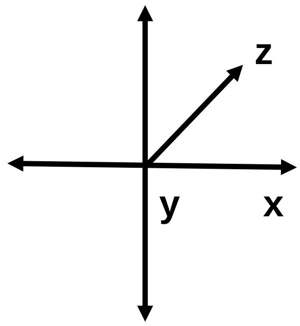
مفهوم الزاوية

الزاوية تتكون من إطلاق **شعاعين** من نفس **النقطة** .

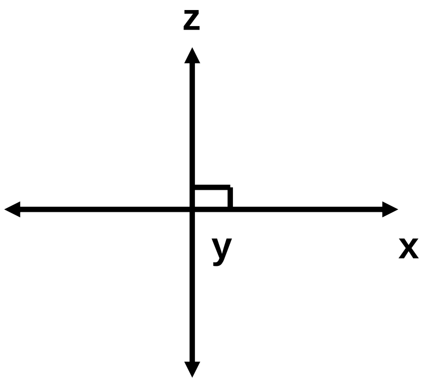
ضلع الإبتداء   ضلع الإنتهاء   نقطة الأصل   ليست نقطة الأصل

- إذا كانت النقطة هي نقطة الأصل في المستوى البياني وضلع الإبتداء منطبق على محور السينات الموجب يسمى هذا الوضع بالوضع القياسي للزاوية .



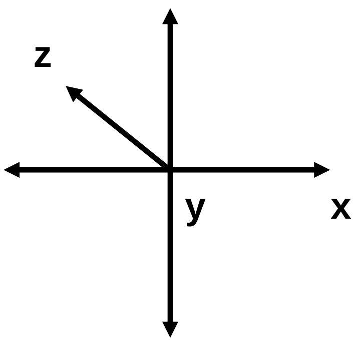
∡ xyz

Acute angle



∡ xyz

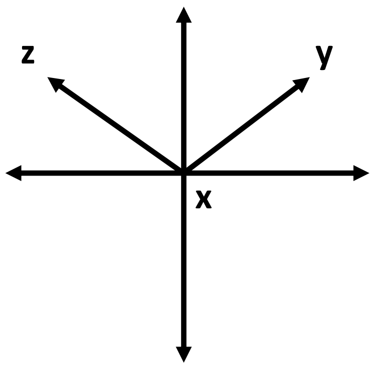
Right angle

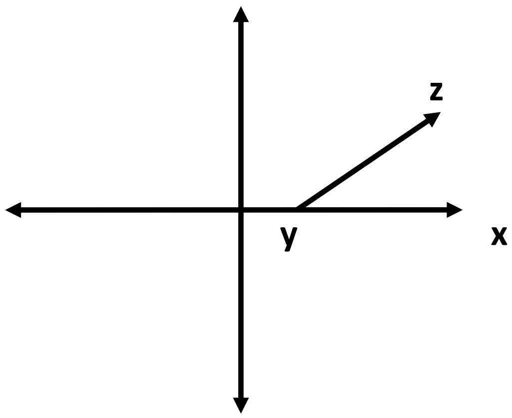


∡ xyz

Obtuse angle

- زاوية ليست بالوضع القياسي





قياس الزاوية

- موجب
  - إذا كان ضلع الإنتهاء يتحرك عكس عقارب الساعة
- سالب
  - إذا كان ضلع الإنتهاء يتحرك مع عقارب الساعة
- تقدير بالدرجات (الستيني)
  - موجب
  - سالب
  - ينتج من تقسيم الزاوية في مركز الدائرة إلى 360 قسماً متساوية يسمى كل منها درجة ستينية
- تقدير دائري
  - موجب
  - سالب
  - وحدة قياسه الراديان
  - رمزه π
    - $\pi = 180°$

من أشكال المثلثات

متطابق الأضلاع

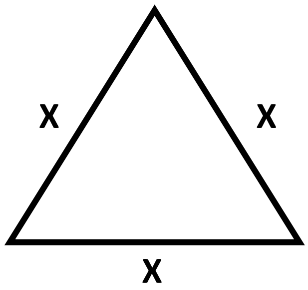
أطوال أضلاعه متساوية

قياس زواياه متساوية

مجموع قياسات زوايا المثلث = $180°$

قياس أي زاوية

$180 \div 3 = 60$

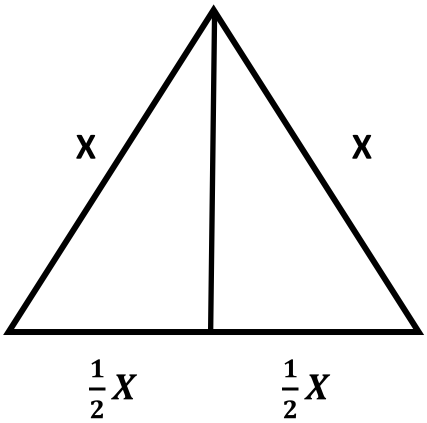


لتحويله إلى مثلث قائم الزاوية

ننزل عامود من رأس المثلث إلى قاعدته

ينصف قياس زاوية الرأس

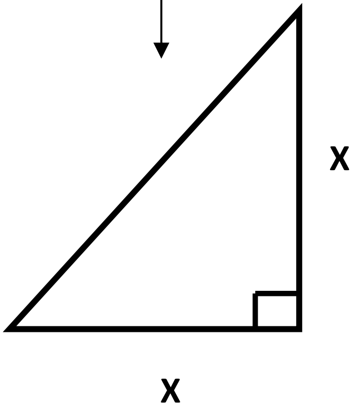
ينصف طول القاعدة ويعمل معها زاوية قائمة



متطابق الضلعان

يكون زاويتا القاعدة متساويتان

إذا كان المثلث قائم الزاوية



المستوى البياني

يتكون من تعامد خطين أعداد أحدهما أفقي و الاخر عمودي عند الرقم صفر ويكون الخط الأفقي x – axis والخط العمودي y – axis مكوناً نقطة الأصل (0 , 0) وأربع زوايا قوائم وبالوضع القياسي للزاوية فعند الدوران حول نقطة الأصل يتكون زاوية ويكون قياسها

ضمن الدورة الواحدة

$$zero \leq x \leq 360$$

x : قياس الزاوية

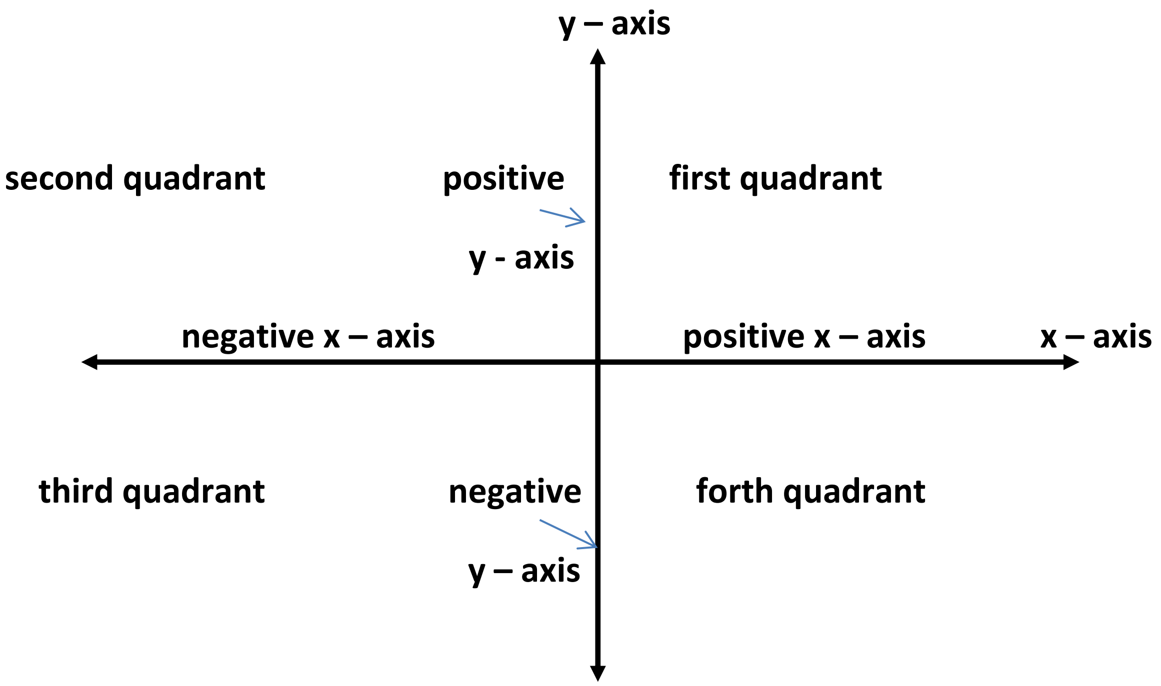
أكثر من دورة

$$x + 360\, n$$

x : قياس الزاوية

n : عدد صحيح

الزوايا ضمن الدورة الواحدة

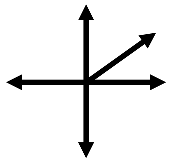


القياس الموجب للزوايا

1) $x = zero\,°$ (زاويه ربعية)

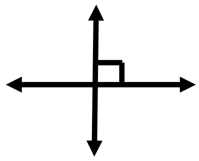
عندما يكون ضلع الإبتداء والإنتهاء معاً على محور السينات الموجب

2) $zero\,° < x < 90\,°$ (acute angle)



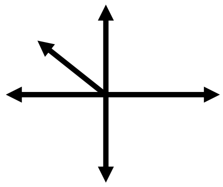
عندما يكون ضلع الإبتداء على محور السينات الموجب وضلع الإنتهاء في المربع الأول

3) $x = 90\,°$ (right angle)



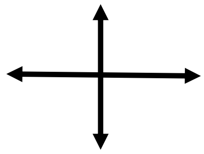
عندما يكون ضلع الإبتداء على محور السينات الموجب وضلع الإنتهاء يقع على محور الصادات الموجب

4) $90\,° < x < 180\,°$ (obtuse angle)



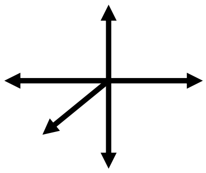
تقع بالربع الثاني ويكون ضلع إنتهاء الزاوية في الربع الثاني

5) $x = 180\,°$ (street angle)



ويكون ضلع الإنتهاء على محور السينات السالب

6) $180\,° < x < 270\,°$

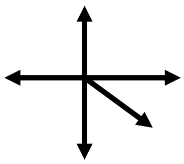


تقع بالربع الثالث ويكون ضلع الإنتهاء بالربع الثالث

7) $x = 270\,°$ (زاوية ربعية)

ويكون ضلع الإنتهاء على محور الصادات السالب

8) $270\,° < x < 360\,°$



تقع بالربع الرابع ويكون ضلع الإنتهاء بالربع الرابع

---

9) $x = 360\,^{\circ}$

تتكون عند إتمام الدورة الأولى

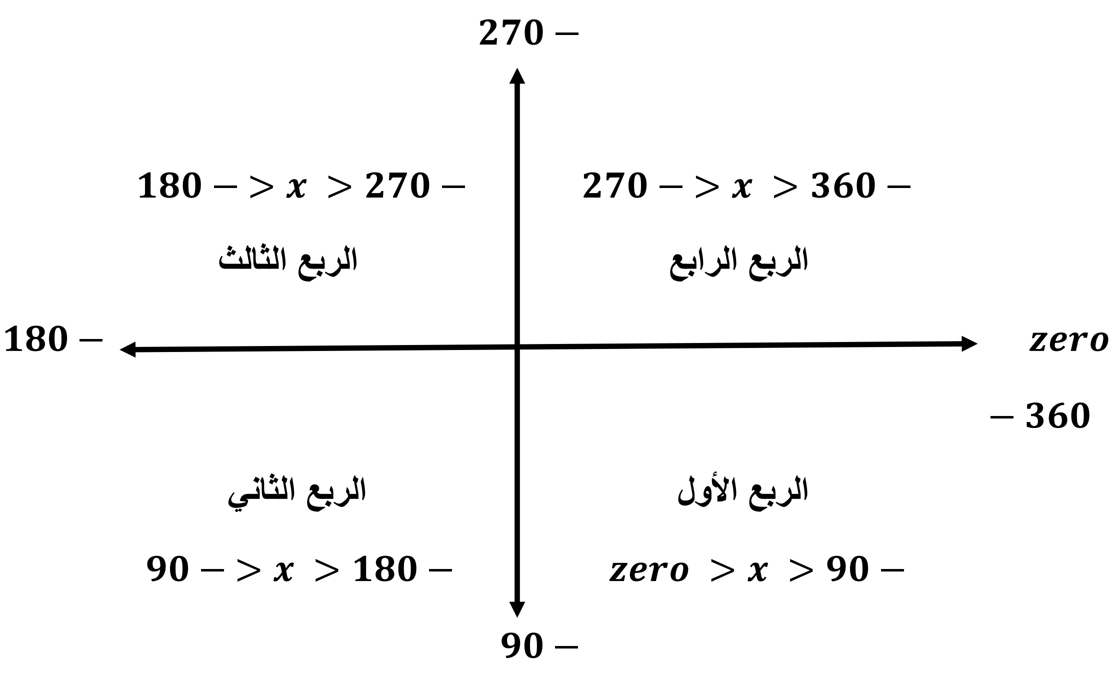
$x = zero\,^{\circ}$

تتكون عند البدء بالدورة الأولى

ملاحظة : للزوايا 8 مواقع أربع منها على المحاور الرئيسية و الأربع الباقيات داخل الأرباع

القياس السالب للزوايا

إذا تحرك ضلع الإنتهاء للزاوية مع عقارب الساعة يتكون زاوية بالقياس السالب ونجمع لها $360\,^{\circ}$ ليتم تحويلها إلى القياس الموجب .



قياس موجب		قياس سالب
ربع أول	$\longleftrightarrow$	ربع رابع
ربع ثاني	$\longleftrightarrow$	ربع ثالث
ربع ثالث	$\longleftrightarrow$	ربع ثاني
ربع رابع	$\longleftrightarrow$	ربع أول

الزوايا ضمن أكبر من دورة

$$x° + 360\,n$$

قياس الزاوية : $x°$ ، عدد صحيح : n

مثال : إذا كانت $x = 60°$ ، أوجد قياس الزاوية

1) بعد دورة

2) بعد دورتان

3) بعد 5 دورات

4) بعد n دورة

الحل :

1) $60° + 360°(1) = 60° + 360° = 420°$

2) $60° + 360°(2) = 60° + 720° = 780°$

3) $60° + 360°(5) = 60° + 1800° = 1860°$

4) $60° + 360°(n) = 60° + 360°(n)$

بشكل عام

قياس الزاوية بعد إتمام الدورة الأولى $= 360°$

قياس الزاوية بعد إتمام الدورة الثانية $= (360°)(2) = 720°$

قياس الزاوية بعد إتمام الدورة الثالثة $= (360°)(3) = 1080°$

قياس الزاوية بعد إتمام الدورة الرابعة $= (360°)(4) = 1440°$

قياس الزاوية بعد n دورة $= (360°)(n) = 360°\,n$

عدد الدورات	قياس الزاوية	عدد الدورات	قياس الزاوية
1	$360°$	4	$1440°$
2	$720°$	5	$1800°$
3	$1080°$	6	$2160°$

لتحديد موقع الزوايا

- **على أي محور**
- **ضمن أي ربع**

قياس الزاوية

- **موجب**
  - إذا كانت أكبر من ° 360
  - نطرح منها ° 360
  - إذا بقيت أكبر من ° 360
  - نطرح مرة أخرى منها ° 360
  - حتى تصبح ضمن الدورة الواحدة
  - تحديد أي ربع
- **سالب**
  - نجمع لها ° 360
  - إذا بقيت سالبة
  - نجمع لها مرة أخرى ° 360
  - حتى تصبح ضمن الدورة الواحدة
  - تحديد أي ربع

مثال : حدد الربع الذي يقع فيه ضلع الإنتهاء أو المحور الذي ينطبق عليه ضلع الإنتهاء لكل زاوية

1) $780°$

$780° - 360° = 420° > 360°$

$420° - 360° = 60°$

$780°$ تقع بالربع الأول

2) $1533°$

$1533° - 1440° = 93°$

$1533°$ تقع بالربع الثاني

3) $370°$

$370° - 360° = 10°$

$370°$ تقع بالربع الأول

4) $1440°$

$1400° - 1440° = zero$

تقع على محور السينات الموجب

5) $-350°$

$-350° + 360° = 10°$

$-350°$ تقع بالربع الأول

6) $-1020°$

$-1020° + 1080° = 60°$

$-1020°$ تقع بالربع الأول

7) $-90°$

تقع على محور الصادات السالب

8) $-270°$

تقع على محور الصادات الموجب

9) $-60°$

تقع بالربع الرابع بالقياس الموجب

تقع بالربع الأول بالقياس السالب

10) $-110°$

$$-110° + 360° = 250°$$

تقع بالربع الثالث بالقياس الموجب

تقع بالربع الثاني بالقياس السالب

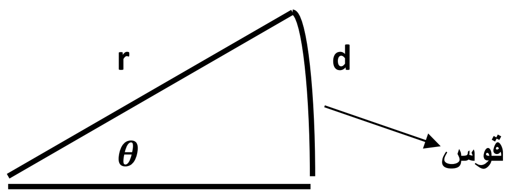
11) $-900°$

$$-900° + 1080° = 180°$$

تقع على محور السينات السالب بالقياس الموجب

التقدير الدائري

التقدير الدائري للزاوية : هي النسبة بين طول قوس دائري مركزه رأس الزاوية ومحصور بين ضلعيها وبين نصف القطر وتكون وحدة قياسها هي Radian



$$\theta = \frac{d}{r}\ radian$$

التقدير الدائري

وحدة قياسه الراديان	رمزه π	$\pi = 180°$

$2\pi\ rad = 360°$

التحويل من التقدير الدائري إلى التقدير الستيني وبالعكس

- من دائري إلى ستيني

$$(\ x\ )\left(\frac{180^\circ}{\pi}\right)$$

بدلالة π

- من ستيني إلى دائري

$$(\ x\ )\left(\frac{\pi}{180^\circ}\right)$$

بدلالة الستيني

مثال : حول الزوايا التالية من التقدير الستيني إلى التقدير الدائري

1) 150°

$$(150^\circ)\left(\frac{\pi}{180^\circ}\right)=\frac{5\pi}{6}$$ (قسمنا على 30)

2) 300°

$$(300^\circ)\left(\frac{\pi}{180^\circ}\right)=\frac{5\pi}{3}$$ (قسمنا على 60)

3) 700°

$$700^\circ\left(\frac{\pi}{180^\circ}\right)=\frac{70\pi}{18}=\frac{35\pi}{9}$$

4) 245°

$$(245^\circ)\left(\frac{\pi}{180^\circ}\right)=\frac{49}{36}\pi$$ (قسمنا على 5)

5) 325°

$$(325^\circ)\left(\frac{\pi}{180^\circ}\right)=\frac{65}{36}\pi$$ (قسمنا على 5)

6) 180°

$$(180^\circ)\left(\frac{\pi}{180^\circ}\right)=\pi$$

7) -90°

$$(-90)\left(\frac{\pi}{180^\circ}\right)=\frac{-\pi}{2}$$

8) $-240°$

$$-240° \times \left(\frac{\pi}{180°}\right) = \frac{-4}{3}\pi$$ (قسمنا على 60)

9) -45

$$(-45)\left(\frac{\pi}{180°}\right) = \frac{-\pi}{4}$$ (قسمنا على 45)

مثال : حول الزوايا التالية من التقدير الدائري إلى التقدير الستيني

1) $\frac{3\pi}{2}$

$$\left(\frac{3\pi}{2}\right)\left(\frac{180°}{\pi}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)(180°) = 270°$$

2) 5π

$$5\pi \times \frac{180°}{\pi} = 5(180°) = 900°$$

3) $\frac{-3\pi}{4}$

$$\left(\frac{-3\pi}{4}\right)\left(\frac{180°}{\pi}\right) = \left(\frac{-3}{4}\right)(180°) = -135°$$

4) $\frac{-7\pi}{6}$

$$\left(\frac{-7\pi}{6}\right)\left(\frac{180°}{\pi}\right) = \frac{-7}{6}(180°) = (-7)(30°) = -210°$$

5) $\frac{\pi}{6}$

$$\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{180°}{\pi}\right) = \frac{180°}{6} = 30°$$

6) $\frac{\pi}{4}$

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{180°}{\pi}\right) = \frac{180°}{4} = 45°$$

----

7) $\frac{\pi}{3}$

$$\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{180\,^\circ}{\pi}\right) = \frac{180\,^\circ}{3} = 60\,^\circ$$

طول القوس المقابل للزاوية المركزية

طول القوس = (نصف القطر) (قياس الزاوية بالتقدير الدائري)

L = (r) (x)

r : radius (نصف القطر)

الزاوية بالتقدير الدائري (x)

مثال : دائرة نصف قطرها يساوي 12 cm ، احسب طول القوس المقابل للزاوية $\frac{3\pi}{2}$

الحل : $L = (\, r\,)(\, x\,) = (12)\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{36\pi}{2} = 18\pi$

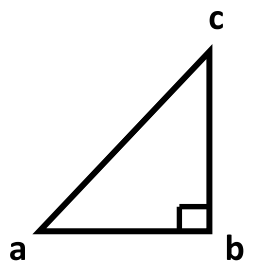
مثال : إذا كان طول قوسها يساوي 20π ونصف قطرها 2 cm أوجد قياس الزاوية ؟

الحل : $L = (\, r\,)(\, x\,)$

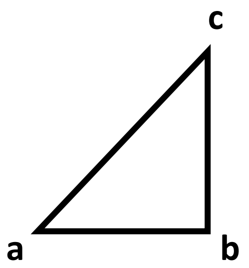
$$\frac{20\pi}{2} = \frac{2x}{2} \rightarrow \quad x = 10\pi$$

النسب المثلثية في مثلث قائم الزاوية

في مثلث قائم الزاوية يكون الوتر مقابل الزاوية القائمة



بالنسبة إلى الزاوية x



بالنسبة إلى الزاوية y

النسب بين أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية

$$\sin x = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } x}{\text{طول الوتر}}$$

$$= \frac{ab}{ac}$$

$$\cos y = \frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } y}{\text{طول الوتر}}$$

$$= \frac{ab}{ac}$$

$$\cos x = \frac{bc}{ac}$$

$$\sin y = \frac{bc}{ac}$$

$$\tan x = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } x}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } x}$$

$$\tan x = \frac{ab}{bc}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \frac{1}{\cot x}$$

$$\cot y = \frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } y}{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } y}$$

$$= \frac{ab}{bc}$$

$$\sin x = \cos y$$

$$\cos x = \sin y$$

$$\tan x = \cot y$$

$$\csc x = \frac{\text{طول الوتر}}{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } x}$$

$$= \frac{ac}{ab}$$

$$= \frac{1}{\sin x}$$

$$\sec y = \frac{\text{طول الوتر}}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } y}$$

$$= \frac{ac}{bc}$$

$$= \frac{1}{\cos y}$$

$$\sec x = \frac{\text{طول الوتر}}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } x}$$

$$= \frac{ac}{bc}$$

$$= \frac{1}{\cos x}$$

$$\csc y = \frac{\text{طول الوتر}}{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } y}$$

$$= \frac{ac}{bc}$$

$$= \frac{1}{\sin y}$$

$$\cot x = \frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } x}{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } x}$$

$$= \frac{bc}{ab}$$

$$= \frac{1}{\tan x}$$

$$\tan y = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } y}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } y}$$

$$= \frac{bc}{ab}$$

$$= \frac{1}{\cot y}$$

$$\csc x = \sec y$$

$$\sec x = \csc y$$

$$\cot x = \tan y$$

مجموع قياس الزاوية x والزاوية y يساوي ° 90 وتسمى زاويتان متتامتتان

$$\sin x = \cos y = \cos(90 - x)$$

$$\cos x = \sin y = \sin(90 - x)$$

$$\tan x = \cot y = \cot(90 - x)$$

$$\csc x = \sec y = \sec(90 - x)$$

$$\sec x = \csc y = \csc(90 - x)$$

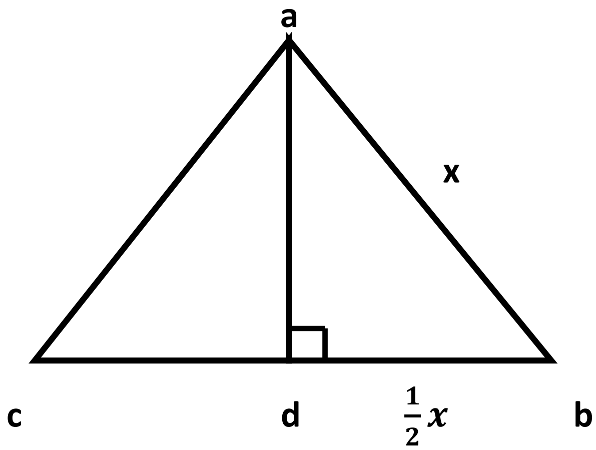
$$\cot x = \tan y = \tan(90 - x)$$

$$(\sin x)(\csc x) = (\cos x)(\sec x) = (\tan x)(\cot x) = 1$$

إيجاد النسب المثلثية لبعض الزوايا بإستخدام مثلث قائم الزاوية وأطوال أضلاع المثلث

الحالة الأولى :

إيجاد النسب المثلثية للزاويتان ° 60 ، ° 30



لإيجاد طول ad بإستخدام نظرية فيثاغورس

$$(ab)^2 = (bd)^2 + (ad)^2$$

$$x^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + (ad)^2$$

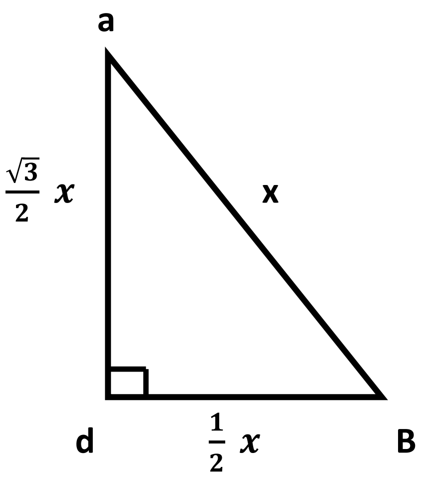
$$x^2 = \frac{1}{4}x^2 + (ad)^2$$

$$x^2 - \frac{1}{4}x^2 = (ad)^2$$

$$\frac{3}{4}x^2 = (ad)^2$$

$$\sqrt{\frac{3}{4}x^2} = \sqrt{(ad)^2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x = ad$$



1) $sin\,(30) = \frac{\frac{1}{2}x}{x} = \frac{1}{2} = cos\,60\,°$

2) $cos\,(30) = \frac{\text{طول المجاور}}{\text{طول الوتر}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\,x}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2} = sin\,60\,°$

3) $tan\,(30) = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\frac{1}{2}\,x}{\frac{\sqrt{3}}{2}\,x} = \frac{1}{\sqrt{3}} = cot\,60\,°$

$$tan\,(30) = \frac{sin\,(30)}{cos\,(30)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

4) $cot\,(30) = \frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\,x}{\frac{1}{2}\,x} = \sqrt{3} = tan\,60\,°$ أو

$$cot\,(30) = \frac{cos\,(30)}{sin\,(30)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

5) $sec\,(30) = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}\,x} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = csc\,60\,°$

$$sec\,(30) = \frac{1}{cos\,(30)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = csc\,60\,°$$

6) $csc\,(30) = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{x}{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

$$csc\,(30) = \frac{1}{sin\,(30)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 = sec\,60\,°$$

ملخص الزوايا ° 60 و ° 30

1) $sin\,30\,° = cos\,60\,° = \frac{1}{2}$

2) $cos\,30\,° = sin\,60\,° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3) $tan\,30\,° = cot\,60\,° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

4) $cot\,30\,° = tan\,60\,° = \sqrt{3}$

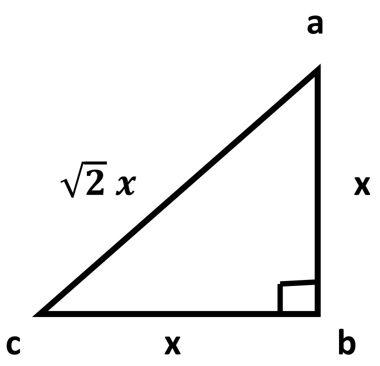
5) $sec\,30\,° = csc\,60\,° = \frac{2}{\sqrt{3}}$

6) $csc\,30\,° = sec\,60\,° = 2$

الحالة الثانية : (زاوية ° 45)

تكون الزاوية قياسها ° 45 إذا كان المثلث قائم الزاوية ومتطابق الضلعين

لإيجاد طول الوتر



$$(ac)^2 = (ab)^2 + (bc)^2$$

$$(ac)^2 = (x)^2 + (x)^2$$

$$(ac)^2 = 2x^2$$

$$\sqrt{(ac)^2} = \sqrt{2x^2}$$

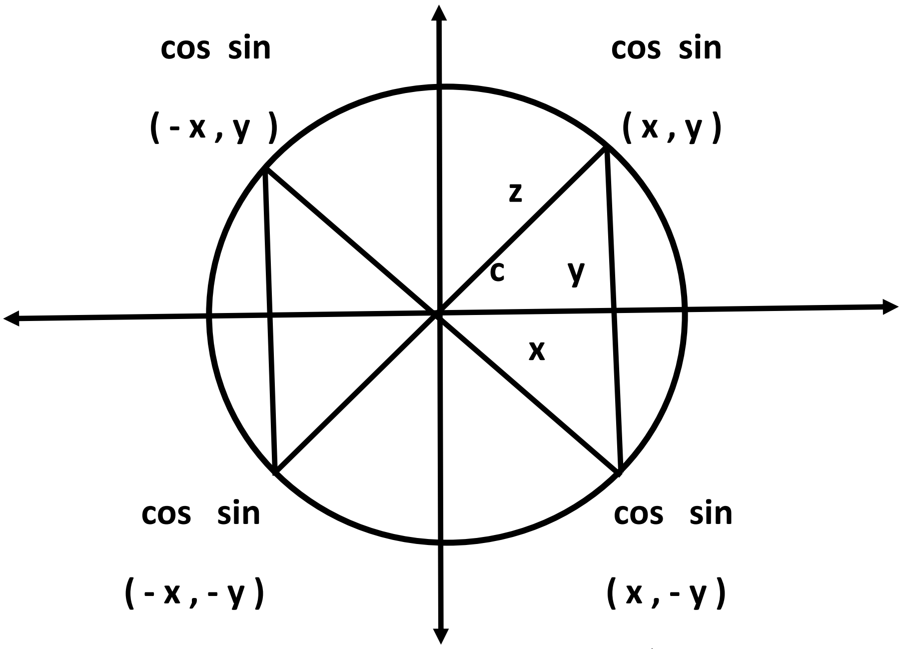
$$ac = \sqrt{2}x$$

$$sin\,(45\,°) = \frac{x}{\sqrt{2}x} = \frac{1}{\sqrt{2}} = cos\,(45\,°)$$

$$tan\,(45\,°) = \frac{x}{x} = 1 \quad or \quad tan\,(45\,°) = \frac{sin\,(45\,°)}{cos\,(45\,°)} = 1$$

$$sec\,(45\,°) = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} = csc\,(45\,°)$$

دائرة نصف قطرها وحدة واحدة



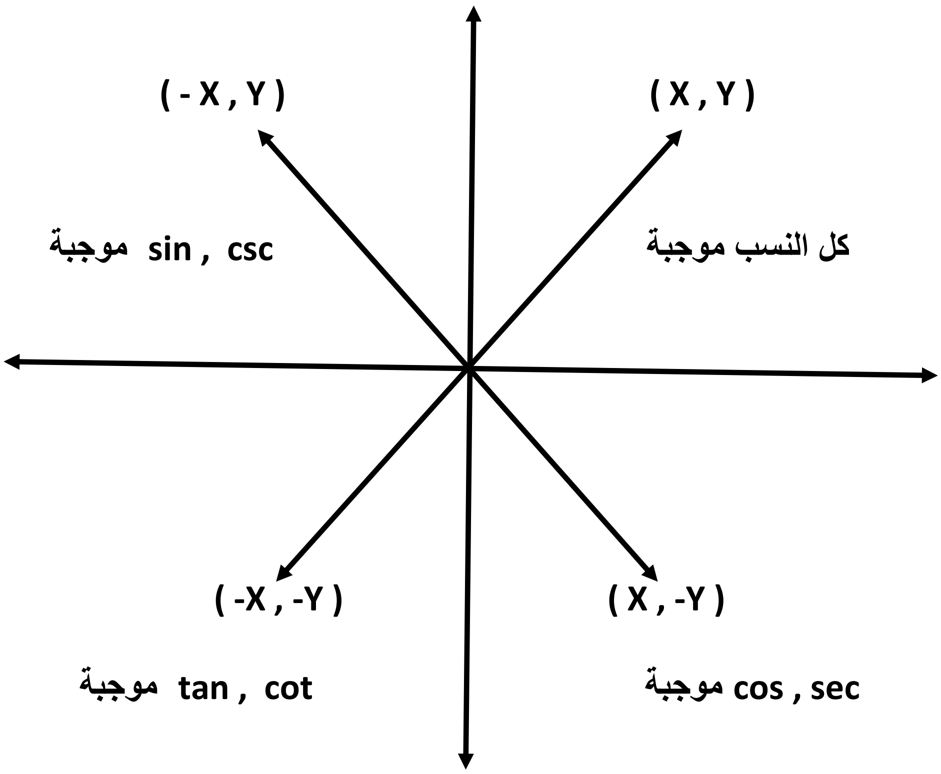
نصف قطر الدائرة هو مثلث قائم الزاوية

بالنسبة للمثلث بالربع الأول	بالنسبة للدائرة
$sin\ (c) = \frac{y}{z}$	دائرة نصف قطرها وحدة واحدة
$cos\ (c) = \frac{x}{z}$	معادلاتها $x^2 + y^2 = 1$
$tan\ (c) = \frac{y}{x}$	عند دوران وتر المثلث مع الدائرة يصبح له
$cot\ (c) = \frac{x}{y}$	إنعكاس و دوران في الأرباع الاخرى
$sec\ (c) = \frac{z}{x}$	$(\ x\ , y\ )$
$csc\ (c) = \frac{z}{y}$	$sin\ \rightarrow y - axis$

$cos\ \rightarrow x - axis$

الإشارات الربيعية للإقترانات المثلثية

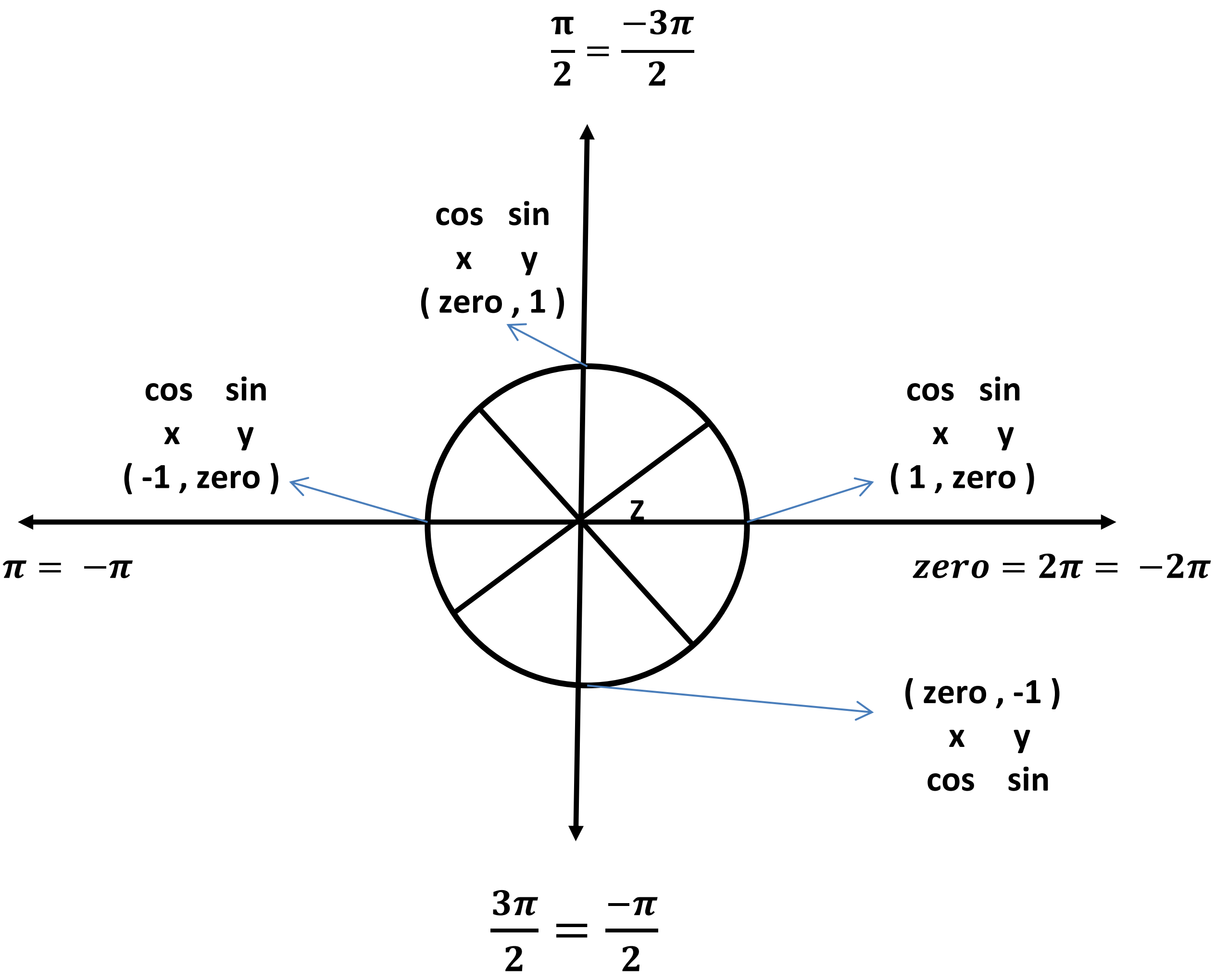
من الدائرة في الصفحة السابقة نصف القطر Z موجب ولذلك فإن إشارة النسب المثلثية في أرباع المحاور يعتمد على إشارة Y و X وتكون إشارة النسب المثلثية كالتالي :



مقلوب الإشارة الموجبة هو موجب

مقلوب الإشارة السالبة هو سالب

دائرة الوحدة



إشارات النسب المثلثية

1) بالربع الأول والثاني $sin\, z , csc\, z > zero$

2) بالربع الثالث والرابع $sin\, z , csc\, z < zero$

3) بالربع الأول والرابع $cos\, z , sec\, z > zero$

4) بالربع الثاني والثالث $cos\, z , sec\, z < zero$

5) بالربع الأول والثالث $tan\, z , cot\, z > zero$

6) بالربع الثاني والرابع $tan\, z , cot\, z < zero$

مثال : حدد الربع التي تقع فيها الزاوية z

1) $\cos z , \sin z$　　　سالبة

الحل : بالربع الثالث

2) $\tan z , \sin z$　　　موجبة

الحل :

موجب بالربع الأول والثالث $\tan z$

موجب بالربع الأول والثاني $\sin z$

موجب بالربع الأول فقط $\tan z , \sin z$

3) $\sin z , \sec z$　　　سالبة

الحل :

سالب بالربع الثالث والرابع $\sin z$

سالب بالربع الثاني والثالث $\sec z$

سالب بالربع الثالث $\sin z , \sec z$

4) $\tan z , \sec z$　　　سالبة

الحل :

سالب بالربع الثاني والرابع $\tan z$

سالب بالربع الثاني والثالث $\sec z$

سالب بالربع الثاني $\tan z , \sec z$

مثال : حدد الربع التي تقع فيها الزوايا التالية ، وإشارة كل من $\sin z$, $\cos z$, $\tan z$ ، لكل من الزوايا التالية :

$$3)\ 580^\circ \qquad 2)\ 315^\circ \qquad 1)\ 125^\circ$$

الحل :

1) 125 تقع بالربع الثاني

إشارة موجبة sin 125

إشارة سالبة cos 125

إشارة سالبة tan 125

2) 315 تقع بالربع الرابع

إشارة سالبة sin 315

إشارة موجبة cos 315

إشارة سالبة tan 315

3) 580

تقع بالربع الثالث 220 = 360 – 580

إشارة سالبة sin 220

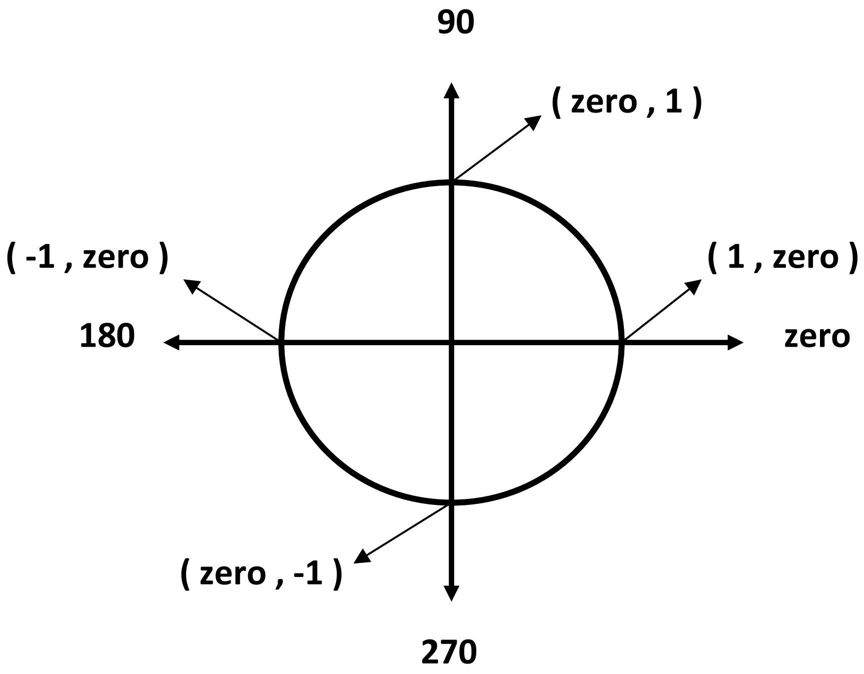
إشارة سالبة cos 220

إشارة موجبة tan 220

النسب المثلثية للزوايا الربعية

$$(zero , 90 , 180 , 270)$$

$$2\pi \quad \frac{\pi}{2} \quad \pi \quad \frac{3\pi}{2}$$

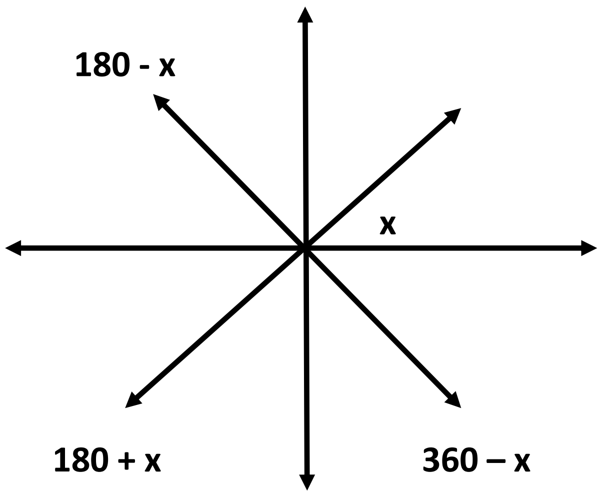


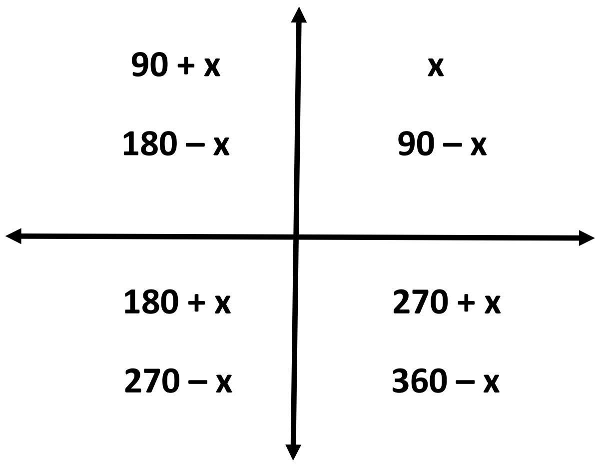
	zero	90	180	270
sin	zero	1	zero	-1
cos	1	zero	-1	zero
tan	zero	غير معرف	zero	غير معرف
cot	غير معرف	zero	غير معرف	zero
csc	غير معرف	1	غير معرف	-1
sec	1	غير معرف	- 1	غير معرف

$-1 \leq \sin x \leq 1$ ، $zero \leq \sin^2 x \leq 1$

$-1 \leq \cos x \leq 1$ ، $zero \leq \cos^2 x \leq 1$

الزوايا ضمن الدورة الواحدة





first quadrant	second quadrant	third quadrant	forth quadrant
x x	$180-x$ $\pi-x$	$180+x$ $\pi+x$	$360-x$ $2\pi-x$
30 $\frac{\pi}{6}$	150 $\frac{5\pi}{6}$	210 $\frac{7\pi}{6}$	330 $\frac{11\pi}{6}$
45 $\frac{\pi}{4}$	135 $\frac{3\pi}{4}$	225 $\frac{5\pi}{4}$	315 $\frac{7\pi}{4}$
60 $\frac{\pi}{3}$	120 $\frac{2\pi}{3}$	240 $\frac{4\pi}{3}$	300 $\frac{5\pi}{3}$

النسب المثلثية للزوايا ضمن الدورة الواحدة

	$zero$ $(1, zero)$	-330 $\frac{\pi}{6}$ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$	-315 $\frac{\pi}{4}$ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	-300 $\frac{\pi}{3}$ $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	-270 $\frac{\pi}{2}$ $(zero, 1)$
sin	zero	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	zero
tan	zero	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرف
csc	غير معرف	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	غير معرف
cot	غير معرف	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	zero

النسب المثلثية للزوايا بالربع الأول بالقياس الموجب والربع الرابع بالقياس السالب

النسب المثلثية بالربع الثاني والمحور

	120 -240 $\left(\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	135 -225 $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	150 -210 $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$	180 -180 $(-1, zero)$
sin	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	zero
cos	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	zero
cot	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	غير معرف
csc	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	غير معرف
sec	-2	$-\sqrt{2}$	$\frac{-2}{\sqrt{3}}$	-1

180 تقع على محور السينات السالب

النسب المثلثية للزوايا بالربع الثالث والمحور

	210 -150 $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2},\frac{-1}{2}\right)$	225 -135 $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$	240 -120 $\left(\frac{-1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$	270 -90 $(zero,-1)$
sin	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1
cos	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	$\frac{-1}{2}$	zero
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرف
cot	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	zero
csc	-2	$-\sqrt{2}$	$\frac{-2}{\sqrt{3}}$	-1
sec	$\frac{-2}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{2}$	-2	غير معرف

الزاوية 270 تقع على محور الصادات السالب

النسب المثلثية للزوايا بالربع الرابع والمحور

	300 $\left(\frac{1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$	315 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$	330 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{-1}{2}\right)$	360 $(1, zero)$
sin	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	$\frac{-1}{2}$	zero
cos	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	zero
cot	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	غير معرف
csc	$\frac{-2}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{2}$	-2	غير معرف
sec	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

الزاوية 360 تقع على محور السينات الموجب

معادلة دائرة الوحدة

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x \to \cos z \,, \qquad y \to \sin z$$

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

$$\cos^2 z = 1 - \sin^2 z = (1 - \sin z)(1 + \sin z)$$

$$\sin^2 z = 1 - \cos^2 z = (1 - \cos z)(1 + \cos z)$$

مثال :

1) أوجد $\sin z$ إذا علمت أن $\cos z = \frac{1}{3}$

$$270 < z < 360$$

الحل :

$$\sin^2 z = 1 - \cos^2 z$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\sin^2 z = \frac{8}{9} \to \sin z = \mp \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{9}}$$

لتحديد الإشارة من خلال موقع الزاوية بأي ربع

z بالربع الرابع ← $\sin z$ سالب

$$\sin z = \frac{-\sqrt{8}}{3}$$

2) أوجد $\sec z$ إذا علمت أن $\sin z = \frac{-2}{7}$

$$180 < z < 270$$

الحل :

$$\sec z = \frac{1}{\cos z}$$

$$\cos^2 z = 1 - \sin^2 z$$

$$= 1 - \left(\frac{-2}{7}\right)^2 = 1 - \frac{4}{49} = \frac{45}{49}$$

$$\cos^2 z = \frac{45}{49} \to \cos z = \mp \frac{\sqrt{45}}{7}$$

z بالربع الثالث ← $\cos z$ سالبة

$$\cos z = \frac{-\sqrt{45}}{7}$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{45}}{7}} = \frac{-7}{\sqrt{45}}$$

3) إذا كان $sin\ z = \frac{3}{5}$ ، z تقع بالربع الثاني ، جد $cos\ z, tan\ z, sec\ z, csc\ z, cot\ z$

الحل :

$$cos^2 z = 1 - sin^2 z$$

$$= 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$cos\ z = \mp\frac{4}{5}$$

cos z بالربع الثاني سالب

$$cos\ z = \frac{-4}{5} \quad , \quad sin\ z = \frac{3}{5}$$

$$tan\ z = \frac{sin\ z}{cos\ z} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{-4}{5}} = \frac{-3}{4}$$

$$cot\ z = \frac{1}{tan\ z} = \frac{1}{\frac{-3}{4}} = \frac{-4}{3}$$

$$sec\ z = \frac{1}{cos\ z} = \frac{1}{\frac{-4}{5}} = \frac{-5}{4}$$

$$csc\ z = \frac{1}{sin\ z} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$$

4) إذا كان ضلع إنتهاء الزاوية z يقع في الربع الأول وكان $sin\ z = \frac{1}{4}$ ، فجد

$cos\ z\ ,tan\ z\ ,sec\ z\ ,csc\ z\ ,cot\ z$

الحل :

$$cos^2 z = 1 - sin^2 z$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

$$cos^2 z = \frac{15}{16} \rightarrow cos\ z = \mp\frac{\sqrt{15}}{4}$$

cos z بالربع الأول ← موجب

$$cos\ z = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$tan\ z = \frac{sin\ z}{cos\ z} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{1}{\sqrt{15}}$$

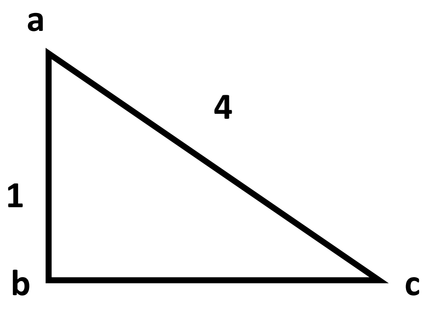
$$cot\ z = \frac{1}{tan\ z} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{15}}} = \sqrt{15}$$

$$csc\ z = \frac{1}{sin\ z} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

$$sec\ z = \frac{1}{cos\ z} = \frac{1}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{4}{\sqrt{15}}$$

5- إذا كان $sin\ z = \frac{1}{4}$ ، فجد باقي النسب المثلثية

الحل : عند عدم تحديد ربع نستخدم نسب أطوال أضلاع المثلث



$sin\ z = \frac{1}{4}$ → طول المقابل ، طول الوتر

$$(bc)^2 = (ac)^2 - (ab)^2$$

$$(4)^2 - (1)^2 = 16 - 1 = 15$$

$$(bc)^2 = 15 \rightarrow bc = \sqrt{15}$$

$$\cos z = \frac{bc}{ac} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

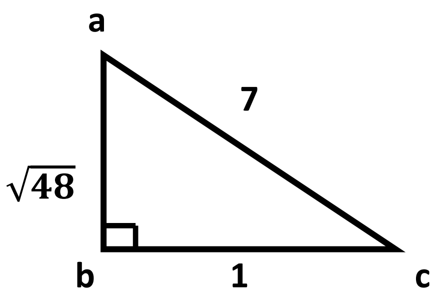
$$\tan z = \frac{ab}{bc} = \frac{1}{\sqrt{15}}$$

$$\cot z = \frac{1}{\tan z} = \sqrt{15}$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} = \frac{1}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{4}{\sqrt{15}}$$

$$\csc z = \frac{1}{\sin z} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

6- إذا كان $\sec z = 7$ ، أوجد باقي النسب المثلثية ؟



الحل : $\sec z = 7$

$$\frac{1}{\cos z} = 7 \rightarrow 7\cos z = 1 \rightarrow \cos z = \frac{1}{7}$$

$$(ab)^2 = (ac)^2 - (bc)^2$$

$$= (7)^2 - (1)^2 = 49 - 1 = 48$$

$$(ab) = \sqrt{48}$$

$$\cos z = \frac{1}{7}$$

$$\sin z = \frac{\sqrt{48}}{7}$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{\frac{\sqrt{48}}{7}}{\frac{1}{7}} = \sqrt{48}$$

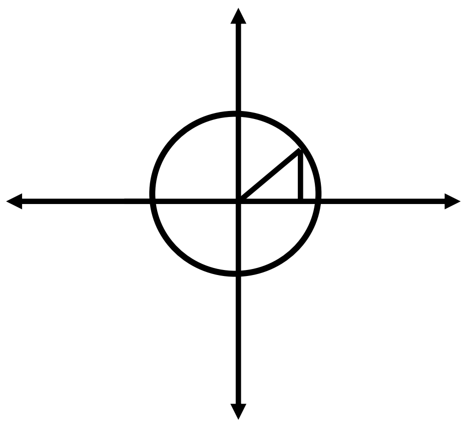
$$\cot z = \frac{1}{\tan z} = \frac{1}{\sqrt{48}}$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} = \frac{1}{\frac{1}{7}} = 7$$

$$\csc z = \frac{1}{\sin z} = \frac{1}{\frac{\sqrt{48}}{7}} = \frac{7}{\sqrt{48}}$$

7- إذا كان ضلع الإنتهاء لزاوية قياسها z يمر بالنقطة (4 ، 3) ، أوجد قيمة كل من :

$$\sin z, \cos z, \tan z, \cot z, \sec z, \csc z$$



الحل : $x = 3 , y = 4$

$$a^2 = x^2 + y^2$$

$$= (3)^2 + (4)^2 = 9 + 16$$

$$a^2 = 25 \rightarrow a = 5$$

$$\cos z = \frac{3}{5}$$

$$\sin z = \frac{4}{5}$$

$$\tan = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

$$\cot z = \frac{1}{\tan z} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

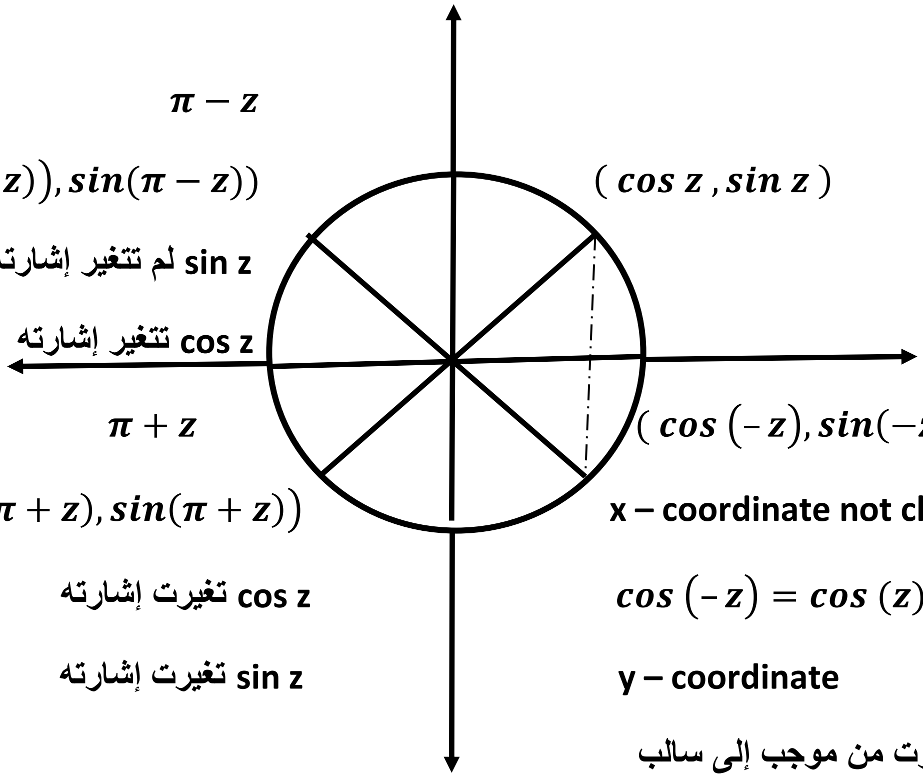
$$\sec z = \frac{1}{\cos z} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$$

$$\csc z = \frac{1}{\sin z} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}$$

زاوية المرجع

تسمى الزاوية الحادة المحصورة بين ضلع إنتهاء الزاوية z ومحور السينات بزاوية المرجع للزاوية z

quadrant	الزاوية	(x, y)
first	z	(x, y)
second	$180 - z$	$(-x, y)$
third	$180 + z$	$(-x, -y)$
forth	$360 - z$	$(x, -y)$



$\pi - z$

$(\cos(\pi - z)), \sin(\pi - z))$

sin z لم تتغير إشارته

cos z تتغير إشارته

$(\cos z, \sin z)$

$\pi + z$

$(\cos(\pi + z), \sin(\pi + z))$

cos z تغيرت إشارته

sin z تغيرت إشارته

$(\cos(-z), \sin(-z))$

x – coordinate not change

$\cos(-z) = \cos(z)$

y – coordinate

تغيرت من موجب إلى سالب

$\sin(-z) = -\sin z$

$$\sin(\pi - z) = \sin z$$

$$\cos(\pi - z) = -\cos z$$

$$\cos(\pi + z) = -\cos z$$

$$\sin(\pi + z) = -\sin z$$

الزاوية السالبة

1) $sin(-z) = -sin\, z$

2) $csc\,(-z) = \frac{1}{sin\,(-z)} = \frac{1}{-sin\, z} = -csc\,(z)$

3) $cos\,(-z) = cos\, z$

4) $sec\,(-z) = \frac{1}{cos\,(-z)} = \frac{1}{cos\,(-z)} = \frac{1}{cos\,(z)} = sec\,(z)$

5) $tan\,(-z) = \frac{sin\,(-z)}{cos\,(-z)} = \frac{-sin\, z}{cos\, z} = -tan\,(z)$

6) $cot\,(-z) = \frac{cos\,(-z)}{sin\,(-z)} = \frac{cos\, z}{-sin\, z} = -cot\, z$

ملخص :

$$sin\,(-z) = -sin\, z$$

$$cos\,(-z) = cos\, z$$

$$tan\,(-z) = -tan\,(z)$$

$$cot\,(-z) = -cot\,(z)$$

$$csc\,(-z) = -csc\,(z)$$

$$sec\,(-z) = sec\,(z)$$

مثال :

-1 إذا كان $sin\,(30) = \frac{1}{2}$ ، أوجد $sin\,(-30)$

الحل : $sin\,(-30) = -sin\,(30) = \frac{-1}{2}$

-2 إذا كان $cos\,(30) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، أوجد $cos\,(330)$

الحل : $cos\,(330) = cos\,(-30) = cos\,(30) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

-3 إذا كان $tan\ (30) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ، أوجد $tan\ (-30)$

الحل : $tan\ (-30) = -tan\ (30) = \frac{-1}{\sqrt{3}}$

-4 إذا كان $csc\ (30) = 2$ ، أوجد $csc\ (-30)$

الحل : $csc\ (-30) = -csc\ (30) = -2$

-5 إذا كان $cot\ (30) = \sqrt{3}$ ، أوجد $cot\ (-30)$

الحل : $cot\ (-30) = -cot\ (30) = -\sqrt{3}$

-6 إذا كان $sec\ (30) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ، أوجد $sec\ (-30)$

الحل : $sec\ (-30) = sec\ (30) = \frac{2}{\sqrt{3}}$

الزوايا المتتامه

هي زاويتان مجموع قياسهما 90

الزاوية 30 متممتها 60

الزاوية 45 متممتها 45

الزاوية 10 متممتها 80

الزاوية x متممتها $90 - x$

$$sin\ (90 - x) = cos\ x$$

$$cos\ (90 - x) = sin\ x$$

$$tan\ (90 - x) = cot\ x$$

$$cot\ (90 - x) = tan\ x$$

$$sec\ (90 - x) = csc\ x$$

$$csc\ (90 - x) = sec\ x$$

$$sin\ (90 + x) = cos\ x$$

$$\cos(90+x) = -\sin x$$

$$\tan(90+x) = -\cot x$$

$$\cot(90+x) = -\tan x$$

$$\sec(90+x) = -\csc x$$

$$\csc(90+x) = \sec x$$

الزوايا المتكاملة

هي زاويتان مجموع قياسهم 180

مثال :

الزاوية 60 مكملتها 120

الزاوية 100 مكملتها 80

الزاوية 20 مكملتها 160

الزاوية x مكملتها $180 - x$

(sin بالربع الثاني موجب) $\sin(180-x) = \sin x$

(cos بالربع الثاني سالب) $\cos(180-x) = -\cos x$

$$\tan(180-x) = -\tan x$$

$$\cot(180-x) = -\cot x$$

$$\sec(180-x) = -\sec x$$

$$\csc(180-x) = \csc x$$

(sin بالربع الثالث سالب) $\sin(180+x) = -\sin x$

(cos بالربع الثالث سالب) $\cos(180+x) = -\cos x$

$$\tan(180+x) = \tan x$$

$$\cot(180+x) = \cot x$$

$$\sec(180+x) = -\sec x$$

$$\csc(180+x) = -\csc x$$

مثال : دون إستخدام الآلة الحاسبة جد قيمة ما يلي :

1) $sec\frac{11\pi}{3}$

الحل :

$$\frac{11\pi}{3} \times \frac{180}{\pi} = (11)(60) = 660$$

$$660 - 360 = 300$$

$$360 - 300 = 60$$

$$sec\left(\frac{11\pi}{3}\right) = sec\,(60) = \frac{1}{cos\,(60)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

sec بالربع الرابع موجب

2) $tan\frac{15\pi}{4}$

الحل :

$$\frac{15\pi}{4} - 2\pi = \frac{15\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} = 315$$

$$360 - 315 = 45$$

$$tan\left(\frac{15\pi}{4}\right) = -tan\,(45) = -1$$

tan بالربع الرابع سالب

3) $sin\,(-120) = -sin\,(120) = -sin\,(60) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

المتطابقات المثلثية

$$tan\,x = \frac{sin\,x}{cos\,x} = \frac{1}{cot\,x}$$

$$cot\,x = \frac{cos\,x}{sin\,x} = \frac{1}{tan\,x}$$

$$sec\,x = \frac{1}{cos\,x} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{sec\,x} = cos\,x$$

$$csc\,x = \frac{1}{sin\,x} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{csc\,x} = sin\,x$$

$$sin\,x \quad \rightarrow \quad y - axis$$

$$cos\,x \quad \rightarrow \quad x - axis$$

من خلال معادلة دائرة الوحدة وهي دائرة نصف قطرها وحدة واحدة $x^2 + y^2 = 1$

$$x \;\rightarrow\; cos\,z \quad ، \quad y \;\rightarrow\; sin\,z$$

1) $cos^2 z + sin^2 z = 1$

2) $-cos^2 z - sin^2 z = -(cos^2 z + sin^2 z) = -1$

3) $cos^2 z = 1 - sin^2 z = (1 - sin\,z)(1 + sin\,z)$

4) $-cos^2 z = sin^2 z - 1 = (sin\,z - 1)(sin\,z + 1)$

5) $sin^2 z = 1 - cos^2 z = (1 - cos\,z)(1 + cos\,z)$

6) $-sin^2 z = cos^2 z - 1 = (cos\,z - 1)(cos\,z + 1)$

مثال : بشكل عام

1) sin^2 (الزاوية) $+ cos^2$ (نفس الزاوية) $= 1$

2) $sin^2(30) + cos^2(30) = 1$

3) $sin^2(2x) + cos^2(2x) = 1$

4) $-sin^2(60) - cos^2(60) = -1$

5) $sin^2 (45) = 1 - cos^2 (45)$

-2 عند قسمة كل حد من $sin^2 z + cos^2 z = 1$ على $sin^2 z$ يتكون

$$\frac{sin^2 z}{sin^2 z} + \frac{cos^2 z}{sin^2 z} = \frac{1}{sin^2 z}$$

1) $1 + cot^2 z = csc^2 z$

2) $csc^2 z - cot^2 z = 1$

3) $(csc\, z - cot\, z)(csc\, z + cot\, z) = 1$

4) $cot^2 z - csc^2 z = -1$

5) $(cot\, z - csc\, z)(cot\, z + csc\, z) = -1$

6) $cot^2 z = csc^2 z - 1 = (csc\, z - 1)(csc\, z + 1)$

7) $-1 - cot^2 z = -csc^2 z$

-3 عند قسمة كل من $sin^2 z + cos^2 z = 1$ على $cos^2 z$ يتكون

$$\frac{sin^2 z}{cos^2 z} + \frac{cos^2 z}{cos^2 z} = \frac{1}{cos^2 z}$$

1) $tan^2 z + 1 = sec^2 z$

2) $sec^2 z - tan^2 z = 1$

$(sec\, z - tan\, z)(sec\, z + tan\, z) = 1$

3) $tan^2 z = sec^2 z - 1 = (sec\, z - 1)(sec\, z + 1)$

4) $tan^2 z - sec^2 z = -1$

$(tan\, z - sec\, z)\,(tan\, z + sec\, z) = -1$

5) $-tan^2 z - 1 = -sec^2 z$

مثال : بسط كل من المقادير التالية :

1) $\sec z - \sec z \ \sin^2 z$

الحل :

$\sec z\,(1 - \sin^2 z)$

$\sec z\,(\cos^2 z)$

$\frac{1}{\cos z}\,(\cos^2 z) = \cos z$

2) $\sin z \ \sec z \ \ \cot z$

الحل :

$\sin z \quad \frac{1}{\cos z} \quad \frac{\cos z}{\sin z} = 1$

3) $\sin^2 z\,(1 + \cot^2 z)$

الحل :

$\sin^2 z\,(\csc^2 z) = \sin^2 z \left(\frac{1}{\sin^2 z}\right) = 1$

4) $\sin^2 z \ \sec^2 z - \sec^2 z$

$\sec^2 z\,(\sin^2 z - 1)$

$\sec^2 z\,(-\cos^2 z)$

$\frac{1}{\cos^2 z}\,(-\cos^2 z) = \ -1$

متطابقات مجموع والفرق بين الزاويتان أو أكثر

1) $\sin(a + b) = \sin a \ \cos b \ + \ \ \cos a \ \sin b$

2) $\sin(a - b) = \sin a \ \cos b \ - \ \ \cos a \ \sin b$

نفس الإشارة

3) $\cos(a + b) = \ \cos a \ \cos b \ - \ \ \sin a \ \sin b$

4) $\cos(a - b) = \cos a \ \cos b \ + \ \ \sin a \ \ \sin b$

عكس الإشارة

مثال :

1) $\boldsymbol{sin}\,(15)$

$$\boldsymbol{sin}\,(15) = \boldsymbol{sin}\,(45 - 30) = \boldsymbol{sin}\,(60 - 45)$$

$$\boldsymbol{sin}\,(15) = \boldsymbol{sin}\,(45 - 30)$$

$$= \boldsymbol{sin}\,(45)\,\boldsymbol{cos}\,(30) - \boldsymbol{cos}\,(45)\,\boldsymbol{sin}\,(30)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

2) $\boldsymbol{sin}\,(-15)$

$$\boldsymbol{sin}\,(-15) = \boldsymbol{sin}\,(30 - 45) = \boldsymbol{sin}\,(45 - 60)$$

$$= -\boldsymbol{sin}\,(15) = \frac{-\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$$

3) $\boldsymbol{sin}\,(75)$

$$\boldsymbol{sin}\,(75) = \boldsymbol{sin}\,(30 + 45)$$

$$= \boldsymbol{sin}\,(30)\,\boldsymbol{cos}\,(45) + \boldsymbol{cos}\,(30)\,\boldsymbol{sin}\,(45)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

4) $\boldsymbol{sin}\,(90) = \boldsymbol{sin}\,(30 + 60)$

$$= \boldsymbol{sin}\,(30)\,\boldsymbol{cos}\,(60) + \boldsymbol{cos}\,(30)\,\boldsymbol{sin}\,(60)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{4}{4}\right) = 1$$

5) $sin\ (105) = sin\ (45 + 60)$

$$= sin\ (45)\ cos(60) + \ cos(45)\ sin\ (60)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

6) $sin\ \left(\frac{\pi}{2} - \ x\right)$

$$sin\ \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = sin\frac{\pi}{2}\ cos\ x - cos\frac{\pi}{2}\ sin\ x = cos\ x$$

7) $sin\ \left(\frac{\pi}{2} + \ x\right)$

$$sin\ \left(\frac{\pi}{2} + \ x\right) = \ sin\ \left(\frac{\pi}{2}\right)\ cos\ x + cos\ \left(\frac{\pi}{2}\right)\ sin\ x = cos\ x$$

8) $sin\ (\pi + x)$

$$sin\ (\pi + x) = \ sin\ \pi\ \ cos\ x + cos\ \pi\ \ sin\ x = \ -sin\ x$$

9) $sin\ (\pi - x)$

$$sin\ (\pi - x) = sin\ \pi\ \ cos\ x - cos\ \pi\ \ \ sin\ x = sin\ x$$

10) $sin\ \left(\left(\frac{3\pi}{2}\right) + x\right) = sin\ \left(\frac{3\pi}{2}\right)\ cos\ x + cos\ \left(\frac{3\pi}{2}\right)\ sin\ x$

$$(-1)\ cos\ x + (zero) sin\ z = \ -cos\ x$$

11) $sin\ \left(\frac{3\pi}{2} - \ x\right) = sin\ \left(\frac{3\pi}{2}\right)\ cos\ x - cos\ \left(\frac{3\pi}{2}\right)\ sin\ x$

$$= (-1) cos\ x - (zero) sin\ x = \ -cos\ x$$

12) $sin\ (2\pi + x) = sin\ 2\pi\ \ cos\ x + cos\ 2\pi\ \ sin\ x = sin\ x$

13) $sin\ (2\pi - x) = sin\ 2\pi\ \ cos\ x - cos\ 2\pi\ \ sin\ x = \ -sin\ x$

14) $cos\ (15) = cos\ (60 - 45) = cos\ (45 - 30)$

$$= cos\ (45)\ cos\ (30) + \ sin\ (45)\ sin\ (30)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

15) $cos\ (-15) = cos\ (15) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

16) $cos\ (75) = cos\ (30+45)$

$$= cos\ (30)\ cos\ (45) - \ sin\ (30)\ sin\ (45)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\ \frac{1}{\sqrt{2}} - \ \frac{1}{2}\ \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

17) $cos\ (90) = \ cos\ (30+60)$

$$= (cos\ 30)(cos\ 60) - \ (sin\ 30)(sin\ 60)$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \ zero$$

18) $cos\ (105) = \ cos\ (45+60)$

$$= cos\ (45)\ cos(60) \ - \ sin\ (45)\ sin(60)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

19) $cos\ \left(\frac{\pi}{2} - \ x\right) = cos\ \frac{\pi}{2}\ cos\ x + sin\frac{\pi}{2}\ sin\ x = sin\ x$

20) $cos\ \left(\frac{\pi}{2} + \ x\right) = cos\frac{\pi}{2}\ cos\ x - sin\frac{\pi}{2}\ sin\ x = \ -sin\ x$

21) $cos\ (\pi + x) = cos\ \pi\ \ cos\ x - sin\ \pi\ \ sin\ x = \ -cos\ x$

22) $cos\ (\pi - x) = cos\ \pi\ \ cos\ x + sin\ \pi\ \ sin\ x = \ -cos\ x$

23) $cos\ \left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \ cos\ \left(\frac{3\pi}{2}\right)\ cos\ x + sin\ \left(\frac{3\pi}{2}\right)\ sin\ x = \ -sin\ x$

24) $cos\ \left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \ cos\ \left(\frac{3\pi}{2}\right)\ cos\ x - sin\ \left(\frac{3\pi}{2}\right) sin(x) = \ sin\ x$

25) $cos\ (2\pi + x) = cos\ 2\pi\ \ cos\ x - sin\ 2\pi\ \ sin\ x = cos\ x$

----

26) $\cos(2\pi - x) = \cos 2\pi \ \cos x + \sin 2\pi \ \sin x = \cos x$

مثال : أثبت أن $\dfrac{\sin(x+y)}{\cos x \ \cos y} = \tan x + \tan y$

الحل :

$$\frac{\sin(x+y)}{\cos x \ \cos y} = \frac{\sin x \ \cos y + \cos x \ \sin y}{\cos x \ \cos y}$$

$$= \frac{\sin x \ \cos y}{\cos x \ \cos y} + \frac{\cos x \ \sin y}{\cos x \ \cos y}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} = \tan x + \tan y$$

مثال : أوجد قيمة ما يلي :

1) $\cos(24)\cos(36) - \sin(24)\sin(36)$

الحل : $\cos(24)\cos(36) - \sin(24)\sin(36) = \cos(24+36) = \cos(60) = \frac{1}{2}$

2) $\cos(70)\cos(25) + \sin(70)\sin(25)$

$$= \cos(70-25) = \cos(45) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

3) $\cos(50)\cos(10) - \sin(50)\sin(10)$

$$\cos(50+10) = \cos(60) = \frac{1}{2}$$

4) $\sin(35)\cos(25) + \sin(25)\cos(35)$

$$\sin(35+25) = \sin(60) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

5) $\sin(75)\sin(15) + \cos(75)\cos(15)$

$$\cos(75-15) = \cos(60) = \frac{1}{2}$$

مثال : إذا كان $sin\ a = \frac{4}{10}$ ، $cos\ b = \frac{-3}{10}$ ، حيث $zero < a < 90$ ، $90 < b < 180$

أحسب قيمة :

1) $sin\ (a+b)$

2) $sin\ (a-b)$

3) $cos\ (a+b)$

4) $cos\ (a-b)$

الحل : يجب إيجاد $cos\ a\ , sin\ b$

لإيجاد $cos\ a$

$$sin^2\ a + cos^2\ a = 1$$

$$\left(\frac{4}{10}\right)^2 + cos^2\ a = 1$$

$$cos^2\ a = 1 - \frac{16}{100}$$

$$cos^2\ a = \frac{84}{100}$$

$$cos\ a = \mp\frac{\sqrt{84}}{10}$$

a بالربع الأول ← $cos\ a = \frac{\sqrt{84}}{10}$

لإيجاد $sin\ b$

$$sin^2\ b = 1 - cos^2\ b$$

$$= 1 - \left(\frac{-3}{10}\right)^2 = 1 - \frac{9}{100} = \frac{91}{100}$$

$$sin\ (b) = \mp\frac{\sqrt{91}}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{91}}{100}$$

b بالربع الثاني sin موجب ← $sin\,(b) = \frac{\sqrt{91}}{10}$

$cos\ a = \frac{\sqrt{84}}{10}$ $\quad cos\ b = \frac{-3}{10}$ $\quad sin\ a = \frac{4}{10}$ $\quad sin\ b = \frac{\sqrt{91}}{10}$

1) $sin\,(a+b) = sin\,(a)\,cos\,(b) + cos\,(a)\,sin\,(b)$

$$= \left(\frac{4}{10}\right)\left(\frac{-3}{10}\right) + \left(\frac{\sqrt{84}}{10}\right)\left(\frac{\sqrt{91}}{10}\right) = \frac{-12}{100} + \frac{\sqrt{84}\,\sqrt{91}}{100}$$

2) $sin\,(a-b) = sin\,(a)\,cos\,(b) - cos\,(a)\,sin\,(b)$

$$= \left(\frac{4}{10}\right)\left(\frac{-3}{10}\right) - \left(\frac{\sqrt{84}}{10}\right)\left(\frac{\sqrt{91}}{10}\right) = \frac{-12}{100} - \frac{\sqrt{84}\,\sqrt{91}}{100}$$

3) $cos\,(a+b) = cos\,(a)\,cos\,(b) - sin\,(a)\,sin\,(b)$

$$= \left(\frac{\sqrt{84}}{10}\right)\left(\frac{-3}{10}\right) - \left(\frac{4}{10}\right)\left(\frac{\sqrt{91}}{10}\right) = \frac{-3\sqrt{84} - 4\sqrt{91}}{100}$$

4) $cos\,(a-b) = cos\,(a)\,cos\,(b) + sin\,(a)\,sin\,(b)$

$$= \left(\frac{\sqrt{84}}{10}\right)\left(\frac{-3}{10}\right) + \left(\frac{4}{10}\right)\left(\frac{\sqrt{91}}{10}\right) = \frac{-3\sqrt{84} + 4\sqrt{91}}{100}$$

مثال : أثبت أن $tan\,(a+b) = \frac{tan\,(a)+tan\,(b)}{1-tan\,(a)\,tan\,(b)}$

البرهان :

$$tan\,(a+b) = \frac{sin\,(a+b)}{cos\,(a+b)} = \frac{sin\,(a)\,cos\,(b)+cos\,(a)\,sin\,(b)}{cos\,(a)\,cos\,(b)-sin\,(a)\,sin\,(b)}$$

$$= \frac{\left(\frac{sin\,(a)\,cos\,(b)}{cos\,(a)\,cos(b)}\right) + \left(\frac{cos\,(a)\,sin\,(b)}{cos\,(a)\,cos\,(b)}\right)}{\left(\frac{cos\,(a)\,cos(b)}{cos\,(a)\,cos\,(b)}\right) - \left(\frac{sin\,(a)\,sin\,(b)}{cos\,(a)\,cos\,(b)}\right)}$$

$$= \frac{tan\,(a) + tan\,(b)}{1 - tan\,(a)\,tan\,(b)}$$

مثال : أثبت أن $tan\,(a-b)=\frac{tan\,(a)-tan\,(b)}{1+tan\,(a)\,tan\,(b)}$

البرهان :

$$tan\,(a+b)=\frac{sin\,(a-b)}{cos\,(a-b)}=\frac{sin\,(a)\,cos\,(b)-cos\,(a)\,sin\,(b)}{cos\,(a)\,cos\,(b)+sin\,(a)\,sin\,(b)}$$

$$=\frac{\left(\frac{sin\,(a)\,cos\,(b)}{cos\,(a)\,cos(b)}\right)-\left(\frac{cos\,(a)\,sin\,(b)}{cos\,(a)\,cos\,(b)}\right)}{\left(\frac{cos\,(a)\,cos(b)}{cos\,(a)\,cos\,(b)}\right)+\left(\frac{sin\,(a)\,sin\,(b)}{cos\,(a)\,cos\,(b)}\right)}$$

$$=\frac{tan\,(a)-tan\,(b)}{1+tan\,(a)\,tan\,(b)}$$

مثال : أثبت أن $tan\,(45-c)tan\,(45+c)=1$

الحل : $tan\,(45-c)\,tan\,(45+c)=$

$$=\frac{tan\,(45)-tan\,(c)}{1+tan\,(45)\,tan\,(c)}*\frac{tan\,(45)+tan\,(c)}{1-tan\,(45)\,tan\,(c)}$$

$$\frac{(1-tan\,c)}{(1+tan\,c)}*\frac{(1+tan\,c)}{(1-tan\,c)}=1$$

مثال : أوجد قيمة ما يلي :

1) $tan\,(15)=tan\,(45-30)=tan\,(60-45)$

$$=\frac{tan\,(45)-tan\,(30)}{1+tan\,(45)\,tan\,(30)}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

2) $tan\,(-15)=-tan\,(15)=\frac{-1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{-1-\frac{1}{\sqrt{3}}}$

3) $\tan(30) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

4) $\tan(-30) = -\tan(30) = \frac{-1}{\sqrt{3}}$

5) $\tan(75) = \tan(30+45)$

$$= \frac{\tan(30)+\tan(45)}{1-\tan(30)\tan(45)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

6) $\tan(90) =$ غير معرف

7) $\tan(105) = \tan(45+60)$

$$= \frac{\tan(45)+\tan(60)}{1-\tan(45)\tan(60)} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$$

8) $\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)+\tan x}{1-\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)\tan x}$ لا يوجد لها ناتج

9) $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)-\tan x}{1+\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)\tan x}$ لا يوجد لها ناتج

10) $\tan(\pi+x) = \frac{\tan\pi+\tan x}{1-\tan\pi\ \tan x} = \frac{zero+\tan x}{1-(zero)(\tan x)} = \tan x$

11) $\tan(\pi-x) = \frac{\tan\pi-\tan x}{1+\tan\pi\ \tan x} = -\tan x$

12) $\tan\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) = \frac{\tan\left(\frac{3\pi}{2}\right)+\tan x}{1-\tan\left(\frac{3\pi}{2}\right)\tan x}$

$\tan\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ غير معرف $\rightarrow$ $\tan\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$ لا يوجد لها ناتج

13) $\tan\left(\frac{3\pi}{2}-x\right) = \frac{\tan\frac{3\pi}{2}-\tan x}{1+\tan\left(\frac{3\pi}{2}\right)\tan x}$ لا يوجد لها ناتج

14) $\tan(2\pi-x) = \frac{\tan(2\pi)-\tan x}{1+\tan(2\pi)\tan x} = -\tan x$

15) $\tan(2\pi + x) = \frac{\tan(2\pi)+\tan x}{1-\tan(2\pi)\tan x} = \frac{zero+\tan x}{1-(zero)\tan x} = \tan x$

مثال : جد مفكوك ما يلي :

1) $\sin(a+b+c)$

$$\sin(a+b+c) = \sin\big((a+b)+c\big)$$

$$= \sin(a+b)\cos(c) + \cos(a+b)\sin(c)$$

$$=\big(\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)\big)\cos(c)$$

$$+(\big(\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)\big)\sin(c)$$

$$= \sin(a)\cos(b)\cos(c) + \cos(a)\sin(b)\cos(c)$$

$$+ \cos(a)\cos(b)\sin(c) - \sin(a)\sin(b)\sin(c)$$

2) $\cos(a+b+c)$

$$\cos\big((a+b)+c\big) = \cos(a+b)\cos(c) - \sin(a+b)\sin(c)$$

$$= \big(\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)\big)\cos(c)$$

$$- \big(\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)\big)\sin(c)$$

$$= \cos(a)\cos(b)\cos(c) - \sin(a)\sin(b)\cos(c)$$

$$- \sin(a)\cos(b)\sin(c) - \cos(a)\sin(b)\sin(c)$$

3) $\tan = (a+b+c) = \tan\big((a+b)+c\big) = \frac{\tan(a+b)+\tan(c)}{1-\tan(a+b)\tan(c)}$

$$= \frac{\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} + \tan(c)}{1-\left(\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}\right)\tan(c)}$$

$$= \frac{\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} + \tan(c)\left(\frac{1-\tan(a)\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}\right)}{1-\frac{\tan(a)\tan(c)+\tan(b)\tan(c)}{1-\tan(a)\tan(b)}}$$

$$= \frac{\dfrac{\tan(a) + \tan(b) + \tan(c) - \tan(a)\tan(b)\tan(c)}{1 - \tan(a)\tan(b)}}{\dfrac{1 - \tan(a)\tan(b) - \tan(a)\tan(c) - \tan(b)\tan(c)}{1 - \tan(a)\tan(b)}}$$

$$= \frac{\tan(a) + \tan(b) + \tan(c) - \tan(a)\tan(b)\tan(c)}{1 - \tan(a)\tan(b) - \tan(a)\tan(c) - \tan(b)\tan(c)}$$

متطابقات ضعف الزاوية

$\sin(2x)$

$$\sin(2x) = \sin(x + x)$$

$$= \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\sin(2ax) = 2\sin(ax)\cos(ax)$$

$$\sin(\text{الزاوية}) = 2\sin\left(\frac{1}{2}\text{الزاوية}\right)\cos\left(\frac{1}{2}\text{الزاوية}\right)$$

$$\frac{1}{2}\sin(\text{الزاوية}) = \sin\left(\frac{1}{2}\text{الزاوية}\right)\left(\cos\left(\frac{1}{2}\text{الزاوية}\right)\right)$$

مثال : أوجد قيمة ما يلي :

1) $\sin x = 2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

2) $\sin(4x) = 2\sin(2x)\cos(2x)$

3) $\sin(5x) = 2\sin\left(\frac{5}{2}x\right)\cos\left(\frac{5}{2}x\right)$

4) $\sin(100x) = 2\sin(50x)\cos(50x)$

5) $4\sin(5x)\cos(5x) = 2(2\sin 5x\ \cos 5x) = 2\sin(10x)$

6) $10\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = 5\left(2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\right) = 5\sin x$

$\cos(2x)$

$$\cos(2x) = \cos\ (x + x)$$

$$= cos\ (x)\ cos\ (x) - sin\ (x)\ sin\ (x)$$

$$= cos^2\ x - sin^2\ x$$

$$cos\ (2x) = cos^2\ x - sin^2\ x$$

إذا تم تعويض بدل $1 - sin^2\ x = cos^2\ x$

$$cos\ (2x) = 1 - sin^2\ x - sin^2\ x$$

$$= 1 - 2\ sin^2\ x$$

$$cos\ (2x) = 1 - 2\ sin^2\ x$$

إذا عوضنا بدل $1 - cos^2\ x = sin^2\ x$

$$cos\ (2x) = cos^2\ x - (1 - cos^2\ x)$$

$$= cos^2\ x - 1 + cos^2\ x$$

$$= 2\ cos^2\ x - 1$$

$$cos\ 2x = 2\ cos^2\ x - 1$$

$$cos\ 2x = cos^2\ x - sin^2\ x$$

$$= 1 - 2\ sin^2\ x$$

$$= 2\ cos^2\ x - 1$$

مثال : اوجد قيمة ما يلي :

1) $cos\ (4x)$

$$cos\ (4x) = cos^2\ (2x) - sin^2\ (2x)$$

$$= 1 - 2\ sin^2\ (2x)$$

$$= 2\ cos^2\ (2x) - 1$$

---

2) $-\cos(7x) = -\left(\cos^2\left(\frac{7}{2}\right)x\right) - \sin^2\left(\frac{7}{2}x\right)$

$$= 2\sin^2\left(\frac{7}{2}x\right) - 1 = 1 - 2\cos^2\left(\frac{7}{2}x\right)$$

3) $2\cos^2(5x) - 1$

$$2\cos^2(5x) - 1 = \cos\big(2(5x)\big) = \cos(10x)$$

4) $1 - 2\cos^2(3x)$

$$1 - 2\cos^2(3x) = (2\cos^2(3x) - 1) = -\cos(6x)$$

$$\cos(2ax) = \cos^2(ax) - \sin^2(ax)$$

$$= 1 - 2\sin^2(ax)$$

$$= 2\cos^2(ax) - 1$$

لتحويل المتطابقة من تربيع إلى درجة أولى

$$\cos(2ax) = 1 - 2\sin^2(ax)$$

$$\cos(2ax) - 1 = -2\sin^2(ax)$$

$$1 - \cos(2ax) = 2\sin^2(ax)$$

$$\frac{1}{2}\big(1 - \cos(2ax)\big) = \sin^2(ax)$$

$$\cos(2ax) = 2\cos^2(ax) - 1$$

$$\cos(2ax) + 1 = 2\cos^2(ax)$$

$$\frac{1}{2}\big(1 + \cos(2ax)\big) = \cos^2(ax)$$

$$\sin^2(ax) = \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2ax)\big) = 1 - \cos^2(ax)$$

$$\cos^2(ax) = \frac{1}{2}\big(1 + \cos(2ax)\big) = 1 - \sin^2(ax)$$

1) $sin\ (3x)$

$$sin\ (3x) = sin\ (x + 2x) = \big(sin\ (x)\big)\big(cos\ (2x)\big) + cos\ (x)\ sin\ (2x)$$

$$= sin\ (x)(cos^2\ x - sin^2\ x) + cos\ x\ (2\ sin\ x\ \ cos\ x)$$

$$= sin\ (x)\ cos^2\ (x) - sin^3\ x + 2\ sin\ x\ \ cos^2\ x$$

$$= 3\ sin\ (x)\ cos^2\ (x) - sin^3\ (x)$$

2) $sin\ (4x)$

$$sin\ (4x) = \ sin\ (2x + 2x)$$

$$= sin\ (2x)\ cos\ (2x) + cos\ (2x)\ sin\ (2x)$$

$$= 2\ sin\ (2x)\ cos\ (2x)$$

3) $cos\ (3x)$

$$cos\ (3x) = cos\ (x + 2x) = cos\ (x)\ cos\ (2x) - sin\ (x)\ sin\ (2x)$$

$$= cos\ (x)\left(cos^2\ (x) - sin^2\ (x)\right) - sin\ (x)\big(2\ sin\ (x)\ cos\ (x)\big)$$

$$= cos^3\ (x) - cos\ (x)\ sin^2\ (x) - 2\ sin^2\ x\ \ cos\ x$$

$$= cos^3\ x - 3\ cos\ x\ \ sin^2\ x$$

4) $tan\ (2x)$

$$tan\ (x + x) = \frac{tan\ (x) + tan\ (x)}{1 - tan\ (x)\ tan\ (x)} = \frac{2\ tan\ (x)}{1 - tan^2\ (x)}$$

مثال : إذا علمت أن $sin\ (x) = \frac{2}{3}$ ، $zero\ < x\ < 90$ ، فجد قيمة كل مما يلي :

1) $cos\ (2x)$

2) $sin\ (2x)$

3) $tan\ (2x)$

الحل :

1) $cos\ (2x) = 1 - 2\ sin^2\ x = 1 - 2\ \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - 2\ \left(\frac{4}{9}\right) = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$

2) $sin\ (2x) = 2\ sin\ x\ \ cos\ x$

لإيجاد $cos\ x$

$$cos^2\ x = 1 - sin^2\ x = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$cos^2\ x = \frac{5}{9} \rightarrow cos\ (x) = \ \mp\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$cos\ (x) = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ← بالربع الأول x

$$sin\ (2x) = 2\ sin\ (x)\ cos\ (x) = 2\ \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

3) $tan\ (2x) = \frac{sin\ (2x)}{cos\ (2x)} = \frac{\left(\frac{4\sqrt{5}}{9}\right)}{\frac{1}{9}} = 4\ \sqrt{5}$

مثال : أوجد قيمة $cos^2\ (15)$

الحل :

$$cos\ (2x) = 2\ cos^2\ (x) - 1$$

$$cos\ \big(2(15)\big) = 2\ cos^2\ (15) - 1$$

$$cos\ (30) = 2\ cos^2\ (15) - 1$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\ cos^2\ (15) - 1$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 2\cos^2(15)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) = \cos^2(15)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} = \cos^2(15)$$

مثال : أوجد $\sin(22.5)\cos(22.5)$

الحل :

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\sin\big(2(22.5)\big) = 2\sin(22.5)\cos(22.5)$$

$$\sin(45) = 2\sin(22.5)\cos(22.5)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sin(22.5)\cos(22.5)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sin(22.5)\cos(22.5)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} = \sin(22.5)\cos(22.5)$$

متطابقات نصف الزاوية

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$$

$$\cos(x) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)$$

$$\cos(x) - 1 = -2\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)$$

$$\frac{1}{2}(1 - \cos x) = \sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)$$

$$\mp\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos x)} = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$$

$$\cos(2x) + 1 = 2\cos^2(x)$$

$$\cos(x) + 1 = 2\cos^2\left(\frac{1}{2}x\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(1 + \cos(x)\right) = \cos^2\left(\frac{1}{2}x\right)$$

$$\mp\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \cos(x)\right)} = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$$

$$\tan\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}x\right)} = \frac{\mp\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \cos(x)\right)}}{\mp\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \cos(x)\right)}}$$

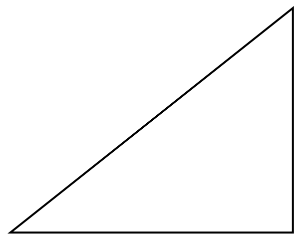
$$= \mp\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

مثال : إذا كان $tan\ (z) = \frac{4}{3}$ ، $180 < z < 270$ ، فجد $cos\ \left(\frac{z}{2}\right)$

الحل : $$cos\ \left(\frac{z}{2}\right) = \mp\sqrt{\frac{cos\ (z)+1}{2}}$$

لإيجاد $cos\ (z)$

$$\tan(z) = \frac{4}{3} \qquad x = 3 \qquad y = 4$$



3

$$a^2 = y^2 + x^2$$
$$= (4)^2 + (3)^2$$
$$= (16) + 9$$
$$a^2 = 25 \rightarrow a = 5$$

z بالربع الثالث ← $x = -3$ $\qquad y = -4$

$$cos\ (z) = \frac{x}{a} = \frac{-3}{5}$$

$$cos\ \left(\frac{z}{2}\right) = -\sqrt{\frac{\frac{-3}{5}+1}{2}} = -\sqrt{\frac{\left(\frac{2}{5}\right)}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{5}}$$

مثال : إذا كان $sin\ x = \frac{3}{5}$ ، $90 < x < 180$ ، أوجد $sin\ \left(\frac{x}{2}\right)$

الحل : $$sin\ \left(\frac{1}{2}\ x\right) = \mp\sqrt{\frac{1-cos\ x}{2}}$$

sin بالربع الثاني موجب

$$sin\ \left(\frac{1}{2}\ x\right) = \sqrt{\frac{1-cos\ x}{2}}$$

لإيجاد $cox\ x$

$$sin^2\ (x) + cos^2\ (x) = 1$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + cos^2\ (x) = 1$$

$$cos^2\,(x) = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$cos\,(x) = \mp\frac{4}{5}$$

$cos\,x$ بالربع الثاني سالب

$$cos\,(x) = \frac{-4}{5}$$

$$sin\,\left(\frac{1}{2}\,x\right) = \sqrt{\frac{1-\left(\frac{-4}{5}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{9}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

متطابقات الزوايا المختلفه

$$sin\,x + sin\,y = 2\,sin\,\left(\frac{x+y}{2}\right)\,cos\,\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$cos\,x - cos\,y = -2\,sin\,\left(\frac{x+y}{2}\right)\,sin\,\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

البرهان : سيتم إثباتهم من خلال

1- $sin\,(a+b) = sin\,(a)\,cos\,(b) + cos\,(a)\,sin\,(b)$

2- $sin\,(a-b) = sin\,(a)\,cos\,(b) - cos\,(a)\,sin\,(b)$

3- $cos\,(a+b) = cos\,(a)\,cos\,(b) - sin\,(a)\,sin\,(b)$

4- $cos\,(a-b) = cos\,(a)\,cos\,(b) + sin\,(a)\,sin\,(b)$

نفرض

$$x = a + b$$

$$y = a - b$$

$$x + y = 2a \qquad x - y = 2b$$

$$\frac{x+y}{2} = a \qquad \frac{x-y}{2} = b$$

لإثبات $sin\ x + sin\ y = 2\ sin\left(\frac{x+y}{2}\right) cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ عند جمع 2 مع 1

$$sin\,(a+b) + sin\,(a-b) = 2\,sin\,(a)\,cos\,(b)$$

$$sin\,(x) + sin\,(y) = 2\,sin\left(\frac{x+y}{2}\right) cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

لإثبات $sin\ x - sin\ y = 2\ cos\left(\frac{x+y}{2}\right) sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$ نطرح المعادلة 2 من المعادلة 1

$$sin\,(a+b) - sin\,(a-b) = 2\,cos\,(a)\,sin\,(b)$$

$$sin\,(x) - sin\,(y) = 2\,cos\left(\frac{x+y}{2}\right) cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

لإثبات $cos\,(x) + cos\,(y) = 2\,cos\left(\frac{x+y}{2}\right) cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ نجمع المعادلة 4 مع 3

$$cos\,(a+b) + cos\,(a-b) = 2\,cos\,(a)\,cos\,(b)$$

$$cos\,(x) + cos\,(y) = 2\,cos\left(\frac{x+y}{2}\right) cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

لإثبات $cos\,(x) - cos(y) = -2\,sin\left(\frac{x+y}{2}\right) sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$ نطرح المعادلة 4 من المعادلة 3

$$cos\,(a+b) - cos\,(a-b) = -2\,sin\,(a)\,sin\,(b)$$

$$cos\,(x) - cos\,(y) = -2\,sin\left(\frac{x+y}{2}\right) sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

مثال : بسط المقدار التالي $\frac{\cos(3x)-\cos(x)}{\sin(3x)-\sin(x)}$

الحل : $\frac{\cos(3x)-\cos(x)}{\sin(3x)-\sin(x)} = \frac{-2\sin\left(\frac{4x}{2}\right)\sin\left(\frac{2x}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{4x}{2}\right)\sin\left(\frac{2x}{2}\right)} = \frac{-2\sin(2x)\sin(x)}{2\cos(2x)\sin(x)} = -\tan(2x)$

مثال : أثبت أن $\frac{\sin(75)+\sin(15)}{\cos(15)-\cos(75)} = \sqrt{3}$

الحل : $\frac{\sin(75)+\sin(15)}{\cos(15)-\cos(75)} = \frac{2\sin\left(\frac{90}{2}\right)\cos\left(\frac{60}{2}\right)}{-2\sin\left(\frac{90}{2}\right)\sin\left(\frac{-60}{2}\right)} = \frac{2\sin(45)\cos(30)}{-2\sin(45)\sin(-30)}$

$$= \frac{\cos(30)}{-\sin(30)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

ملخص المتطابقات

1) $sin^2 x = 1 - cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1 - cos\,(2x)\right)$

2) $cos^2 x = 1 - sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1 + cos\,(2x)\right)$

3) $tan^2 x = sec^2 x - 1 = \frac{1}{cos^2 x} - 1$

$$= \frac{sin^2 x}{cos^2 x} = \frac{sin^2 x}{1 - sin^2 x} = \frac{1 - cos\,(2x)}{1 + cos\,(2x)}$$

4) $sin\left(-\,x\right) = \ - sin\,x$

5) $cos\left(-\,x\right) = cos\,(x)$

6) $tan\left(-\,x\right) = \ - tan\,(x)$

7) $sin\,(a\ \mp b) = sin\,(a)\,cos\,(b) \mp cos\,(a)\,sin\,(b)$

8) $cos\,(a\ \mp b) = cos\,(a)\,cos\,(b) \pm sin\,(a)\,sin\,(b)$

9) $tan\,(a\ \mp b) = \frac{tan\,(a) \mp tan\,(b)}{1\ \pm tan\,(a)\,tan\,(b)}$

10) $sin\,2x = 2\,sin\,x\ \ cos\,x = \frac{2\,tan\,x}{1+tan^2 x}$

11) $cos\,2x = cos^2 x - sin^2 x = 2\,cos^2 x - 1 = 1 - 2\,sin^2 x = \frac{1-tan^2 x}{1+tan^2 x}$

12) $tan\,(2x) = \frac{2\,tan\,(x)}{1-tan^2\,(x)}$

13) $sin\,(3x) = 3\,sin\,x - 4\,sin^3 x$

14) $cos\,(3x) = 4\,cos^3 x - 3\,cos\,x$

15) $sin\,(\pi\ \mp x) = \ \pm sin\,x$

16) $cos\,(\pi\ \mp x) = \ -sin\,x$

17) $tan\,(\pi\ \mp x) = \ \mp tan\,x$

18) $tan\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \ \mp cot\,x$

19) $cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp sin\, x$

20) $sin\, x + sin\, y = 2\, sin\left(\frac{x+y}{2}\right) cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

21) $cos\, x + cos\, y = 2\, cos\left(\frac{x+y}{2}\right) cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

22) $tan\, x \mp tan\, y = \frac{sin\,(x \mp y)}{cos\, x\; cos\, y}$

23) $sin\, x - sin\, y = 2\, cos\left(\frac{x+y}{2}\right) sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

24) $cos\, x - cos\, y = -2 sin\left(\frac{x+y}{2}\right) sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

25) $sin\, x\;\; sin\, y = \frac{1}{2}\left(cos\,(x-y) - cos\,(x+y)\right)$

26) $cos\, x\;\; cos\, y = \frac{1}{2}\left(cos\,(x-y) + cos(x+y)\right)$

27) $sin\, x\;\; cos\, y = \frac{1}{2}\left(sin\,(x+y) + sin\,(x-y)\right)$

28) $sin\left(\frac{1}{2}\, x\right) = \mp\sqrt{\frac{1-cos\, x}{2}}$

29) $cos\left(\frac{1}{2}\, x\right) = \mp\sqrt{\frac{1+cos\, x}{2}}$

30) $tan\left(\frac{1}{2} x\right) = \sqrt{\frac{1-cos\, x}{1+cos\, x}}$

الإقترانات الدورية

دورة الإقتران

إذا كان $f(x+a)=f(x)$ لكل x في مجال f(x) حيث a : عدد ثابت ، فإن f يسمى إقتراناً دورياً .

ويسمى أصغر قيمة حقيقية موجبة للعدد a التي تحقق المعادلة السابقة دورة الإقتران f(x)

- **سعة اللإقتران**

$$\text{السعة} = \frac{\text{أكبر قيمة للإقتران} - \text{أدنى قيمة للإقتران}}{2}$$

- **إذا كان لدينا**

$$f(x) = a\sin(bx+c)$$
$$f(x) = a\cos(bx+c)$$
$$a \neq zero$$
$$b \neq zero$$

1- سعة الإقتران = $|\ a\ |$

2- دورة الْإقتران= $\frac{2\pi}{|\,a\,|}$

مثال : أوجد السعة والدورة للإقترانات التالية :

1) $f(x) = 2\sin x$

الحل : السعة = $|\ 2\ | = 2$

الدورة = $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$

2) $f(x) = 5\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$

الحل : $b=\frac{1}{2}\ ,\ a=5$

السعة $5 = |\ 5\ |$

الدورة = $\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

3) $f(x) = 3\cos(2x)$

الحل : $b=2\ ,\ a=3$

السعة = $|\ 3\ | = 3$ **الدورة $\frac{2\pi}{|2|} = \pi$**

حل المعادلات المثلثية

هي معادلة تحتوي إقتراناً مثلثيةً أو أكثر وحل المعادلة المثلثية هي إيجاد قيم المتغير فيها إما هندسياً أو جبرياً ولها حلان

1- الحل الأولي : وهي قيم الزوايا التي تحقق المعادلة في الدورة الأولى للإقتران المثلثي .

2- الحل العام : وهي قيم الزوايا التي تحقق المعادلة على مجال الإقتران

الحل العام = الحل الأولي + (دورة الإقتران) n

حيث n : عدد صحيح

حالات المعادلات المثلثية

1- مثلثي عدد

عند عدم وجود فترة نجد الحل العام

مثال : حل المعادلات التالية :

1) $\cos(x) = \frac{1}{2}$

الحل : $\cos(x) = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$ عدد موجب ، $\cos(x)$ موجب الربع الأول والرابع

بالربع الأول $\cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 60$

بالربع الرابع $360 - 60 = 300$

دورة الإقتران $= \frac{2\pi}{|\text{معامل } x|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi = 360$

الحل العام :

1-) $60 + 360\,n$

2-) $300 + 360\,n$

(n : عدد صحيح)

2) $sin\ (x) = \frac{1}{2}$

الحل : $sin\ (x) = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$ ← عدد موجب ← cos x موجب بالربع الأول والثاني

x = 30

x = 180 – 30 = 150

الدورة $= \frac{2\pi}{|\ 1\ |} = 2\pi = 360$

الحل العام :

1-) $30\ +\ 360\ n$

2-) $150\ +\ 360\ n$

3) $sin\ (4x) = 1$

الحل : $sin\ (4x) = 1\ \rightarrow 4x = 90$

$x = \frac{90}{4} = 22\ .5$

الدورة $= \frac{2\pi}{|\ 4\ |} = \frac{\pi}{2}$

الحل العام : $22.5 + \frac{\pi}{2}\ n$

4) $cos\ (2x) = \frac{1}{2}\ \ ,\ \ x\ \in [\ zero\ ,\pi\ ]$

الحل : $cos\ (2x) = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$ ← موجب ← cos بالربع الأول والرابع موجب ولكن الربع الرابع ليس من

ضمن الفترة $[\ zero\ ,\ \pi]$ الناتج فقط بالربع الأول

$cos\ (2x) = \frac{1}{2} \rightarrow 2x = 60\ \rightarrow x = 30$

الحل الأولي ← x = 30

----

5) $sin\ \left(\frac{1}{2}\ x\right) = \frac{1}{2}$

الحل : $\frac{1}{2}$ ← موجب ← sin موجب بالربع الأول والثاني

بالربع الأول $\frac{1}{2}\ x = 30\ \rightarrow x = 60$

بالربع الثاني $180 - 30 = 150$

ولكنها $\frac{1}{2}\ x \leftarrow x = 300$

الدورة $= \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi = 720$

الحل العام : $60\ +\ 720\,n$

$300\ +\ 720\,n$

n : عدد صحيح

6) $2\ sin\ x - 1 = zero\ \ ,\ \ zero\ \leq x\ \leq 360$

الحل : $2\ sin\ x - 1 = zero\ \rightarrow 2\ sin\ x = 1$

$sin\ x = \frac{1}{2}\ \rightarrow x = 30°$

$x = 180 - 30 = 150$

لا نجد الدورة لأن الفترة بالسؤال دورة واحدة

الحل الأول $x = 30°$ و $x = 180°$

7) $tan\ (x) =\ -1\ \ ,\ \ x\ \in [\ zero\ , 2\pi\ ]$

الحل : $tan\ (x) =\ -1$

$$\frac{sin\ (x)}{cos\ (x)} =\ -1\ \ \rightarrow\ \ sin(x) =\ -cos(x)$$

$$sin\ (x) = cos(x)\ \ \rightarrow\ \ x = \frac{\pi}{4}$$

بالربع الثاني $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ $2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

الحل الأولي $x = \frac{3\pi}{4}\ , \frac{7\pi}{4}$

8) $sin\ (2x) = 1$

الحل : $sin\ (2x) = 1$

$$2x = 90 \ \rightarrow \ x = 45$$

الدورة $= \frac{2\pi}{|\,2\,|} = \pi$

الحل العام : $x = 45 + n\,\pi$ ، حيث n : عدد صحيح

الحالة الثانية

معادلة على شكل $a\,sin\,x - b\,cos\,x = zero$

مثال : $\sqrt{3}\,sin\,x - cos\,x = zero$ ، $\pi \le x \le 2\pi$

الحل : $\rightarrow \frac{\sqrt{3}\,sin\,x}{cos\,x} = \frac{cos\,x}{cos\,x}$

$$\sqrt{3}\,tan\,x = 1 \ \rightarrow \ tan\,x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x = 30 \ \notin [\,\pi\,, 2\pi\,]$$

$$x = 180 + 30 = 210 \ \in [\,\pi\,, 2\pi\,]$$

الحالة الثالثة

معادلات على صيغة كثير حدود

مثال : حل المعادلات التالية :

1) $sin^2\,x - sin\,x = 2$

$$sin^2\,x - sin\,x - 2 = zero$$

$$(sin\,x - 2)(sin\,x + 1) = zero$$

$$sin\,x - 2 = zero \ \rightarrow sin\,x = 2$$

(ليس لها ناتج لأن $-1 \le sin\,x < 1$)

$$sin\,x + 1 = zero \ \rightarrow sin\,x = \ -1$$

$$x = \frac{3\pi}{2} + \ 2\pi n$$

2) $sin^2\,x + sin\,x = zero$

$$sin\,x\,(sin\,x + 1) = zero$$

$$sin\,x = zero\ \rightarrow x = zero\,,\pi$$

$$sin\,x + 1 = zero\ \rightarrow sin\,x = -1\ \rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$$

الحل العام

$$x = zero + 2\pi n$$

$$x = \pi + 2\pi n$$

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$$

الحالة الرابعة

معادلة تحتوي أكثر من إقتران مثلثي

مثال : حل المعادلات التالية :

1) $cos\,x - sin\,(2x) = zero\ ,\ x\,[\,zero\,,\pi\,]$

$$cos\,x - 2\,sin\,x\ \ cos\,x = zero$$

$$cos\,x\,(1 - 2\,sin\,x) = zero$$

$$cos\,x = zero\ \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \in [\,zero\,,\pi\,]$$

$$\rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \notin [\,zero\,,\pi\,]$$

$$1 - 2\,sin\,x = zero\ \rightarrow 2\,sin\,x = 1$$

$$sin\,x = \frac{1}{2}\ \rightarrow x = 30\ \in [\,zero\,,\pi\,]$$

$$x = 180 - 30 = 150\ \in [\,zero\,,\pi\,]$$

2) $cos\ (2x) + 2\ sin^2\ x = cos\ x$

$$1 - 2\ sin^2 x + 2\ sin^2\ x = cos\ x$$

$$cos\ x = 1\ \rightarrow x = zero\ \in [\ zero\ , \pi\ ]$$

3) $sin\ x = tan\ x$, $zero\ \leq x\ \leq \frac{3\pi}{2}$

$$\frac{sin\ x}{1} = \frac{sin\ x}{cos\ x}$$

$$sin\ x = sin\ x\ \ cos\ x$$

$$sin\ x - sinx\ \ cos\ x = zero$$

$$sin\ x = zero\ \rightarrow x = zero\ , \pi\ \in \left[\ zero\ , \frac{3\pi}{2}\ \right]$$

$$1 - cos\ x = zero\ \rightarrow cos\ x = 1$$

$$\rightarrow x = zero\ \in \left[\ zero\ , \frac{3\pi}{2}\ \right]$$

4) $sec^2\ x = 2\ tan\ x$

$$1 + tan^2\ x = 2\ tan\ x$$

$$tan^2\ x - 2\ tan\ x + 1 = zero$$

$$(tan\ x - 1)\ (tan\ x - 1) = zero$$

$$tan\ x - 1 = 0\ \rightarrow tan\ x = 1$$

$$x = 45$$

$$x = 180 + 45 = 225$$

الحل العام : $x = 45 + 2\pi n$

$= 225 + 2\pi n$

n : عدد صحيح

5) $cos\ 2x + cos\ x + 1 = zero$

$$2\ cos^2\ x - 1 + cos\ x + 1 = zero$$

$$2\ cos^2\ x + cos\ x = zero$$

$$cos\ x\ (2\ cos\ x + 1) = zero$$

$$cos\ x = zero\ \ \rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$2\ cos\ x + 1 - zero\ \ \rightarrow 2\ cos\ x = -1$$

$$cos\ x = \frac{-1}{2}$$

$$x = 180 - 60 = 120$$

$$x = 180 + 60 = 240$$

6) $2\ cos\ 2x + sin\ x - 1 = zero$

$$2(1 - 2\ sin^2\ x) + sin\ x - 1 = zero$$

$$2 - 4\ sin^2\ x + sin\ x - 1 = zero$$

$$-4\ sin^2\ x + sin\ x + 1 = zero$$

$$-4\ y^2 + y + 1 = zero$$

تحول على المميز $a = -4\ ,\ b = 1\ ,\ c = 1$

$$b^2 - \ 4ac$$

$$(1)^2 - 4(-4)(1) = 1 + 16 = 17\ > zero$$

$$y = \frac{-1\ \mp\ \sqrt{17}}{2\ (-4)} = \frac{-1\ \mp\ \sqrt{17}}{-8}$$

$$y = \frac{-1 +\ \sqrt{17}}{-8}\ \rightarrow sin\ x = \frac{-1 +\ \sqrt{17}}{-8}$$

$$y = \frac{-1 -\ \sqrt{17}}{-8}\ \rightarrow sin\ x = \frac{-1 -\ \sqrt{17}}{-8}$$