المرجع في الرياضيات

للصف الثاني ثانوي العلمي

كتاب التمارين

الفصل الأول

الوحدة الثانية (تطبيقات التفاضل)

يعتبر مرجعاً للطلاب ومعلمي المادة

الأستاذ: معتصم ابراهيم

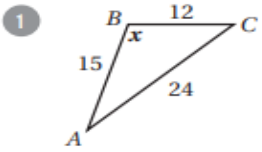
0788586401

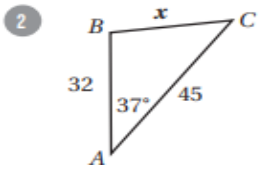
الوحدة الثانية: تطبيقات التفاضل

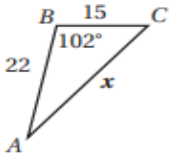
استعد لدراسة الوحدة:

حل المثلث باستعمال قانون جيوب التمام:

أجد قيمة x في كل من المثلثات الاتية :

1) 

2) 

3) 

1) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$ قانون جيب التمام

$$24^2 = 12^2 + 15^2 - 2 \times 12 \times 15 \cos x$$

$$2 \times 12 \times 15 \cos x = 12^2 + 15^2 - 24^2$$

$$\frac{2 \times 12 \times 15 \cos x}{2 \times 12 \times 15} = \frac{12^2 + 15^2 - 24^2}{2 \times 12 \times 15}$$

$$\cos x = \frac{12^2 + 15^2 - 24^2}{2 \times 12 \times 15}$$

$$\cos x = \frac{12^2 + 15^2 - 24^2}{2 \times 12 \times 15}$$

$$\cos x = \frac{144 + 225 - 576}{360}$$

$$\cos x = \frac{-207}{360}$$

$$x \approx 2.18\,rad \approx 125.1^\circ$$

2) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$ قانون جيب التمام

$$x^2 = 32^2 + 45^2 - 2 \times 32 \times 45 \cos 37^\circ$$

$$2 \times 32 \times 45 \cos 37^\circ = 32^2 + 45^2 - x^2$$

$$2300.07 = 1024 + 2025 - x^2$$

$$x^2 = 1024 + 2025 - 2300.07$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٨٥٨٦٤٠١

$x^2 = 748.92$

$x = 748.92$

$x \approx 27.37$

3) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$ قانون جيب التمام

$x^2 = 15^2 + 22^2 - 2 \times 15 \times 22\cos 102^\circ$

$2 \times 15 \times 22\cos 102^\circ = 15^2 + 22^2 - x^2$

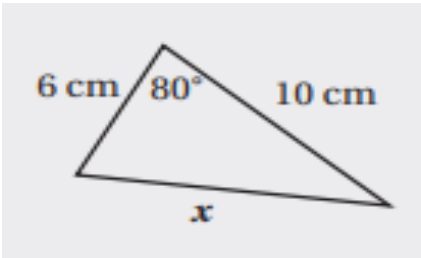
$-137.22 = 225 + 484 - x^2$

$x^2 = 709 + 137.22$

$x^2 = 846.22$

$x \approx 29.1$

مثال : أجد قيمة x في المثلث المجاور:



$x^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \times 6 \times 10\cos 80^\circ$

$x^2 = 115.16$

$x = \pm\sqrt{115.16}$

$x = \pm 10.7$

$x = 10.7$ لا يمكن أن تكون سالبة x

حل المعادلات المثلثية:

أحل كل معادلة مما يأتي في الفترة $(0, 2\pi)$:

4) $\tan 2x + 1 = 0$

$\tan 2x = -1$

$2x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}$

$x = \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٨٥٨٦٤٠١

5) $2\sin^2 x + \sin x = 0$

$\sin x\,(2\sin x + 1) = 0$

$\sin x = 0 \rightarrow\ x = 0, \pi$

$2\sin x + 1 = 0$

$\sin x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

6) $1 - \cos x = \frac{1}{2}$

$\cos x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

مثال : أحل المعادلة $\sin 2x - \cos x = 0$ في الفترة $(0, 2\pi)$:

$\sin 2x - \cos x = 0$

$2\sin x \cos x - \cos x = 0$

$\cos x\,(2\sin x - 1) = 0$

$\cos x = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}}$

$or \quad 2\sin x - 1 = 0$

$\sin x = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}}$

7) $f(x) = 6x^2 - 6x + 12$

$\acute{f}(x) = 12x - 6$

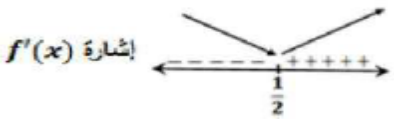
$\acute{f}(x) = 0 \rightarrow\ 12x - 6 = 0$

$\frac{12x}{12} = \frac{6}{12}$

$x = \frac{1}{2}$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٥٨٦٤٠١

الاقتران متناقص في $(-\infty,\frac{1}{2})$ ومتزايد في الفترة $(\frac{1}{2},\infty)$



8) $f(x)=x^3-3x^2+4x+3$

$\acute{f}(x)=3x^2-6x+4$

$\acute{f}(x)=0 \rightarrow 3x^2-6x+4=0$

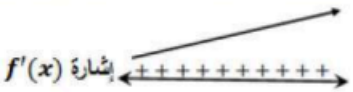
$3x^2-6x+4=0$

$\Delta=b^2-4ac$

$a=3 \quad , \quad b=6 \quad , c=4$

$\Delta=(6)^2-4(3)(4)$

$\Delta=36-48=-12 \ <0$



ليس للمشتقة اصفار وإشارتها مماثلة لإشارة معامل x^2 لجميع الأعداد الحقيقية ،

أي ان : $\acute{f}(x)>0$ فالاقتران متزايد على $\mathbb{R}$

9) $f(x)=x^2-8x^4$

$\acute{f}(x)=2x-32x^3$

$\acute{f}(x)=0 \rightarrow 2x-32x^3=0$

$2x(1-16x^2)=0$

$2x=0$

$x=0$

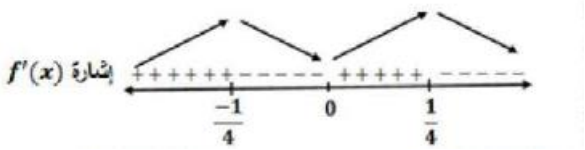
$1-16x^2=0$

$16x^2=1$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٥٨٦٤٠١

$$x^2 = \frac{1}{16}$$

$$x = \pm\frac{1}{4}$$



الاقتران x متزايد على $\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right)$ و $\left(0, \frac{1}{4}\right)$

الاقتران x متناقص على $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ و $\left(\frac{1}{4}, \infty\right)$

مثال : أحدد فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران : $f(x) = x^2 - 2x - 3$

الخطوة الأولى: أجد مشتقة الاقتران، ثم أحدد أصفار المشتقة.

$$\acute{f}(x) = 2x + 2$$

$$2x + 2 = 0$$

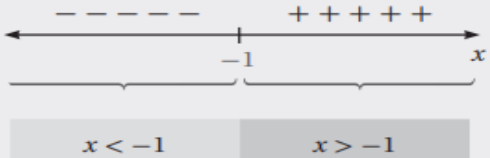
$$2x = 2$$

$x = -1$: إذن صفر المشتقة هو

الخطوة الثانية: ادرس إشارة المشتقة.

اختار قيمة أقل من صفر المشتقة ، ولتكن (-2) واختار قيمة أخرى اكبر منه ، ولتكن (0) ، ثم أحدد إشارة المشتقة عند كل منهما .

إذن ، $f(x)$ متناقص في الفترة $(-\infty, -1)$ ، ومتزايد في الفترة $(-1, \infty)$



	$x < -1$	$x > -1$
قيَم الاختبار (x)	$x = -2$	$x = 0$
إشارة $f'(x)$	$f'(-2) < 0$	$f'(0) > 0$
تزايد الاقتران وتناقصه	مُتناقِص ↘	مُتزايِد ↗

معتصم ابراهيم ٠٧٨٨٥٨٦٤٠١

الدرس الأول

المعدلات المرتبطة

ملئ بالون كروي بالهيليوم بمعدل $8\ cm^3/s$ ، أجد معدل تغير نصف قطر البالون في كل من الحالات الآتية :

1) عندما يكون طول نصف قطره $12\ cm$.

$$\frac{dv}{dt} = 8$$

$$r = 12$$

$$\frac{dr}{dt} = ?$$

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3$$ قانون حجم الكرة

$$\frac{dv}{dt} = (3)\frac{4}{3}\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$ عدد المجاهيل (1)بعد الاشتقاق

$$8 = 4\pi(12)^2 \frac{dr}{dt}$$

$$8 = 576\pi \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{576\pi}{576\pi}\frac{dr}{dt} = \frac{8}{576\pi}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{8}{576\pi}$$

$$\boxed{\frac{dr}{dt} = \frac{1}{72\pi}\ cm/s}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٨٥٨٦٤٠١

2- عندما يكون حجمه $1435\ cm^3$ (أقرب إجابتي إلى أقرب جزء من مئة) .

$$\frac{dv}{dt} = 8$$

$$v = 1435\ cm^3$$

$$\frac{dr}{dt} = ?$$

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

عدد المجاهيل (2)بعد الاشتقاق

ملاحظة(1): إذن نحتاج علاقة لإيجاد قيمة المجهول r ليتم تعويضها في المشتقة ليتبقى مجهول واحد فقط ومن ثم إيجاد $\frac{dr}{dt}$.

ملاحظة(2) :لإيجاد قيمة المجهول r نستفيد من قانون حجم الكرة.

$$\left[v = \frac{4}{3}\pi r^3\right] \times \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{\pi}\right)$$

$$r^3 = \frac{3v}{4\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}}$$

$$r = \left(\frac{3v}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

طريقة الحل (1):

$$\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$8 = 4\pi \left(\left(\frac{3v}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^2 \frac{dr}{dt}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٨٥٨٦٤٠١

$$8 = 4\pi\left(\frac{3(1435)}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{dr}{dt}$$

$$8 = 4\pi\left(\frac{4305}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{2}{\pi} = \left(\frac{4305}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{dr}{dt}$$

$$\left[\frac{2}{\pi} = \sqrt[3]{\left(\frac{4305}{4\pi}\right)^{2}}\frac{dr}{dt}\right] \times \sqrt[3]{\left(\frac{4\pi}{4305}\right)^{2}}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{2}{\pi} \times \sqrt[3]{\left(\frac{4\pi}{4305}\right)^{2}}$$

$$\boxed{\frac{dr}{dt} = 0.01\ cm/s}$$

طريقة الحل (2):

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{3}\left(\frac{3v}{4\pi}\right)^{\frac{-2}{3}} \times \frac{3}{4\pi}\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{3}\left(\frac{3(1435)}{4\pi}\right)^{\frac{-2}{3}} \times \frac{3}{4\pi} \times 8$$

عدد المجاهيل (1) بعد الاشتقاق

$$\frac{dr}{dt} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{4305)}{4\pi}\right)^{\frac{-2}{3}}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{2}{\pi} \times \sqrt[3]{\left(\frac{4\pi}{4305}\right)^{2}} \approx 0.01\ cm/s$$

$$\boxed{\frac{dr}{dt} \approx 0.01\ cm/s}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٥٨٦٤٠١

طريقة الحل (3):

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\left[1435 = \frac{4}{3}\pi r^3\right] \times \frac{3}{4}$$

$$\pi r^3 = \frac{3(1435)}{4}$$

$$\frac{\pi r^3}{\pi} = \frac{3(1435)}{4\pi}$$

$$r^3 = \frac{3(1435)}{4\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3(1435)}{4\pi}}$$

$$r \approx 7\ cm$$

$$\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$8 = 4\pi(7)^2 \frac{dr}{dt}$$

$$8 = 196\pi \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{8}{196\pi} = \frac{196\pi}{196\pi}\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{8}{196\pi}$$

$$\boxed{\frac{dr}{dt} \approx 0.01\ cm/s}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٨٥٨٦٤٠١

3) إذا ملئ مدة $33.5\ s$.

$$t = 33.5$$

$$v = 8 \times 33.5 = 268\ cm^3$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3(268)}{4\pi}}$$

$$r \approx 4cm$$

$$\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$8 = 4\pi(4)^2 \frac{dr}{dt}$$

$$8 = 64\pi \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{8}{64\pi} = \frac{64\pi}{64\pi}\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{8}{64\pi}$$

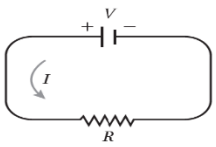
$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{8\pi}$$

$$\frac{dr}{dt} \approx 0.04cm/s$$

4) تمثل المعادلة : $V = IR$ جهد الدارة الكهربائية (بالفولت) المبينة في الشكل المجاور حيث I شدة التيار بالأمبير ، و R المقاومة بالأوم ، إذا كان جهد الدارة يزداد بمعدل $1\ volt/sec$ ، وشدة التيار تقل بمعدل $\frac{1}{3}\ amp/sec$ ، فأجد معدل التغير R عندما $V = 12$ و $I = 2$.

$$\frac{dV}{dt} = 1$$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{1}{3}$$



معتصم ابراهيم ٠٧٨٨٥٨٦٤٠١

$\frac{dR}{dt} = ?$

$V = 12$

$I = 2$

$V = IR$

$\frac{dV}{dt} = I\frac{dR}{dt} + R\frac{dI}{dt}$

$1 = 2\frac{dR}{dt} + R\left(-\frac{1}{3}\right)$ عدد المجاهيل (2)بعد الاشتقاق

ملاحظة(1): إذن نحتاج علاقة لإيجاد قيمة المجهول R ليتم تعويضها في المشتقة ليتبقى مجهول واحد فقط ومن ثم إيجاد $\frac{dR}{dt}$.

ملاحظة(2) :لإيجاد قيمة المجهول R نستفيد من قانون المعطى بالسؤال $V = IR$.

$V = IR$

$12 = 2R$

$R = 6$

نعوض قيمة $R = 6$ في المشتقة :

$1 = 2\frac{dR}{dt} + 6\left(-\frac{1}{3}\right)$

$1 = 2\frac{dR}{dt} - 2$

$2\frac{dR}{dt} = 1 + 2$

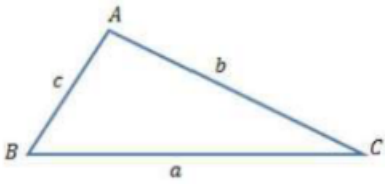
$\frac{dR}{dt} = \frac{3}{2}$

$$\boxed{\frac{dR}{dt} = 1.5\ \Omega/s}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٨٥٨٦٤٠١

إذا كانت θ الزاوية المحصورة بين الضلعين اللذين طول كل منهما s في مثلث متطابق الضلعين ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

5) أثبت أن مساحة المثلث تعطى بالمعادلة : $A = \frac{1}{2}s^2 \sin\theta$.



معلوم أن مساحة المثلث تساوي نصف ناتج ضرب طولي أي ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما.

$$A = \frac{1}{2}ab\sin C$$

فإذا كان $c = \theta$, $a = b = s$ ، فإن :

$$A = \frac{1}{2}s^2 \sin\theta$$

6) إذا كانت الزاوية θ تزداد بمعدل $\frac{1}{2} rad/min$ ، فأجد معدل تغير مساحة المثلث عندما $\theta = \frac{\pi}{6}$ ، علماً بأن طول الضلعين المتطابقين ثابت .

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{dA}{dt} = ?$$

$$A = \frac{1}{2}s^2 \sin\theta$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}s^2 \cos\theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}s^2(\cos\frac{\pi}{6})\frac{1}{2}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}s^2(\frac{\sqrt{3}}{2})\frac{1}{2}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{8}s^2$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٨٥٨٦٤٠١

7) يتحرك جسيم على منحنى الاقتران : $f(x)=\frac{10}{1+x^2}$ ، إذا كان معدل تغير الإحداثي x هو $3cm/s$ ، فأجد معدل تغير الإحداثي y عندما $x=20$.

$$\frac{dx}{dt}=3$$

$$x=20$$

$$\frac{dy}{dt}=?$$

$$y=\frac{10}{1+x^2}$$

$$y=10(1+x^2)^{-1}$$

$$\frac{dy}{dt}=-10(1+x^2)^{-2}(2x)\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{-20x}{(1+x^2)^2}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{-20(20)}{(1+20^2)^2}\cdot 3$$

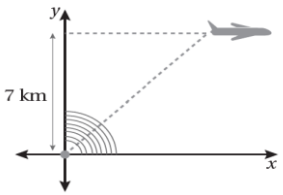
$$\frac{dy}{dt}=\frac{-1200}{(401)^2}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{-1200}{160801}$$

$$\frac{dy}{dt}\approx -0.007\ cm/s$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٥٨٦٤٠١

8) حلقت طائرة على ارتفاع $7km$ ، ومرت في أثناء تحليقها مباشرة فوق رادار كما في الشكل المجاور ، وعندما أصبح البعد بينهما وبين الرادار $10km$ ، رصد الرادار معدل تغير البعد بينه وبين الطائرة ، فكان $300km/h$ ،أجد سرعة الطائرة في هذه اللحظة .

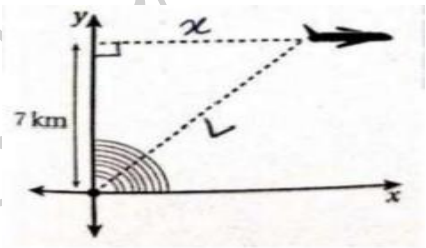


$$\frac{dL}{dt} = 300$$

$$L = 10$$

$$y = 7$$

$$\frac{dy}{dt} = 0$$ لأن y ثابت



$$x = ?$$

$$\frac{dx}{dt} = ?$$

$$L^2 = x^2 + y^2$$

$$10^2 = x^2 + 7^2$$

$$100 = x^2 + 49$$

$$x^2 = 51$$

$$x = \sqrt{51}$$

$$L^2 = x^2 + y^2$$

$$2L\frac{dL}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$2(10)(300) = 2x\frac{dx}{dt} + 2(7)(0)$$

$$60000 = 2x\frac{dx}{dt}$$ عدد المجاهيل (2)بعد الاشتقاق

ملاحظة(1): إذن نحتاج علاقة لإيجاد قيمة المجهول x ليتم تعويضه في المشتقة ليتبقى مجهول واحد فقط ومن ثم إيجاد $\frac{dx}{dt}$.

معتصم ابراهيم ٠٧٨٨٥٨٦٤٠١

ملاحظة(2) :لإيجاد قيمة المجهول x نستفيد من نظرية فيثاغورس .

$$L^2 = x^2 + y^2$$

$$10^2 = x^2 + 7^2$$

$$100 = x^2 + 49$$

$$x^2 = 51$$

$$x = \sqrt{51}$$

$$6000 = 2(\sqrt{51})\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{6000}{2(\sqrt{51})} = \frac{2(\sqrt{51})}{2(\sqrt{51})}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3000}{(\sqrt{51})}$$

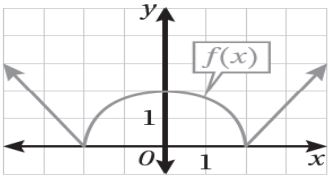
$$\frac{dx}{dt} \approx 420\ km/h$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٨٥٨٦٤٠١

الدرس الثاني

القيم القصوى والتقعر

1)أجد القيم الحرجة والقيم القصوى المحلية والمطلقة (إن وجدت)



للاقتران $f(x)$ الممثل بيانياً في الشكل المجاور.

القيم الحرجة هي : $x = 2$ ، $x = -2$ لأن المشتقة الأولى غير موجودة عند كل منها ، وكذلك $x = 0$ لأن المشتقة الأولى تساوي صفراً عندها

للاقتران قيمة عظمى محلية هي : $f(0) = (2)$ ، وله قيمة صغرى محلية ومطلقة هي: $f(-2) = f(2) = 0$

أجد القيمة العظمى المطلقة والقيمة الصغرى المطلقة (إن وجدت) لكل اقتران مما يأتي في الفترة المعطاة:

2) $f(x) = 1 + \cos^2 x \ , \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$

1) الخطوة الأولى: أيجاد المشتقة

$$\acute{f}(x) = 2\cos x\,(-\sin x)$$

$$\acute{f}(x) = -2\cos x \sin x$$

$$\acute{f}(x) = -\sin 2x$$

قانون $\sin 2x = 2\cos x \sin x$

2) الخطوة الثانية: نساوي المشتقة بالصفر لإيجاد قيمة أو قيم x

$$\acute{f}(x) = 0$$

$$\sin 2x = 0$$

$$2x = \pi \quad \rightarrow \quad \boxed{x = \frac{\pi}{2}}$$

$$2x = 2\pi \quad \rightarrow \ x = \pi$$

يوجد قيمة حرجة وحيدة في الفترة المفتوحة $\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$ هي $x = \frac{\pi}{2}$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٨٥٨٦٤٠١

3) الخطوة الثالثة: أيجاد قيم الاقتران f عند النقطة/النقاط الحرجة و طرفي المجال.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \cos^2\frac{\pi}{4}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \frac{1}{2}$$

$$\boxed{f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2}}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \cos^2\frac{\pi}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 0$$

$$\boxed{f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1}$$

$$f(\pi) = 1 + \cos^2\pi$$

$$f(\pi) = 1 + (-1)^2$$

$$f(\pi) = 1 + 1$$

$$\boxed{f(\pi) = 2}$$

4) الخطوة الرابعة: نقارن بين القيم

القيمة العظمى المطلقة للاقتران f هي : $f(\pi) = 2$

القيمة الصغرى المطلقة للاقتران f هي : $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٨٥٨٦٤٠١

3) $f(x) = (x^2 - 4)^3 \, , [-2, 3]$

1) الخطوة الأولى: أيجاد المشتقة

$$\acute{f}(x) = 3(x^2 - 4)^2(2x)$$

$$\acute{f}(x) = 6x(x^2 - 4)^2$$

2) الخطوة الثانية: نساوي المشتقة بالصفر لإيجاد قيمة أو قيم x

$$6x(x^2 - 4)^2 = 0$$

$$6x = 0$$

$$\boxed{x = 0}$$

$$(x^2 - 4)^2 = 0$$

$$x^4 - 8x^2 + 16 = 0$$

$$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$$

$$(x^2 - 4) = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$\boxed{x = \pm 2}$$

يوجد قيمتان حرجتان في الفترة $(-2, 3)$ هي $x = 2$, $x = 0$

3) الخطوة الثالثة: أيجاد قيم الاقتران f عند النقطة/النقاط الحرجة و طرفي المجال.

$$f(-2) = ((-2)^2 - 4)^3$$

$$f(-2) = (4 - 4)^3$$

$$f(-2) = 0$$

$$f(0) = ((0)^2 - 4)^3$$

$$f(0) = (-4)^3$$

$$\boxed{f(0) = -64}$$

$$f(2) = ((2)^2 - 4)^3$$

$$\boxed{f(2) = 0}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٥٨٦٤٠١

$f(3) = ((3)^2 - 4)^3$

$f(3) = (9 - 4)^3$

$f(3) = (5)^3$

$\boxed{f(3) = 125}$

4) الخطوة الرابعة: نقارن بين القيم

القيمة العظمى المطلقة للاقتران f هي : $f(3) = 125$

القيمة الصغرى المطلقة للاقتران f هي : $f(0) = -64$

4) $f(x) = x - 2\sin x \ , [-2\pi, 2\pi]$

1) الخطوة الأولى: أيجاد المشتقة

$\acute{f}(x) = 1 - 2\cos x$

2) الخطوة الثانية: نساوي المشتقة بالصفر لإيجاد قيمة أو قيم x

$1 - 2\cos x = 0$

$1 = 2\cos x$

$\cos x = \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{3}} \ , \boxed{x = \frac{5\pi}{3}} \boxed{, x = -\frac{\pi}{3}} \ , \boxed{x = -\frac{5\pi}{3}}$

3) الخطوة الثالثة: أيجاد قيم الاقتران f عند النقطة/النقاط الحرجة و طرفي المجال.

$f(x) = x - 2\sin x$

$f(-2\pi) = -2\pi - 2\sin(-2\pi)$

$f(-2\pi) = -2\pi + 2(0)$

$f(-2\pi) = -2\pi \approx -6.28$

$\boxed{f(-2\pi) \approx -6.28}$

$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{3} - 2\sin(-\frac{\pi}{3})$

$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{3} + 2(\frac{\sqrt{3}}{2})$

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 0.68$$

$$\boxed{f\left(-\frac{\pi}{3}\right) \approx 0.68}$$

$$f\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{5\pi}{3} - 2\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$f\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{5\pi}{3} - 2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$f\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{5\pi}{3} - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$f\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{5\pi}{3} - \sqrt{3} \approx -6.97$$

$$\boxed{f\left(-\frac{5\pi}{3}\right) \approx -6.97}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - 2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \approx -0.68$$

$$\boxed{f\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx -0.68}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{3} - 2\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{3} + 2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{3} + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 6.97$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٥٨٦٤٠١

$$\boxed{f\left(\frac{5\pi}{3}\right) \approx 6.97}$$

$$f(2\pi) = 2\pi - 2\sin(2\pi)$$

$$f(2\pi) = 2\pi + 2(0)$$

$$f(2\pi) = 2\pi \approx 6.28$$

$$\boxed{f(2\pi) \approx 6.28}$$

4) الخطوة الرابعة: نقارن بين القيم

القيمة العظمى المطلقة للاقتران f هي : $f\left(\frac{5\pi}{3}\right) \approx 6.97$

القيمة الصغرى المطلقة للاقتران f هي : $f\left(\frac{5\pi}{3}\right) \approx -6.97$

5) $f(x) = x\ln(x+3)\ , [0,3]$

$$\acute{f}(x) = x.\frac{1}{x+3} + \ln(x+3)\ (1)$$

$$\acute{f}(x) = \frac{x}{x+3} + \ln(x+3)$$

بدراسة إشارة كل من $\frac{x}{x+3}$ و $\ln(x+3)$ نجد أن $\frac{x}{x+3} + \ln(x+3) > 0$ مما يعني أن $\acute{f}(x) \neq 0$ ، لذا نبحث عن قيم يكون عندها $\acute{f}(x)$ غير موجودة في الفترة المعطاة .

$\frac{x}{x+3}$ غير معرف عندما $x = -3$ ، و $\ln(x+3)$ غير معرف عندما $x < -3$ وهما خارج مجال الاقتران ، وبما أن $\acute{f}(x) > 0$ ، والاقتران متصل في مجاله ، فإنه يأخذ القيم القصوى عند طرفي مجاله .

نقارن قيمتي الاقتران $x = 3$ و $x = 0$

$$f(0) = 0\ln(0+3)$$

$$\boxed{f(0) = 0}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٥٨٦٤٠١

$f(3) = 3\ln(3+3)$

$\boxed{f(3) = 3\ln 6}$

القيمة العظمى المطلقة للاقتران f هي : $f(3) = 3\ln 6$

القيمة الصغرى المطلقة للاقتران f هي : $f(0) = 0$

6) $f(x) = x + \frac{4}{x}\ , [-8, -1]$

1) الخطوة الأولى: أيجاد المشتقة

$f(x) = x + 4x^{-1}$

$\acute{f}(x) = 1 - 4x^{-2}$

$\acute{f}(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$

2) الخطوة الثانية: نساوي المشتقة بالصفر لإيجاد قيمة أو قيم x

$1 - \frac{4}{x^2} = 0$

$\frac{4}{x^2} = 1$

$x^2 = 4$

$\boxed{x = \pm 2}$

$\acute{f}(x)$ غير موجودة عندما $x = 0$ والاقتران غير معرف عندها فلا تعد قيمة حرجة .

إذن القيمة الحرجة الوحيدة في الفترة $(-8, -1)$ هي : $x = -2$.

3) الخطوة الثالثة: أيجاد قيم الاقتران f عند النقطة/النقاط الحرجة و طرفي المجال.

$f(-8) = -8 + \frac{4}{-8}$

$f(-8) = -8 - \frac{1}{2}$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٥٨٦٤٠١

$\boxed{f(-8) = -8.5}$

$f(-2) = -2 + \frac{4}{-2}$

$f(-2) = -2 - 2$

$\boxed{f(-2) = -4}$

$f(-1) = -1 + \frac{4}{-1}$

$f(-1) = -1 - 4$

$\boxed{f(-1) = -5}$

4) الخطوة الرابعة: نقارن بين القيم

القيمة العظمى المطلقة للاقتران f هي : $f(-2) = -4$

القيمة الصغرى المطلقة للاقتران f هي : $f(-8) = -8.5$

7) $f(x) = 5e^x - e^{2x}$, $[-1, 2]$

1) الخطوة الأولى: أيجاد المشتقة

$\acute{f}(x) = 5e^x - 2e^{2x}$

2) الخطوة الثانية: نساوي المشتقة بالصفر لإيجاد قيمة أو قيم x

$5e^x - 2e^{2x} = 0$

$e^x(5 - 2e^x) = 0$

$5 - 2e^x = 0$

$2e^x = 5$

$e^x = \frac{5}{2}$

$\ln e^x = \ln \frac{5}{2}$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٥٨٦٤٠١

$$x \ln e = \ln \frac{5}{2}$$

$$x(1) = \ln \frac{5}{2}$$

$$\boxed{x = \ln \frac{5}{2}}$$

إذن القيمة الحرجة الوحيدة في مجاله هي : $x = \ln \frac{5}{2}$

3) الخطوة الثالثة: أيجاد قيم الاقتران f عند النقطة/النقاط الحرجة و طرفي المجال.

$$f(-1) = 5e^{-1} - e^{2(-1)}$$

$$f(-1) = 5e^{-1} - e^{-2}$$

$$f(-1) = \frac{5}{e} - \frac{1}{e^2}$$

$$f(-1) = \frac{5}{2.718} - \frac{1}{(2.718)^2}$$

$$f(-1) = \frac{5}{2.718} - \frac{1}{5.436}$$

$$f(-1) = \frac{10}{5.436} - \frac{1}{5.436}$$

$$f(-1) = \frac{9}{5.436}$$

$$\boxed{f(-1) \approx 1.7}$$

$$f\left(\ln \frac{5}{2}\right) = 5e^{\ln \frac{5}{2}} - e^{2\left(\ln \frac{5}{2}\right)}$$

$$f\left(\ln \frac{5}{2}\right) = 5e^{\ln \frac{5}{2}} - e^{(\ln \frac{5}{2})^2}$$

$$f\left(\ln \frac{5}{2}\right) = 5e^{\ln \frac{5}{2}} - e^{\left(\ln \frac{25}{4}\right)}$$

$$f\left(\ln \frac{5}{2}\right) = 5.\frac{5}{2} - \frac{25}{4}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٨٥٨٦٤٠١

$$f\left(\ln\frac{5}{2}\right)=\frac{25}{2}-\frac{25}{4}$$

$$f\left(\ln\frac{5}{2}\right)=\frac{50}{4}-\frac{25}{4}$$

$$f\left(\ln\frac{5}{2}\right)=\frac{25}{4}$$

$$\boxed{f\left(\ln\frac{5}{2}\right)=6.25}$$

$$f(2)=5e^2-e^{2(2)}$$

$$f(2)=5e^2-e^4$$

$$\boxed{f(2)\approx -17.65}$$

4) الخطوة الرابعة: نقارن بين القيم

القيمة العظمى المطلقة للاقتران f هي : $f\left(\ln\frac{5}{2}\right)=6.25$

القيمة الصغرى المطلقة للاقتران f هي : $f(2)\approx -17.65$

أجد فترات التزايد وفترات التناقص، ثم أجد القيم القصوى المحلية والمطلقة (إن وجدت) لكل اقتران مما يأتي:

8) $f(x)=\sin x+\cos x\ ,[0,2\pi]$

1) الخطوة الأولى: أيجاد المشتقة

$$\acute{f}(x)=\cos x-\sin x$$

2) الخطوة الثانية: نساوي المشتقة بالصفر لإيجاد قيمة أو قيم x

$$\cos x-\sin x=0$$

$$\frac{\cos x}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{0}{\cos x}$$

$$1-\tan x=0$$

$$\tan x=1$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{4}}$$

$$\boxed{x = \frac{5\pi}{4}}$$

3) الخطوة الثالثة: أيجاد قيم الاقتران f عند النقطة/النقاط الحرجة.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}.\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{4}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

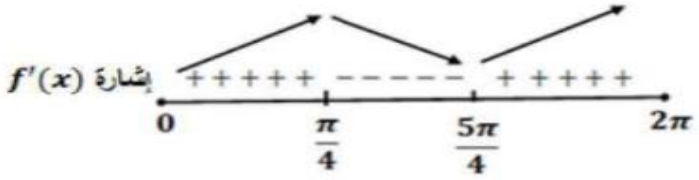
$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{-2}{\sqrt{2}}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}.\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٥٨٦٤٠١

4) الخطوة الرابعة: ابحث في إشارة المشتقة الأولى



5) الخطوة الخامسة: أجد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى المحلية.

للاقتران قيمة عظمى محلية هي : $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

للاقتران قيمة صغرى محلية هي : $f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$

الاقتران f متزايد على $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ و $\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right)$

الاقتران f متناقص على $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$

9) $f(x) = \frac{x}{x-5}$

1) الخطوة الأولى: أيجاد المشتقة

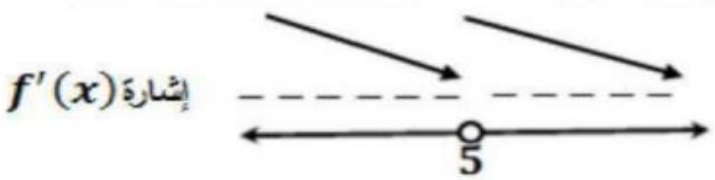
$$\acute{f}(x) = \frac{x - 5 - x}{(x-5)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{-5}{(x-5)^2}$$

2) الخطوة الثانية: مساواة المشتقة بالصفر لإيجاد قيمة أو قيم x

$f(\acute{x}) \neq 0$ وإشارتها سالبة لجميع الأعداد الحقيقية في مجال الاقتران لأن البسط سالب والمقام موجب ، $\acute{f}(x)$ غير موجودة عندما $x = 5$ و f غير معرف عندها .

4) الخطوة الثالثة: ابحث في إشارة المشتقة الأولى



5) الخطوة الخامسة: أجد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى المحلية.

الاقتران f متناقص على $(5,\infty)$ و $(-\infty,5)$ ولا يوجد له قيم قصوى .

10) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$

1) الخطوة الأولى: أيجاد المشتقة

$$f(x)=(x^2-1)^{\frac{1}{3}}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{-2}{3}}(2x)$$

$$\acute{f}(x)=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$$

2) الخطوة الثانية: مساواة المشتقة بالصفر لإيجاد قيمة أو قيم x

$$\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}=0$$

$$2x=0$$

$$\boxed{x=0}$$

3) الخطوة الثالثة: أيجاد قيم الاقتران f عند النقطة/النقاط الحرجة.

$$f(0)=\sqrt[3]{0^2-1}$$

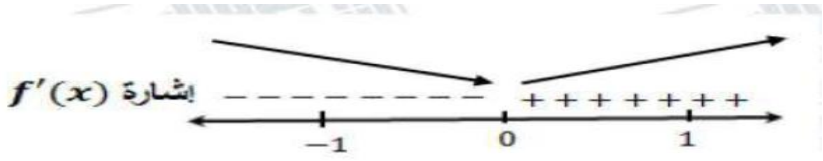
$$f(0)=\sqrt[3]{-1}$$

$$f(0)=-1$$

$\acute{f}(x)$ غير موجودة عندما $x=\pm1$

إذن القيم الحرجة هي : $x=\pm1$ ، $x=0$

4) الخطوة الرابعة: ابحث في إشارة المشتقة الأولى



معتصم ابراهيم ٠٧٨٨٥٨٦٤٠١

5) الخطوة الخامسة: أجد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى المحلية.

للاقتران قيمة صغرى محلية هي : $f(0) = -1$

الاقتران f متزايد على $(0, \infty)$ ومتناقص على $(-\infty, 0)$

11) $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 4)$

1) الخطوة الأولى: أيجاد المشتقة

$$\acute{f}(x) = \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 4}$$

2) الخطوة الثانية: مساواة المشتقة بالصفر لإيجاد قيمة أو قيم x

$$\frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 4} = 0$$

$$2x - 3 = 0$$

$$2x = 3$$

$$\boxed{x = \frac{3}{2}}$$

إذن القيمة الحرجة هي : $x = \frac{3}{2}$

3) الخطوة الثالثة: أيجاد قيم الاقتران f عند النقطة/النقاط الحرجة.

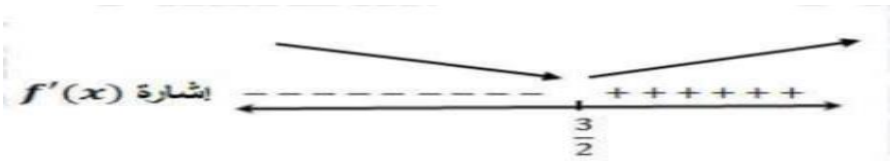
$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \ln\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right) + 4\right)$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \ln\left(\frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 4\right)$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \ln\left(\frac{9}{4} - \frac{18}{4} + \frac{16}{4}\right)$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \ln\frac{7}{4}$$

4) الخطوة الرابعة: ابحث في إشارة المشتقة الأولى



معتصم ابراهيم ٠٧٨٨٥٨٦٤٠١

5) الخطوة الخامسة: أجد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى المحلية.

للاقتران قيمة صغرى محلية هي : $f\left(\frac{3}{2}\right) = \ln\frac{7}{4}$

الاقتران f متزايد على $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$ ومتناقص على $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$

12) $f(x) = e^{-x^2}$

1) الخطوة الأولى: أيجاد المشتقة

$$\acute{f}(x) = -2xe^{-x^2}$$

2) الخطوة الثانية: مساواة المشتقة بالصفر لإيجاد قيمة أو قيم x

$$\acute{f}(x) = 0 \rightarrow -2xe^{-x^2} = 0 \rightarrow \boxed{x = 0}$$

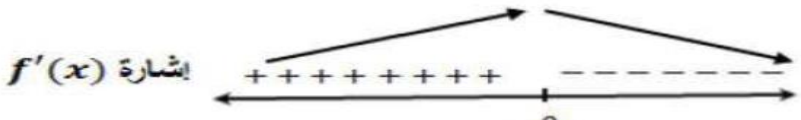
3) الخطوة الثالثة: أيجاد قيم الاقتران f عند النقطة/النقاط الحرجة.

إذن القيمة الحرجة هي : $x = 0$

$$\acute{f}(0) = e^{-(0)^2}$$

$$\acute{f}(0) = 1$$

4) الخطوة الرابعة: ابحث في إشارة المشتقة الأولى



5) الخطوة الخامسة: أجد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى المحلية.

للاقتران قيمة عظمى محلية هي : $f(0) = 1$

الاقتران f متزايد على $(-\infty, 0)$ ومتناقص على $(0, \infty)$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٨٥٨٦٤٠١

13) $f(x) = 2^{x^2-3}$

1) الخطوة الأولى: أيجاد المشتقة

$$\acute{f}(x) = 2x(\ln 2)2^{x^2-3}$$

2) الخطوة الثانية: مساواة المشتقة بالصفر لإيجاد قيمة أو قيم x

$$\acute{f}(0) = 0 \rightarrow 2x(\ln 2)2^{x^2-3} = 0 \rightarrow \boxed{x = 0}$$

إذن القيمة الحرجة هي : $x = 0$

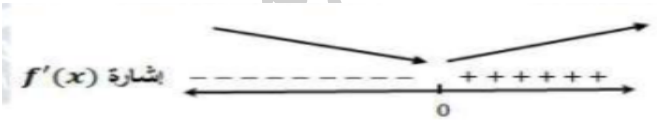
3) الخطوة الثالثة: أيجاد قيم الاقتران f عند النقطة/النقاط الحرجة.

$$f(0) = 2^{(0)^2-3}$$

$$f(0) = 2^{-3}$$

$$f(0) = \frac{1}{8}$$

4) الخطوة الرابعة: ابحث في إشارة المشتقة الأولى



5) الخطوة الخامسة: أجد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى المحلية.

للاقتران قيمة صغرى محلية هي : $f(0) = \frac{1}{8}$

الاقتران f متزايد على $(0, \infty)$ ومتناقص على $(-\infty, 0)$

أجد فترات التقعر إلى الأعلى وإلى الأسفل ونقاط الانعطاف (إن وجدت) لمنحنى كل اقتران مما يأتي:

14) $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 12$

1) الخطوة الأولى: أيجاد المشتقة الأولى

$$\acute{f}(x) = 12x^2 - 6x - 6$$

2) الخطوة الثانية: أيجاد المشتقة الثانية

$$\acute{\acute{f}}(x) = 24x - 6$$

3) الخطوة الثالثة: مساواة المشتقة الثانية بالصفر لإيجاد قيمة أو قيم x

$$24x - 6 = 0$$

$$24x = 6$$

$$x = \frac{6}{24}$$

$$\boxed{x = \frac{1}{4}}$$

4) الخطوة الرابعة: أيجاد قيم الانعطاف.

$$f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 12$$

$$f(x) = 4\left(\frac{1}{4}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 6\left(\frac{1}{4}\right) + 12$$

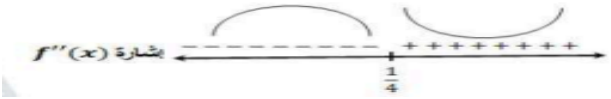
$$f(x) = \frac{4}{64} - \frac{3}{16} - \frac{6}{4} + 12$$

$$f(x) = \frac{4}{64} - \frac{12}{64} - \frac{96}{64} + \frac{768}{64}$$

$$f(x) = \frac{664}{64}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{82}{8}}$$

5) الخطوة الخامسة: ابحث في إشارة المشتقة الثانية



6) الخطوة السادسة: أجد فترات التقعر للأعلى وللأسفل.

الاقتران f مقعر للأعلى في $\left(\frac{1}{4}, \infty\right)$ ومقعر للأسفل في $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$.

وله نقطة انعطاف هي : $\left(\frac{1}{4}, \frac{82}{8}\right)$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٨٥٨٦٤٠١

15) $f(x) = x^6 - 3x^4$

1) الخطوة الأولى: أيجاد المشتقة الأولى

$$\acute{f}(x) = 6x^5 - 12x^3$$

2) الخطوة الثانية: أيجاد المشتقة الثانية

$$\acute{\acute{f}}(x) = 30x^4 - 36x^2$$

3) الخطوة الثالثة: مساواة المشتقة الثانية بالصفر لإيجاد قيمة أو قيم x

$$30x^4 - 36x^2 = 0$$

$$6x^2(5x^2 - 6) = 0$$

$$6x^2 = 0$$

$$\boxed{x = 0}$$

$$5x^2 - 6 = 0$$

$$5x^2 = 6$$

$$x^2 = \frac{6}{5}$$

$$\boxed{x = \sqrt{\frac{6}{5}}}$$

$$\boxed{x = -\sqrt{\frac{6}{5}}}$$

4) الخطوة الرابعة: أيجاد قيم الانعطاف.

$$f(x) = x^6 - 3x^4$$

$$f(0) = (0)^6 - 3(0)^4$$

$$f(0) = 0$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٨٥٨٦٤٠١

$$f\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)=\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^{6}-3\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^{4}$$

$$f\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)=\left(\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{6}-3\left(\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{4}$$

$$f\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)=\left(\frac{6}{5}\right)^{3}-3\left(\frac{6}{5}\right)^{2}$$

$$f\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)=\frac{216}{125}-3\left(\frac{36}{25}\right)$$

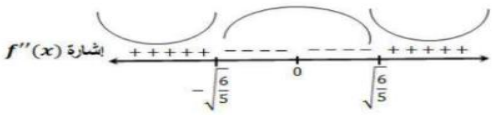
$$f\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)=\frac{216}{125}-3\left(\frac{180}{125}\right)$$

$$f\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)=\frac{216}{125}-\frac{540}{125}$$

$$\boxed{f\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)=-\frac{324}{125}}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٥٨٦٤٠١

5) الخطوة الخامسة: ابحث في إشارة المشتقة الثانية



6) الخطوة السادسة: أجد فترات التقعر للأعلى وللأسفل.

الاقتران f مقعر للأعلى في $\left(\sqrt{\frac{6}{5}},\infty\right)$ و $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{6}{5}}\right)$ ومقعر للأسفل في $\left(-\sqrt{\frac{6}{5}},\sqrt{\frac{6}{5}}\right)$.

وله نقطتا انعطاف هي : $\left(-\sqrt{\frac{6}{5}},-\frac{324}{125}\right)$ ، $\left(\sqrt{\frac{6}{5}},-\frac{324}{125}\right)$

16) $f(x)=(2+2x-x^2)^2$

1) الخطوة الأولى: أيجاد المشتقة الأولى

$\acute{f}(x)=2(2-2x)(2+2x-x^2)$

$\acute{f}(x)=(4-4x)(2+2x-x^2)$

2) الخطوة الثانية: أيجاد المشتقة الثانية

$\acute{\acute{f}}(x)=(4-4x)(2-2x)+(2+2x-x^2)(-4)$

$\acute{\acute{f}}(x)=(8-8x-8x+8x^2)+(-8-8x+4x^2)$

$\acute{\acute{f}}(x)=8-16x+8x^2-8-8x+4x^2$

$\acute{\acute{f}}(x)=-24x+12x^2$

$\acute{\acute{f}}(x)=12x(-2+x)$

3) الخطوة الثالثة: مساواة المشتقة الثانية بالصفر لإيجاد قيمة أو قيم x

$12x(-2+x)=0$

$12x=0$

$\boxed{x=0}$

$-2+x=0$

$\boxed{x=2}$

4) الخطوة الرابعة: أيجاد قيم الانعطاف.

$f(x)=(2+2x-x^2)^2$

$f(0)=(2+2(0)-(0)^2)^2$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٥٨٦٤٠١

$f(0) = (2)^2$

$\boxed{f(0) = 4}$

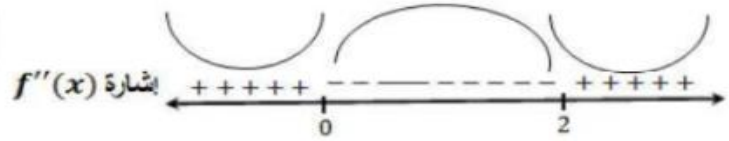
$f(2) = (2 + 2(2) - (2)^2)^2$

$f(2) = (2 + 4 - 4)^2$

$f(2) = (2)^2$

$\boxed{f(2) = 4}$

5) الخطوة الخامسة: ابحث في إشارة المشتقة الثانية



6) الخطوة السادسة: أجد فترات التقعر للأعلى وللأسفل.

الاقتران f مقعر للأعلى في $(2, \infty)$ و $(-\infty, 0)$ ومقعر للأسفل في $(0, 2)$ وله نقطتا انعطاف هما : $(0, 4)$،$(2, 4)$

17) $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$

1) الخطوة الأولى: أيجاد المشتقة الأولى

$$\acute{f}(x) = (x) \times \frac{(-2x)}{2\sqrt{4 - x^2}} + \sqrt{4 - x^2} \times (1)$$

$$\acute{f}(x) = \frac{-x^2}{\sqrt{4 - x^2}} + \sqrt{4 - x^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{-x^2}{\sqrt{4 - x^2}} + \frac{4 - x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{-x^2 + 4 - x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{4 - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$$

2) الخطوة الثانية: أيجاد المشتقة الثانية

$$\acute{f}(x)=\frac{\left(\sqrt{4-x^2}\right)(-4x)-(4-2x^2)\left(\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}\right)}{\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{-4x\sqrt{4-x^2}-(4-2x^2)\left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\right)}{(4-x^2)}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{-4x\sqrt{4-x^2}-\left(\frac{-4x+2x^3}{\sqrt{4-x^2}}\right)}{(4-x^2)}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{\frac{-4x(4-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}-\left(\frac{-4x+2x^3}{\sqrt{4-x^2}}\right)}{(4-x^2)}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{\frac{-16x+4x^3}{\sqrt{4-x^2}}-\left(\frac{-4x+2x^3}{\sqrt{4-x^2}}\right)}{(4-x^2)}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{\frac{-16x+4x^3+4x-2x^3}{\sqrt{4-x^2}}}{(4-x^2)}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{\frac{-12x+2x^3}{\sqrt{4-x^2}}}{(4-x^2)}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{-12x+2x^3}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}$$

3) الخطوة الثالثة: مساواة المشتقة الثانية بالصفر لإيجاد قيمة أو قيم x

$$\frac{-12x+2x^3}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}=0$$

معتصم ابراهيم 0788586401

$$-12x + 2x^3 = 0$$

$$x(-12 + 2x^2) = 0$$

$$\boxed{x = 0}$$

$$-12 + 2x^2 = 0$$

$$2x^2 = 12$$

$$x^2 = 6$$

$$\boxed{x = \sqrt{6}}$$

$$\boxed{x = -\sqrt{6}}$$

4) الخطوة الرابعة: أيجاد قيم الانعطاف.

$$f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$$

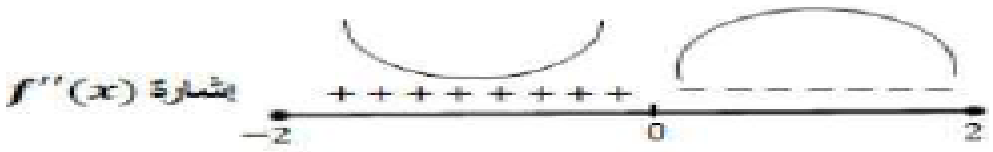
$$f(0) = (0)\sqrt{4 - (0)^2}$$

$$f(0) = 0$$

مجال الاقتران الجذري $4 - x^2 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow \boxed{x = \pm 2}$

مجال هذا الاقتران هو $[-2, 2]$ **، فالعددان** $\pm\sqrt{6}$ **خارج مجاله .**

5) الخطوة الخامسة: ابحث في إشارة المشتقة الثانية



6) الخطوة السادسة: أجد فترات التقعر للأعلى وللأسفل.

الاقتران f **مقعر للأعلى في** $(-2, 0)$ **ومقعر للأسفل في** $(0, 2)$ **وله نقطة انعطاف هي :** $(0, 0)$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٥٨٦٤٠١

18) $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$

1) الخطوة الأولى: أيجاد المشتقة الأولى

$$f(x) = x^2 - x^{-2}$$

2) الخطوة الثانية: أيجاد المشتقة الثانية

$$\acute{f}(x) = 2x + 2x^{-3}$$

$$\acute{\acute{f}}(x) = 2 - 6x^{-4}$$

$$\acute{\acute{f}}(x) = 2 - \frac{6}{x^4}$$

3) الخطوة الثالثة: مساواة المشتقة الثانية بالصفر لإيجاد قيمة أو قيم x

$$2 - \frac{6}{x^4} = 0$$

$$2 = \frac{6}{x^4}$$

$$2x^4 = 6$$

$$x^4 = 3$$

$$\boxed{x = \sqrt[4]{3}}$$

$$\boxed{x = -\sqrt[4]{3}}$$

4) الخطوة الرابعة: أيجاد قيم الانعطاف.

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$$

$$f(\sqrt[4]{3}) = (\sqrt[4]{3})^2 - \frac{1}{(\sqrt[4]{3})^2}$$

$$f(\sqrt[4]{3}) = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٨٥٨٦٤٠١

$$f(\sqrt[4]{3}) = \frac{3}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{f(\sqrt[4]{3}) = \frac{2}{\sqrt{3}}}$$

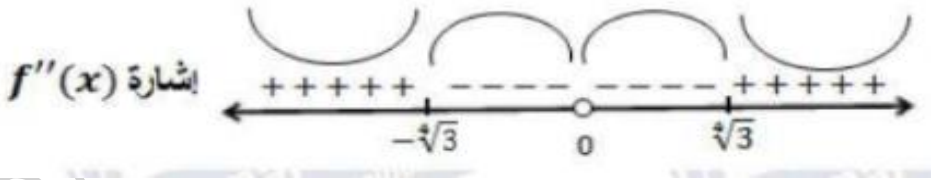
$$f(-\sqrt[4]{3}) = (-\sqrt[4]{3})^2 - \frac{1}{(-\sqrt[4]{3})^2}$$

$$f(-\sqrt[4]{3}) = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$f(-\sqrt[4]{3}) = \frac{3}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{f(-\sqrt[4]{3}) = \frac{2}{\sqrt{3}}}$$

5) الخطوة الخامسة: ابحث في إشارة المشتقة الثانية



6) الخطوة السادسة: أجد فترات التقعر للأعلى وللأسفل.

الاقتران f مقعر للأعلى في $(-\infty, -\sqrt[4]{3})$ و $(\sqrt[4]{3}, \infty)$ ومقعر للأسفل في $(-\sqrt[4]{3}, 0)$ و $(0, \sqrt[4]{3})$ وله نقطتا انعطاف هما : $(\sqrt[4]{3}, \frac{2}{\sqrt{3}})$ و $(-\sqrt[4]{3}, \frac{2}{\sqrt{3}})$

19) $f(x) = 2x - \tan x \,, (-\frac{\pi}{2} \,, \frac{\pi}{2})$

1) الخطوة الأولى: أيجاد المشتقة الأولى

$$\acute{f}(x) = 2 - \sec^2 x$$

2) الخطوة الثانية: أيجاد المشتقة الثانية

$$\acute{\acute{f}}(x) = -2 \sec x \sec x \tan x$$

$$\acute{\acute{f}}(x) = -2 \sec^2 x \tan x$$

$$\acute{\acute{f}}(x) = -2 \frac{1}{\cos x} x \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\acute{\acute{f}}(x) = -\frac{2\sin x}{\cos^2 x}$$

3) الخطوة الثالثة: مساواة المشتقة الثانية بالصفر لإيجاد قيمة أو قيم x

$$-\frac{2\sin x}{\cos^2 x} = 0$$

$$\sin x = 0$$

$$x = 0$$

4) الخطوة الرابعة: أيجاد قيم الانعطاف.

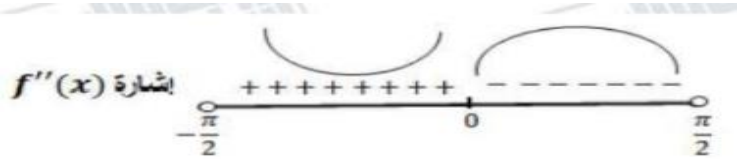
$$f(x) = 2x - \tan x$$

$$f(0) = 2(0) - \tan(0)$$

$$\boxed{f(0) = 0}$$

$\acute{f}(x)$ غير موجودة عندما $\cos x = 0$ ، لكن $\cos x \neq 0$ في الفترة المحددة بالسؤال .

5) الخطوة الخامسة: ابحث في إشارة المشتقة الثانية



معتصم ابراهيم ٠٧٨٨٥٨٦٤٠١

6) الخطوة السادسة: أجد فترات التقعر للأعلى وللأسفل.

الاقتران f مقعر للأعلى في $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ومقعر للأسفل في $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

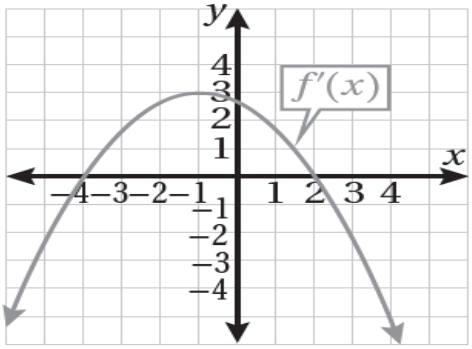
وله نقطة انعطاف هي : $(0, 0)$

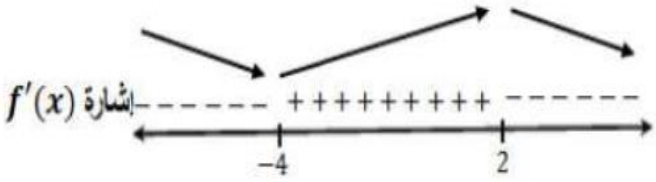
أستعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى $\acute{f}(x)$ لإيجاد كل مما يأتي :

20) قيم x التي يكون عندها للاقتران f قيم قصوى محلية ومطلقة ، مبيناً نوعها .

للاقتران قيمة صغرى محلية عند : $x = -4$

للاقتران قيمة عظمى محلية عند : $x = 2$





21) فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران f .

الاقتران f متزايد على $(-4, 2)$ ومتناقص على $(-\infty, -4)$ و $(2, \infty)$

أجد القيم القصوى المحلية لكل اقتران مما يأتي، مستعملاً اختبار المشتقة الثانية (إن أمكن):

22) $f(x) = 2\sin x + \cos 2x\,, [0\,, 2\pi]$

1) الخطوة الأولى: أيجاد المشتقة الأولى

$$\acute{f}(x) = 2\cos x - 2\sin 2x$$

$$\acute{f}(x) = 2\cos x - 2(2\sin x \cos x)$$

$$\acute{f}(x) = 2\cos x - 4\sin x \cos x$$

2) الخطوة الثانية: مساواة المشتقة الأولى بالصفر لإيجاد قيمة أو قيم x

$$2\cos x - 4\sin x \cos x = 0$$

$$\cos x - 2\sin x \cos x = 0$$

$$\cos x\,(1 - 2\sin x) = 0$$

$\cos x = 0 \rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{2}}, \boxed{x = \frac{3\pi}{2}}$

$1 - 2\sin x = 0$

$\sin x = \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{6}}, \boxed{x = \frac{5\pi}{6}}$

إذن القيم الحرجة $x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}, x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$

3) الخطوة الثالثة: أيجاد المشتقة الثانية

$\acute{f}(x) = -2\sin x - 4(-\sin x \sin x + \cos x \cos x)$

$\acute{f}(x) = -2\sin x - 4(\cos^2 x - \sin^2 x)$

$\acute{f}(x) = -2\sin x - 4\cos 2x$ قانون نصف الزاوية

4) الخطوة الرابعة: تصنيف النقاط ما إذا كانت نقاط قيم عظمى أو صغرى

لكي نحدد ما إذا كانت القيمة عظمى أم صغرى، إذا كانت قيمة المشتقة الثانية أكبر من صفر، فسيكون لدينا قيمة محلية صغرى .وإذا كانت قيمة المشتقة الثانية أصغر من صفر، فسيكون لدينا قيمة محلية عظمى.

$\acute{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 4\cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$\acute{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 4\cos(\pi)$

$\acute{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2(1) - 4(-1)$

$\acute{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 + 4$

$\boxed{\acute{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 > 0}$ صغرى محلية

$\acute{f}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 4\cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$\acute{f}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 4\cos(\pi)$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٥٨٦٤٠١

$$\acute{f}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2(-1) - 4(-1)$$

$$\acute{f}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2 + 4$$

$$\acute{f}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 6 \quad > 0$$ صغرى محلية

$$\acute{f}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - 4\cos 2\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\acute{f}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - 4\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\acute{f}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2\left(\frac{1}{2}\right) - 4\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\acute{f}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -1 - 2$$

$$\acute{f}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -3 \quad < 0$$ عظمى محلية

$$\acute{f}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -2\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) - 4\cos 2\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$\acute{f}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -2\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) - 4\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$\acute{f}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -2\left(\frac{1}{2}\right) - 4\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\acute{f}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -1 - 2$$

$$\acute{f}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -3 \quad < 0$$ عظمى محلية

5) الخطوة الخامسة: ايجاد القيم العظمى والصغرى المحلية

$$f(x) = 2\sin x + \cos 2x$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

معتصم ابراهيم 0788586401

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\pi$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2(1) + (-1)$$

$$\boxed{f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1}$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \cos 2\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2(-1) + (-1)$$

$$\boxed{f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -3}$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos 2\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 + \frac{1}{2}$$

$$\boxed{f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \cos 2\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 1 + \frac{1}{2}$$

$$\boxed{f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}}$$

للاقتران قيمة صغرى محلية عند : $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \, , f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -3$

للاقتران قيمة عظمى محلية عند : $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2} \, , f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٥٨٦٤٠١

23) $f(x) = x^3 + \frac{48}{x}$

1) الخطوة الأولى: أيجاد المشتقة الأولى

$$f(x) = x^3 + 48x^{-1}$$

$$\acute{f}(x) = 3x^2 - 48x^{-2}$$

$$\acute{f}(x) = 3x^2 - \frac{48}{x^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{3x^4}{x^2} - \frac{48}{x^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{3x^4 - 48}{x^2}$$

2) الخطوة الثانية: مساواة المشتقة الأولى بالصفر لإيجاد قيمة أو قيم x

$$3x^4 - 48 = 0$$

$$3x^4 = 48$$

$$x^4 = 16$$

$$\sqrt[4]{x^4} = \pm\sqrt[4]{16}$$

$$\boxed{x = 2}$$

$$\boxed{x = -2}$$

إذن القيم الحرجة هي : $x = \pm 2$

3) الخطوة الثالثة: أيجاد المشتقة الثانية

$$\acute{f}(x) = 3x^2 - 48x^{-2}$$

$$\acute{\acute{f}}(x) = 6x + 96x^{-3}$$

$$\acute{\acute{f}}(x) = 6x + \frac{96}{x^3}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٨٥٨٦٤٠١

4) الخطوة الرابعة: تصنيف النقاط ما إذا كانت نقاط قيم عظمى أو صغرى

لكي نحدد ما إذا كانت القيمة عظمى أم صغرى، إذا كانت قيمة المشتقة الثانية أكبر من صفر، فسيكون لدينا قيمة محلية صغرى .وإذا كانت قيمة المشتقة الثانية أصغر من صفر، فسيكون لدينا قيمة محلية عظمى.

$$\acute{f}(-2) = 6(-2) + \frac{96}{-2^3}$$

$$\acute{f}(-2) = -12 - \frac{96}{8}$$

$$\acute{f}(-2) = -12 - 12 < 0$$

$\boxed{\acute{f}(-2) = -24 < 0}$ عظمى محلية

$$\acute{f}(2) = 12 + 12 > 0$$

$\boxed{\acute{f}(2) = 24 > 0}$ صغرى محلية

5) الخطوة الخامسة: ايجاد القيم العظمى والصغرى المحلية

$$f(-2) = (-2)^3 + \frac{48}{(-2)}$$

$$f(-2) = -8 - 24$$

$$\boxed{f(-2) = -32}$$

$$f(2) = (2)^3 + \frac{48}{(2)}$$

$$f(2) = 8 + 24$$

$$\boxed{f(2) = 32}$$

للاقتران قيمة عظمى محلية عند : $f(-2) = -32$

للاقتران قيمة صغرى محلية عند : $f(2) = 32$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٨٥٨٦٤٠١

24) $f(x) = (x^2 - 3)e^x$

1) الخطوة الأولى: أيجاد المشتقة الأولى

$$\acute{f}(x) = (x^2 - 3)e^x + 2xe^x$$

$$\acute{f}(x) = x^2e^x - 3e^x + 2xe^x$$

$$\acute{f}(x) = e^x(x^2 + 2x - 3)$$

2) الخطوة الثانية: مساواة المشتقة الأولى بالصفر لإيجاد قيمة أو قيم x

$$e^x(x^2 + 2x - 3) = 0$$

$$(x - 1)(x + 3) = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$\boxed{x = 1}$$

$$x + 3 = 0$$

$$\boxed{x = -3}$$

إذن القيم الحرجة هي : $x = 1\ ,\ x = -3$

3) الخطوة الثالثة: أيجاد المشتقة الثانية

$$\acute{\acute{f}}(x) = e^x(2x + 2) + (x^2 + 2x - 3)e^x$$

$$\acute{\acute{f}}(x) = 2xe^x + 2e^x + x^2e^x + 2xe^x - 3e^x$$

$$\acute{\acute{f}}(x) = x^2e^x + 4xe^x - e^x$$

$$\acute{\acute{f}}(x) = e^x(x^2 + 4x - 1)$$

4) الخطوة الرابعة: تصنيف النقاط ما إذا كانت نقاط قيم عظمى أو صغرى

لكي نحدد ما إذا كانت القيمة عظمى أم صغرى، إذا كانت قيمة المشتقة الثانية أكبر من صفر، فسيكون لدينا قيمة محلية صغرى .وإذا كانت قيمة المشتقة الثانية أصغر من صفر، فسيكون لدينا قيمة محلية عظمى.

$$\acute{\acute{f}}(-3) = e^{-3}((-3)^2 + 4(-3) - 1)$$

$$\acute{\acute{f}}(-3) = e^{-3}(9 - 12 - 1)$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٥٨٦٤٠١

$\acute{f}(-3) = e^{-3}(-4)$

$\boxed{\acute{f}(-3) = \frac{-4}{e^3} < 0}$ عظمى محلية

$\acute{f}(1) = e^{1}((1)^2 + 4(1) - 1)$

$\acute{f}(1) = e(1 + 4 - 1)$

$\boxed{\acute{f}(1) = 4e > 0}$ صغرى محلية

5) الخطوة الخامسة: ايجاد القيم العظمى والصغرى المحلية

$f(-3) = (-3^2 - 3)e^{-3}$

$f(-3) = (9 - 3)e^{-3}$

$f(-3) = 6e^{-3}$

$\boxed{f(-3) = \frac{6}{e^3}}$

$f(1) = (1^2 - 3)e^{1}$

$\boxed{f(1) = -2e}$

للاقتران قيمة عظمى محلية عند : $f(-3) = \frac{6}{e^3}$

للاقتران قيمة صغرى محلية عند : $f(1) = -2e$

25) إذا كان للاقتران : $f(x) = ax^2 + bx + c$ قيمة عظمى محلية عند النقطة $(3, 12)$ ، وقطع المحور y في النقطة $(0, 1)$ فأجد قيمة كل من الثوابت : a و b و c .

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$\acute{f}(x) = 2ax + b$

عند النقطة $(3, 12)$ توجد قيمة عظمى محلية ، إذن هي نقطة حرجة ، ومنه $\acute{f}(3) = 0$

$\acute{f}(3) = 2a(3) + b$

$\acute{f}(3) = 6a + b = 0$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٨٥٨٦٤٠١

$$b = -6a \quad \dots\dots\dots\dots (1)$$

$$f(0) = 1$$

$$f(0) = a(0)^2 + b(0) + c = 1$$

$$\boxed{c = 1}$$

$$f(3) = a(3)^2 + b(3) + c$$

$$f(3) = 9a + 3b + c = 12$$

$$9a + 3b + 1 = 12$$

$$9a + 3b = 11 \quad \dots\dots\dots\dots (2)$$

بتعويض المعادلة 1 في المعادلة 2 نجد أن :

$$9a + 3(-6a) = 11$$

$$9a - 18a = 11$$

$$-9a = 11$$

$$\frac{-9a}{-9} = \frac{11}{-9}$$

$$\boxed{a = -\frac{11}{9}}$$

بتعويض قيمة a بالمعادلة رقم 1 :

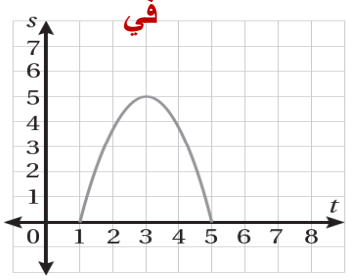
$$b = -6a$$

$$b = -6\left(-\frac{11}{9}\right)$$

$$\boxed{b = \frac{22}{3}}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٨٥٨٦٤٠١

يمثل الاقتران $s(t)$ المبين منحناه في الشكل المجاور موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، و t الزمن بالثواني :



26) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون .

يكون الجسم في حالة سكون عندما $v(t) = 0$، أي يوجد مماس أفقي

لمنحنى $s(x)$ نلاحظ من الشكل أنه يوجد مماس أفقي عندما $t = 3$ s

27) ما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب؟

يتحرك الجسم في الاتجاه الموجب عندما $v(t) \geq 0$ أي $\acute{s}(t) > 0$ ، وهذا يتحقق عندما يكون $s(t)$ متزايداً في الفترة $(1, 3)$.

ويتحرك الجسم في الاتجاه السالب عندما يكون $s(t)$ متناقصاً أي في الفترة $(3, 5)$.

28) ما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة؟ وما الفترات التي تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهة؟

تتزايد $v(t)$ عندما يكون $a(t) = \acute{s}(t) > 0$ ، وهذا يحصل عندما يكون منحنى s مقعراً للأعلى ، لكن حسب الشكل فإن منحنى s مقعر للأسفل على مجاله ، إذن سرعة الجسم المتجهة لا تتزايد أبداً ، بل تتناقص على $(1, 5)$.

إذا كان الاقتران : $f(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، فأجب عن الاسئلة الآتية تباعاً :

29) إذا كان لمنحنى الاقتران f مماس أفقي عند النقطة $(-2, -73)$ والنقطة $(0, -9)$ ، فأجد قيمة كل من الثوابت : a و b و c و d .

$$f(0) = 3(0)^4 + a(0)^3 + b(0)^2 + c(0) + d = -9$$

$$f(0) = \boxed{d = -9}$$

$$\acute{f}(x) = 12x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$$

$$\acute{f}(0) = 12(0)^3 + 12(0)^2 + 2b(0) + c = 0$$

$$\acute{f}(0) = \boxed{c = 0}$$

$$f(-2) = -73 \rightarrow 3(-2)^4 + a(-2)^3 + b(-2)^2 + 0(-2) + (-9) = -73$$

$$48 - 8a + 4b - 9 = -73$$

معتصم ابراهيم . Mo'taz

$$-8a + 4b = -73 - 48 + 9$$

$$-8a + 4b = -112$$

$$\frac{-8a}{4} + \frac{4b}{4} = \frac{-112}{4}$$

$$-2a + b = -28 \dots\dots\dots (1)$$

$$\acute{f}(x) = 12x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$$

$$\acute{f}(-2) = 0 \ \rightarrow \acute{f}(-2) = 12(-2)^3 + 3a(-2)^2 + 2b(-2) + c = 0$$

$$12(-2)^3 + 3a(-2)^2 + 2b(-2) + c = 0$$

$$-96 + 12a - 4b + (0) = 0$$

$$\frac{-96}{4} + \frac{12a}{4} - \frac{4b}{4} = \frac{0}{4}$$

$$-24 + 3a - b = 0$$

$$3a - b = 24 \dots\dots\dots (2)$$

بجمع المعادلتين نجد أن:

$$-2a + b = -28$$

$$\underline{3a - b = 24}$$

$$\boxed{a = -4}$$

بتعويض قيمة $a = -4$ في المعادلة رقم **2**

$$3(-4) - b = 24$$

$$-12 - b = 24$$

$$-b = 24 + 12$$

$$-b = 36$$

$$\boxed{b = -36}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٥٨٦٤٠١

30/ إذا وجدت نقطة ثالثة على منحنى الاقتران لها مماس أفقي، فأجد إحداثيي هذه النقطة.

$\acute{f}(x) = 0$

$12x^3 + 3ax^2 + 2bx + c = 0$

$12x^3 + 3(-4)x^3 + 2(-36)x + (0) = 0$

$12x^3 - 12x^2 - 72x = 0$

$12x(x^2 - x - 6) = 0$

$12x(x - 3)(x + 2) = 0$

$12x = 0$

$\boxed{x = 0}$

$x - 3 = 0$

$\boxed{x = 3}$

$x + 2 = 0$

$\boxed{x = -2}$

$x = 0 \ , x = 3 \ , x = -2$

$f(3) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f(3) = 3(3)^4 + (-4)(3)^3 + (-36)(3)^2 + 0(3) + (-9)$

$f(3) = 243 - 108 - 324 - 9$

$f(3) = 243 - 441$

$f(3) = -198$

النقطة الثالثة على منحنى الاقتران التي لها مماس أفقي هي $(3, -198)$.

31/أصنف كلاً من النقاط الثلاث إلى صغرى محلية، وعظمى محلية (إن أمكن).

$\acute{f}(x) = 12x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$

$\acute{\acute{f}}(x) = 36x^2 + 6ax + 2b$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٨٥٨٦٤٠١

$\acute{f}(x) = 36x^2 + 6(-4)x + 2(-36)$

$\acute{f}(x) = 36x^2 - 24x - 72$

$\acute{f}(-2) = 36(-2)^2 + 6(-4)(-2) + 2(-36)$

$\acute{f}(-2) = 144 + 48 - 72$

$\acute{f}(-2) = 120 > 0$ صغرى محلية

$\acute{f}(0) = 36(0)^2 - 24(0) - 72$

$\acute{f}(0) = -72 < 0$ عظمى محلية

$\acute{f}(3) = 36(3)^2 - 24(3) - 72$

$\acute{f}(3) = 324 - 72 - 72$

$\acute{f}(3) = 180 > 0$ صغرى محلية

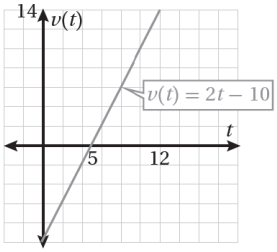
لكي نحدد ما إذا كانت القيمة عظمى أم صغرى، إذا كانت قيمة المشتقة الثانية أكبر من صفر، فسيكون لدينا قيمة محلية صغرى .وإذا كانت قيمة المشتقة الثانية أصغر من صفر، فسيكون لدينا قيمة محلية عظمى.

إذن النقطة $(-2, -73)$ هي نقطة قيمة صغرى محلية .

والنقطة $(0, -9)$ هي نقطة قيمة عظمى محلية .

والنقطة $(3, -198)$ هي نقطة قيمة صغرى محلية .

يمثل الاقتران $v(t)$ المبين منحناه في الشكل المجاور السرعة المتجهة لجسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث v السرعة المتجهة بالمتر لكل ثانية ، و t الزمن بالثواني :



32) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون .

يكون الجسم في حالة سكون عندما $v(t) = 0$ أي عندما $t = 5\ s$

33) ما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب؟

يتحرك الجسم في الاتجاه الموجب عندما $v(t) > 0$ أي في الفترة $(5, 12)$.

يتحرك الجسم في الاتجاه السالب عندما $v(t) < 0$ أي في الفترة $(0, 5)$.

معتصم ابراهيم ٠٧٨٨٥٨٦٤٠١

34) ما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة؟ وما الفترات التي تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهة؟

كما هو واضح من الشكل فإن $v(t)$ تتزايد دوماً على الفترة $(0, 12)$.

35- إذا كان للاقتران : $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ قيمة قصوى محلية عند النقطة $(2, 11)$ ، ونقطة انعطاف عند النقطة $(1, 5)$ فأجد قيمة كل من الثوابت : a و b و c .

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + c$$

$$\acute{f}(x) = 3ax^2 + 2bx$$

$$\acute{\acute{f}}(x) = 6ax + 2b$$

$$f(2) = 11 \rightarrow \ a(2)^3 + b(2)^2 + c = 11$$

$$8a + 4b + c = 11 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\acute{f}(2) = 0 \rightarrow 3a(2)^2 + 2b(2) = 0$$

$$12a + 4b = 0$$

$$3a + b = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$f(1) = 5 \rightarrow \ a(1)^3 + b(1)^2 + c = 5$$

$$a + b + c = 5 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\acute{\acute{f}}(1) = 0 \rightarrow \ 6a(1) + 2b = 0$$

$$6a + 2b = 0$$

$$\rightarrow 3a + b = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

بطرح المعادلة (3) من المعادلة (1) نجد أن :

$$8a + 4b + c = 11$$

$$\underline{(-)\ a + b + c = 5}$$

$$7a + 3b = 6 \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

بطرح 3 أمثال المعادلة (2) من المعادلة (4) نجد أن :

$$7a + 3b = 6$$

$$\underline{9a + 3b = 0}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٥٨٦٤٠١

$-2a = 6$

$\boxed{a = -3}$

وبتعويض قيمة كل من a ي المعادلة (2) نجد أن : $b = 9$

$3(-3) + b = 0$

$-9 + b = 0$

$\boxed{b = 9}$

وبتعويض قيمة كل من a و b في المعادلة (3) نجد أن : $c = -1$

$a + b + c = 5$

$-3 + 9 + c = 5$

$6 + c = 5$

$\boxed{c = -1}$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٨٥٨٦٤٠١

الدرس الثالث

تطبيقات القيم القصوى

1) إذا كان $a\ cm$ و $b\ cm$ هما طولي ضلعين ثابتين في مثلث ، وكانت الزاوية بينهما θ ، فأجد قيمة θ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن .

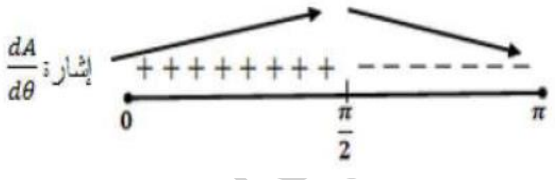
$$A = \frac{1}{2}ab\sin\theta \quad , 0 < \theta < \pi$$

$$\frac{dA}{d\theta} = \frac{1}{2}ab\cos\theta$$

$$\frac{dA}{d\theta} = 0 \ \rightarrow \frac{1}{2}ab\cos\theta = 0$$

$$\cos\theta = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$



إذن مساحة المثلث تكون أكبر ما يمكن عندما $\theta = \frac{\pi}{2}$

2) ترغب شركة في تصميم خزان من الفولاذ الرقيق المقاوم للصدأ على شكل متوازي مستطيلات ، حجمه $500\ m^3$ ، وقاعدته مربعة الشكل ، ومفتوح من الأعلى . أجد الأبعاد التي تكون فيها مساحة سطح الخزان أقل ما يمكن.

حجم متوازي مستطيلات قاعدته مربعة = مساحة القاعدة × الارتفاع

$$V = x^2h$$

$$x^2h = 500$$

$$h = \frac{500}{x^2}$$

المساحة السطحية لمتوازي مستطيلات قاعدته مربعة مفتوح من الأعلى = (محيط القاعدة × الارتفاع) + مساحة القاعدة

$$A = x^2 + 4xh$$

$$A = x^2 + 4x \times \frac{500}{x^2}$$

$$A = x^2 + \frac{2000}{x}$$

$$A = x^2 + 2000x^{-1}$$

$$\frac{dA}{dx} = 2x - \frac{2000}{x^2}$$

$$2x - \frac{2000}{x^2} = 0$$

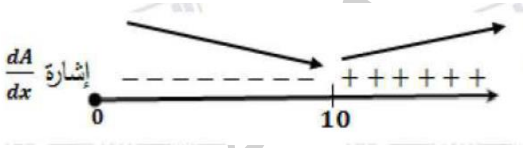
$$\left[2x = \frac{2000}{x^2}\right] \times x^2$$

$$2x^3 = 2000$$

$$x^3 = 1000$$

$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{1000}$$

$$\boxed{x = 10}$$



$$h = \frac{500}{(10)^2}$$

$$h = \frac{500}{100}$$

$$\boxed{h = 5}$$

إذن تكون مساحة سطح الخزان أقل ما يمكن عندما تكون الأبعاد كالآتي:

$$x = 10\,m\,, h = 5\,m$$

يمثل الاقتران : $s_1 = \sin t$ والاقتران : $s_2 = \sin(t + \frac{\pi}{3})$ موقعي جسمين يتحركان في مسار مستقيم ، حيث s_1 و s_2 الموقعان بالأمتار . و t الزمن بالثواني :

3) أجد قيمة (قيم) t التي يلتقي فيها الجسمين .

$$s_1 = s_2$$

$$\sin t = \sin(t + \frac{\pi}{3})$$

$$\sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right) - \sin t = 0$$

$$\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)-\cos t=0$$

$$2\cos(t+\frac{\pi}{6})\sin\frac{\pi}{6}=0$$

$$\cos(t+\frac{\pi}{6})=0$$

$$t+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+n\pi$$

$$t=\frac{\pi}{3}+n\pi$$

حيث أن n عدد صحيح غير سالب .

4) أجد أكبر مسافة بين الجسمين في الفترة الزمنية : $0\le t\le 2\pi$.

لتكن المسافة بين الجسمين $f(t)$

$$f(t)=|s_2-s_1|$$

$$f(t)=\left|\sin(t+\frac{\pi}{6})-\sin t\right|$$

$$f(t)=\left|\cos\left(t+\frac{\pi}{6}\right)\right| \quad ,0\le t\le 2\pi$$

$$f(t)=\pm\cos\left(t+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\acute{f}(t)=\pm\sin\left(t+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sin\left(t+\frac{\pi}{6}\right)=0$$

$$t+\frac{\pi}{6}=\pi \ or\ 2\pi$$

$$t=\frac{5\pi}{6}\ ,\qquad t=\frac{11\pi}{6}$$

إذن القيم الحرجة هي : $t=\frac{5\pi}{6}\ ,\ t=\frac{11\pi}{6}$

نقارن قيمة الاقتران عند القيم الحرجة مع قيمته عند طرفي المجال.

معتصم ابراهيم ٠٧٨٥٨٦٤٠١

$$f(0) = \left|\cos\left(t + \frac{\pi}{6}\right)\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \left|\cos\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right)\right| = 1$$

$$f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \left|\cos\left(\frac{11\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right)\right| = 1$$

$$f(2\pi) = \left|\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

إذن أكبر مسافة بين الجسمين هي $1\ m$

سلك يبلغ طوله $24\ cm$ ، ويراد قصة إلى قطعتين لصنع دائرة ومربع :

5) أحدد مكان القص، بحيث يكون مجموع مساحتي الدائرة والمربع أصغر ما يمكن.

ليكن x الجزء الذي تصنع منه الدائرة $x\ cm$ ، فإن :

$x = 2\pi r$ محيط الدائرة

$$r = \frac{x}{2\pi}$$

$$A = \pi r^2$$

$$\boxed{A = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2}$$ مساحة الدائرة

ليكن x الجزء الذي يصنع منه المربع $x\ cm$ ، فإن :

$P = 4l$ محيط المربع

$$24 - x = 4l$$

$$l = 6 - \frac{x}{4}$$

$$A = x^2$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٨٥٨٦٤٠١

$A = \left(6 - \frac{x}{4}\right)^2$ مساحة المربع

$$A = \pi r^2 + l^2$$

$$A = \pi \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + \left(6 - \frac{x}{4}\right)^2$$

$$A = \pi \frac{x^2}{4\pi^2} + \left(6 - \frac{x}{4}\right)^2$$

$$A = \frac{x^2}{4\pi} + \left(6 - \frac{x}{4}\right)^2$$

$$\acute{A} = \frac{2x}{4\pi} + 2\left(6 - \frac{x}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$\acute{A} = \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{2}\left(6 - \frac{x}{4}\right)$$

$$\frac{x}{2\pi} - \frac{1}{2}\left(6 - \frac{x}{4}\right) = 0$$

$$\frac{x}{2\pi} = \frac{1}{2}\left(6 - \frac{x}{4}\right)$$

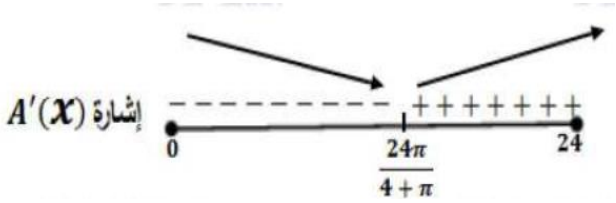
$$\frac{x}{\pi} = 6 - \frac{x}{4}$$

$$\frac{x}{\pi} + \frac{x}{4} = 6$$

$$x\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{4}\right) = 6$$

$$x = 6\left(\frac{4\pi}{4 + \pi}\right)$$

$$x = \frac{24\pi}{4 + \pi}$$



إذن يكون مجموع مساحتي الدائرة والمربع اصغر ما يمكن عندما نقطع للدائرة من السلك طولاً مقداره $\frac{24\pi}{4+\pi} cm$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٨٥٨٦٤٠١

6) أحدد مكان القص، بحيث يكون مجموع مساحتي الدائرة والمربع أكبر ما يمكن.

للحصول على أكبر قيمة للاقتران A نقارن القيمتين $A(0)$ و $A(24)$

$$A(0) = \pi\left(\frac{0}{2\pi}\right)^2 + \left(6 - \frac{0}{4}\right)^2 = 36\ cm^2$$

$$A(24) = \pi\left(\frac{24}{2\pi}\right)^2 + \left(6 - \frac{24}{4}\right)^2$$

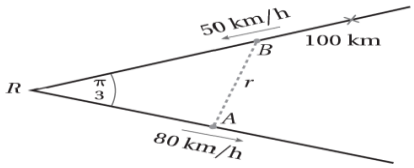
$$A(24) = \pi\left(\frac{12}{\pi}\right)^2 + 0$$

$$A(24) = \pi\left(\frac{144}{\pi^2}\right) = \frac{144}{\pi} \approx 45.8\ cm^2$$

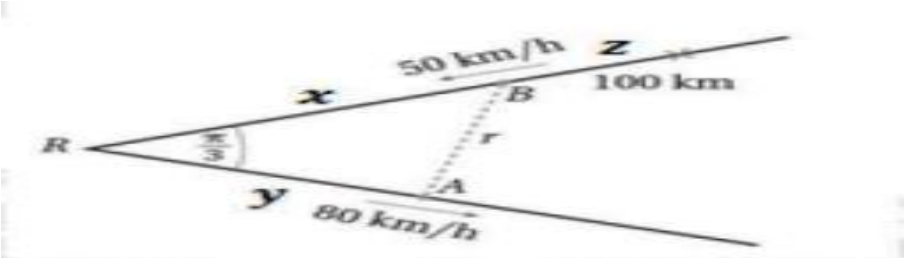
$$A(24) = \frac{144}{\pi} \approx 45.8\ cm^2$$

إذن للحصول على أكبر مجموع للمساحتين نخصص السلك كله للدائرة، ولا نقطع للمربع شيئاً منه.

7) يلتقي طريقان مستقيمان عند النقطة R بزاوية قياسها $\frac{\pi}{3}$. انطلقت السيارة A من النقطة R على أحد الطريقين بسرعة $80\ km/h$. وفي الوقت نفسه ، انطلقت السيارة B بسرعة $50\ km/h$ على الطريق الآخر في اتجاه النقطة R من نقطة تبعد عنها مسافة $100\ km$ ، أجد أقصر مسافة ممكنة بين السيارتين .



لتكن الأبعاد كما في الشكل أدناه:



بعد مرور t ساعة من انطلاق السيارتين يكون :

$$y = 80t\ ,\ \ z = 50t$$

$$x = 100 - 50t$$

$$r^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\frac{\pi}{3}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 - 2xy\frac{1}{2}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 - xy$$

$$r^2 = (100 - 50t\ \ )^2 + (80t)^2 - (100 - 50t)(80t)$$

$$r^2 = 10000 - 10000t + 2500t^2 + 6400t^2 - 8000t + 4000t^2$$

$$r^2 = 10000 - 18000t + 12900t^2$$

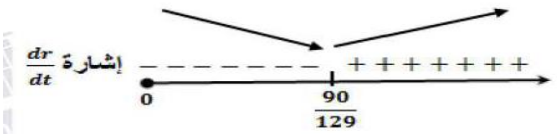
$$2r\frac{dr}{dt} = -18000 + 25800t$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{-18000 + 25800t}{2r}$$

$$\frac{dr}{dt} = 0 \rightarrow -18000 + 25800t = 0$$

$$\frac{25800t}{25800} = \frac{18000}{25800}$$

$$t = \frac{90}{129}\ \ h$$



أقصر مسافة ممكنة بين السيارتين هي:

$$r^2 = 10000 - 18000t + 12900t^2$$

$$r = \sqrt{10000 - 18000\left(\frac{90}{129}\right) + 12900\left(\frac{90}{129}\right)^2}$$

$$r \approx 61\ km$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٨٥٨٦٤٠١