

سلسلة النصيحة في الرياضيات

تطبيقات التفاضل 2

الأستاذ

المعدلات المرتبطة بالزمن

ثامر قدورة

0787488070

أمثلة

أوراق عمل

امتحانات

مراجعات

2022

- المعدلات المرتبطة بالزمن 1
- المعدلات المرتبطة بالزمن 2
- المعدلات المرتبطة بالزمن 3
- المعدلات المرتبطة بالزمن 4
- المعدلات المرتبطة بالزمن 5

للمشاركة في الدورة الأونلاين

موقع النصيحة التعليمي

<https://NaseehaMath.com/courses/tawjihi-f1>

رقم التواصل على الواتس للمشاركين في الدورة

0787488070

أو على الفيس :

صفحة دورات الأستاذ ثامر قدورة

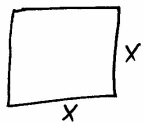
ملاحظة : بسبب ضيق الوقت اعتذر عن استقبال اسئلة غير المشتركين في الدورة ... لكن بإمكانكم الاستفادة من الدوسية للدراسة الذاتية

المعدلات المرتبطة بالزمن 1

أخرج الأساسيات

مسألة معدنية مربعة الشكل تتمدد بالحرارة محافظة على شكلها، بحيث يزداد طول ضلعها بمعدل 3 cm/s . جد معدل تغير مساحتها مع الزمن عندما يكون طول ضلعها 4 cm

الحل



$$\frac{dx}{dt} = 3$$

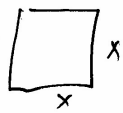
$$A = x^2 \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 2x \frac{dx}{dt}$$

$$\left. \frac{dA}{dt} \right|_{x=4} = ?$$

$$\frac{dA}{dt} = 2(4)(3) = 24$$

مسألة معدنية مربعة الشكل، تتقلص محافظة على شكلها، بحيث يتناقص طول ضلعها بمعدل 4 cm/s . جد معدل تغير مساحتها بالنسبة للزمن عندما يكون مساحتها 25 cm^2

الحل



$$\frac{dx}{dt} = -4$$

$$\left. \frac{dA}{dt} \right|_{A=25} = ?$$

$$A = x^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 2x \frac{dx}{dt}$$

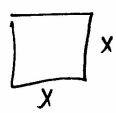
$$A = x^2 = 25$$

$$x = 5$$

$$\frac{dA}{dt} = 2(5)(-4) = -40$$

مسألة معدنية مربعة الشكل، تتمدد محافظة على شكلها، بحيث تزداد مساحتها بمعدل $12 \text{ cm}^2/\text{s}$. جد معدل تغير محيطها مع الزمن عندما تصبح طول الضلع 3 cm

الحل



$$\frac{dA}{dt} = 12$$

$$\left. \frac{dP}{dt} \right|_{A=9} = ?$$

$$A = 9$$

$$A = x^2 \text{ و } P = 4x$$

$$\Rightarrow x = \frac{P}{4}$$

$$A = \left(\frac{P}{4}\right)^2 \Rightarrow A = \frac{1}{16} P^2$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{2}{16} P \frac{dP}{dt}$$

$$12 = \frac{1}{8} (12) \frac{dP}{dt} \Rightarrow \frac{dP}{dt} = 8$$

$$P = 4(3)$$

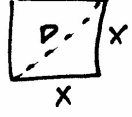
$$P = 12$$

تجارب

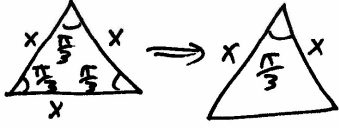
① صفيحة معدنية مربعة الشكل تتمدد بالحرارة محافظة على شكلها ، جد معدل تغير طول ضلعها مع الزمن في اللحظة التي تصبح فيها مساحتها 16 m^2 .
كلما $\uparrow$ معدل تزايد المساحة هو $48 \text{ m}^2/\text{s}$

الكل  x $\frac{dx}{dt} = ?$ $A = x^2$
 $A = 16$ $\frac{dA}{dt} = 2x \frac{dx}{dt}$
 $\frac{dA}{dt} = 48$ $A = 16 \Rightarrow x^2 = 16$
 $\Rightarrow x = 4$
 $48 = 2(4) \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 6$

② صفيحة معدنية مربعة الشكل تتمدد بالحرارة محافظة على شكلها . بحيث يزداد طول ضلعها بمعدل 3 cm/s . جد معدل تغير محيطها مع الزمن
 a) $3\sqrt{2}$ b) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ c) 9 d) 6

الكل  x $D^2 = x^2 + x^2$ $\frac{dD}{dt} = \sqrt{2} \frac{dx}{dt}$
 $D^2 = 2x^2$
 $D = \sqrt{2} x$ $\frac{dD}{dt} = \sqrt{2} \cdot 3 = 3\sqrt{2}$ [a]

- ③ مثلث متساوي الاضلاع ، يتناقص طول ضلعه بمعدل 2 cm/s
جد معدل تغير مساحته مع الزمن عندما يكون طول ضلعه 1 cm
بمسألتين العلاقة التفاضلية لحل السؤال
- أ) $A = \frac{1}{4} x^2$ ب) $A = \frac{1}{2} b h$ ج) $A = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2$ د) $A = \frac{1}{2} x^2$

الحل

 $\Rightarrow A = \frac{1}{2} x \cdot x \cdot \sin \frac{\pi}{3}$ (المساحة تساوي نصف الضلعين مضروباً في جيب الزاوية)
 $= \frac{1}{2} x \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $A = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2$
 $\frac{dx}{dt} = -2$
 $\frac{dA}{dt} = ?$
 $x = 1$
 العلاقة التفاضلية هي التي تربط المتغيرات (x و A)
 بعبارة
 $A = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2$

④ حل السؤال السابق

الحل

 $A = \frac{1}{2} x \cdot x \cdot \sin \frac{\pi}{3}$
 $= \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $= \frac{\sqrt{3}}{4} x^2$
 $\frac{dx}{dt} = -2$
 $\frac{dA}{dt} = ?$
 $x = 1$
 $\frac{dA}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2x \cdot \frac{dx}{dt}$
 $= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2(1)(-2) = -\sqrt{3}$

نور جيني ذكاءك

- ⑤ دائرة تتدد بالحرارة بحيث يزداد نصف قطرها بمعدل 2 cm/s
وتزداد مساحتها بمعدل 4 cm²/s في لحظة ما . جد نصف قطرها في تلك اللحظة

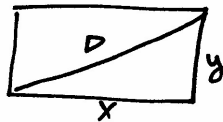
الحل

 $A = \pi r^2$
 $\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$
 $4 = 2\pi r (2) \Rightarrow r = \frac{1}{\pi}$
 $\frac{dr}{dt} = 2$
 $\frac{dA}{dt} = 4$
 $r = ?$

اكتسب حيل و اختصارات

مسألة ١: صفحة معدنية مستطيلة الشكل . تتحدد محافظة على شكلها . بحيث يزداد طولها بمعدل 5 cm/s وعرضها بمعدل 2 cm/s . جد معدل تغير طول قطرها مع الزمن عندما يكون طولها 8 cm وعرضها 6 cm

الحل



$$D^2 = x^2 + y^2$$

$$2D \frac{dD}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt}$$

$$2(10) \frac{dD}{dt} = 2(8)(5) + 2(6)(2)$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{104}{20} = \frac{52}{10} = \frac{26}{5}$$

$$D^2 = 8^2 + 6^2$$

$$D = 10$$

$$\frac{dx}{dt} = 5$$

$$\frac{dy}{dt} = 2$$

$$\frac{dD}{dt} = ?$$

$$x = 8$$

$$y = 6$$

المسألة ٢

مسألة ٢: صفحة معدنية مستطيلة الشكل . طولها ثابت و مقدارها 8 cm . وإذا علت أن عرض الصفحة يزداد بمعدل 3 cm/s . جد معدل تغير القطر عندما يكون عرضها 6 cm



$$x = 8$$

$$\frac{dy}{dt} = 3$$

$$\frac{dD}{dt} = ?$$

$$y = 6$$

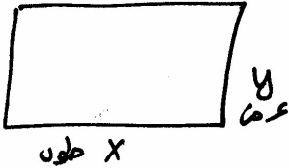
$$D^2 = y^2 + 8^2$$

$$D = \sqrt{y^2 + 64}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{y \frac{dy}{dt}}{\sqrt{y^2 + 64}}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{(6)(3)}{\sqrt{6^2 + 64}} = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$$

مسألة
صفيحة معدنية مستطيلة الشكل، طولها متغير عرضها . تتحرك
محافظاً على شكلها . بحيث يزداد طولها بمعدل 2 cm/s . جد
معدل تغير مساحتها مع الزمن عندما يكون عرضها 10 cm



طول x

$$x = 2y$$

$$\frac{dx}{dt} = 2$$

$$\frac{dA}{dt} \downarrow$$

$y = 10$

$$A = xy$$

$$x = 2y$$

$$y = \frac{x}{2}$$

$$A = x \cdot \frac{x}{2} = \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{2}{2} x \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = (20)(2)$$

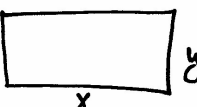
$$x = 2(10) = 20$$

$$\frac{dA}{dt} = 40$$

تمارين

- ① مصفحة معدنية مستطيلة الشكل . يزداد طولها بمعدل 6 cm/s ويتناقص عرضها بمعدل 2 cm/s . جد معدل تغير مساحتها مع الزمن عندما يكون طولها 5 cm وعرضها 3 cm

الحل



$$A = xy$$

$$\frac{dA}{dt} = x \frac{dy}{dt} + y \frac{dx}{dt}$$

مشتقة ضرب

$$\frac{dA}{dt} = 5(-2) + 3(6)$$

$$= 8$$

$$\frac{dx}{dt} = 6$$

$$\frac{dy}{dt} = -2$$

$$\frac{dA}{dt} = ?$$

$$x = 5$$

$$y = 3$$

- ② مثلث حول قاعدته ثابت ويساوي 3 cm . يزداد ارتفاعه بمعدل 2 cm/s . فانه معدل تغير مساحته مع الزمن يساوي:

a) $\frac{3}{2}$ b) 3 c) 6 d) none

الحل



$$A = \frac{1}{2} (3) h$$

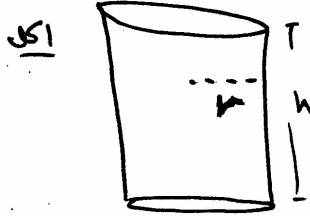
$$A = \frac{3}{2} h$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{3}{2} \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = ?$$

$$= \frac{3}{2} (2) = 3 \Rightarrow \boxed{b}$$

③ اسطوانة ارتفاعها يزيد عن نصف قطرها بـ 3 cm
تتعدد محافظة على شكلها . جد معدل تغير حجمها مع الزمن
عندما يصبح ارتفاعها 5 cm . علماً أن معدل زيادة نصف قطرها
هو 4 cm/s



$$h = r + 3$$

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{h=5} = ?$$

$$\frac{dr}{dt} = 4$$

$$V = \pi r^2 h$$

$$V = \pi r^2 (r + 3)$$

$$V = \pi r^3 + 3\pi r^2$$

$$\frac{dV}{dt} = 3\pi r^2 \frac{dr}{dt} + 6\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$= 3\pi (2)^2 (4) + 6\pi (2) (4)$$

$$\frac{dV}{dt} = 96\pi$$

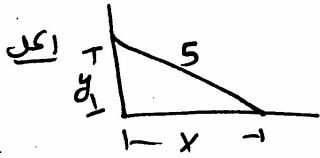
$$h = r + 3$$

$$5 = r + 3$$

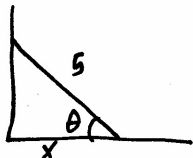
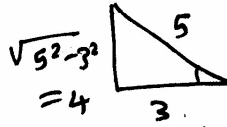
$$r = 2$$

أكملت والعلاقات

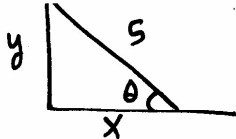
سأحله 5 m يرتكز طرفه العلوي على حائط عمودي ، والطرف السفلي على أرض أفقية . إذا انزلق الطرف السفلي مبتعداً عن الحائط بمعدل 2 m/s . نجد :
سورة انخفاض الطرف العلوي للسلم عندما يكون طرفه السفلي على بعد 3 m عن الحائط

 أول $\frac{dx}{dt} = 2$ $\frac{dy}{dt} = ?$ $x = 3$	$x^2 + y^2 = 25$ $2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0$ $(3)(2) + (4) \frac{dy}{dt} = 0$ $\frac{dy}{dt} = -\frac{3}{2}$	$3^2 + y^2 = 25$ $y = 4$ ←
--	--	-----------------------------------

سأحله معدل تغير الزاوية بين السلم والأرض عندما يكون الطرف السفلي على بعد 3 m من الحائط

 أول $\frac{dx}{dt} = 2$ $\frac{d\theta}{dt} = ?$ $x = 3$	$\cos \theta = \frac{x}{5}$ $-\sin \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{5} \frac{dx}{dt}$ $-\frac{4}{5} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{5} (2)$ $\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{2}$	$x = 3$  $\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$
---	---	--

ساح حوله 5 m يرتكز بطفه العلوي على حائط عمودي ، واطرف السفلي على أرض أفقية . إذا التفت الطرف السفلي مبتعداً عن الحائط بمعدل 2 m/s . فجد :
.. معدل التغير في مساحة المثلث المكون من السطح والأرض والحائط عندما يكون الطرف السفلي على بعد 3 m من الحائط



$$\frac{dx}{dt} = 2$$

$$\left. \frac{dA}{dt} \right|_{x=3} = ?$$

$$A = \frac{1}{2} xy$$

$$A = \frac{1}{2} x \sqrt{25 - x^2}$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$y = \sqrt{25 - x^2}$$

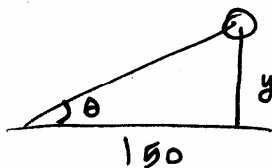
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} x \frac{-x \frac{dx}{dt}}{\sqrt{25 - x^2}} + \sqrt{25 - x^2} \cdot \frac{1}{2} \frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{1}{2} (3) \frac{-3(2)}{4} + 4 \cdot \frac{1}{2} (2)$$

$$= -\frac{9}{4} + 4 = \frac{7}{4}$$

يرتفع بالون رأسياً إلى أعلى بسرعة مقدارها 42 m/s ، وإذا تم رصد البالون من مشاهد على الأرض بعد 150 m عن موقع البالون على الأرض . فجد معدل تغير زاوية ارتقاع نظر المشاهد للبالون عندما يكون البالون على ارتفاع 150 m عن سطح الأرض

اكد



$$\frac{dy}{dt} = 42$$

$$\left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{y=150} = ?$$

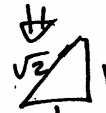
$$\tan \theta = \frac{y}{150}$$

$$\sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{150} \frac{dy}{dt}$$

$$(\sqrt{2})^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{150} (42)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{42}{300}$$

$$= \frac{7}{50}$$

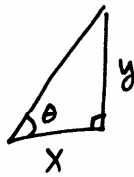


$$\sec \theta = \sqrt{2}$$

تمارين

① في المثلث قائم الزاوية، إذا كان طول الضلعين المجاور للزاوية الحادة θ في لحظة ما هما x و y على التوالي. وإذا كان معدل تزايد x هو 1 cm/s ، ومعدل تناقص y هو 0.25 ، فجد سرعة تغير الزاوية θ في اللحظة التي يكون فيها $x = y = 2$

الحل



$$\frac{dx}{dt} = 1$$

$$\frac{dy}{dt} = -0.25$$

$$\frac{d\theta}{dt} = ?$$

$x = 2$
 $y = 2$

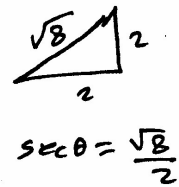
$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$\sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt} = x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \frac{d\theta}{dt} = 2(-0.25) - 2(1)$$

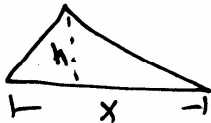
$$2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{-5}{4}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{5}{16}$$



$$\sec \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

② صفيحة معدنية شكلية الشكل ارتفاعها يساوي نصف طول قاعدتها، تسد الحرارة "كامضة" على شكلها. بحيث تزداد مساحتها بمعدل $5 \text{ cm}^2/\text{s}$ جد معدل التغير في طول قاعدتها عندما يصبح طول القاعدة 10 cm



$$h = \frac{x}{2}$$

$$\frac{dA}{dt} = 5$$

$$\frac{dx}{dt} = ?$$

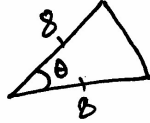
$x = 10$

$$A = \frac{1}{2} \cdot x \cdot h = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{x}{2} = \frac{1}{4} x^2$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{2}{4} x \frac{dx}{dt}$$

$$5 = \frac{1}{2} (10) \frac{dx}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{dx}{dt} = 1}$$

③ مثلث متطابق المثلثين ، طول كل من ضلعيه المتساويين 8 cm
يزداد قياس الزاوية المحصورة بينهما بمعدل 2 rad/min ، جد معدل
التغير في مساحة المثلث عندما يكونه قياس الزاوية المحصورة يساوي $\frac{\pi}{3}$



$$\frac{d\theta}{dt} = 2$$

$$\left. \frac{dA}{dt} \right|_{\theta = \frac{\pi}{3}} = ?$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \sin \theta$$

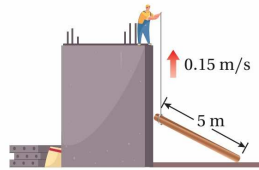
$$A = 32 \sin \theta$$

$$\frac{dA}{dt} = 32 \cos \theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$= 32 \cos \frac{\pi}{3} \cdot 2 = 32$$

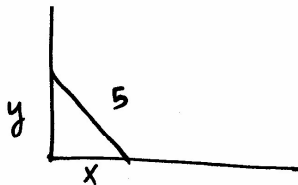
كيف عرفنا
انه طول الضلع
ثابت ؟

لانه اعطاني قيمته
وما علي انه يتغير



بناء: يسحب عامل بناء لوحًا خشبيًا
طوله 5 m إلى الأعلى بجانب مبنى لم
يكتمل إنشاؤه بعد، وذلك باستعمال
حبل يُربط به أحد طرفي اللوح كما
في الشكل المجاور. إذا افترضت أنَّ
طرف اللوح المربوط بالحبل يتبع مسارًا عموديًا على جدار المبنى، وأنَّ العامل يسحب
الحبل بمعدل 0.15 m/s، بحيث يظلَّ الطرف العلوي من اللوح مُلامسًا للجدار، فما
سرعة انزلاق الطرف الآخر للوح على الأرض عندما يكون على بُعد 3 m من جدار
المبنى؟

④ جد الانزياح



$$\frac{dy}{dt} = 0.15$$

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{x=3} = ?$$

$$x = 3$$

$$y^2 + x^2 = 25$$

$$2y \frac{dy}{dt} + 2x \frac{dx}{dt} = 0$$

$$(4)(0.15) + 3 \left(\frac{dx}{dt} \right) = 0$$

$$0.6 + 3 \frac{dx}{dt} = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{0.6}{3} = -0.2$$

$$x = 3$$

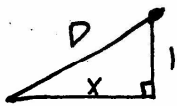
$$y^2 + 3^2 = 5^2$$

$$y = 4$$



قوارب: يسحب جمال قاربه إلى رصيف
الاصطفاف باستعمال بكرة سحب ترتفع
1 m عن مقدمة القارب. إذا طوت البكرة
حبل السحب بسرعة 1 m/s، وكان

القارب يبعد عن الرصيف مسافة 8 m في لحظة ما، فما سرعة اقتراب القارب من الرصيف عندئذ؟



$$\frac{dD}{dt} = 1$$

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{x=8} = ?$$

$$D^2 = x^2 + 1$$

$$D = \sqrt{x^2 + 1}$$

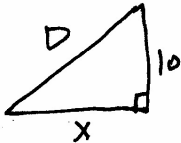
$$\frac{dD}{dt} = \frac{x \frac{dx}{dt}}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$1 = \frac{(8) \frac{dx}{dt}}{\sqrt{8^2 + 1}} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{65}}{8}$$



يسحب قارب إلى رصيف الاصطفاف بواسطة
حبل يمر فوق بكرة على الرصيف. الحبل
متصل بالقارب عند نقطة تنخفض 10 ft
عن البكرة. إذا سحب الحبل قوة البكرة بسرعة
20 ft/min. ما معدل اقتراب القارب من الرصيف عند ما يكون
حبل الحبل المتبقي 125 ft

أنا الكولس
Anton



$$\frac{dD}{dt} = 20$$

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{D=125} = ?$$

$$D^2 = x^2 + 10^2$$

$$x = \sqrt{D^2 - 100}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x \frac{dD}{dt}}{\sqrt{D^2 - 100}}$$

$$= \frac{125 (20)}{\sqrt{125^2 - 100}}$$

طيس

$$= \frac{125 (20)}{\sqrt{125 \cdot 125 - 100}}$$

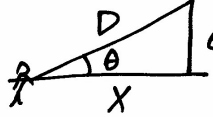
$$= \frac{125 (20)}{\sqrt{25 (5 \cdot 125 - 4)}}$$

$$= \frac{125 \cdot 20}{5 \sqrt{621}} = \frac{500}{\sqrt{621}}$$

التحارين

10 كالكولس
يرعى طفل جبل طائرته الورقية بحيث يحافظ على
طيرانها أفقياً على ارتفاع 60 ft . ماذا كانت سرعة الطائرة
في 10 ft/min . فما معدل تغير الزاوية بين الجبل والارض
عند ما يكون طول الجبل 100 ft

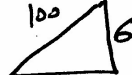
الحل



$$\frac{dx}{dt} = 10$$

$$\left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{D=100} = ?$$

$$\tan \theta = \frac{60}{x}$$

$$\sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{-60}{x^2} \frac{dx}{dt}$$


$$x = \sqrt{100^2 - 60^2}$$

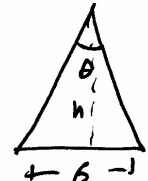
$$x = 80$$

$$\sec \theta = \frac{100}{80}$$

$$\left(\frac{100}{80} \right)^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{-60}{(80)^2} \cdot 10$$

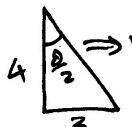
$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = -\frac{6}{100}$$

2 كالكولس
مثلث متساوي الساقين طول قاعدته ثابت ويساوي
6 cm . ماذا عكس أفق ارتفاعه يزداد بمعدل 2 cm/s
ما هو معدل تغير زاوية رأس المثلث في اللحظة التي
يصبح فيها ارتفاعه 4 cm



$$\Rightarrow \tan \frac{\theta}{2} = \frac{3}{h}$$

$$\sec^2 \frac{\theta}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{d\theta}{dt} = \frac{-3}{h^2} \frac{dh}{dt}$$

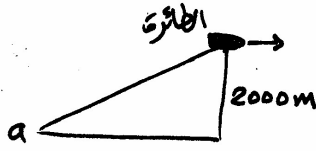


$$\Rightarrow \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \Rightarrow \sec \frac{\theta}{2} = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{5}{4} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \frac{d\theta}{dt} = \frac{-3}{(4)^2} \cdot 2$$

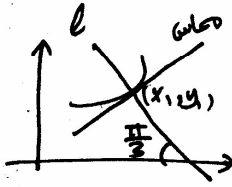
$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = -\frac{12}{25}$$

امتحان



1 سنوات 1997
تطير طائرة أفقياً على ارتفاع ثابت مقداره 2000m فوق مستوى نقطة ارصد الطائرة 'a' ومسبعدة عن هذه النقطة (انظر الشكل) وفي لحظة معينة كانت زاوية ارتفاع الطائرة تساوي $\frac{\pi}{6}$ ، وكانت سرعة الطائرة 125 m/s ، فأجب مما يلي:
① جد معدل التغير في المسافة بين الطائرة ونقطة ارصد الطائرة 'a' في تلك اللحظة
② جد معدل تغير زاوية ارتفاع الطائرة في تلك اللحظة

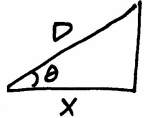
2 سنوات 2006
يتحرك جسم في خط مستقيم مقطع مسافة 5 متر في زمن قدره t ثانية ، حيث $s(t) = 2t^3 - 17t^2 + 44t + 10$ جد السرعة والتسارع عندما $s(t) = 46$



3 سنوات 2006
في الشكل المجاور المستقيم l ممحوري على المحاور كمنحنى الدائري f(x) عند النقطة (x1, y1) مماسية f'(x1) ا) $-\sqrt{3}$ ب) $\sqrt{3}$ ج) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ د) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

4 سنوات 2006
جد جميع النقاط الواقعة على منحنى الدائري $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x + 7$ والتي يكونه المماس كمنحنى f(x) عندما يعاود المستقيم $x + 5y + 2 = 0$

الكل 1



$$\frac{dx}{dt} = 125$$

$$\frac{dD}{dt} = ?$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = ?$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

$$D^2 = (2000)^2 + x^2$$

$$D = \sqrt{4000000 + x^2}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{2x \frac{dx}{dt}}{2\sqrt{x^2 + 4000000}}$$

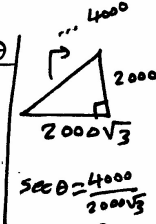
$$\frac{dD}{dt} = \frac{2000\sqrt{3} \cdot 125}{\sqrt{(4000000)(3) + 4000000}}$$

$$= \frac{2000\sqrt{3} \cdot 125}{\sqrt{16000000}} = \boxed{\frac{125\sqrt{3}}{2}}$$

$$\frac{2000}{x} = \tan \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow x = 2000\sqrt{3}$$

② $\frac{2000}{x} = \tan \theta \Rightarrow \frac{-2000}{x^2} \frac{dx}{dt} = \sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt}$



$$\Rightarrow \frac{-2000}{(2000\sqrt{3})^2} \cdot 125 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \frac{d\theta}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{-125}{2000} \cdot \frac{1}{4} = \frac{-1}{64}$$

$$\sec \theta = \frac{4000}{2000\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

الكل 2 $S(t) = 46 \Rightarrow 2t^3 - 17t^2 + 44t + 10 = 46$

$$2t^3 - 17t^2 + 44t - 36 = 0$$

$$t=1 \Rightarrow 2 - 17 + 44 - 36 \neq 0$$

$$t=2 \Rightarrow 16 - 68 + 88 - 36 = 0 \checkmark$$

$$\begin{array}{rrrr} 2 & -17 & 44 & -36 \\ \boxed{2} & 4 & -2 & 36 \\ \hline & 2 & -13 & 18 & 0 \end{array}$$

$$(t-2)(2t^2 - 13t + 18) = 0$$

$$(t-2)(2t-9)(t-2) = 0 \quad \boxed{t=2, \frac{9}{2}}$$

$$V(t) = 6t^2 - 34t + 44$$

$$a(t) = 12t - 34$$

$$t=2 \Rightarrow V(2) = 6(2)^2 - 34(2) + 44 = 24 - 68 + 44 = 0$$

$$a(2) = 12(2) - 34 = 24 - 34 = -10$$

$$t = \frac{9}{2} \Rightarrow V\left(\frac{9}{2}\right) = 6\left(\frac{9}{2}\right)^2 - 34\left(\frac{9}{2}\right) + 44 = \dots$$

$$a\left(\frac{9}{2}\right) = 12\left(\frac{9}{2}\right) - 34 = 54 - 34 = 20$$

الحل 3

$$\Rightarrow m = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{C}$$

الحل 4

$$\Rightarrow f'(x) \cdot y' = -1$$

$$(6x^2 - 6x + 9) \cdot \frac{1}{y} = -1$$

$$6x^2 - 6x + 9 = -y$$

$$6x^2 - 6x = 0$$

$$6x(x - 1) = 0$$

$$x = 0 \text{ و } 1$$

$$f(x) = 6x^2 - 6x + 9$$

$$1 + 9y' = 0$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{1}{9}$$

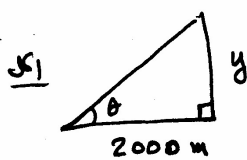
$$x = 0 \Rightarrow y = f(0) = 0 - 0 + 0 + 9 = 9 \Rightarrow (0, 9)$$

$$x = 1 \Rightarrow y = f(1) = 2 - 3 + 9 + 9 = 17 \Rightarrow (1, 17)$$

المعدلات المرتبطة بالزمن 2



منطاد
انطلق منطاد رأسياً إلى الأعلى ، حيث تم رصده بواسطة رادار على سطح الأرض يوجد 2 km عن قاعدة انطلاق المنطاد . إذا كانت سرعة البالون 540 m/s ، فجد معدل التغير في زاوية ارتفاع المنطاد عندما يصبح على ارتفاع 1200 m عن سطح الأرض



$$\frac{dy}{dt} = 540$$

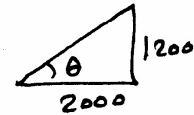
$$\left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{y=1200} = ?$$

$$\tan \theta = \frac{y}{2000}$$

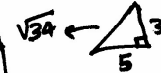
$$\sec \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2000} \frac{dy}{dt}$$

$$\left(\frac{\sqrt{34}}{5} \right)^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2000} (540)$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{27}{136}$$

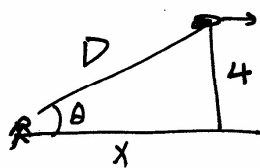


$$\div 400 \rightarrow$$



$$\sec \theta = \frac{\sqrt{34}}{5}$$

طائرة
طائرة تظهر أفقياً على ارتفاع ثابت 4 km ، بسرعة 100 km/hr . شخص يراقب الطائرة وهي تبعد عنه ، وفي لحظة ما كانت زاوية ارتفاع النظر هي $\frac{\pi}{6}$. جد معدل زيادته (المسافة بين الرجل والطائرة)



$$\frac{dx}{dt} = 100$$

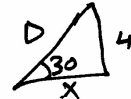
$$\left. \frac{dD}{dt} \right|_{\theta = \frac{\pi}{6}} = ?$$

$$x^2 + 4^2 = D^2$$

$$x \frac{dx}{dt} = D \frac{dD}{dt}$$

$$4\sqrt{3}(100) = 8 \frac{dD}{dt}$$

$$\frac{dD}{dt} = 50\sqrt{3}$$



$$\frac{4}{x} = \tan 30$$

$$\Rightarrow x = 4\sqrt{3}$$

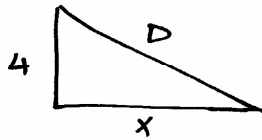
$$\frac{4}{D} = \sin 30$$

$$\Rightarrow D = 8$$

الصنارة

الأستاذ تامر يحسب صنارة وليسحب سمكة أفقياً باتجاه أحد طلابه الاعزاء كما في الصورة . لماذا نحسب أنه سرية سحب فيط الصنارة هي 1 m/s ، وأنه ارتفاع طرف الصنارة عن مستوى سباحة السمكة هو 4 m فجد سرية اقتراب السمكة من الطالب عندما تصبح المسافة بينهما 3 m

الحل



$$\frac{dD}{dt} = -1$$

$$\frac{dx}{dt} \Big|_{x=3} = ?$$

$$D^2 = x^2 + 4^2$$

$$2D \frac{dD}{dt} = 2x \frac{dx}{dt}$$

$$(5)(-1) = 3 \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{5}{3}$$

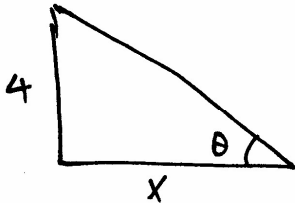
$$x=3$$

$$D^2 = 3^2 + 4^2$$

$$D=5$$

هروب السمكة

أستاذ تامر أجابه تافونه مع والسمكة استغللت الكوقف وهربت سبعةً نسرية 10 m/s (أفقياً) جد معدل تغير الزاوية بين الخط وسطح الماء ، عندما تصبح السمكة على بعد 5 m عن الحائط



$$\frac{dx}{dt} = 10$$

$$\frac{d\theta}{dt} \Big|_{x=5} = ?$$

$$\tan \theta = \frac{4}{x}$$

$$\sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt} = -\frac{4}{x^2} \frac{dx}{dt}$$

$$\left(\frac{41}{25}\right) \frac{d\theta}{dt} = -\frac{4}{(5)^2} \cdot 10$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{40}{41}$$

$$\tan \theta = \frac{4}{5}$$

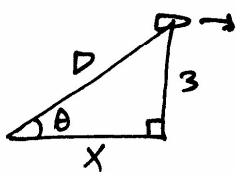
$$\sec^2 \theta = \left(\frac{4}{5}\right)^2 + 1$$

$$= \frac{41}{25}$$

تمارين

دوي
تغير طائرة على ارتفاع 3 كم بسرعة ثابتة مقدارها 0.24 كم/ث في خط مستقيم عبر النقطة الواقعة رأساً فوق شخص يرصدها من سطح الأرض. حدد معدل تغير زاوية ارتفاع الطائرة عندما تكون على بعد 6 كم من هذا الشخص (بتعدي)

ركل



$$\frac{dx}{dt} = 0.24$$

$$\frac{d\theta}{dt} = ?$$

$$D = 6$$

اعطيت
في
وليس
x

$$\tan \theta = \frac{3}{x}$$

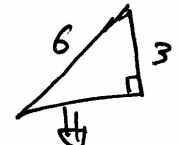
$$\sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt} = -\frac{3}{x^2} \frac{dx}{dt}$$

$$\left(\frac{6}{\sqrt{27}}\right)^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{-3}{(\sqrt{27})^2} 0.24$$

$$\frac{36}{27} \frac{d\theta}{dt} = \frac{-3}{27} 0.24$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-3 (0.24)}{36}$$

$$= \frac{-0.24}{12} = \boxed{-0.02}$$



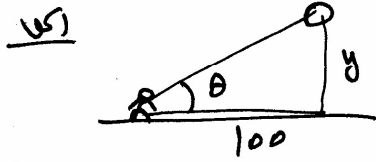
$$\sqrt{36^2 - 3^2}$$

$$= \sqrt{27}$$

$$\sec \theta = \frac{6}{\sqrt{27}}$$

سقوط الكنطاد

س شخص يراقب الكنطاد وهو يسقط رأسياً للأسفل
بسرعة 5 m/s . جد معدل تغير زاوية النظر عندما
يصطدم بالونـ بالارض على مسافة 100 m من الكراقب



$$\frac{dy}{dt} = -5$$

$$\left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{\substack{\theta=0 \\ y=0}} = ?$$

$$\tan \theta = \frac{y}{100}$$

$$\sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{100} \frac{dy}{dt}$$

$$\theta=0 \Rightarrow \sec^2 0 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{100} \cdot -5$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{5}{100}$$

تكرين ولا الودخل (البساق)

انطلقت طائرة بسرعة 100 m/s وبزاوية اقلاعي
مقدارها $\frac{\pi}{6}$. جد معدل تغير ارتفاع الطائرة
عن الارض لما استمرت بنفس زاوية الطيران

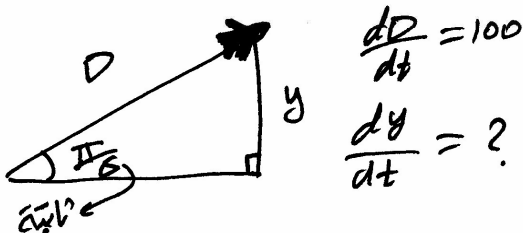


a) 50

b) 200

c) 0

d) $50\sqrt{3}$



$$\frac{dD}{dt} = 100$$

$$\frac{dy}{dt} = ?$$

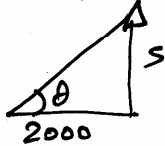
ثابتة!

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{y}{D} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{y}{D} \Rightarrow y = \frac{1}{2} D \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dD}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} (100) = 50 \Rightarrow \boxed{a}$$

S(t)

رصدت كاميرا مثبتة عند مستوى سطح الأرض إطلاق صاروخ رأسياً للأعلى .
وقد أعطى ارتفاعه بالاقتران: $S(t) = 50t^2$. حيث S الموقع بالأقدام
 t الزمن بالثواني . فإذا كانت الكاميرا تبعد 2000 ft عن منبع الإطلاق .
مُجد معدل تغير زاوية ارتفاع الصاروخ بعد 10s من الإطلاق



$$S(t) = 50t^2 \Rightarrow S = 50(10)^2 = 5000$$

$$\Rightarrow \frac{dS}{dt} = 100t \Rightarrow \frac{dS}{dt} = 100(10) = 1000$$

$$\frac{d\theta}{dt} = ?$$

$$\tan \theta = \frac{S}{2000}$$

$$\sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2000} \frac{dS}{dt}$$

$$\frac{29}{4} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2000} 1000$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{2}{29}$$

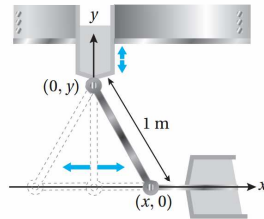
$$S = 5000$$

$$\tan \theta = \frac{5000}{2000} = \frac{5}{2}$$

$$\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$$

$$= 1 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$= \frac{29}{4}$$



هندسة ميكانيكية: يُبين الشكل المجاور
ذراعاً معدنيةً متحركةً طولها 1 m ،
وإحداثيات نهايتها $(x, 0)$ و $(0, y)$.
وتمثل الاقتران: $x(t) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi t}{6}$
موقع طرف الذراع على المحور x ، حيث
 t الزمن بالثواني:
أجد سرعة طرف الذراع الواقع على المحور y عندما يكون الطرف الآخر عند
النقطة $(\frac{1}{4}, 0)$.

اكد

$$x = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2} \sin \left(\frac{\pi t}{6} \right) = \frac{1}{4}$$

$$\sin \frac{\pi t}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi t}{6} = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \dots$$

$$t = 1, 5, \dots$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi t}{6} \right) \frac{\pi}{6}$$

$$\rightarrow \frac{\pi\sqrt{3}}{24}$$

$$\rightarrow -\frac{\pi\sqrt{3}}{24}$$

$$\left(\frac{1}{4} \right) \left(\frac{\pi\sqrt{3}}{24} \right) + \left(\frac{\sqrt{15}}{4} \right) \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-\pi}{24\sqrt{5}}$$

$$t \rightarrow 9 \rightarrow \dots \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{+\pi}{24\sqrt{5}}$$

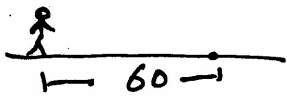
$$x = \frac{1}{4}$$

$$y^2 + \left(\frac{1}{4} \right)^2 = 1$$

$$y = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

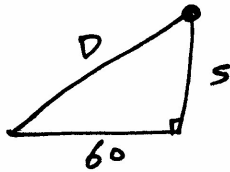
تمارين

① سقط جسم من ارتفاع 160 م رأسياً للأسفل باتجاه نقطة على الأرض تبعد 60 عن شخص ينظر إلى هذا الجسم كما في الشكل المجاور. ماذا كان ارتفاع الجسم عن الأرض يحط بالعلاقة



فجد معدل تغير البعد بين الجسم والمراقب عندما يقطع الجسم مسافة 80m للأسفل

$$s(t) = 160 - 5t^2$$



$$s(t) = 160 - 5t^2$$

$$\left. \frac{dD}{dt} \right|_{s=80} = ?$$

$$D^2 = s^2 + 60^2$$

$$D = \sqrt{s^2 + 3600}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{s \frac{ds}{dt}}{\sqrt{s^2 + 3600}}$$

$$\begin{aligned} 80 &= 160 - 5t^2 \\ \Rightarrow s &= 160 - 80 \\ &= 80 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 160 - 5t^2 &= 80 \\ -5t^2 &= -80 \\ t^2 &= 16 \\ t &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= -10t \\ &= -10(4) \\ &= -40 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{dD}{dt} = \frac{80(-40)}{\sqrt{80^2 + 3600}}$$

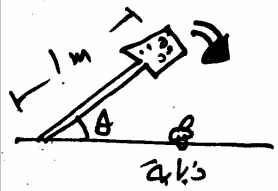
$$= \frac{-3200}{100} = -32 \text{ m/s}$$

② نصيحة

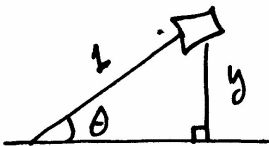
نصبة ذباب طولها 1m
تعمل على انكسار ببيت
أني الزاوية بين ذراع النصبة والأرض
تطى بالعلاقة

$\theta(t) = 2 - t^3$

جد سرعة هبوط النصبة على الزاوية الكسنية الجسنة
في الشكل لحظة قبلها



أكد



$\theta(t) = 2 - t^3$

$\frac{dy}{dt} \Big|_{\substack{\theta=0 \\ y=0}} = ?$

$$\frac{y}{l} = \sin \theta$$

$$\frac{dy}{dt} = \cos \theta \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$y = 0$$

$$2 - t^3 = 0$$

$$t = \sqrt[3]{2}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -3t^2$$

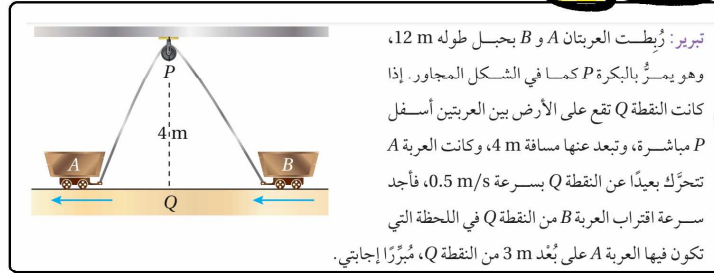
$$= -3(\sqrt[3]{2})^2$$

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = -3\sqrt[3]{4}}$$

$$\frac{dy}{dt} = \cos(0) \cdot -3\sqrt[3]{4}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = -3\sqrt[3]{4}}$$

تحدي الحبل

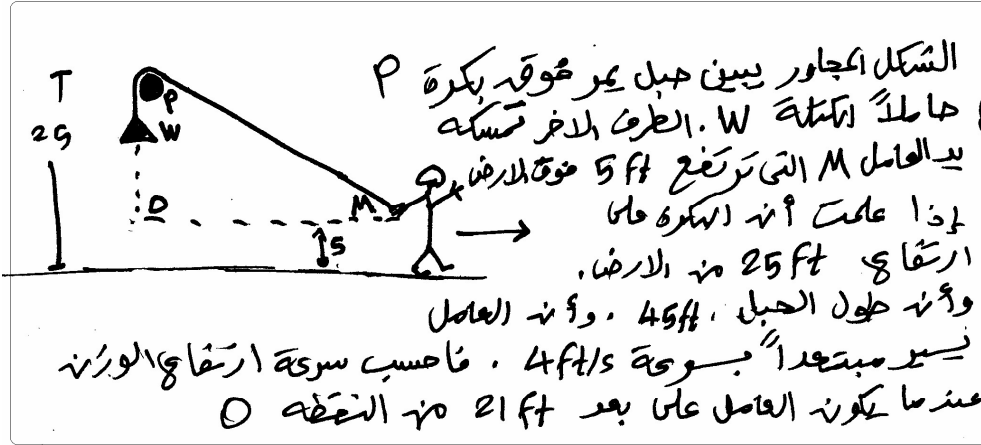


مه انكسار

اكد

$$\begin{aligned} l_1 + l_2 &= 12 \\ \sqrt{x^2+16} + \sqrt{y^2+16} &= 12 \\ 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} &= 0 \\ \frac{3(0.5)}{\sqrt{3^2+16}} + \frac{\sqrt{33} \frac{dy}{dt}}{\sqrt{33+16}} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{dy}{dt} &= \frac{-21}{10\sqrt{33}} \end{aligned}$$

$x=3$
 $\Rightarrow \sqrt{3^2+16} + \sqrt{y^2+16} = 12$
 $\Rightarrow \sqrt{y^2+16} = 7$
 $\Rightarrow y = \sqrt{33}$



تحدي
الكتلة
Thomas

الجواب

$$\frac{84}{\sqrt{841}} = \frac{84}{29}$$

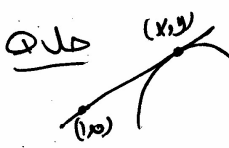
مراجعة التطبيقات الهندسية 2

نقطة خارجية

① جد معادلة المماس المرسوم من النقطة (1,0) للمقران $f(x) = x^2$

② إذا كان مماس المقران $f(x) = e^{2-2x}$ يقطع محور x عند النقطة (2,0) جد معادلة المماس

حل ①



$$m = f'(x) = 2x$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y-0}{x-1} = \frac{y^2}{x-1}$$

$$f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow 2x = \frac{x^2}{x-1}$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 2x = x^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x = 0$$

$$x = 0, 2$$

$$x = 2 \Rightarrow y = (2)^2 = 4 \Rightarrow m = f'(2) = 4$$

$$\Rightarrow y - 4 = 4(x - 2)$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow m = 0 \Rightarrow y - 0 = 0(x - 0) \Rightarrow y = 0$$

حل ②



$$m = f'(x) = -2e^{2-2x}$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y-0}{x-2} = \frac{e^{2-2x}}{x-2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow -2e^{2-2x} = \frac{e^{2-2x}}{x-2} \Rightarrow -2(x-2)e^{2-2x} = e^{2-2x}$$

$$\Rightarrow e^{2-2x}(1+2x-4) = 0 \Rightarrow e^{2-2x} = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$1+2x-4 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = f\left(\frac{3}{2}\right) = e^{2-2\left(\frac{3}{2}\right)} = e^{-1}$$

$$m = f'\left(\frac{3}{2}\right) = -2e^{2-2\left(\frac{3}{2}\right)} = -2e^{-1}$$

$$y - e^{-1} = -2e^{-1}\left(x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow y - e^{-1} = -2e^{-1}x + 3e^{-1}$$

$$y = -2e^{-1}x + 4e^{-1}$$

مساحة المثلث

- 1 طذا كما $f(x) = x^2 + 2$ ، فجد مساحة المثلث المكونة من
المماس والحدود على المحاور عند النقطة (1,3)
- 2 جد مساحة المثلث المحصور بين المماس $f(x) = x^2$ عند النقطة (2,4)
والخط $x=3$ و $y=1$

على $f'(x) = 2x$

1 $\Rightarrow m = f'(1) = 2(1) \Rightarrow m = 2$

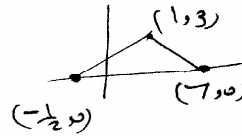
معادلة المماس $y - 3 = 2(x - 1)$

$y = 2x + 1$ تقاطع مع x $y=0 \Rightarrow 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

معادلة الحدود $y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 1)$

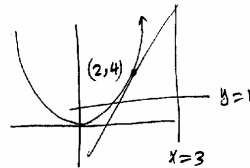
$y = -\frac{x}{2} + \frac{7}{2}$ تقاطع مع y $y=0 \Rightarrow -\frac{x}{2} + \frac{7}{2} = 0 \Rightarrow x = 7$

$A = \frac{1}{2} \Delta x \Delta y = \frac{1}{2} (7 - (-\frac{1}{2})) (3 - 0)$
 $= \frac{45}{4}$



على $f'(x) = 2x \Rightarrow m = 2(2) \Rightarrow m = 4$

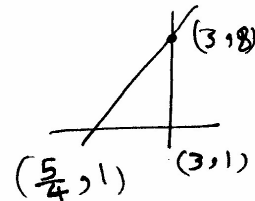
2 $y - 4 = 4(x - 2) \Rightarrow y = 4x - 4$



تقاطع المماس مع $x=3 \Rightarrow y = 4(3) - 4 = 8 \Rightarrow (3, 8)$

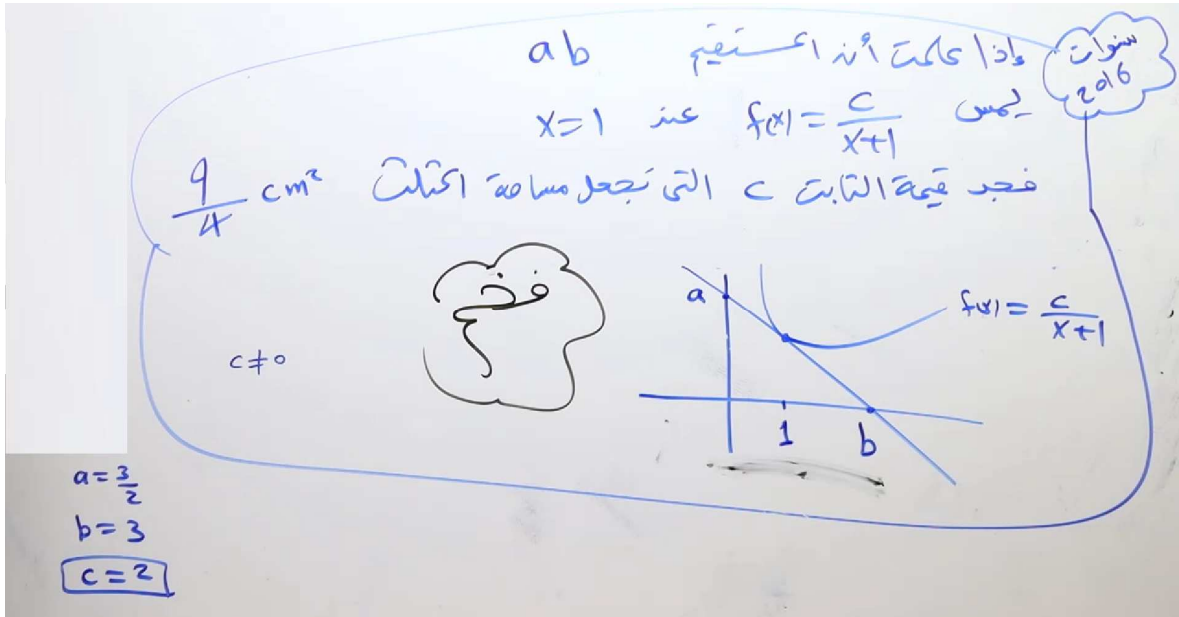
تقاطع المماس مع $y=1 \Rightarrow 1 = 4x - 4 \Rightarrow x = \frac{5}{4} \Rightarrow (\frac{5}{4}, 1)$

$A = \frac{1}{2} (3 - \frac{5}{4}) (8 - 1) = \frac{49}{8}$



تحدي الك

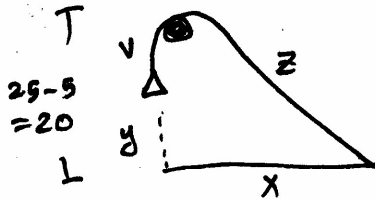
■



المعدلات المرتبطة بالزمن 3

الحل بالتفصيل

حل تحدي
الكولس



$$z + y = 45$$

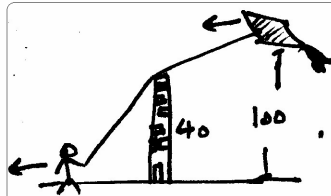
$$\sqrt{x^2 + 400} + 20 - y = 45$$

$$\frac{dx}{dt} = 4$$

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{y=20} = ?$$

$$\frac{dx}{dt} \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{(20)(4)}{\sqrt{20^2 + 20^2}} = \frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{84}{29}$$



يملك نصر يده خط طائرة ورقية نظير
أخيراً على ارتفاع 100 م من مستوى سطح الأرض.
فإذا كان الخط مستوياً وليس على استقامة
واحدة بسبب منحنى بجدار نهاية ارتفاعها
40 م. إذا علمت أنه نصر يركض مبتعداً عن المارة بسرعة
2 م/ث. وأنه حول الحبل 100 م. فما هي سرعة الطائرة عند ما
يصبح نصر على بعد 30 م من المارة

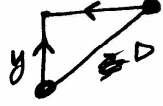
تحدي
النصر

$$\frac{\text{الجواب}}{-\frac{3}{2}}$$

تمارين من الكتاب

① تتحرك السيارة A في اتجاه الغرب بسرعة 80 km/h، وتتحرك السيارة B في اتجاه الشمال بسرعة 100 km/h، وهما تتجهان نحو تقاطع مروري. أجد معدل تغير البعد بين السيارتين عندما تكون السيارة A والسيارة B على بُعد 0.3 km و 0.4 km (على الترتيب) من التقاطع.

أكد



$$D = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt}}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \frac{2(0.3)(-80) + 2(0.4)(-100)}{2\sqrt{(0.3)^2 + (0.4)^2}}$$

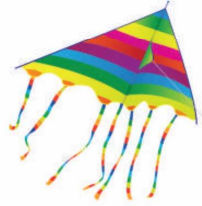
$$= -128$$

$\frac{dx}{dt} = -80$

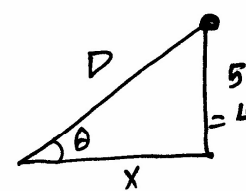
$\frac{dy}{dt} = -100$

أبعداها متساويين

$\frac{dD}{dt} \Big|_{x=0.3, y=0.4}$



② أمسك ولد بكرة خيط طائرة ورقية تُحلق على ارتفاع 50 m فوق سطح الأرض، وتتحرك أفقياً بسرعة 2 m/s. أجد معدل تغير الزاوية بين الخيط والمستوى الأفقي عندما يكون طول الخيط 100 m، علماً بأن ارتفاع يد الولد عن الأرض 1.5 m



$$\tan \theta = \frac{48.5}{x}$$

$$\sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt} = -\frac{48.5}{x^2} \frac{dx}{dt}$$

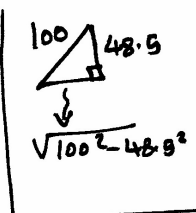
$$\left(\frac{100}{\sqrt{100^2 - 48.5^2}}\right)^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{-48.5}{(\sqrt{100^2 - 48.5^2})^2} (2)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-(48.5)(2)}{(100)^2} = -\frac{97}{10000}$$

$\frac{dx}{dt} = 2$

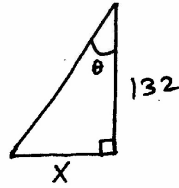
$\frac{d\theta}{dt} = ?$

$D = 100$



سباقات سيارات: ترتفع كاميرا عن الأرض مسافة 132 ft، وترصد سيارة تتحرك على مضمار سباق، وتبلغ سرعتها 264 ft/s كما في الشكل المجاور:

أجد سرعة تغير الزاوية θ عندما تكون السيارة أسفل الكاميرا تمامًا.



$$\frac{dx}{dt} = -264$$

$$\frac{d\theta}{dt} = ?$$

$$\theta = 0$$

$$x = 0$$

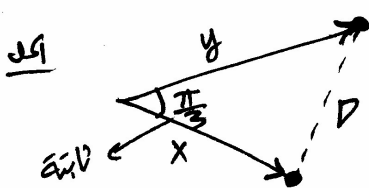
$$\tan \theta = \frac{x}{132}$$

$$\sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132} \frac{dx}{dt}$$

$$\sec^2(0) \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132} \cdot 264$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -2$$

دراجات نارية: تحركت دراجتان في الوقت نفسه، ومن النقطة نفسها، على طريقين مستقيمين، قياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{3}$ rad. إذا كانت سرعة الدراجة الأولى 15 km/h، وسرعة الدراجة الثانية 20 km/h، فأجد سرعة ابتعاد كل منهما عن الأخرى عندما يكون بعد الدراجة الأولى والثانية عن نقطة الانطلاق 40 km و 30 km (على الترتيب)



$$\frac{dx}{dt} = 15$$

$$\frac{dy}{dt} = 20$$

$$\frac{dD}{dt} = ?$$

$$x = 30$$

$$y = 40$$

قانون جيب السطح

$$D^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \frac{\pi}{3}$$

$$D = \sqrt{x^2 + y^2 - xy}$$

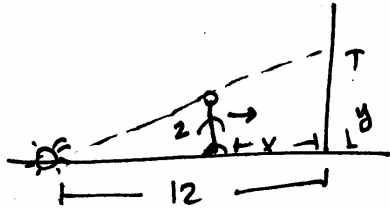
$$\frac{dD}{dt} = \frac{2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} - (x \frac{dy}{dt} + y \frac{dx}{dt})}{2\sqrt{x^2 + y^2 - xy}}$$

$$= \frac{900 + 1600 - (400 + 600)}{2\sqrt{900 + 1600 - 1200}}$$

$$= \frac{900}{2\sqrt{1300}} \quad (\text{النسبة})$$

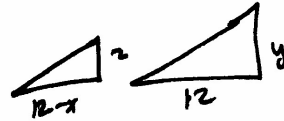


ضوء: مصباح مثبت بالأرض، وهو يضيء على جدار يبعد عنه مسافة 12 m. إذا سار رجل طوله 2 m من موقع المصباح إلى الجدار بسرعة 1.6 m/s، فأجد معدل تغير طول ظلّه على الجدار عندما يكون على بُعد 4 m من الجدار.



$$\frac{dx}{dt} = -1.6$$

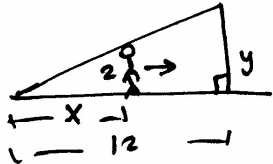
$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{x=4} = ?$$



$$\frac{y}{2} = \frac{12}{12-x} \Rightarrow y = \frac{24}{12-x}$$

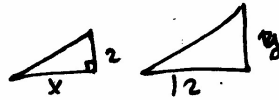
$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{-24(-1)}{(12-x)^2} \frac{dx}{dt} = \frac{24(-1.6)}{(12-4)^2} \\ &= \frac{-28.8}{64} = \frac{-288}{640} \end{aligned}$$

طريقه



$$\frac{dx}{dt} = 1.6$$

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{x=2} = ?$$



$$\frac{y}{2} = \frac{12}{x}$$

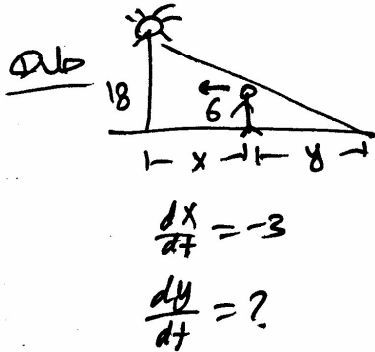
$$\Rightarrow y = \frac{24}{x}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{-24}{x^2} \frac{dx}{dt} = \frac{-24}{(4)^2} \cdot (1.6) \\ &= \frac{-28.8}{64} = \frac{-288}{640} \end{aligned}$$

التحارين

① رجل طوله 6 ft ، يسير بسرعة 3 ft/s ، باتجاه عمود أنارة
في رأسه صباح يرتفع عن الارض 18 ft . ما هو معدل تغير
طول ظل الرجل

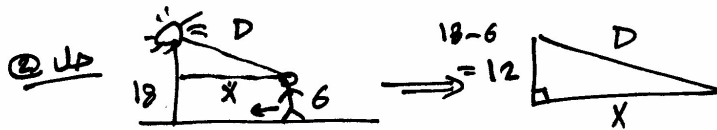
② رجل طوله 6 ft ، يسير بسرعة 3 ft/s ، باتجاه عمود أنارة
في رأسه صباح يرتفع عن الارض 18 ft . ما هو معدل تغير بعد
رأس الرجل عن الكسباح . عندما يكون الرجل على بعد 9 ft من
عمود الانارة



$$\frac{y}{x+y} = \frac{6}{18} \Rightarrow \frac{y}{y+x} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x+y = 3y \Rightarrow 2y = x \Rightarrow y = \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} (-3) = -\frac{3}{2}$$



$$\frac{dx}{dt} = -3$$

$$\frac{dD}{dt} = ?$$

$$x = 9$$

$$D^2 = x^2 + 12^2$$

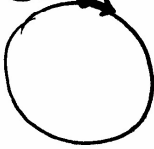
$$D = \sqrt{x^2 + 144}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{x \frac{dx}{dt}}{\sqrt{x^2 + 144}}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{9(-3)}{\sqrt{9^2 + 12^2}} = \frac{-27}{\sqrt{225}} = \frac{-27}{15} = -\frac{9}{5}$$

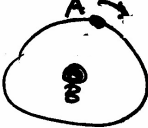
موضوع حل

دورة 11
في الدقائق
السنة

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi \cdot \text{عدد دورات}}{\text{زمن الدورات}}$$


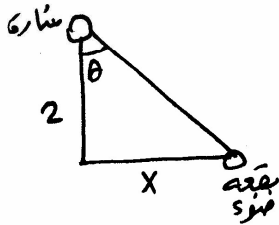
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{16 \cdot 2\pi}{1} = 32\pi / \text{s}$$


مثلاً عجل السيارة يدور
15 دورة في الثانية

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{20 \cdot 2\pi}{2} = 20\pi / \text{hr}$$


مثلاً كوكب A يدور حول النجم B
20 دورة في سنتين

أنشئت منارة على جزيرة صغيرة، بحيث كانت على مستوى سطح البحر، وهي تبعد مسافة 2 km عن أقرب نقطة على ساحل مستقيم. إذا كان مصباح المنارة يُكمل 3 دورات في الدقيقة، فأجد سرعة تحرك بقعة الضوء على خط الساحل عند نقطة تبعد مسافة 4 km عن أقرب نقطة إلى المنارة.



$$\frac{d\theta}{dt} = 3 \cdot \frac{2\pi}{1} = 6\pi$$

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{x=4} =$$

$$\tan \theta = \frac{x}{2}$$

$$\sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dx}{dt}$$

$$5 (6\pi) = \frac{1}{2} \frac{dx}{dt}$$

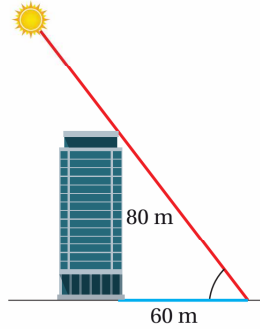
$$\frac{dx}{dt} = 60\pi$$

$$x=4$$

$$\tan \theta = \frac{4}{2} = 2$$

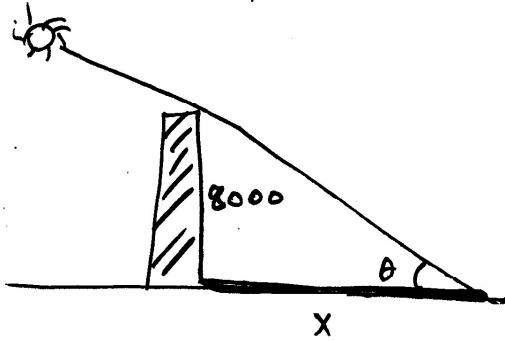
$$\sec^2 \theta = 2^2 + 1 = 5$$

س



نحدد: سطعت الشمس في أحد الأيام فوق مبنى ارتفاعه 80 m،
فكان طول ظل المبنى في هذه اللحظة 60 m كما في الشكل
المجاور. أجد معدل تغير طول ظل المبنى في هذه اللحظة بوحدة
cm/min، مُقَرَّبًا إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة، علمًا بأنَّ
الشمس في هذا اليوم ستمرُّ فوق المبنى تمامًا.

إرشاد: تكوّل الأرض دورة كاملة حول نفسها كل 24 ساعة.



$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{(1)(2\pi)}{(24)(60)} = \frac{\pi}{720} \text{ rad/min}$$

ساعة 24 ←
دقيقة 60 ←

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{x=6000} = ?$$

$$\tan \theta = \frac{8000}{x}$$

$$\sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{-8000}{x^2} \frac{dx}{dt}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= 6000 \\ \tan \theta &= \frac{8}{6} \\ &= \frac{4}{3} \\ \sec^2 \theta &= 1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 \\ &= \frac{25}{9} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{25}{9} \cdot \frac{\pi}{720} = \frac{-8000}{(6000)^2} \cdot \frac{\pi}{270} \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{25}{9} \cdot \frac{\pi}{270} \cdot \frac{6000 \cdot 6000}{-8000}$$

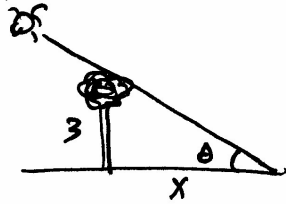
$$= -\frac{2500\pi}{144} \text{ cm/min}$$



تجارب

اشرفت الشمس في احد الأيام على
شجرة طولها 3 م . جد معدل تغير
طول ظل الشجرة على الارض عندما
يصبح طول ظلها مساوياً لطولها (في الصباح)

اكتب



$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1.2\pi}{24} = \frac{\pi}{12} \text{ rad/hr (ساعات)}$$

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{x=3} = ?$$

$$\tan \theta = \frac{3}{x}$$

$$\sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{-3}{x^2} \frac{dx}{dt}$$

$$2 \frac{\pi}{12} = \frac{-3}{(3)^2} \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{3} \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dx}{dt} = -\frac{\pi}{2} \text{ m/hr}}$$

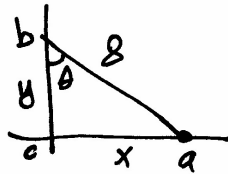
$$\begin{aligned} x &= 3 \\ \tan \theta &= 1 \\ \sec^2 \theta &= 1^2 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

تمارين متنوعة

ab قطعة مستقيمة طولها 8 cm ، يتحرك طرفها a على المحور x الموجب ، بينما يتحرك طرفها b على محور y الموجب ، بحيث تزداد الزاوية abc بسرعة $\frac{1}{20}$ rad/s . احسب معدل تغير مساحة المثلث abc ، عندما تكون a على بعد 4 cm من نقطة الاصل c

سنوات
2004

ملاحظة: طول القطعة ثابت (لأنه أعطانا قيمته ولم يتحدد عن تغيرها)



$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{20}$$

$$\left. \frac{dA}{dt} \right|_{x=4} = ?$$

$$A = \frac{1}{2}xy$$

$$\frac{x}{8} = \sin \theta \Rightarrow x = 8 \sin \theta$$

$$\frac{y}{8} = \cos \theta \Rightarrow y = 8 \cos \theta$$

$$A = \frac{1}{2} 8 \sin \theta \cdot 8 \cos \theta$$

$$A = 32 \sin \theta \cos \theta$$

$$\frac{dA}{dt} = 32 \sin \theta (-\sin \theta \cdot \frac{d\theta}{dt}) + \cos \theta (32 \cos \theta \frac{d\theta}{dt})$$

$$= -32 \sin^2 \theta \frac{d\theta}{dt} + 32 \cos^2 \theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$= -32 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{20} + 32 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \frac{1}{20}$$

$$= -\frac{4}{10} + \frac{12}{10} = \frac{8}{10} = \boxed{\frac{4}{5}}$$

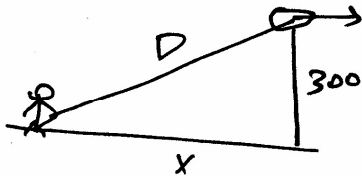
$$x=4$$

$$\sin \theta = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

تمسك فتاة بخيط طائفة ورقية تظهر على ارتفاع 300 ft ، هبت رية و حملت الطائفة لتبتعد بسرعة 25 ft/s أفقياً . كم هي السرعة التي يجب على الفتاة أن تتركها بها خيط الطائفة عندما تكون الطائفة على مسافة 500 ft من الفتاة

Calculus
Thomas



$$\frac{dx}{dt} = 25$$

$$\left. \frac{dD}{dt} \right|_{D=500} = ?$$

$$D^2 = x^2 + (300)^2$$

$$2D \frac{dD}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} + 0$$

$$500 \frac{dD}{dt} = (400)(25)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dD}{dt} = 20}$$

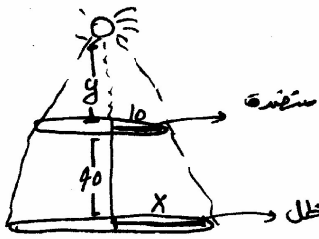
$$D = 500$$

$$500^2 = x^2 + 300^2$$

$$x = 400$$

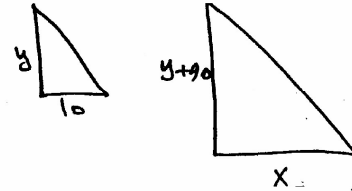
صباح علق خوقة مركز منضدة دائرية أفقية ارتفاعها عن الارض يساوي 90 cm ونصف قطرها 10 cm . تحرك الصباح رأساً إلى أسفل نحو المنضدة بسرعة ثابتة تساوي 6 cm/s أو وجد معدل تغير نصف قطر دائرة ظل المنضدة على الارض عندما يكون ارتفاع الصباح عند المنضدة يساوي 60 cm

دوي
مدرس



$$\frac{dy}{dt} = -6$$

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{y=60} = ?$$



$$\frac{y+90}{y} = \frac{x}{10}$$

$$x = \frac{10y + 900}{y} = \frac{10y}{y} + \frac{900}{y}$$

$$\boxed{x = 10 + \frac{900}{y}}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{900}{y^2} \frac{dy}{dt}$$

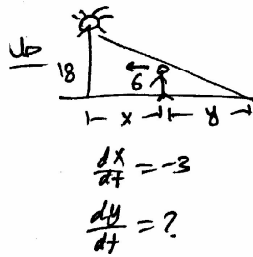
$$= -\frac{900}{(60)^2} (-6) = \boxed{\frac{3}{2}}$$

المعدلات المرتبطة بالزمن 4

مساحات

① معدل تغير الطول و سرعة الجسم

رجل طوله 6 ft ، يسير بسرعة 3 ft/s . باتجاه عمود إنارة
في رأسه صباح يرتفع عن الأرض 18 ft . ما هو معدل تغير
ظل الرجل



$$\frac{y}{y+x} = \frac{6}{18} \Rightarrow \frac{y}{y+x} = \frac{1}{3}$$

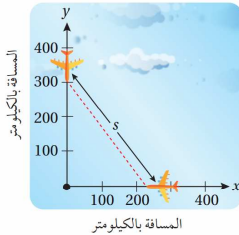
$$\Rightarrow x+y = 3y \Rightarrow 2y = x \Rightarrow y = \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} (-3) = -\frac{3}{2}$$

② معدل تغير المسافة بين جسمين

معدل تغير المسافة بين جسمين
= سرعة الإجهاد الجسمين عن بعضهما

بعد بين نقطتين
= مسافة بين نقطتين



طيران: رصد مراقب الحركة الجوية في أحد المطارات طائرتين
تتحلقان على الارتفاع نفسه، وتقتربان من نقطة التقاء مسار حركتهما
في زاوية قائمة كما في الشكل المجاور. كانت إحدى الطائرتين
تبعد مسافة 225 km عن النقطة، وتسير بسرعة 450 km/h ، في
حين كانت الطائرة الأخرى تبعد مسافة 300 km عن النقطة، وتسير
بسرعة 600 km/h

لست من المساحة

14 أجد معدل تغير المسافة بين الطائرتين في تلك اللحظة.

$$\frac{dy}{dt} = -600$$

$$\frac{dx}{dt} = -450$$

$$\frac{ds}{dt} =$$

$x = 225,$
 $y = 300$

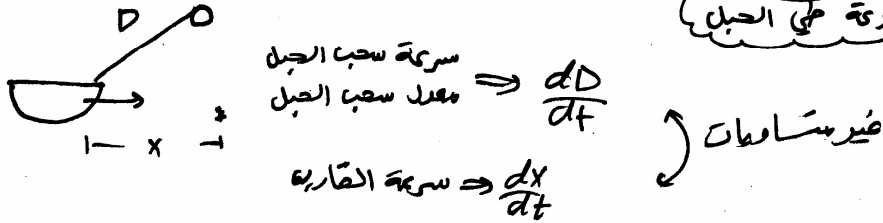
$$s = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt}}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \frac{2(225)(-450) + 2(300)(-600)}{2\sqrt{225^2 + 300^2}}$$

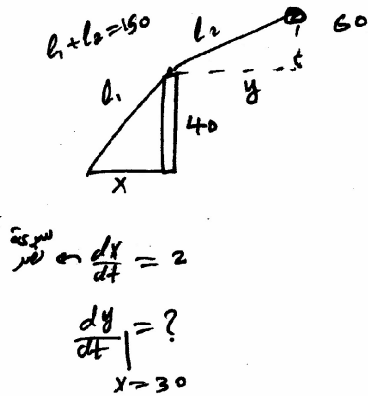
$$= -12$$

③ سرعة سحب الجبل
معدل سحب الجبل
سرعة طلي الجبل
سرعة الجسم



تحدي النظر
يحسك نصر يدير خط طائرة ورقية نظير
أفقياً على ارتفاع 100 م من مستوى سطح الأرض.
فلذا كان الخط مستوياً وليس على انحناء
واحدة بسبب منحنى بجدار نهاية ارتفاعها
40 م. لذا علمت أنه نصر يركض مبتعداً عن العماره بسرعة
2 م/ث. وأنه حول الجبل 150 م. فما هي سرعة الطائرة عند ما
يصبح نصر على بعد 30 م من العماره

تحدي النظر



$$l_1 + l_2 = 150$$

$$\sqrt{x^2 + 1600} + \sqrt{y^2 + 3600} = 150$$

$$\frac{x \frac{dx}{dt}}{\sqrt{x^2 + 1600}} + \frac{y \frac{dy}{dt}}{\sqrt{y^2 + 3600}} = 0$$

$$\frac{(30)(2)}{\sqrt{900 + 1600}} + \frac{(80)(\frac{dy}{dt})}{\sqrt{6400 + 3600}} = 0$$

$$\frac{60}{50} + \frac{80}{100} \frac{dy}{dt} = 0$$

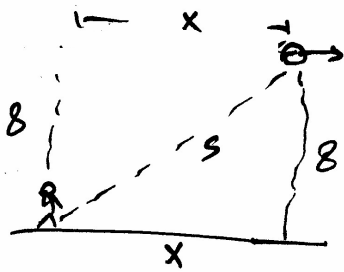
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{60}{40} = -\frac{3}{2}$$

سرعة الطائرة

جواب المسبب $\frac{dl_2}{dt}$ نستخذ على قيمة ثانية
: (مصري إذا كان تأكد أنه فعلاً سرعة الجبل لا تأني سرعة
الطائرة)

بعد مرور زمنية

س طائرة تطير أفقياً على ارتفاع 8 km بسرعة 2 km/h، مرت فوق رأس عباس. جد معدل تغير المسافة بين الطائرة و عباس، بعد مرورها فوق رأسه بـ 3 ساعات



$$\frac{dx}{dt} = 2$$

$$\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=3}$$

$$s = \sqrt{x^2 + 64}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2x \frac{dx}{dt}}{2\sqrt{x^2 + 64}}$$

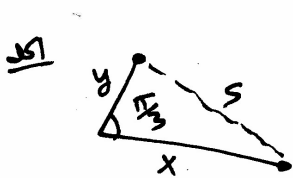
$$= \frac{6(2)}{\sqrt{36 + 64}}$$

$$= \frac{12}{10}$$

$$x = (2)(3)$$

$$= 6$$

دراجات نارية: تحركت دراجتان في الوقت نفسه، ومن النقطة نفسها، على طريقين مستقيمين، قياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{3}$ rad. إذا كانت سرعة الدراجة الأولى 15 km/h، وسرعة الدراجة الثانية 20 km/h، فأجد سرعة ابتعاد كل منهما عن الأخرى بعد ساعتين من انطلاقهما.



$$\frac{dx}{dt} = 15$$

$$\frac{dy}{dt} = 20$$

$$\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=2} = ?$$

$$s = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \frac{\pi}{3}}$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2 - xy}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} - x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}}{2\sqrt{x^2 + y^2 - xy}}$$

$$\frac{ds}{dt} = \dots =$$

المسافة بين
الزيت

$$x = 15 \cdot 2 = 30$$

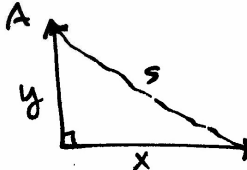
$$y = 20 \cdot 2 = 40$$

تأليف

تحرّكت السيّارة A والسيّارة B في الوقت نفسه، ومن النقطة نفسها، بحيث اتّجهت السيّارة A نحو الشمال بسرعة 45 km/h، واتّجهت السيّارة B نحو الشرق بسرعة 40 km/h. أجد مُعدّل تغيّر البُعد بين السيّارتين بعد ساعتين من انطلاقهما.

المسألة

الحل



$$\frac{dy}{dt} = 45$$

$$\frac{dx}{dt} = 40$$

$$\frac{ds}{dt} = ?$$

$$t = 2$$

$$s = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt}}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \frac{(80)(40) + 90(45)}{\sqrt{80^2 + 90^2}}$$

$$= \dots$$

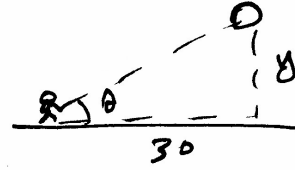
المسافة = سرعة × الزمن

$$x = (40)(2) = 80$$

$$y = (45)(2) = 90$$

② شخص يجلس على مسافة 30 m من سناد موجود على الأرض. إذا انطلق الكناد رأسياً للأعلى بسرعة 4 m/s، فجد معدل تغيّر زاوية ارتفاع نظر الكسّامر للسناد بعد 10 s على الإحالة.

الحل



$$\frac{dy}{dt} = 4$$

$$\frac{d\theta}{dt} = ?$$

$$t = 10$$

$$\tan \theta = \frac{y}{30}$$

$$\sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{30} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{25}{9} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{30} (4)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{(36) \frac{4}{30}}{(25)(30)} = \frac{6}{125}$$

المسافة = سرعة × الزمن

$$y = (4)(10) = 40$$

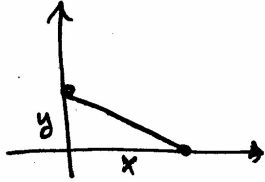
$$\tan \theta = \frac{40}{30} = \frac{4}{3}$$

$$\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$$

$$= 1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

$$= \frac{25}{9}$$

③ انطلقت النقطتان a و b من نقطة الاصل c
 a : باتجاه محور x ايجابية بسرعة 5 m/s
 b : باتجاه محور y ايجابية بسرعة 3 m/s
 جد معدل تغير مساحة المثلث abc اكنك بعد 4 ثوانٍ من انطلاقهما



$$\frac{dx}{dt} = 5$$

$$\frac{dy}{dt} = 3$$

$$\left. \frac{dA}{dt} \right|_{t=4}$$

$$A = \frac{1}{2} xy$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} x \frac{dy}{dt} + \frac{1}{2} y \frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{1}{2} (20)(3) + \frac{1}{2} (12)(5)$$

$$= 30 + 30$$

$$\boxed{= 60}$$

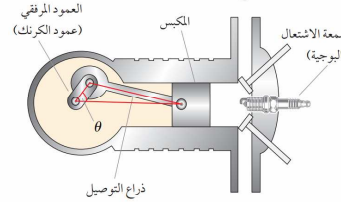
مساحة المثلث abc في $t=4$

$$x = (5)(4) = 20$$

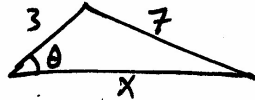
$$y = (3)(4) = 12$$

قانون جيب التمام

يُبين الشكل الآتي مُحرك سيطرة يحتوي على ذراع توصيل طولها 7 in، وهي مُثبتة بعمود مرفقي طولها 3 in. إذا دار العمود المرفقي عكس اتجاه دوران عقارب الساعة 200 دورة في الدقيقة، فما سرعة المكبس عندما $\theta = \frac{\pi}{3}$ ؟



الحل



$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{200 \cdot 2\pi}{1} = 400\pi$$

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{\theta = \frac{\pi}{3}} = ?$$

$$7^2 = 3^2 + x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x \cos \theta$$

$$x^2 - 6x \cos \theta = 40$$

$$2x \frac{dx}{dt} + 6x \sin \theta \frac{d\theta}{dt} - 6 \cos \theta \frac{dx}{dt} = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x \cos \frac{\pi}{3} = 40$$

$$x^2 - 3x - 40 = 0$$

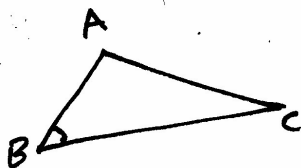
$$(x - 8)(x + 5) = 0$$

$$x = 8$$

$$\Rightarrow 2(8) \frac{dx}{dt} + 6(8) \frac{\sqrt{3}}{2} 400\pi - 6 \cdot \frac{1}{2} \frac{dx}{dt} = 0$$

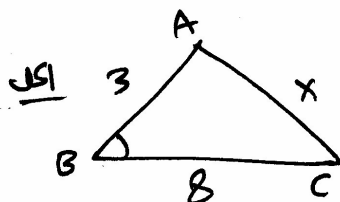
$$13 \frac{dx}{dt} = -9600\pi\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{\frac{dx}{dt} = \frac{-9600\pi\sqrt{3}}{13}}$$

تمرين



أمكنك أن تبين في الشكل فيه طول الضلع
AB يساوي 3 cm ، وطول الضلع BC
8 cm (ثابتة) . أما الزاوية ABC فهي
تزداد بمعدل 2 rad/s

١ معدل زيادة طول الضلع AC
عندما تصبح الزاوية ABC تساوي $\frac{\pi}{3}$
٢ معدل تغير مساحة المثلث عندما تصبح
الزاوية ABC $\frac{\pi}{3}$



$$\frac{d\theta}{dt} = 2$$

$$\textcircled{1} \left. \frac{dx}{dt} \right|_{\theta = \frac{\pi}{3}}$$

$$\textcircled{2} \left. \frac{dA}{dt} \right|_{\theta = \frac{\pi}{3}}$$

$$\textcircled{1} x = \sqrt{3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cos \theta}$$

$$x = \sqrt{73 - 48 \cos \theta}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{+48 \sin \theta \frac{d\theta}{dt}}{2 \sqrt{73 - 48 \cos \theta}}$$

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{\theta = \frac{\pi}{3}} = \frac{48 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2}{2 \sqrt{73 - 48 \cdot \frac{1}{2}}} = \frac{24\sqrt{3}}{7}$$

$$\textcircled{2} A = \frac{1}{2} (3)(8) \sin \theta$$

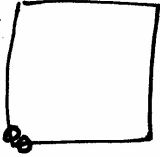
$$A = 12 \sin \theta$$

$$\frac{dA}{dt} = 12 \cos \theta \frac{d\theta}{dt}$$

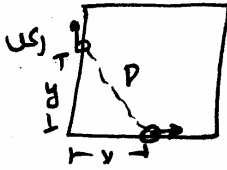
$$\left. \frac{dA}{dt} \right|_{\theta = \frac{\pi}{3}} = 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = [12]$$

مساحة المثلث = $\frac{1}{2} ab \sin C$
مساحة المثلث = $\frac{1}{2} ab \sin C$
مساحة المثلث = $\frac{1}{2} ab \sin C$

بعد مرور زمن - 2



نمطاً نه تجلسانه على احدى زوايا مربع 1، انطلقت
الدوي الماعلى بسرعة 3 cm/s، والثانية لايحين بسرعة
4 cm/s. جد معدل تغير المسافة بينهما بعد ثابنتين
من بدء الحركة



$$\frac{dy}{dt} = 3$$

$$\frac{dx}{dt} = 4$$

$$D = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt}}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{dD}{dt} = \dots = 5$$

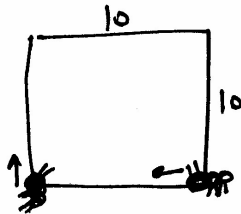
المسافة = سرعة × زمن

$$\Delta y = 3 \cdot 2 = 6$$

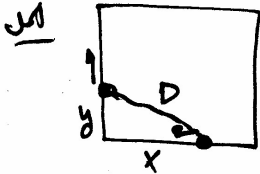
$$\Rightarrow y = 6$$

$$\Delta x = 4 \cdot 2 = 8$$

$$\Rightarrow x = 8$$



مربع طول ضلعه 10 cm. انطلقت النحلة الدوي
بانكاه اليسار بسرعة 2 cm/s، والثانية للدوي
بسرعة 4 cm/s. جد معدل تغير المسافة بينهما بعد
ثابنتين من بدء الحركة



$$\frac{dx}{dt} = -2$$

$$\frac{dy}{dt} = 4$$

$$\frac{dD}{dt} = ?$$

$$D = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dD}{dt} = \frac{2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{dD}{dt} = 2$$

المسافة = سرعة × زمن

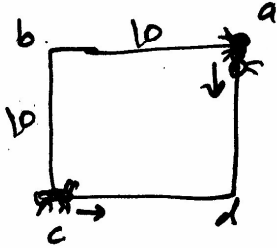
$$\Delta y = 4 \cdot 2 = 8$$

$$\Rightarrow y = 8$$

$$\Delta x = 2 \cdot 2 = 4$$

$$\Rightarrow x = 6$$

التحارين



1. صريح حول ضلعه 10 cm ، نصف تحلة على الزاوية a والثانية على الزاوية c . انطلقت نقطة a للأسفل بسرعة 2 cm/s ، والثانية لليمين بسرعة 1 cm/s . جد سرعة اقترابهما من بعضهما بعد مرور 2 ثانية على الانطلاق

الحل 1

$$\frac{dy}{dt} = -2$$

$$\frac{dx}{dt} = 1$$

$$\left. \frac{dD}{dt} \right|_{t=2}$$

$$D = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{8(-1) + 6(-2)}{\sqrt{8^2 + 6^2}}$$

$$= \frac{-20}{10} = -2$$

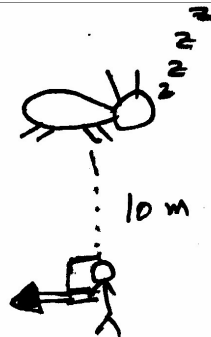
المسافة = سرعة × الزمن

$$\Delta y = 2 \cdot 2 = 4$$

$$y = 10 - 4 = 6$$

$$\Delta x = 1 \cdot 2 = 2$$

$$x = 10 - 2 = 8$$



2. شخص شاهد أسد نائم شماله على مسافة 10 m منه ، فركض باتجاه العزيب بسرعة 2 m/s . جد معدل تغير المسافة بينهما بعد 3 ثواني من اركض

الحل 2

$$\frac{dx}{dt} = 2$$

$$\left. \frac{dD}{dt} \right|_{t=3}$$

$$D = \sqrt{x^2 + 10^2}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{x \frac{dx}{dt}}{\sqrt{x^2 + 100}}$$

$$= \frac{6 \cdot 2}{\sqrt{6^2 + 100}}$$

$$= \frac{12}{\sqrt{136}}$$

المسافة = سرعة × الزمن

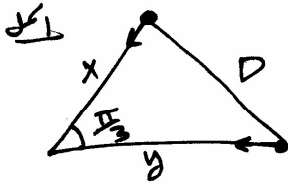
$$\Delta x = 2 \cdot 3 = 6$$

$$x = 6$$

تحدي القطارين

سنوات 2004

سأ خطان حديديان يحد أحدهما عن الآخر بزاوية قياسها $\frac{\pi}{3}$ وملتقيان في النقطة C. يسير القطار a على أحدهما بسرعة 80 km/h مقتراباً من النقطة C. ويسير القطار b على الآخر بسرعة 50 km/h مقتراباً من النقطة C. عند الساعة التاسعة صباحاً كان القطاران على بعد 210 km و 180 km على الترتيب من النقطة C. جد معدل اقتراب القطارين من بعضهما عند الساعة الحادية عشرة صباحاً



$$\frac{dx}{dt} = -80$$

$$\frac{dy}{dt} = -50$$

$$\left. \frac{dD}{dt} \right|_{t=2} = ?$$

$$D = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} - x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}}{2 \sqrt{x^2 + y^2 - xy}}$$

$$\begin{aligned} \Delta x &= 80 \cdot 2 = 160 \Rightarrow [x] = 210 - 160 = 50 \\ \Delta y &= 50 \cdot 2 = 100 \Rightarrow [y] = 180 - 100 = 80 \end{aligned}$$

$$\frac{dD}{dt} = \dots = \frac{-7100}{140} = -\frac{355}{7}$$

امتحان

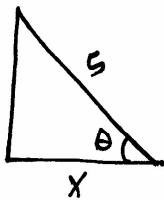
سام حلولة 5 m يرتكز بطرفه العلوي على حائط عمودي،
وطرفه السفلي على أرضية أفقية. فإذا انزلق الطرف
السفلي للسام مبتعداً عن الحائط بمعدل 2 m/min، فجد
سرعة تغير الزاوية بين السام والأرض عند ما يكون طرفه
السفلي على بعد 3 m من الحائط.

سنوات
2011

بدأت نقطة مادية الحركة من النقطة $a(6,0)$ على محور
الـ x مبتعدة عن نقطة الأصل بسرعة 3 cm/s.
وفي اللحظة نفسها بدأت نقطة أخرى الحركة من
النقطة $b(0,2)$ على محور الـ y مقترية من نقطة
الأصل بسرعة 2 cm/s. جد معدل تغير المسافة بين النقطتين
المحركتين عند ما تكون النقطة المتحركة على محور الـ y
على بعد 8 cm من نقطة الأصل.

سنوات
2012

الكل
1



$$\frac{dx}{dt} = 2$$

$$\left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{x=3} = ?$$

$$\cos \theta = \frac{x}{5}$$

$$-\sin \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{5} \frac{dx}{dt}$$

$$-\frac{4}{5} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{5} (2)$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{2}$$

$$x = 3$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{3}{5}$$

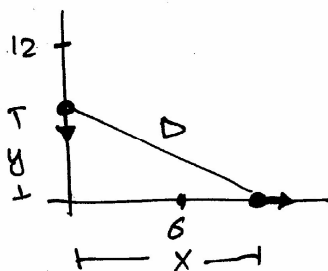
$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\sin^2 \theta + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 \theta = \frac{16}{25}$$

$$\sin \theta = \frac{4}{5}$$

الكل
2



$$\frac{dx}{dt} = 3$$

$$\frac{dy}{dt} = -2$$

$$\left. \frac{dD}{dt} \right|_{y=8}$$

$$D = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt}}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \frac{x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{() (3) + (8) (-2)}{\sqrt{()^2 + 8^2}}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{(12)(3) + 8(-2)}{\sqrt{(12)^2 + 8^2}}$$

$$= \frac{20}{\sqrt{208}} \left(\frac{5}{\sqrt{13}} \right)$$

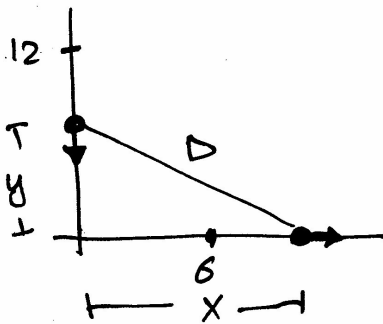
مسألة
12 كانت عند y
8 عند C
y الآن ←
D = 12 - 8 = 4
x الآن ←
x + 2 = 4
⇒ x = 2
D = 3 * 2
= 6
x = 6 + 6
← x = 12

المعدلات المرتبطة بالزمن 5

حل سؤال النقطتين

سوات
2012

بدأت نقطة مادية الحركة من النقطة $a(6,0)$ على محور x مبتعدة عن نقطة الأصل بسرعة 3 cm/s . وفي اللحظة نفسها بدأت نقطة أخرى الحركة من النقطة $b(0,12)$ على محور y مقتربة من نقطة الأصل بسرعة 2 cm/s . حدد معدل تغير المسافة بين النقطتين المتحركتين عند ما تكون النقطة المتحركة على محور x على بعد 8 cm من نقطة الأصل.



$$\frac{dx}{dt} = 3$$

$$\frac{dy}{dt} = -2$$

$$\left. \frac{dD}{dt} \right|_{y=8}$$

$$D = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt}}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \frac{x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{(\quad)(3) + (8)(-2)}{\sqrt{(\quad)^2 + 8^2}}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{(12)(3) + 8(-2)}{\sqrt{(12)^2 + 8^2}}$$

$$= \frac{20}{\sqrt{208}} \left(\frac{5}{\sqrt{13}} \right)$$

حسابية
كانت عند 12
صار عند 8
مسافة y
 $\Delta y = 12 - 8 = 4$
مسافة = سرعة $\times$ زمن
 $t \times 2 = 4$
 $\Rightarrow t = 2$
 $\Delta x = 3 \times 2$
 $= 6$
 $x = 6 + 6$
 $\Rightarrow x = 12$

آخر فكرة تفاضلية في الدرس

مسألة: مضخة معدنية مربعة الشكل. تتدد حافة كل جانب على شكلها، بحيث تزداد مساحتها بمعدل $12 \text{ cm}^2/\text{s}$. جد معدل تغير محيطها مع الزمن عندما يصبح طول الضلع 3 cm

الحل



$$\frac{dA}{dt} = 12$$

$$\left. \frac{dP}{dt} \right|_{x=3} = ?$$

الحل

$$A = x^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 2x \frac{dx}{dt}$$

$$12 = 2(3) \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2$$

$$P = 4x$$

$$\frac{dP}{dt} = 4 \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dP}{dt} = 4(2) = 8$$

مسألة: يتم نفخ بالون بمعدل $16 \text{ cm}^3/\text{s}$ جد معدل تغير مساحته عندما يصبح نصف قطره 2 cm

الحل



$$\frac{dV}{dt} = 16$$

$$\left. \frac{dA}{dt} \right|_{r=2} = ?$$

$$V = \frac{4\pi}{3} r^3$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$16 = 4\pi (2)^2 \frac{dr}{dt}$$

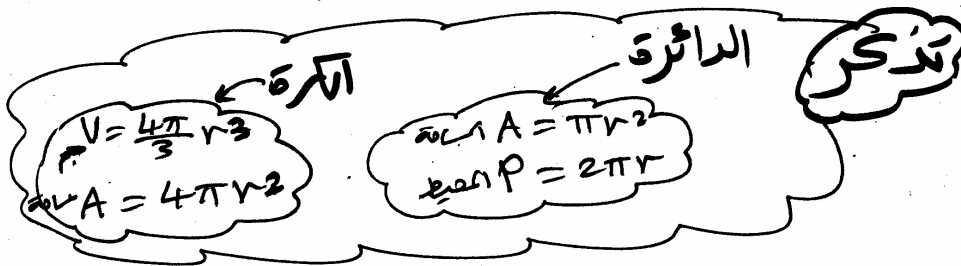
$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{1}{\pi}$$

$$A = 4\pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$= 8\pi (2) \frac{1}{\pi}$$

$$= 16$$



التحارين

① صفيحة معدنية دائرية الشكل تتحدد محافظتها على شكلها، بحيث تزداد مساحتها بمعدل $\pi \text{ cm}^2/\text{s}$. حدد معدل تغير محيطها عندما يكون نصف قطرها يساوي 3 cm

الحل



$$\frac{dA}{dt} = \pi$$

$$\left. \frac{dP}{dt} \right|_{r=3} = ?$$

$$A = \pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$\pi = 2\pi (3) \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{6}$$

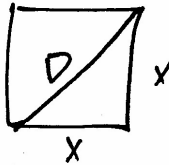
$$P = 2\pi r$$

$$\frac{dP}{dt} = 2\pi \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dP}{dt} = 2\pi \cdot \frac{1}{6} = \boxed{\frac{\pi}{3}}$$

② يتحدد مربع محافظاً على شكله بحيث يزداد قطره بمعدل $\sqrt{8} \text{ cm/s}$ ، حدد معدل تغير مساحته عندما تصبح مساحته 36 cm^2

الحل



$$\frac{dD}{dt} = \sqrt{8}$$

$$\left. \frac{dA}{dt} \right|_{A=36} = ?$$

$$D = \sqrt{x^2 + x^2}$$

$$D = \sqrt{2} x$$

$$\frac{dD}{dt} = \sqrt{2} \frac{dx}{dt}$$

$$\sqrt{8} = \sqrt{2} \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{8}{2}}$$

$$= \sqrt{4}$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = 2}$$

$$A = x^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 2x \frac{dx}{dt}$$

$$A = 36$$

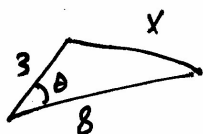
$$x^2 = 36$$

$$x = 6$$

$$\frac{dA}{dt} = 2(6)(2)$$

$$= \boxed{24}$$

٣) اكنلت الكجاور تزداد مساحته بسبب تغير طول
احد اضلاعه ، مع بقاء طول الضلعين الاخرين ثابت
إذا كانت $12 \text{ cm}^2/\text{s}$ معدل بحدوث
معدل تغير طول ضلعه x عندما يصح θ تساوي $\frac{\pi}{3}$



$$\frac{dA}{dt} = 12$$

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{\theta = \frac{\pi}{3}} = ?$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8 \cdot \sin \theta$$

$$A = 12 \sin \theta$$

$$\frac{dA}{dt} = 12 \cos \theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$12 = 12 \cos \frac{\pi}{3} \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 2$$

$$x^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cos \theta$$

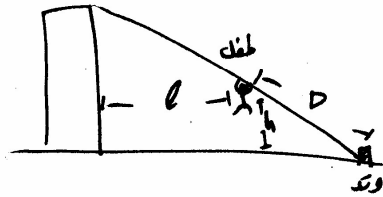
$$x = \sqrt{73 - 48 \cos \theta}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{+48 \sin \theta \frac{d\theta}{dt}}{2 \sqrt{73 - 48 \cos \theta}}$$

$$= \frac{48 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2}{2 \sqrt{73 - 48 \cdot \frac{1}{2}}}$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = \frac{24\sqrt{3}}{7}}$$

الحركة الدورانية



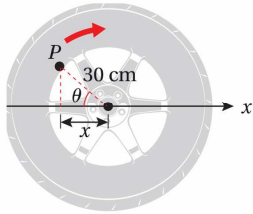
الولد
مسار نقطة على اكسافة

اكسافة بين الولد والوند هي
(اكسافة بين نقطتين)

اكسافة بين الولد والعاروي ℓ
(اكسافة بين نقطة ومستقيم)

(اجواب: المرقع)

دور ! : ماذا تسمى h (مماسية)

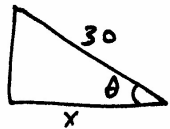


سيارات: عجلة سيارة طول نصف قطرها الداخلي 30 cm، وهي تدور بمعدل 10 دورات في الثانية. رُسمت النقطة P على حافة العجلة كما في الشكل المجاور:

25 أجد $\frac{dx}{dt}$ بدلالة θ .

26 أجد $\frac{dx}{dt}$ عندما $\theta = 45^\circ$.

الحل



$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{10 \cdot 2\pi}{1} = 20\pi$$

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{\theta=45} = ?$$

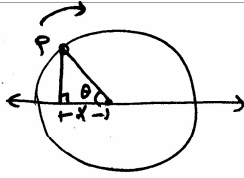
$$\frac{x}{30} = \cos \theta$$

$$x = 30 \cos \theta$$

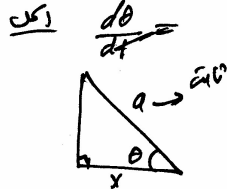
$$\frac{dx}{dt} = -30 \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = -30 \sin \theta \cdot 20\pi$$

$$\frac{dx}{dt} = -30 \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \cdot 20\pi$$

$$= -\frac{600\pi}{\sqrt{2}}$$



عجلة سيارة نصف قطرها الداخلي a
وهي تدور بمعدل 10 دورات في الساعة.
رسم النقاط P على حافة العجلة كما في
الشكل المجاور. جد $\frac{dx}{dt}$ عندما تصبح النقطة
عند أقصى ارتفاع



$$\frac{d\theta}{dt} = 20\pi$$

$$\frac{dx}{dt} = ?$$

$\theta = \frac{\pi}{2}$
عند أقصى ارتفاع

$$\frac{x}{a} = \cos \theta$$

$$x = a \cos \theta$$

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin \theta \frac{d\theta}{dt}$$

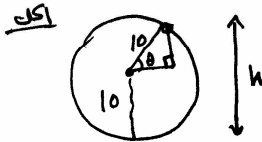
$$\frac{dx}{dt} = -a \sin \frac{\pi}{2} \cdot 20\pi$$

$$\frac{dx}{dt} = -20\pi a$$



مدينة ألعاب: عجلة دوارة في مدينة الألعاب، طول نصف قطرها 10 m،
وهي تدور بمعدل دورة واحدة كل دقيقتين. أجد سرعة تغير ارتفاع راكب
فيها عندما يكون على ارتفاع 16 m فوق سطح الأرض (أهمل ارتفاع
العربة عن الأرض).

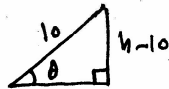
تنبيه: أجد جميع الحلول الممكنة.



$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1 \cdot 2\pi}{2} = \pi$$

$$\frac{dh}{dt} = ?$$

$$h = 16$$



$$\frac{h-10}{10} = \sin \theta$$

$$h = 10 \sin \theta + 10$$

$$\frac{dh}{dt} = 10 \cos \theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = 10 \cdot \frac{4}{5} \cdot \pi = 8\pi$$

$$\frac{dh}{dt} = 10 \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \pi = -8\pi$$



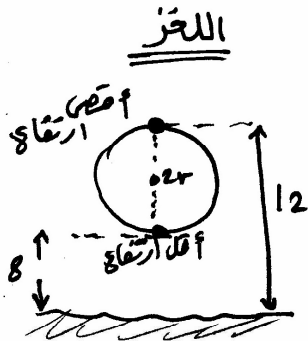
تمرين

تحدي

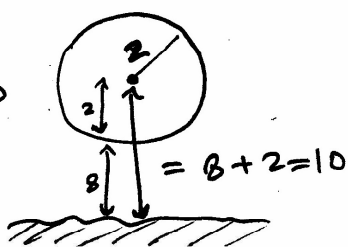
① يقوم طيار بعمل مناورة جوية بالطائرة بشكل دائري كما في الشكل المجاور .
إذا علمت أنه قام بالدورة كاملة خلال دقيقة واحدة . وأنه أقصى ارتفاع للطائرة كانه 12 km ، وأقل ارتفاع كانه 8 km . جد سرعة تغير ارتفاع الطائرة عن الارض عندما تكون على ارتفاع 10 km عن سطح الارض



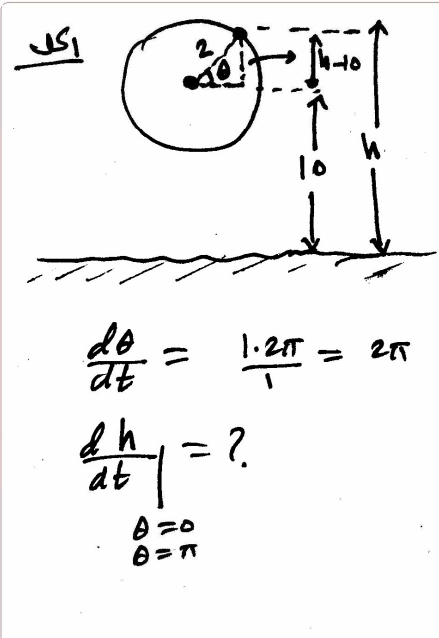
الخط



$$2r = 12 - 8 \Rightarrow r = 2$$

$$\Rightarrow v = 2$$


الحل



$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1 \cdot 2\pi}{1} = 2\pi$$

$$\frac{dh}{dt} = ?$$

$$\theta = 0$$

$$\theta = \pi$$

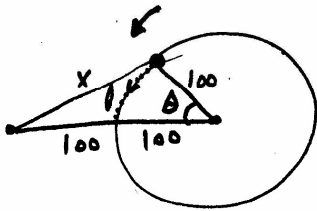
$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = 4\pi \cos 0 = 4\pi \text{ (صاف)}$$

$$\theta = \pi \Rightarrow \frac{dh}{dt} = -4\pi \cos \pi = -4\pi \text{ (سالب)}$$

الحزب على الحركة الدورانية

تبرير: يركض عداء في مضمار دائري، طول نصف قطره 100 m، بسرعة ثابتة مقدارها 7 m/s، ويقف عداء آخر على بُعد 200 m من مركز مضمار الركض. أجد معدل تغير المسافة بين العداءين عندما تكون المسافة بينهما 200 m.

تنبيه: أجد جميع الحلول الممكنة.



$$\frac{d\theta}{dt} = -7$$

$$\frac{dx}{dt} = ?$$

$x = 200$

$$l = r\theta$$

$$l = 100\theta$$

$$\frac{dl}{dt} = 100 \frac{d\theta}{dt}$$

$$-7 = 100 \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{7}{100}$$

$$x^2 = (200)^2 + (100)^2 - 2(200)(100)\cos\theta$$

$$2x \frac{dx}{dt} = +4000 \sin\theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$2(200) \frac{dx}{dt} = 4000 \left(-\frac{7}{100} \right)$$

$$x^2 = \dots$$

$$200^2 = \dots$$

$$\cos\theta = \frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{7\sqrt{15}}{4}$$

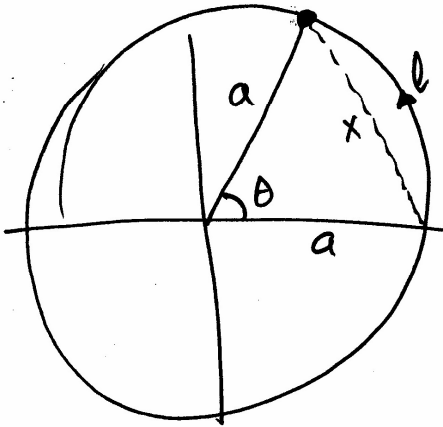
أو



$$\frac{dl}{dt} = +7 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = +\frac{7\sqrt{15}}{4}$$

انت قد ها

١ ابتدأت نقطة الحركة على دائرة مركزها نقطة الأصل من النقطة $(a, 0)$ بعكس عقارب الساعة . بحيث يزداد طول القوس الذي ترسمه في أثناء حركتها بمعدل 8 cm/s . جد معدل ابتعاد النقطة المتحركة من النقطة $(a, 0)$ عندما يقابل القوس الذي ترسمه زاوية مركزية مقدارها $\frac{\pi}{3}$ (مساعدة: a ثابت)



$$\frac{dl}{dt} = 8$$

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{\theta = \frac{\pi}{3}} = ?$$

$$l = a\theta$$

$$\frac{dl}{dt} = a \frac{d\theta}{dt}$$

$$8 = a \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{8}{a}$$

$$x = \sqrt{a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cos \theta}$$

$$= \sqrt{2a^2 - 2a^2 \cos \theta}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{+2a^2 \sin \theta \frac{d\theta}{dt}}{2\sqrt{2a^2 - 2a^2 \cos \theta}}$$

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{\theta = \frac{\pi}{3}} = \frac{2a^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{8}{a}}{2\sqrt{2a^2 - 2a^2 \cdot \frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dx}{dt} = 4\sqrt{3}}$$

المحولات الديكارتية

نحل نقطة على منحنى $x^2 + y^2 - 5x + 3y - 6 = 0$ س
فإذا كان معدل تغير الإحداثي x بالنسبة إلى الزمن 3 cm/s
عند النقطة $(1, 2)$. نجد معدل تغير إحداثيتها y بالنسبة إلى
الزمن عند نفس النقطة

اكتب (x, y)

$$\frac{dx}{dt} = 3$$

$$\frac{dy}{dt} = ?$$

$x=1$
 $y=2$

$$x^2 + y^2 - 5x + 3y - 6 = 0$$

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} - 5 \frac{dx}{dt} + 3 \frac{dy}{dt} = 0$$

$$2(1) \frac{dx}{dt} + 2(2) \frac{dy}{dt} - 5(3) + 3 \frac{dy}{dt} = 0$$

$$7 \frac{dy}{dt} - 4 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{4}{7}$$

بدأت نقطة الحركة من النقطة $(1, 2)$ على منحنى إهلافة س
 $x^2 + y^2 - 5x + 3y - 6 = 0$
بحيث يزداد الإحداثي x بمعدل 3 cm/s . جد معدل تغير الإحداثي
 y بعد ثانية من الانطلاق . علماً $y > 0$

(x, y)

$$x_0 = 1$$

$$y_0 = 2$$

$$\frac{dx}{dt} = 3$$

$$\frac{dy}{dt} = ?$$

$t=1$

$$x^2 + y^2 - 5x + 3y - 6 = 0$$

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} - 5 \frac{dx}{dt} + 3 \frac{dy}{dt} = 0$$

$$(3) \quad 2(4) + 2(2) \frac{dy}{dt} - 5(3) + 3 \frac{dy}{dt} = 0$$

$$7 \frac{dy}{dt} + 4 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{4}{7}$$

قيمة x_0 قيمة y_0

$$x = 1 + 3(1) = 4$$

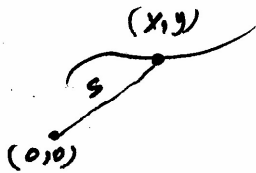
$$4^2 + y^2 - 5(4) + 3y - 6 = 0$$

$$y^2 + 3y - 10 = 0$$

$$(y - 2)(y + 5) = 0$$

$$\boxed{y = 2} \quad y = -5 \text{ (مرفوض)}$$

يبحر جميع على منحنى الأمثلة $f(x) = 2\sin(\frac{\pi x}{2})$ ، وعند مروره
بالنقطة $(\frac{1}{3})$ فإن الإحداثي x كونه يزداد بمعدل $\sqrt{10}$ وحدة
طول لكل ثانية . جد معدل تغير المسافة بين الجسم ونقطة
المصدر في هذه اللحظة



$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{10}$$

$$\left. \frac{ds}{dt} \right|_{\substack{x=\frac{1}{3} \\ y=1}}$$

معدل المسافة بين نقطتين

$$s = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

$$= \sqrt{(y - 0)^2 + (x - 0)^2}$$

$$s = \sqrt{4 \sin^2(\frac{\pi x}{2}) + x^2}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{8 \sin(\frac{\pi x}{2}) \cos(\frac{\pi x}{2}) \cdot \frac{\pi}{2} \frac{dx}{dt} + 2x \frac{dx}{dt}}{2 \sqrt{4 \sin^2(\frac{\pi x}{2}) + x^2}}$$

$$\left. \frac{ds}{dt} \right|_{x=\frac{1}{3}} = \frac{8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{10} + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{10}}{2 \sqrt{4 \cdot (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{3})^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{30} \pi + \sqrt{10} \cdot \frac{2}{3}}{2 \sqrt{10/9}} = 3 \left(\frac{\sqrt{30} \pi + \sqrt{10} \cdot \frac{2}{3}}{2 \sqrt{10}} \right)$$

$$= \frac{3}{2} \left(\frac{\sqrt{30} \pi}{\sqrt{10}} + \frac{\sqrt{10} \cdot \frac{2}{3}}{\sqrt{10}} \right) = \frac{3}{2} (\sqrt{3} \pi + \frac{2}{3})$$

$$= 1 + \frac{3\sqrt{3}\pi}{2}$$

تمارين

① يتحرك جسم على منحنى العلاقة $f(x) = x^3$ ، وإذا كانت x في لحظة مرورها بالنقطة $(2, 8)$ كانت معدل تغير إحداثيه x هو 3 وحدات/ثانية ، فما هو معدل تغير إحداثيه y في

الحل

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= 3 \\ \frac{dx}{dt} &= 3 \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} y &= x^3 \\ \frac{dy}{dt} &= 3x^2 \frac{dx}{dt} \end{aligned} \right. \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{4}$$

$x=2, y=8$

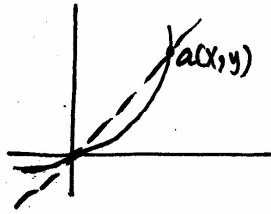
② تحدي يتحرك جسم على منحنى العلاقة $x^3 + y^3 = 2xy$. وعند مروره بالنقطة (1, 1) فإن الإحداثي x يزداد بمعدل 2 cm/s جد معدل تغير المسافة بين الجسم والنقطة $(-1, 2)$ في هذه اللحظة

الحل

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2 \\ \frac{ds}{dt} &= ? \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} s &= \sqrt{(y-2)^2 + (x+1)^2} \\ \frac{ds}{dt} &= \frac{2(y-2) \frac{dy}{dt} + 2(x+1) \frac{dx}{dt}}{2 \sqrt{(y-2)^2 + (x+1)^2}} \end{aligned} \right.$$

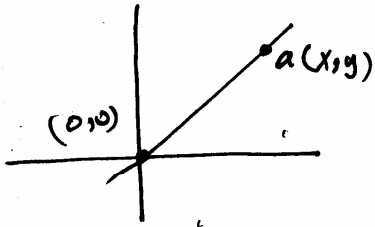
$x^3 + y^3 = 2xy$
 $3x^2 \frac{dx}{dt} + 3y^2 \frac{dy}{dt} = 2 \frac{dy}{dt}$
 $x=1, y=1$
 $3(1)^2(2) + 3(1)^2 \frac{dy}{dt} = 2 \frac{dy}{dt}$
 $\frac{dy}{dt} = -6$

$\frac{ds}{dt} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = \frac{2(1-2)(-6) + 2(1+1)(2)}{2 \sqrt{(1-2)^2 + (1+1)^2}} = \frac{12+8}{2\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}}$



بدأت النقطة $a(x,y)$ الحركة من نقطة
الاصول على منحنى الاقتران $f(x) = e^{2x} - 1$
بحيث يزداد الاصدائي x بمعدل 3 cm/s
جد معدل تغير ميل المسار في الوصل بين
النقطة a ونقطة الاصل بعد
ثانية واحد من الانطلاقة

تحدي
المعمل



$$\frac{dx}{dt} = 3$$

$$x_0 = 0$$

$$y_0 = 0$$

$$\left. \frac{dm}{dt} \right|_{t=1} = ?$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y-0}{x-0} = \frac{e^{2x}-1}{x}$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{x \cdot e^{2x} \cdot 2 \frac{dx}{dt} - (e^{2x}-1) \cdot \frac{dx}{dt}}{x^2}$$

$$x = 0 + \overset{\text{الزمن}}{\uparrow} 3 \cdot \overset{\text{السرعة}}{\uparrow} 1 = 3$$

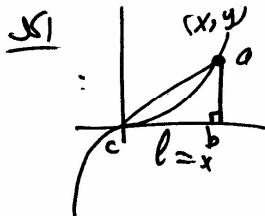
$$\Rightarrow \left. \frac{dm}{dt} \right|_{\substack{t=1 \\ x=3}} = \frac{3e^6 \cdot 2 \cdot 3 - (e^6-1)3}{4}$$

$$= \frac{18e^6 - 3e^6 + 3}{4}$$

$$\boxed{\left. \frac{dm}{dt} \right|_{t=1} = \frac{15e^6 + 3}{4}}$$

معدلات المساحات الديكارتية

سأبدأ بالنقطة a ، الحركة معاً من نقطة الأصل c ، بحيث تتحرك النقطة b على محور x اكو حجت مستعدة عن نقطة الأصل بسرعة 2 cm/s ، وتتحرك النقطة a في اربع الاول على منحنى $f(x) = x^3$. بحيث تبقى ab دائماً عمودية على محور x اكو حجت . حد معدل التغير في مساحة المثلث abc بعد ثمانية واحدة من بدأ الحركة

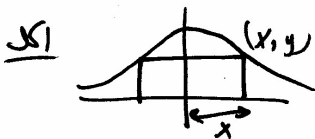


$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = 2$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} xy = \frac{1}{2} x x^3 \\ &= \frac{x^4}{2} \\ \frac{dA}{dt} &= 2x^3 \frac{dx}{dt} \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} x = 0 + 2 \cdot 1 \\ = 2 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} &= 2(2)^3(2) \\ &= 32 \end{aligned}$$

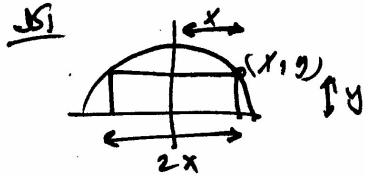
سأبدأ بالشكل مستطيل مرسوم داخل منحنى الاقتران $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. إذا كان x يتغير مع الزمن صغيراً حجه موضع المستطيل ① حد مساحة المستطيل بدلالة x ② حد معدل تغير مساحة المستطيل عند $x=4$ إذا $\frac{dx}{dt} = 4$



$$\begin{aligned} ① \quad A &= 2xy = 2x e^{-\frac{x^2}{2}} \\ ② \quad \frac{dA}{dt} &= 2x e^{-\frac{x^2}{2}} \left(-x \frac{dx}{dt} \right) + e^{-\frac{x^2}{2}} \left(2 \frac{dx}{dt} \right) \\ &= 2(4) e^{-8} (4(4)) + e^{-8} (2(4)) \\ &= -128 e^{-8} + 8 e^{-8} \\ &= -120 e^{-8} \end{aligned}$$

التحارين

① يبين الشكل الجدار مستطيل مرسوم داخل منحنى الاقتراب $f(x) = \sqrt{5-x^2}$ ، إذا تحركت النقطة $a(x,y)$ بحيث يزداد إحداثيها x بمعدل 5 cm/s . جد معدل تغير مساحة هذا المستطيل عندما تصبح فتحة x تساوي 2



$$\frac{dx}{dt} = 5$$

$$\left. \frac{dA}{dt} \right|_{x=2} = ?$$

$$A = 2xy$$

$$A = 2x\sqrt{5-x^2}$$

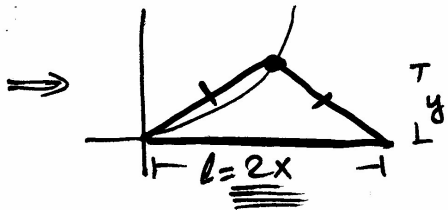
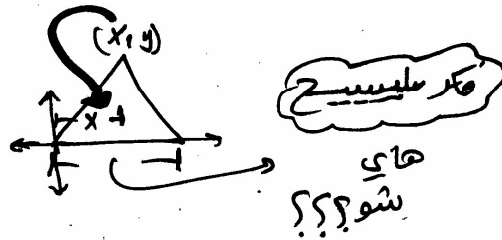
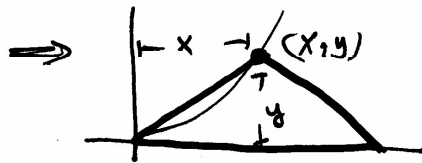
$$\frac{dA}{dt} = 2x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{5-x^2}} \frac{dx}{dt} + \sqrt{5-x^2} \frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{2(2)(-2)(2)(5)}{2\sqrt{1}} + \sqrt{1} \cdot 2 \cdot 5$$

$$= -40 + 10 = -30$$

② بدأت النقطتان c, b الحركة معاً من نقطتي الاصل a بحيث
تتحرك النقطة b على محور x الكوجب بسرعة عن نقطة الاصل
بسرعة 4 cm/s . وتتحرك النقطة c في الربع الاول وعلى منحنى
الاقتران $f(x) = x^2$ بحيث يبقى دائماً طول ac يساوي
طول bc . جد معدل تغير مساحة المثلث abc بعد ثابنتين
من بدء الحركة

بما ان $ac = bc$ مكرب
مثلث متساوي الساقين مكرب



$$A = \frac{1}{2} (2x)(y)$$

$$= x \cdot x^2$$

$$A = x^3$$

$$\frac{dl}{dt} = 4$$

$$\left. \frac{dA}{dt} \right|_{t=2} = ?$$

$$\frac{dA}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt}$$



$$\frac{dA}{dt} = 3(4)^2(2) = 96$$

$$l = 0 + 4(2)$$

$$l = 8$$

$$2x = 8 \Rightarrow x = 4$$

$$l = 2x$$

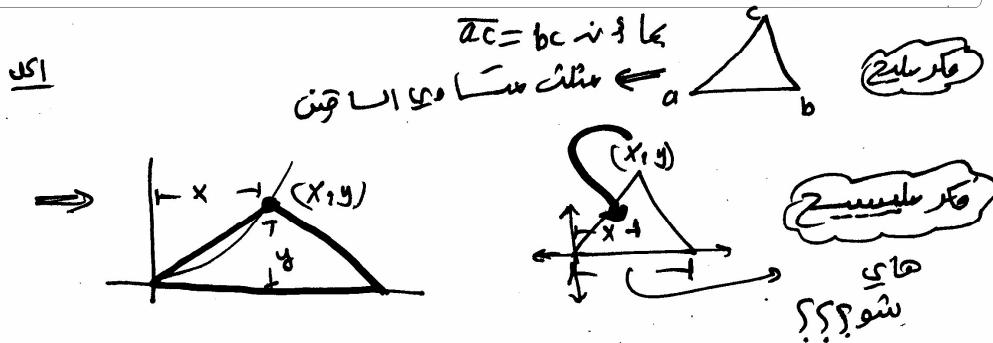
$$\frac{dl}{dt} = 2 \frac{dx}{dt}$$

$$4 = 2 \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2$$

المعدلات المرتبطة بالزمن 5

سؤالين ديكارتي

بدأت النقطتان c و b الحركية معاً من نقطة الأصل a ، بحيث تتحرك النقطة b على محور x الكوجب مسبعةً عن نقطة الأصل بسرعة 4 cm/s . وتتحرك النقطة c في الربع الأول وعلى منحنى الدائرة $f(x) = x^2$ بحيث يبقى دائماً حول ac يادى طول bc . جد معدل تغير مساحة المثلث abc بعد ثانيتين من بدء الحركة



$A = \frac{1}{2} (2x)(y)$

$= x \cdot x^2$

$A = x^3$

$\frac{dA}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt}$

$\frac{dA}{dt} = 3(4)^2(2) = 96$

$\frac{dl}{dt} = 4$

$\frac{dA}{dt} = ?$

$t = 2$

$l = 0 + 4(2)$

$l = 8$

$2x = 8 \Rightarrow x = 4$

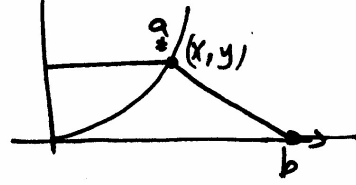
$l = 2x$

$\frac{dl}{dt} = 2 \frac{dx}{dt}$

$4 = 2 \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2$

س

$f(x) = x^2$ سرعة b تساوي 6 m/s
بعد b عن المحور y يساوي ثلاث أضعاف بعد a
عن المحور y
جد معدل التغير مساحة شبه المنحرف عندما
يكون بعد a عن المحور y يساوي 1



إذ $A = \frac{1}{2} (x + 3x) y = 2x (x^2) = 2x^3$

$$\frac{dA}{dt} = 6x^2 \frac{dx}{dt}$$

$$l = 3x$$

$$\frac{dl}{dt} = 3 \frac{dx}{dt}$$

$$6 = 3 \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2$$

$$\frac{dA}{dt} = 6(1)^2(2)$$

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = 12}$$

تحدد الكجسمات

$$V = x^3$$

$$A = 6x^2$$

المكعب

$$V = \frac{4\pi}{3} r^3$$

$$A = 4\pi r^2$$

الكرة

تذكر

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

$$A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$

المنبر

$$V = \pi r^2 h$$

$$A = 2\pi r h$$

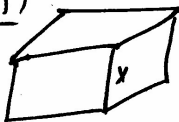
الاسطوانة

$$x = x_0 + \frac{dx}{dt} t$$

مثال ١: مكعب طول ضلعه 10 cm ، بدأ يتدد فزاد طول ضلعه بمعدل 6 cm/s . وظل محافظاً على شكله :

- ① حدد معدل تغير حجم المكعب بعد 4s من بدء تدد
- ② حدد معدل تغير مساحة سطح المكعب بعد 6s =

الحل



$$x_0 = 10$$

$$\frac{dx}{dt} = 6$$

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{t=4} = ?$$

$$\left. \frac{dA}{dt} \right|_{t=6} = ?$$

$$V = x^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt}$$

$$x = 10 + 6(4) = 34$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = 3(34)^2(6)$$

$$A = 6x^2 \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 12x \frac{dx}{dt}$$

$$x = 10 + 6(6) = 46 \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 12(46)(6)$$

مثال ٢: كرة نصف قطرها 2 cm ، بدأت تتدد فزاد نصف قطرها بمعدل 0.1 cm/s ، حدد معدل تغير مساحة سطحها بعد دقيقة من التدد

①

$$r_0 = 2$$

$$\frac{dr}{dt} = 0.1$$

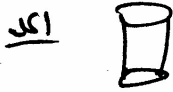
$$\left. \frac{dA}{dt} \right|_{t=60} = ?$$

$$A = 4\pi r^2 \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$r = 2 + (0.1)(60) = 8$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = 8\pi(8)(0.1) = 6.4\pi$$

س1 اسطوانة يزداد ارتفاعها بمعدل 1 cm/s ، ويتناقص نصف قطرها بمعدل 2 cm/s ، جد معدل تغير حجمها في اللحظة التي يصبح فيها ارتفاعها 10 cm ، نصف قطرها 3 cm



$$\frac{dh}{dt} = 1$$

$$\frac{dr}{dt} = -2$$

$$\frac{dV}{dt} = ?$$

$$h = 10$$

$$r = 3$$

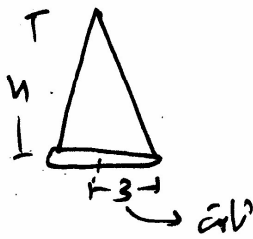
$$V = \pi r^2 h$$

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \pi r^2 \frac{dh}{dt} + h 2\pi r \frac{dr}{dt} \\ &= \pi (3)^2 (1) + 10 (2\pi) (3) (-2) \\ &= 9\pi - 120\pi = -111\pi \end{aligned}$$

تجارب

س1 مخروط نصف قطره قاعدته 3 cm وارتفاعه 10 cm . بدأ ارتفاعه يتناقص بمعدل 2 cm/s في حين أنه نصف قطره ظل ثابت . جد معدل تغير مساحته الجانبيه بعد 3 ثواني من التناقص

س2 اسطوانة ارتفاعها يزداد مثلي نصف قطرها ، بدأت تتعد بالحرارة مما مقلص على شكلها . بحيث يزداد نصف قطر بمعدل 3 cm/s . جد معدل تغير حجمها عندما يصبح ارتفاعها 10 cm



$$h_0 = 10$$

$$\frac{dh}{dt} = 2$$

$$\left. \frac{dA}{dt} \right|_{t=3} = ?$$

$$A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$A = \pi (3) \sqrt{3^2 + h^2} = 3\pi \sqrt{h^2 + 9}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{6\pi h \frac{dh}{dt}}{2\sqrt{h^2 + 9}}$$

$$h = h_0 + \frac{dh}{dt} t$$

$$= 10 - 2(3) = 4$$

$$= \frac{6\pi (4)(-2)}{2\sqrt{4^2 + 9}}$$

$$= -\frac{24\pi}{5}$$



$$h = 2r$$

$$\frac{dr}{dt} = 3$$

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{h=10} = ?$$

$$V = \pi r^2 h$$

$$= \pi r^2 (2r) = 2\pi r^3$$

$$\frac{dV}{dt} = 6\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$= 6\pi (5)^2 (3)$$

$$\frac{dV}{dt} = 450\pi$$

$$h = 10$$

$$10 = 2r$$

$$r = 5$$

تحدي كومة ارمل

يسقط ارمل من حزام ناقل بمعدل $10 \text{ m}^3/\text{min}$ على قمة كومة مخروطية الشكل. إذا كان ارتفاع الكومة يساوي دائماً ثلثه أقطابه فكم سرعة تغير ارتفاع كومة ارمل عندما يكون ارتفاعها 4
② سرعة تغير طول نصف قطر الكومة عندما يكون ارتفاعها 4

من
الكساء



$$\frac{dV}{dt} = 10$$

$$h = \frac{3}{8} 2r = \frac{3r}{4}$$

$$\left. \frac{dh}{dt} \right|_{h=4}$$

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_{h=4}$$

اكتب

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

$$r = \frac{4}{3} h$$

$$V = \frac{\pi}{3} \left(\frac{4}{3} h \right)^2 h$$

$$V = \frac{16\pi}{27} h^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{16\pi}{9} h^2 \frac{dh}{dt}$$

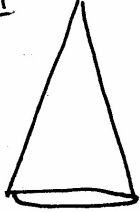
$$10 = \frac{16\pi}{9} (4)^2 \frac{dh}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{90}{256\pi}$$

$$\textcircled{2} \frac{dr}{dt} = \frac{4}{3} \frac{dh}{dt} = \frac{4}{3} \frac{90}{256\pi} = \frac{3}{64\pi}$$

التحدي
يسقط الرمل من جزام ناقل بمعدل $12 \text{ m}^3/\text{min}$ ، على قمة كومة مخروطية الشكل . فإذا كان ارتفاع كومة الرمل يساوي دائماً ثلاثة أضعاف نصف قطرها . فجد معدل تغير مساحة سطح الرمل عندما يصبح نصف قطر قاعدته 2 m

الحل



$$h = 3r$$

$$\frac{dV}{dt} = 12$$

$$\left. \frac{dA}{dt} \right|_{r=2} = ?$$

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

$$= \frac{\pi}{3} r^2 (3r)$$

$$V = \pi r^3$$

$$\frac{dV}{dt} = 3\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$12 = 3\pi (2)^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{1}{\pi}$$

$$A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$= \pi r \sqrt{r^2 + (3r)^2}$$

$$A = \sqrt{10} \pi r^2$$

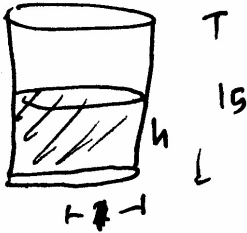
$$\frac{dA}{dt} = 2\sqrt{10} \pi r \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\sqrt{10} \pi (2) \frac{1}{\pi}$$

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = 4\sqrt{10}}$$

الخزانة

من المثل: خزانة وقود اسطوانية الشكل ، ارتفاعه 15 m ، وعكس قاعدته 2 m ، مائي الخزانة بالوقود بمعدل 500 L/min . جد
① معدل ارتفاع الوقود في الخزانة في أي لحظة
② معدل تغير المساحة الجانبية للوقود عند أي لحظة



$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= 500 \text{ L/min} \\ &= \frac{5000}{1000} \text{ m}^3/\text{min} \\ &= 0.5 \text{ m}^3/\text{min}\end{aligned}$$

$$\frac{dh}{dt} = ?$$

$$\frac{dA}{dt} = ?$$

$$\begin{aligned}V &= \pi r^2 h \\ &= \pi (1)^2 h\end{aligned}$$

$$V = \pi h$$

$$\frac{dV}{dt} = \pi \frac{dh}{dt} \Rightarrow 0.5 = \pi \frac{dh}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{1}{2\pi}}$$

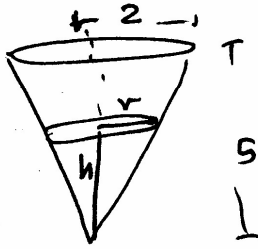
$$A = 2\pi r h = 2\pi (1) h = 2\pi h$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi \frac{dh}{dt} = 2\pi \frac{1}{2\pi}$$

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = 1}$$

خزانة على شكل مخروط دائري قائم ، ارتفاعه 5 m ، ونصف
قطر قاعدته 2 m . ورأسه إلى الأسفل
تسرب الماء من الخزانة بمعدل $\frac{1}{12}$ م³/ثانية . ما معدل تغير ارتفاع
الماء في الخزانة عندما يكون ارتفاعه 4 m

من الكتاب



$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{12}$$

$$\left. \frac{dh}{dt} \right|_{h=4} = ?$$

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

كتابة
المثلثات $\frac{r}{2} = \frac{h}{5}$
 $\Rightarrow r = \frac{2h}{5}$

~~$$V = \frac{\pi}{3} r^2 \frac{5r}{2}$$~~

$$V = \frac{\pi}{3} \left(\frac{2h}{5} \right)^2 h \Rightarrow V = \frac{4\pi}{75} h^3$$

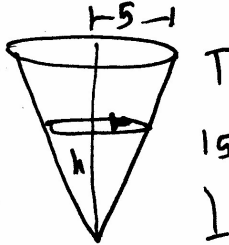
$$\frac{dV}{dt} = \frac{4\pi}{75} \cdot 3h^2 \frac{dh}{dt}$$

$$-\frac{1}{12} = \frac{4\pi}{25} (4)^2 \frac{dh}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = -\frac{25}{768\pi}$$

وعاء على شكل مخروط دائري قائم رأسه على المسفل ،
ارتفاعه 15 cm ، وطول نصف قطر قاعدته 5 cm ، صب
الحاء فيه بمعدل 8 cm³/s ، ما معدل تغير ارتفاع الحاء
في الوعاء في اللحظة التي يكونه مضمي 8 ثواني على
بدء صب الحاء

للسنوات
2022



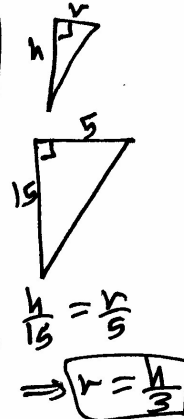
$$\frac{dV}{dt} = 8\pi$$

$$\left. \frac{dh}{dt} \right|_{t=8} = ?$$

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3} \left(\frac{h}{3}\right)^2 h$$

$$V = \frac{\pi}{27} h^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{9} h^2 \frac{dh}{dt}$$



حساب h

$$V = V_0 + \frac{dV}{dt} \cdot t$$

$$V = 0 + 8\pi \cdot 8$$

$$V = 64\pi$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{27} h^3 = 64\pi \Rightarrow h^3 = 64 \cdot 27$$

$$h = 4 \cdot 3$$

$$h = 12$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{9} h^2 \frac{dh}{dt}$$

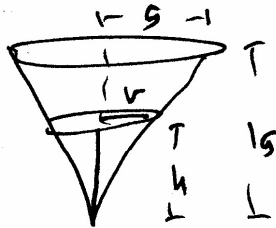
$$8\pi = \frac{\pi}{9} (12)^2 \frac{dh}{dt} \Rightarrow \left[\frac{dh}{dt} = \frac{72}{144} \right]$$

$$\left[\frac{dh}{dt} = \frac{1}{2} \right]$$

خطأ ذكي

وعاء على شكل مخروط دائري قائم رأسه للأسفل، ارتفاعه 15cm وطول نصف قطر قاعدته 5cm. صب فيه الماء بمعدل 8π سم³/ثانية. ما معدل تغير ارتفاع الماء في الوعاء في اللحظة التي يكون فيها 8 ثوانٍ على بدء الصب.

سنوات
2022



$$\frac{dV}{dt} = 8\pi$$

$$\frac{dh}{dt} = ?$$

$t = 8$

$$\frac{r}{5} = \frac{h}{15}$$

$$r = \frac{h}{3}$$

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

$$= \frac{\pi}{3} \left(\frac{h}{3}\right)^2 h$$

$$V = \frac{\pi}{27} h^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

$$8\pi = \frac{\pi}{9} \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{dh}{dt}$$

الخطأ الذكي
 $h = 0 + \frac{dh}{dt} t = 8 \frac{dh}{dt}$
خطأ ذكي: قد لا تكون ثابتة $\frac{dh}{dt}$ لذا لا يمكن استعمال قانون

$$V = 0 + \frac{dV}{dt} t = 8\pi \cdot 8 = 64\pi = \frac{\pi}{27} h^3$$

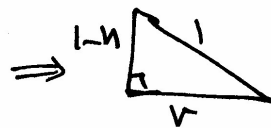
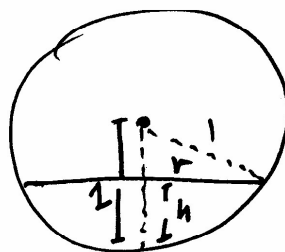
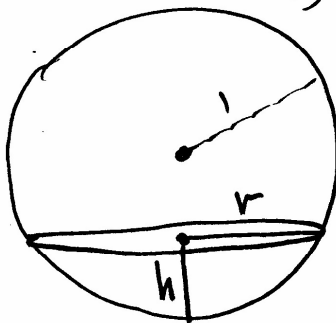
$$\Rightarrow h = 12$$

$$\Rightarrow 8\pi = \frac{\pi}{9} (12)^2 \frac{dh}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{1}{2}}$$

سؤالات
2018
مكرى

خزانة ماء كروي الشكل نصف قطره 1 m . صب فيه الماء . إذا كان معدل تغير ارتفاع الماء فيه هو $\frac{1}{4}$ m/min جد معدل تغير مساحة سطح الماء في الخزان بعد دقيقتين من بدء صب الماء فيه

مساحة الماء في شكل دائرة
 $A = \pi r^2$



$$(1)^2 = r^2 + (1-h)^2$$

$$r^2 = 1 - (1-h)^2$$

$$r^2 = 1 - (1 - 2h + h^2)$$

$$r^2 = 2h - h^2$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{4}$$

$$\left. \frac{dA}{dt} \right|_{t=2} = ?$$

$$A = \pi r^2$$

$$A = \pi(2h - h^2)$$

$$\frac{dA}{dt} = \pi(2 \frac{dh}{dt} - 2h \frac{dh}{dt})$$

$$h = h_0 + \frac{dh}{dt} t$$

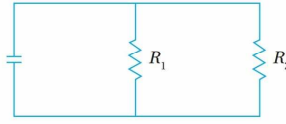
$$h = 0 + \frac{1}{4} \cdot 2$$

$$h = \frac{1}{2}$$

$$\frac{dA}{dt} = \pi(2 \cdot \frac{1}{4} - 2(\frac{1}{2}) \frac{1}{4})$$

$$= \pi(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = \frac{\pi}{4}$$

النهاية

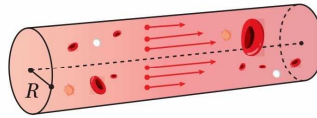


كهرباء: تعطى المقاومة المكافئة R بالأوم (Ω) للمقاومتين R_1 و R_2 الموصولتين على التوازي، كما في الشكل المجاور، بالعلاقة الآتية:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

إذا كانت R_1 و R_2 تزدادان بمعدل $0.3 \Omega/s$ و $0.2 \Omega/s$ على الترتيب، فأجد معدل تغير R عندما $R_1 = 80 \Omega$ و $R_2 = 100 \Omega$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^2} \frac{dR}{dt} &= \frac{1}{R_1^2} \frac{dR_1}{dt} + \frac{1}{R_2^2} \frac{dR_2}{dt} & \left| \begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{80} + \frac{1}{100} \\ &= \dots \end{aligned} \right. \\ \frac{1}{R^2} \frac{dR}{dt} &= \frac{1}{80^2} (0.3) + \frac{1}{(100)^2} (0.2) \\ \Rightarrow \frac{dR}{dt} &= \dots \end{aligned}$$



طب: تمثيل المعادلة:

$$V = \frac{3125}{6} (R^2 - (0.0005)^2)$$

سرعة الدم في أحد الأوعية الدموية بالمليمتر لكل ثانية، حيث R طول

نصف قطر الوعاء بالمليمتر. إذا كان الوعاء ينقبض بحيث ينقص نصف قطره بمعدل 0.0002 mm/s ، فأجد معدل تغير سرعة الدم في الوعاء في اللحظة التي يكون فيها

طول نصف قطره 0.075 mm

$$V = \frac{3125}{6} (R^2 - (0.0005)^2)$$

$$\frac{dR}{dt} = -0.0002$$

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{R=0.075} = ?$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{3125}{6} \cdot 2R \frac{dR}{dt}$$

$$= \frac{3125}{6} \cdot 2 (0.075) (-0.0002)$$

$$= \text{طلاي صم الخروج}$$