الدرس الأول : نظريتا الباقي والعوامل

تذكير ببعض المعلومات والمصطلحات :

1. كثير حدود بمتغير واحد $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x_1 + a_0$ حيث n عدد صحيح غير سالب

a_0 , a_1 … , an^{-1} , an (المعاملات) أعداد حقيقية ← + ، 0 ، −

2. اقتران كثير حدود بمتغير واحد $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x_1 + a_0$
3. درجة كثير الحدود هو أعلى أس للمتغير
4. كتابة كثير الحدود بـ الصورة القياسية يعني ترتيب الحدود من الأس الأعلى إلى الأس الأقل

مثال (1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ اقتران كثير حدود , درجة الاقتران هي 3 مكتوب بالصورة القياسية $P(x) = 2 - x$

مثال (2) اقتران كثير حدود , درجة الاقتران هي 1 , الصورة القياسية $P(x) = -x + 2$

مثال (3) $P(x) = 5$ اقتران كثير حدود , درجة الاقتران هي 0 مكتوب بالصورة القياسية

قسمة كثير حدود على كثير حدود

المقسوم ↑ — المقسوم عليه ↑

بشرط درجة المقسوم أعلى من درجة المقسوم عليه

1 الطريقة الأولى : القسمة الطويلة :

(يجب كتابة كثيرات الحدود بالصورة القياسية قبل القسمة)

مثال (1) جد ناتج قسمة $(9x^3 - x + 3) \div (3x - 2)$

1. درجة المقسوم = 3

درجة المقسوم عليه = 1

درجة المقسوم $<$ $1-$ درجة المقسوم عليه

2. الكتابة على الصورة القياسية ✓

3. نباشر بالقسمة

الحد الأول ÷ الحد الأول

نقسم المعاملات ثم المتغيرات

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x^2 + 2x + 1 \\
\hline
3x - 2 & \cancel{9x^3} - x + 3 \\
 & -\cancel{9x^3} \overset{+}{-} 6x^2 \\
\hline
 & \cancel{6x^2} - x + 3 \\
 & -\cancel{6x^2} + 4x \\
\hline
 & \cancel{3x} + 3 \\
 & -\cancel{3x} + 2 \\
\hline
 & \boxed{5}
\end{array}
$$

الباقي $\longrightarrow$ $\boxed{5}$

4. نقف عندما يكون درجة الباقي $<$ درجة المقسوم عليه

أقل

إذا الجواب $3x^2 + 2x + 1$ والباقي 5 ويمكن كتابة ذلك كما يأتي $3x^2 + 2x + 1 + \frac{5}{3x-2}$

جواب القسمة + $\frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$

تدريبات

1. $(x^3 + 2x^2 - 11x - 12) \div x + 4$
2. $(6x^3 - 7x^2 + 6x + 45) \div (2x + 3)$
3. $(3x^4 + x^3 - 9x^2 - 8x + 9) \div (x - 2)$
4. $(6x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 12) \div (3x - 4)$
5. $(2x^5 - 5x^4 + 9x^2 - 10x + 15) \div (1 - 2x)$

0788118727

② الطريقة الثانية : القسمة التركيبية :

- تستخدم فقط إذا كان درجة المقسوم عليه = 1
- يفضل استخدامها إذا كان صفر المقسوم عليه عدد صحيح (ليس كسر)
- نتعامل فقط مع المعاملات مع حفظ مكان كل حد وإن لم يوجد يكون معامله صفر (0)

مثال (1) جد ناتج قسمة $(x-3) \div (2x^3-7x^2+5)$

$x-3=0$

$x=3$

صفر المقسوم عليه		معامل x^3	معامل x^2	معامل x	الحد ثابت
	3	2	-7	0	5
			6	-3	-9
	x	2	-1	-3	-4
					الباقي

إذا الجواب $2x^2-x-3$ (x)

نبدأ أقل بدرجة واحدة من المقسوم

والباقي -4

ويمكن كتابة الجواب النهائي $2x^2-x-3-\frac{4}{x-3}$

♦ نظرية الباقي :

تعلمت سابقا كيفية قسمة كثير حدود على كثير حدود

أو اقتران كثير حدود على اقتران كثير حدود

الناتج فوق والباقي تحت ← عدد
↙ صفر

هناك نظرية تستطيع من خلالها إيجاد **الباقي** دون الحاجة للقسمة

⟸ باقي قسمة كثير الحدود $P(x)$ على $(ax-b)$

المقسوم عليه

هو $P\left(\frac{b}{a}\right)$

صفر المقسوم عليه , حيث $a \neq 0$

07788118727

مثال (1) جد باقي قسمة $P(x)$ على $h(x)$

① $P(x) = x^3 + 7x^2 - 6x + 2 \quad , \quad h(x) = x - 3$

المقسوم عليه $x - 3$

صفر المقسوم عليه $x - 3 = 0$

$x = 3$

إذا الباقي هو $P(3) \Leftarrow$ نعوض الـ 3 في المقسوم

$$P(3) = 3^3 + 7(3)^2 - 6(3) + 2$$
$$= 27 + 63 - 18 + 2$$
$$= 74$$

لاحظ الباقي عدد لا يساوي صفرها

② $P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 1 \quad , \quad h(x) = 2x - 1$

المقسوم عليه $2x - 1$

صفر المقسوم عليه $2x - 1 = 0$

$2x = 1$

$x = \frac{1}{2}$

إذا الباقي هو $P\left(\frac{1}{2}\right)$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1$$
$$= \frac{-3}{4}$$

③ $P(x) = 4x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 2 \quad , \quad h(x) = x - 1$

④ $P(x) = 3x^3 + 8x^2 - 3x - 6 \quad , \quad h(x) = x + 3$

⑤ $P(x) = -2x^3 - 5x^2 + 10x + 9 \quad , \quad h(x) = 2x + 8$

مثال (2) جد باقي قسمة $f(x)$ على $h(x)$ في كل مما يأتي :

① $f(x) = 8x^4 + 2x^3 - 53x^2 + 37x - 6 \quad , \quad h(x) = x$

② $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 6x - 8 \quad , \quad h(x) = 3x + 4$

07888118727

♦ نظرية العوامل :

طيب شو يعني لما يكون الباقي صفر

ناخد أمثلة بسيطة كنا ناخدها ونحن صغار

شو يعني هل العدد 2 عامل من عوامل 6 ؟

كنا نسأل حالنا هل الـ 6 تقبل القسمة على 2

يعني :

$$\begin{array}{r|l} & 3 \\ \hline 2 & 6 \\ & -6 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$0 \longrightarrow$ بكون بقبل القسمة على 2 إذا كان الباقي صفر يعني بقدر أكتب الـ 6 على شكل حاصل ضرب 3 , 2

$$6 = (2)(3)$$

عامل من عوامل الـ 6   عامل من عوامل الـ 6

$\Leftarrow$ شو يعني هل العدد 2 عامل من عوامل 7 ؟

يعني :

$$\begin{array}{r|l} & 3 \\ \hline 2 & 7 \\ & -6 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$1 \longrightarrow$ الباقي ليس صفر , إذا الـ 7 لا تقبل القسمة على 2

يعني الـ 2 ليست عامل من عوامل الـ 7

لأنه ما قدرنا نكتب الـ 7 على شكل 2 ضرب رقم آخر فقط

$$7 = (2)(3) \boxed{+1}$$

ومن هاد المثال البسيط بتقدر تفهم شو يعني نظرية العوامل

يعني إذا كان باقي قسمة $P(x) = x^3 + 2x^2 - 11x - 12$

على $h(x) = x + 4$ هو صفر

بستنتج انه المقسوم عليه $h(x)$ هو عامل من عوامل $P(x)$ يعني رح تقدر تكتب

$$P(x) = h(x) \times \boxed{\text{كثير حدود}}$$

عامل من عوامل $P(x)$ عامل من عوامل $P(x)$

مثال (1) إذا كان $P(x) = x^3 + 6x^2 + 5x - 12$, بين أن $x + 4$ عامل من عوامل $P(x)$

الجواب :

كل الي عليك تثبته أن باقي القسمة هو صفر , **لا** داعي للقسمة فقط طبق نظرية الباقي

$x + 4 = 0$

$x = -4$

الباقي هو $P(-4)$

$P(-4) = (-4)^3 + 6(-4)^2 + 5(-4) - 12$

$= 0$

إذا $x + 4$ عامل من عوامل $P(x)$

مثال (2) إذا كان $P(x) = x^3 - 2x^2 - 13x - 10$, بين أن $x - 5$ عامل من عوامل $P(x)$

مثال (3) بين أن $h(x)$ عامل من عوامل $f(x)$ في كل مما يأتي :

1. $f(x) = x^3 - 37x + 84 \quad , \quad h(x) = x + 7$
2. $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6 \quad , \quad h(x) = 2x - 3$

♦ التحليل الكامل :

كلمة تحليل اقتران كثير حدود يعني كتابة كثير الحدود على شكل حاصل ضرب مجموعة من كثيرات الحدود التي **لا** يمكن تحليلها ← درجة 1
أو
درجة 2 (لا تحلل)

كثير الحدود = (كثير حدود) (كثير حدود) ( ) ...
درجة 1 أو 2 درجة 1 أو 2

وتذكر كل كثير حدود منهم يسمى عامل

07788118727

مثال (1) إذا كان : $P(x) = x^3 - 2x^2 - 13x - 10$

a) بين أن $x = 5$ عامل من عوامل $P(x)$

b) حلل $P(x)$ تحليلا كاملا

$a)\ x - 5 = 0$

$x = 5$

$P(5) = 5^3 - 2(5)^2 - 13(5) - 10$

$= 125 - 50 - 65 - 10$

$= 0 \longrightarrow$ إذا $x - 5$ عامل من عوامل $P(x)$

والآن كيف أحلل تحليل كامل ؟

b) بإجراء القسمة $p(x) \div (x - 5)$

$(x^3 - 2x^2 - 13x - 10) \div (x - 5)$

5	1	-2	-13	-10	
		5	15	10	
	1	3	2	0	الباقي

الناتج $(x^2 + 3x + 2)$

إذا يمكن كتابة $P(x)$ على الشكل التالي :

$P(x) = (x^2 + 3x + 2)\ (x - 5)$

$(x^2 + 3x + 2)$ ↑ درجة 2 — يمكن تحلل ويمكن لا

$(x - 5)$ ↑ درجة 1 — لا تحلل

تحليل كامل " تم ✓ " $P(x) = (x + 2)\ (x + 1)\ (x - 5) \rightarrow$

$(x + 2)$ ↑ درجة 1 ، $(x + 1)$ ↑ درجة 1 ، $(x - 5)$ ↑ درجة 1

⟸ إذا طلب مني أحلل تحليل كامل دون إعطائي أي عامل من عوامله , ماذا أفعل ؟

07788118727

⟵ لنعود للمثال السابق بعد التحليل الكامل لـ $P(x)$ كانت النتيجة

$$P(x) = (x+2)(x+1)(x-5)$$

أصفار $P(x)$ هي   -2   -1   5

يعني $P(-2)=0 \quad P(-1)=0 \quad P(5)=0$

يعني لو تم رسم $P(x)$ بيانيا , سيقطع الرسم البياني محور x في ثلاث نقاط عند :

$x=-2\ , x=-1\ , x=5$ الي هم أصفار $P(x)$

طيب كيف نطلع الأصفار من غير رسم ؟

هناك نظرية مهمة اسمها **نظرية الأصفار النسبية**

♦ نظرية الأصفار النسبية :

① عدد أصفار كثير الحدود أقل من أو يساوي درجته

② إذا كان $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ كثير حدود معاملاته صحيحة

فإن كل صفر نسبي لـ $P(x)$ يكون على الصورة $\frac{P}{q}$

P : أحد عوامل $a_\circ$ (الحد الثابت)

q : أحد عوامل المعامل الرئيس a_n (معامل أعلى درجة)

مثال (1) جد أصفار كثير الحدود $P(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$ جميعها

① عوامل الحد الثابت 6 هي : $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$

عوامل الحد الرئيسي 2 هي : $\pm1 \ , \ \pm2$

② الأصفار النسبية المحتملة $\pm1, \pm\frac{1}{2}, \pm2, \pm3, \pm\frac{3}{2}$

±6

③ اختبارهم , توقف عن التعويض أول ما تلاقي صفر

-1	$P(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 - 13(-1) + 6 = 18$	✗
1	$P(1) = 2(1)^3 + (1)^2 - 13(1) + 6 = -4$	✗
2	$P(2) = (2^3)2 + 2^2 - 13(2) + 6 = 18$	✓

④ نكتب العامل ونجري القسمة

$x = 2$ (صفر)

$(x-2)$ (عامل)

$$(2x^3 + x^2 - 13x + 6) - (x - 2)$$

2	2	1	-13	6	
		4	10	-6	
	2	5	-3	0	الباقي

$2x^2 + 5x - 3$

$$P(x) = (2x^2 + 5x - 3)(x - 2)$$
$$= (x - 2)(2x - 1)(x + 3)$$

إذا الأصفار الناتجة -3 ، $\frac{1}{2}$ ، 2

ثلاثة أصفار -3 ، $\frac{1}{2}$ ، 2

مثال (2) جد أصفار كثير الحدود :

① $P(x) = x^3 - 3x + 2$

② $P(x) = 5x^3 - x^2 - 5x + 1$

③ $Q(x) = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x - 8$

مثال (3) حلل كل اقتران مما يأتي تحليلا كاملا :

① $f(x) = x^3 + 3x^2 - 13x - 15$

② $g(x) = x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18$

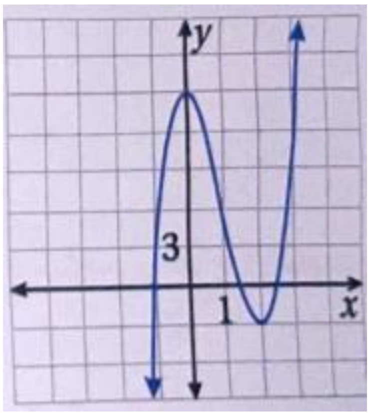
0788118727

③ $h(x) = 2x^3 - 13x^2 + 17x + 12$

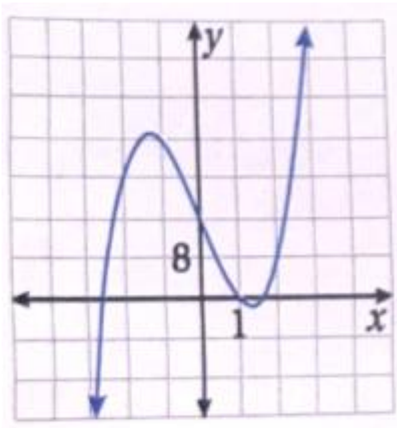
④ $q(x) = 3x^3 - 18x^2 + 2x - 12$

مثال (4) أستعمل التمثيل البياني لمنحنى كل اقتران مما يأتي , لإيجاد أحد أصفاره النسبية , ثم أجد أصفار الاقتران جميعها :

② $f(x) = 4x^3 - 12x^2 - x + 15$



① $f(x) = 3x^3 - 20x + 16$



♦ حل معادلات كثير حدود :

معادلة كثير الحدود : هي معادلة يمكن كتابتها على صورة $P(x) = 0$ حيث $P(x)$ هو كثير حدود من أي درجة ويكون مرتبط بالمعادلة

كيف أحل معادلة كثير حدود ؟ نفس طريقة تحليل اقتران كثير حدود

مثال (1) حل المعادلة $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$

1. كثير الحدود المرتبط بالمعادلة $P(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$
2. الأصفار النسبية المحتملة : عوامل $24 : \pm1, \pm2, \pm3, , \pm4 \pm 6, \pm8, \pm12, \pm24$
3. اختبارهم

✗	$P(1) = (1)^3 - (1)^2 - 14(1) + 24 = 10$	1
✓	$P(2) = (2)^3 - (2)^2 - 14(2) + 24 = 0$	2

4. العامل هو $(x-2)$ نقسم :

2	1	-1	-14	24
	↓	2	2	-24
	1	1	-12	0 الباقي

$$x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$$

$$(x-2)(x^2 + x - 12) = 0$$

$$(x-2)\ \ (x+4)\ \ (x-3) = 0$$

$$x = 2 \quad , x = -4 \quad , x = 3$$

حلول المعادلة $2 , -4 , 3$

مثال (2) حل كل معادلة مما يأتي :

① $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$

② $x^3 - 3x^2 - 4 = 0$

③ $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$

④ $3x^3 + 3x^2 - 14x - 8 = 0$

⑤ $5x^3 - 15x^2 - 47x - 15 = 2x^3 - 10x^2$

⑥ $6x^3 - 13x^2 + x + 2 = 0$