) = \cos x$ ، و $g(x) = 1 - \cos x$ ،

والمستقيمين: $x = 0$ ، و $x = \pi$

$1 - \cos x = \cos x$

$2\cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$

$$\cos x > 1-\cos x \quad ,0<x<\frac{\pi}{3}$$

$$\cos x < 1-\cos x \quad ,\frac{\pi}{3}<x<\pi$$

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos x-\left(1-\cos x\right)\right)dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\left(1-\cos x-\left(\cos x\right)\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(2\cos x-1\right)dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\left(1-2\cos x\right)dx$$

$$=\left(2\sin x-x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}+\left(x-2\sin x\right)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$

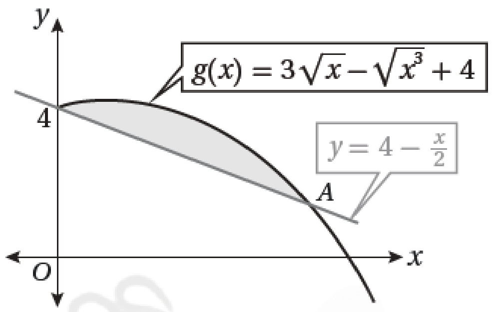
$$=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}+\pi-\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}$$

يُبيّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $g(x) = 3\sqrt{x} - \sqrt{x^3} + 4$ والمستقيم $y = 4 - \frac{x}{2}$

مُعتمِدًا هذا الشكل، أُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

8) أجد إحداثيي النقطة A

9) أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة.



$$3\sqrt{x}-\sqrt{x^3}+4=4-\frac{1}{2}x$$

$$3\sqrt{x}-\sqrt{x^3}+\frac{1}{2}x=0$$

$$\sqrt{x}\left(3-x+\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)=0$$

$$\sqrt{x}=0 \quad , \quad x-\frac{1}{2}\sqrt{x}-3=0$$

$$x=0 \quad , \quad 2x-\sqrt{x}-6=0$$

$$\sqrt{x}=u \Rightarrow x=u^2 \quad , \quad \sqrt{x}>0 \Rightarrow u>0$$

$$2x-\sqrt{x}-6=0 \Rightarrow 2u^2-u-6=0$$

$$(2u+3)(u-2)=0 \Rightarrow u=-\frac{3}{2}d, u=2 \Rightarrow x=4$$

$$\Rightarrow x=0 \quad , \quad x=4$$

$$\Rightarrow A(4,2)$$

9) $A=\int_0^4\left(\left(3\sqrt{x}-\sqrt{x^3}+4\right)-\left(4-\frac{1}{2}x\right)\right)dx$

$$=\int_0^4\left(3\sqrt{x}-\sqrt{x^3}+\frac{1}{2}x\right)dx$$

$$=\left(2x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{4}x^2\right)\Big|_0^4=16-\frac{64}{5}+4=\frac{36}{5}=7.2$$

(أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = \sqrt{2x}$ ، و $g(x) = x^2$ حول المحور x .

$$\sqrt{2x}=x^2 \Rightarrow 2x=x^4$$

$$x^4-2x=0$$

$$x\left(x^3-2\right)=0 \Rightarrow x=0 \quad , \quad x=\sqrt[3]{2}$$

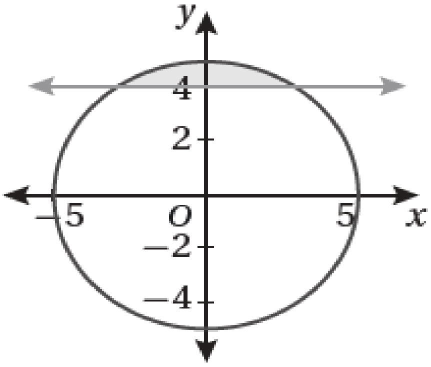
$$V=\pi\int_0^{\sqrt[3]{2}}\left(\left(\sqrt{2x}\right)^2-\left(x^2\right)^2\right)dx$$

$$V=\pi\int_0^{\sqrt[3]{2}}\left(2x-x^4\right)dx$$

$$= \pi \left(x^2 - \frac{1}{5} x^5 \right) \Big|_0^{\sqrt[3]{2}}$$

$$= \pi \left(\sqrt[3]{4} - \frac{2\sqrt[3]{4}}{5} \right) = \frac{3\pi\sqrt[3]{4}}{5}$$

يُبيّن الشكل المجاور دائرة معادلتها: $x^2 + y^2 = 25$. إذا دار الجزء المُظلَّل المحصور بين الدائرة والمستقيم $y = 4$ حول المحور x لتشكيل مُجسَّم، فأجد حجم المُجسَّم الناتج، مُبرِّرًا إجابتي.



$$y = 4 \Rightarrow x^2 + 16 = 25$$

$$x^2 = 9 \Rightarrow x = -3, x = 3$$

$$x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow y^2 = 25 - x^2$$

$$V = \pi \int_{-3}^{3} \left(y^2 - (4)^2 \right) dx$$

$$V = \pi \int_{-3}^{3} \left(25 - x^2 - 16 \right) dx$$

$$V = \pi \int_{-3}^{3} \left(9 - x^2 \right) dx = \pi \left(9x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-3}^{3}$$

$$= \pi \left((27 - 9) - (-27 + 9) \right) = 36\pi$$

) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = 4^x$ ، و $g(x) = 3^x$ ، والمستقيم $x = 1$ في الربع الأوَّل.

$$f(x) = g(x)$$

$$3^x = 4^x \Rightarrow x = 0$$

$$A = \int_0^1 \left(f(x) - g(x) \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(4^x - 3^x \right) dx = \left(\frac{4^x}{\ln 4} - \frac{3^x}{\ln 3} \right) \Big|_0^1$$

$$= \left(\frac{4}{\ln 4} - \frac{3}{\ln 3} \right) - \left(\frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 3} \right)$$

$$= \frac{3}{\ln 4} - \frac{2}{\ln 3} \approx 0.344$$

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = e^x$ ، و $g(x) = \cos x$ ، والمستقيم $= \frac{\pi}{2}$ في الربع الأوَّل.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow e^x = \cos x$$

نعلم من حلول هذه المعادلة الحل غير سالب $x = 0$

في الربع الاول: $\cos x \le 1$ يكون بينما $e^x \ge 1$

اذن: $e^x \ge \cos x$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^x - \cos x \right) dx = e^x - \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1 \right) - (1 - 0) = e^{\frac{\pi}{2}} - 2$$

أجد المساحة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = |x|$ ، و $g(x) = x^4$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^4 = |x|$$

$$\Rightarrow x^4 = x \quad or \quad x^4 = -x$$

$$x^4 = x \Rightarrow x^4 - x = 0$$

$$\Rightarrow x\left(x^3 - 1 \right) = 0$$

$$\Rightarrow x=0, x=1$$

$$x^4=-x \Rightarrow x^4+x=0$$

$$\Rightarrow x\left(x^3+1\right)=0$$

$$\Rightarrow x=0, x=-1$$

يتقاطع المنحنيان عند $x=-1, x=0, x=1$

ويكون في الفترتين $f(x)>g(x)$

$$A=\int_{-1}^{1}\left(f(x)-g(x)\right)dx$$

نجزئ هذا التكامل بسبب تغيير قاعدة $f(x)$ حول $x=0$ نحسب هذه المساحة على النحو الآتي:

$$A=\int_{-1}^{0}\left(-x-x^4\right)dx+\int_{0}^{1}\left(x-x^4\right)dx$$

$$=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{5}x^5\Big|_{-1}^{0}+-\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{5}x^5\right)\Big|_{0}^{1}$$

$$=0-\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)-(0)=\frac{3}{5}$$

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين:
$f(x)=3x^3-x^2-10x$ ، و $g(x)=-x^2+2x$

$$f(x)=g(x)$$

$$3x^3-x^2-10x=-x^2+2x$$

$$3x^3-12x=0\Rightarrow 3x\left(x^2-4\right)=0$$

$$\Rightarrow x=0, x=-2, x=2$$

بحساب قيمتي الاقترانين عند عدد بين -2 و0 مثل -1 نجد أن:

$$f(-1)=-3-1+10=6$$

$$g(-1)=-1-2=-3$$

$f(x)>g(x)$ في الفترة $(-2,0)$

بحساب قيمتي الاقترانين عند عدد بين 0 و2 مثل 1 نجد أن:

$$f(1)=3-1-10=-8$$

$$g(1)=-1+2=1$$

$f(x)<g(x)$ في الفترة $(0,2)$

$$A=\int_{-2}^{0}\left(f(x)-g(x)\right)dx+\int_{0}^{2}\left(g(x)-f(x)\right)dx$$

$$=\int_{-2}^{0}\left(3x^2-x^2-10x-\left(-x^2+2x\right)\right)dx$$

$$+\int_{-2}^{0}\left(-x^2+2x-\left(3x^2-x^2-10x\right)\right)dx$$

$$=\int_{-2}^{0}\left(3x^3-12x\right)dx+\int_{0}^{2}\left(12x-3x^2\right)dx$$

$$=\left(\frac{3}{4}x^4-6x^2\right)\Big|_{-2}^{0}+\left(6x^2-\frac{3}{4}x^4\right)\Big|_{0}^{2}$$

$$=(0)-(12-24)+(24-12)-(0)=24$$

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين:
$f(x)=e^x$ ، و $g(x)=x^2$ ، والمستقيمين: $x=0$ ، و $x=1$

$$f(x)=g(x)\Rightarrow e^x=x^2$$

استعمال الآلة الحاسبة لمعرفة أن $f(x)>g(x)$ في الفترة $[0,\infty)$

$$A=\int_{0}^{1}\left(e^x-x^2\right)dx=\left(e^x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{0}^{1}$$

$$=\left(e-\frac{1}{3}\right)-(1-0)=e-\frac{4}{3}$$

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين:

$h(x) = 4\sqrt{x}$ و ، $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

$$f(x) = h(x)$$

$$\frac{1}{2}x^2 = 4\sqrt{x} \Rightarrow \frac{1}{4}x^4 = 16x$$

$$x^4 - 64x = 0$$

$$x(x^3 - 64) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4$$

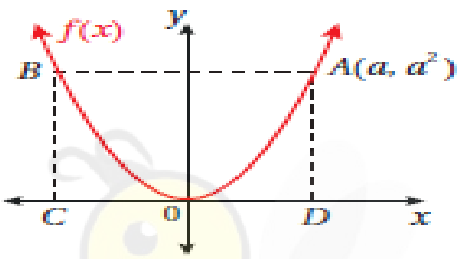
$h(x) > f(x)$ في الفترة $(0,4)$

$$A = \int_0^4 (h(x) - f(x))\, dx$$

$$= \int_0^4 \left(4\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2\right) dx = \left(\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6}x^3\right)\Bigg|_0^4$$

$$= \left(\frac{64}{3} - \frac{32}{3}\right) - (0) = \frac{32}{3}$$

يُبيّن الشكل التالي منحنى الاقتران: $f(x) = x^2$. إذا كان إحداثيا النقطة A هما $A(a\,,\ a^2)$ ، فأُثبِت أنَّ مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ والقطعة المستقيمة $\overline{AB}$ تساوي ثلثي مساحة المستطيل $ABCD$.



من التماثل فإن $B(-a, a^2)$

لتكن المساحة المطلوبة هي:

$$\int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)\, dx = \left(a^2 x - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{-a}^{a}$$

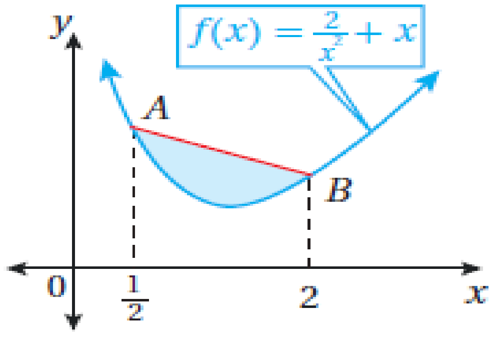
$$= \left(a^3 - \frac{1}{3}a^3\right) - \left(-a^3 + \frac{1}{3}a^3\right)$$

$$= 2a^3 - \frac{2}{3}a^3 = \frac{4}{3}a^3$$

نجد مساحة المستطيل $ABCD$ هي: $2a \times a^2 = 2a^3$

المساحة بين المنحنى والقطعة المستقيمة AB تساوي $\frac{2}{3}$ مساحة المستطيل $ABCD$

يُبيّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{2}{x^2} + x$. إذا كان الإحداثي x لكلٍّ من النقطة A والنقطة B هو $\frac{1}{2}$ و 2 على الترتيب، فأجد مساحة المنطقة المحصورة بين المستقيم AB ومنحنى الاقتران $f(x)$.



$$A\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{17}{2}\right)$$

$$B(2, f(2)) = \left(2, \frac{5}{2}\right)$$

$$m_{AB} = \frac{\frac{17}{2} - \frac{5}{2}}{\frac{1}{2} - 2} = -4$$

معادلة المستقيم: AB

$$y - \frac{5}{2} = -4(x - 2) \Rightarrow y = \frac{21}{2} - 4x$$

المساحة المطلوبة هي:

$$A=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{21}{2}-4x-\left(2x^{-2}+x\right)\right)dx$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{21}{2}-5x-2x^{-2}\right)dx=\left(\frac{21}{2}x-\frac{5}{2}x^{2}+\frac{2}{x}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{2}$$

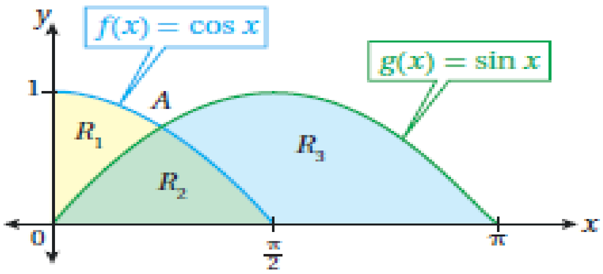
$$=21-10+1-\left(\frac{21}{4}-\frac{5}{8}+4\right)=\frac{27}{8}$$

يُبيّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين : $f(x)=\cos x$ ، و $h(x)=\sin x$. مُعتمِدًا هذا الشكل، أُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

1) أجد إحداثيي النقطة A

2) أجد مساحة كلٍّ من المناطق: $R_1\,,R_2\,,R_3$

3) أُثبِت أنَّ مساحة المنطقة R_1 إلى مساحة المنطقة R_2 تساوي: $\sqrt{2}:2$.



1) $f(x)=g(x)\Rightarrow \sin x=\cos x$

$$\tan x=1\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}\quad or\quad x=\frac{5\pi}{4}$$

نلاحظ من الرسم المعطى أن x تقع في الفترة $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

اذن احداثيا النقطة A هما:

$$\left(\frac{\pi}{4},f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\left(\frac{\pi}{4},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

2) $A(R_1)=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\,dx=(\sin x+\cos x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-(0+1)=\sqrt{2}-1$$

$$A(R_2)=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin x\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=-\cos x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}+\sin x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}+1\right)+\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2-\sqrt{2}$$

$$A(R_3)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x\,dx$$

$$=(-\cos x-\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}+(-\cos x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\sqrt{2}$$

$$=-0-1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(-(-1)+0\right)=\sqrt{2}$$

3) $\dfrac{A(R_1)}{A(R_2)}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$A(R_1):A(R_2)=\sqrt{2}:2$$

ممّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ ، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y = f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

$f'(x) = 16\sin x\cos^3 x\ ;\ \left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$

$$f(x) = \int 16\sin x\cos^3 x\, dx$$

$$u = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$f(x) = \int 16\sin x\, u^3 \times \frac{du}{-\sin x}$$

$$= \int -16u^3\, du = -4u^4 + C$$

$$= -4\cos^4 x + C$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 + C$$

$$0 = -1 + C \Rightarrow C = 1$$

$$f(x) = -4\cos^4 x + 1$$

أحُلُّ كُلًّا من المعادلات التفاضلية الآتية:

1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y^2} - xy - \dfrac{1}{y^2} + y$

2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{2y-1} - \dfrac{2x}{3y-2}$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \tan^2 x + \tan^2 y + \tan^2 x\tan^2 y$$

الحلول

1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y^2} - \dfrac{1}{y^2} + y - xy$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y^2}(x-1) - y(x-1) = (x-1)\left(\frac{1}{y^2} - y\right)$$

$$\frac{dy}{\frac{1}{y^2} - y} = (x-1)\,dx$$

$$\int \frac{dy}{\frac{1}{y^2} - y} = \int (x-1)\,dx$$

$$\int \frac{y^2}{1-y^3}\,dy = \int (x-1)\,dx$$

$$-\frac{1}{3}\int \frac{-3y^2}{1-y^3}\,dy = \int (x-1)\,dx$$

$$-\frac{1}{3}\ln\left|1-y^3\right| = \frac{1}{2}x^2 - x + C$$

2) $\dfrac{dy}{dx} = x\left(\dfrac{1}{2y-1} - \dfrac{2}{3y-2}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = x\left(\frac{3y-2-4y+2}{6y^2-7y+2}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=x\left(\frac{-y}{6y^2-7y+2}\right)$$

$$\frac{6y^2-7y+2}{-y}\,dy=x\,dx$$

$$\int\frac{6y^2-7y+2}{-y}dy=\int x\,dx$$

$$\int\left(-6y+7-\frac{2}{y}\right)dy=\int x\,dx$$

$$-3y^2+7y-2\ln|y|=\frac{1}{2}x^2+C$$

3)

$$\frac{dy}{dx}=1+\tan^2 x+\tan^2 y+\tan^2 x\tan^2 y$$

$$\frac{dy}{dx}=\sec^2 x+\tan^2 y\left(1+\tan^2 x\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\sec^2 x+\tan^2 y\sec^2 x$$

$$\frac{dy}{dx}=\sec^2 x\left(1+\tan^2 y\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\sec^2 x\sec^2 y$$

$$\frac{dy}{\sec^2 y}=\sec^2 x\,dx$$

$$\int\frac{dy}{\sec^2 y}=\int\sec^2 x\,dx$$

$$\int\cos^2 y\,dy=\int\sec^2 x\,dx$$

$$\int\frac{1}{2}(1+\cos 2y)\,dy=\int\sec^2 x\,dx$$

$$\frac{1}{2}\left(y+\frac{1}{2}\sin 2y\right)=\tan x+C$$