الأعداد المركبة

1) ناتج $\sqrt{-25}\,\sqrt{-16}$ في أبسط صورة

Ⓐ 15 Ⓑ 20 Ⓒ -20 Ⓓ $2i$

2) ناتج $(i)\,(i^2)\,(i^3)\,(i^4)$ في أبسط صورة هو :

Ⓐ -1 Ⓑ $3i$ Ⓒ 11 Ⓓ 1

3) قيمة n حيث $i^{13}+i^{18}+i^{31}+n=0$ هي :

Ⓐ -1 Ⓑ $-i$ Ⓒ i Ⓓ 1

4) قيمة i^{4n+2} (حيث n عدد صحيح موجب) تساوي :

Ⓐ -1 Ⓑ i Ⓒ $3i$ Ⓓ $4i$

5) قيمة $\frac{i+i^2+i^3}{i^3+i^4+i^5}$ تساوي :

Ⓐ i Ⓑ $-i$ Ⓒ $-2i$ Ⓓ -1

6) إذا كان $5+4i-(x+yi)=-1-3i$ فإن x و y تساوي :

Ⓐ $x=5\,,y=2$ Ⓑ $x=3\,,y=1$ Ⓒ $x=6\,,y=7$ Ⓓ $x=4\,,y=7$

7) مرافق i^{2023} هو :

Ⓐ 1 Ⓑ 5 Ⓒ i Ⓓ $-i$

8) إذا كانت $Z+\overline{Z}=8$ فإن الجزء الحقيقي للعدد Z هو :

Ⓐ -1 Ⓑ 9 Ⓒ 4 Ⓓ -3

9) سعة العدد $\sqrt{6}+\sqrt{2}\,i$ هو :

Ⓐ $\theta=\frac{\pi}{6}$ Ⓑ $\theta=\frac{\pi}{3}$ Ⓒ $\theta=\frac{\pi}{3}$ Ⓓ $\theta=\frac{\pi}{6}$

10) إذا كان $z=3+bi$ ، وكان $|\overline{Z}|=\sqrt{130}$ ، فإن قيمة b تساوي :

Ⓐ $b=\mp 11$ Ⓑ $b=5$ Ⓒ $b=3$ Ⓓ $b=11$

11) إذا كان $z=1+i\sqrt{3}$ ، فإن قياس الزاوية الصغرى بين Z و $\overline{Z}$ تساوي :

Ⓐ $\frac{6\pi}{5}$ Ⓑ $\frac{5\pi}{3}$ Ⓒ $\frac{2\pi}{3}$ Ⓓ 0

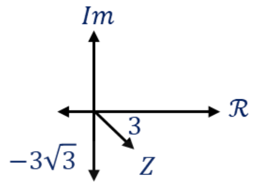
12) إذا كان $z=2+bi$ وكان $\arg(\overline{Z})=\frac{\pi}{4}$ ، فإن الثابت b حيث $b\in\mathcal{R}$ تساوي :

Ⓐ -2 Ⓑ 0 Ⓒ 5 Ⓓ i

13) إذا كان $\arg(3+7i)=\beta$ ، فإن $\arg(-3+7i)$ بدلالة β تساوي :

Ⓐ $-\beta$ Ⓑ $\beta-\pi$ Ⓒ $\pi-\beta$ Ⓓ $\frac{\pi}{2}-\beta$

14) الصورة المثلثية للعدد z الممثل بالشكل هي :



Ⓐ $z=9(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$ Ⓒ $z=6(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6})$

Ⓑ $z=8(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$ Ⓓ $z=2\sqrt{6}(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6})$

15) إذا كان $|z|=2$ ، وكان $\arg(\bar{z})=\frac{\pi}{3}$ ، فإن z بالصورة القياسية هو :

Ⓐ $1+i\sqrt{3}$ Ⓑ $i\sqrt{3}$ Ⓒ i Ⓓ $1-i\sqrt{3}$

16) العدد $\frac{\sqrt{9}+\sqrt{-9}}{3}$ بالصورة القياسية هو :

Ⓐ $1+3i$ Ⓑ $1+i$ Ⓒ $2+5i$ Ⓓ $1-i$

17) سعة $(2+2i)^2$ هي :

Ⓐ 0 Ⓑ $\frac{\pi}{8}$ Ⓒ $\frac{\pi}{2}$ Ⓓ $\frac{3\pi}{5}$

18) أقل قيمة ممكنة للعدد m حيث $m>0$ التي تحقق $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^m=1$ هي :

Ⓐ 4 Ⓑ 4 Ⓒ 5 Ⓓ 8

19) ناتج $\left(\frac{5+i}{2+3i}\right)^4$ هو :

Ⓐ 6 Ⓑ -4 Ⓒ 8 Ⓓ i

20) قيم a, b حيث $(-2+ai)-(b+9i)=-5-5i$ هي :

Ⓐ $a=-8, b=6$ Ⓒ $a=8, b=3$

Ⓑ $a=4, b=3$ Ⓓ $a=8, b=-3$

21) إذا كان $\frac{i}{i+3}=\frac{1+3i}{a}$ فإن الثابت الحقيقي a يساوي :

Ⓐ 1 Ⓑ -7 Ⓒ -5 Ⓓ 10

22) ناتج $i(i+5)(3-i^5)$ هو :

Ⓐ i Ⓑ $14-8i$ Ⓒ $8+2\,i$ Ⓓ $2+16\,i$

23) إذا كان أحد جذري العدد z هو $(5-2i)$ ، فإن الجذر الثاني هو :

Ⓐ $5+2i$ Ⓑ $-5+2\,i$ Ⓒ $5-2\,i$ Ⓓ $2\,i$

24) العدد $z=(2i-5)$ ، هو جذر المعادلة التربيعية فإن الجذر الثاني هو :

Ⓐ $z=5-2i$ Ⓑ $z=2i+5$ Ⓒ $z=-5-2i$ Ⓓ $z=2i-5$

25) حاصل ضرب $2\sqrt{3}\,(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6})$ في مرافقه هو :

Ⓐ 12 Ⓑ 2 Ⓒ 5 Ⓓ 6

26) الصورة المثلثية للعدد $\sqrt{2}-\sqrt{6}\,i$ هي :

Ⓐ $2\sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3})$ Ⓒ $2\sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5})$

Ⓑ $2\sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$ Ⓓ $2\sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8})$

27) ناتج $6\,(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})\times\frac{1}{2}\,(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$ هو :

Ⓐ $6\,(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12})$ Ⓒ $3\,(\cos\frac{11\pi}{12}-i\sin\frac{11\pi}{12})$

Ⓑ $6\,(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12})$ Ⓓ $3\,(\cos\frac{7\pi}{12}-i\sin\frac{7\pi}{12})$

28) إذا كان $z=2\,(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$ فإن $\frac{1}{z}$ تساوي :

Ⓐ $5\,(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$ Ⓒ $\frac{1}{5}\,(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4})$

Ⓑ $\frac{1}{2}\,(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$ Ⓓ $2\,(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$

29) في المعادلة $b\,x^2+6x-9=0$ تكون جذورها أعداد مركبة إذا كانت :

Ⓐ $b<1$ Ⓑ $b=-1$ Ⓒ $b=1$ Ⓓ $b<-1$

30) إذا كان $2i$ هو أحد جذور المعادلة $kz^3+5z^2+8z+20=0$ فإن قيمة k هي :

Ⓐ 9 Ⓑ 7 Ⓒ 8 Ⓓ 2

31) المعادلة التربيعية للجذرين $\mp\frac{2}{3}\,i$ هي :

Ⓐ $z^2+9=0$ Ⓑ $9z^2+4=0$ Ⓒ $4z^2+9=0$ Ⓓ $z^2+4=0$

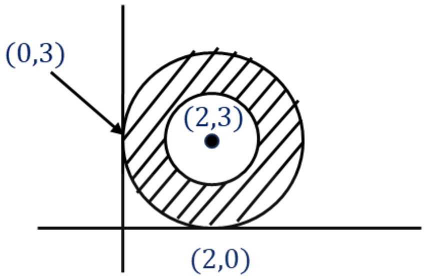
32) المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية والتي أحد جذريها العدد المركب $1+i$ هي :

Ⓐ $z^2 = 2(z+1)$
Ⓑ $z^3 = 2$
Ⓒ $z^2 = -2(z-2)$
Ⓓ $z^2 = 2(z-1)$

33) أكبر قيمة للعدد الذي يحقق المعادلة $|z+5-12i| = 6$ هي :

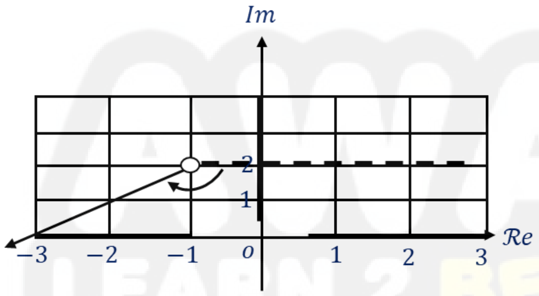
Ⓐ 8
Ⓑ -9
Ⓒ 5
Ⓓ 19

34) إحدى الآتي تصف المنطقة المظللة في الشكل المجاور :



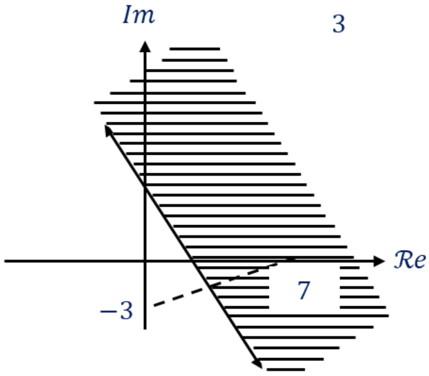
Ⓐ $2 \le |z-2-3i| < 3$
Ⓑ $2 \le |z+2+3i| < 3$
Ⓒ $2 < |z-2-3i| \le 3$
Ⓓ $2 \le |z+2-3i| \le 3$

35) إحدى الآتي تصف الشكل المجاور :



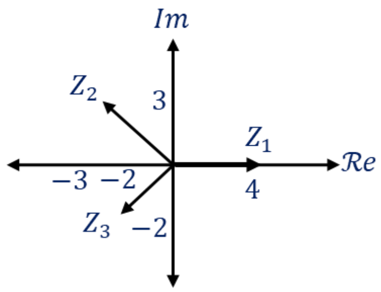
Ⓐ $\arg(z+1+2i) = \dfrac{3\pi}{4}$
Ⓑ $\arg(z-1-2i) = -\dfrac{3\pi}{4}$
Ⓒ $\arg(z+1+2i) = \dfrac{3\pi}{4}$
Ⓓ $\arg(z+1+2i) = -\dfrac{3\pi}{4}$

36) إحدى الآتي تصف الشكل المجاور:



Ⓐ $|z-7| \le |z+3i|$
Ⓑ $|z-7| \ge |z+3i|$
Ⓒ $|z-7| < |z+3i|$
Ⓓ $|z-7| \le |z-3i|$

السؤال الثاني :



1) تأمل الشكل ، ثم جد مقياس وسعة كل من : Z_1 , $\frac{1}{z_2}$, $\frac{z_3}{\overline{z_3}}$

الحل :

$$* \ Z_1 = 4 + 0i$$

$$|Z_1| = 4 \quad \Rightarrow \quad \theta = 0$$

$$* \ Z_2 = -3 + 3i \ \Rightarrow \ |Z_2| = 3\sqrt{2}$$

$$\theta = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{3}{3}\right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\therefore \left|\frac{1}{Z_2}\right| = \frac{|1|}{|Z_2|} = \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$\arg\left(\frac{1}{z_2}\right) = \arg(1) - \arg(z_2) = 0 - \frac{3\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$$

$$* \ Z_3 = -2 - 2i \ \Rightarrow \ |Z_3| = 2\sqrt{2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{2}\right) - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$$

$$\therefore \left|\frac{Z_3}{\overline{Z_3}}\right| = \frac{|Z_3|}{|\overline{Z_3}|} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1$$

$$\arg\left(\frac{Z_3}{\overline{Z_3}}\right) = \arg(Z_3) - \arg(\overline{Z_3}) = -\frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} = -\frac{3\pi}{2}$$

2) إذا كان $z = a + ib$ وكان $|Z| = \sqrt{13}$ ، $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$

أثبت أن $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{1}{13}(-5+12i)$

الحل :

$* \ |z| = \sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow \sqrt{13} = \sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow a^2+b^2 = 13 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$ ❶

$* \ \frac{b}{a} = \frac{3}{2} \Rightarrow b = \frac{3}{2}a \ldots\ldots\ldots..$ ❷ نعوض معادلة ❷ في ❶

$a^2 + \left(\frac{3}{2}a\right)^2 = 13 \Rightarrow a^2 + \frac{9}{4}a^2 = 13 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$ ($a = -2$ تهمل ربع أول)

$$\therefore b = 3 \Rightarrow z = 2+3i \Rightarrow \frac{z}{\bar{z}} = \frac{2+3i}{2-3i} \times \frac{2+3i}{2+3i} = \frac{-5+12\,i}{13} = \frac{1}{13}(-5+12\,i)$$

---

3) إذا مثلت النقطة A العدد $Z_1 = 4-7\,i$ ومثلت النقطة B العدد $Z_2 = 1+8\,i$

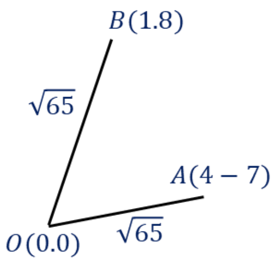
وكانت O هي نقطة الأصل ، أجب عن الأسئلة الآتية تباعا :

❶ بين أن المثلث OAB متطابق الضلعين

❷ بين أن جيب تمام الزاوية AOB يساوي $-\frac{4}{5}$

❸ جد مساحة المثلث OAB

الحل :



$* \ |z_1| = \sqrt{4^2+7^2} = \sqrt{65} = OA \ \Rightarrow |z_2| =$ ❶

$\sqrt{1^2+8^2} = \sqrt{65} = OB$

بما أن $|z_1| = |z_2|$ ←∴ المثلث OAB متطابق الضلعين

❷ $\overline{AB} = \sqrt{(4-1)^2+(-7-8)^2} = \sqrt{234}$

$* \ (AB)^2 = (OA)^2 + (OB)^2 - 2(OB)(OA)\cos\theta$

$234 = 65 + 65 - 2\sqrt{65}\sqrt{65}\cos\theta \qquad \Rightarrow \cos\theta = -\frac{4}{5}$

❸ $\therefore \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2 x} \to \sin x = \dfrac{3}{5}$

(المساحة)$A = \frac{1}{2}(OA)(OB)\sin\theta = \frac{1}{2}(\sqrt{65})(\sqrt{65})\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{39}{2}$ وحدة مساحة

4) جد جميع الجذور الحقيقية والجذور المركبة للمعادلة $Z^3 + 3Z = 2Z^2 + 6$

الحل :

$Z^3 - 2Z^2 + 3Z - 6 = 0$

$Z^2(Z-2) + 3(Z-2) = 0 \Rightarrow (Z-2)\,(Z^2+3) = 0$

جذرين مركبان   جذر

حقيقي

$Z = 2 \Rightarrow Z^2 = -3 \to Z = \mp\sqrt{-3Z} = \mp i\sqrt{3}$

$\therefore$ الجذور $i\sqrt{3}\,,\quad -i\sqrt{3}\,,\quad 2$

---

5) إذا كان $(1-2i)$ هو أحد جذري المعادلة $Z^2 + bZ + c = 0$ فجد b و c

الحل :

$z = 1 - 2i \Rightarrow z - 1 = -2i \Rightarrow (z-1)^2 = (-2i)^2 \Rightarrow Z^2 - 2Z + 1 = -4$

$Z^2 - 2Z + 5 = 0$

$Z^2 + bZ + c = 0$ بالمقارنة

$b = -2 \quad \Rightarrow \quad c = 5$

تذكير $Z^2 - (\,\mathcal{Re}$ مجموع $)Z + ($ حاصل ضرب الجذرين $) = 0$

6) إذا كان $z_1 = 2 - 2i$ ، $z_2 = \sqrt{3} + i$ ، $z_3 = a + bi$:

❶ إذا كان $|z_1 z_3| = 16$ ، فجد $|z_3|$

❷ إذا كان $\arg\left(\frac{z_3}{z_1}\right) = \frac{7\pi}{12}$ ، فجد $\arg(z_3)$

❸ إثبت أن $a + b = 0$ للعدد z_3

❹ جد ناتج $\frac{z_3}{z_1}$

الحل :

❶ ※ $|z_1 z_3| = 16 \;\Rightarrow\; |z_1 z_3| = |z_1||z_3| \;\Rightarrow\; 16 = \sqrt{2^2 + 2^2}\,|z_3|$

$16 = \sqrt{8}\,|z_3| \;\Rightarrow\; \therefore\; |z_3| = \frac{16}{\sqrt{8}} \times \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}} = 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$

❷ $\arg\left(\frac{Z_3}{Z_2}\right) = \arg(z_3)$

$- \arg(z_2) \Rightarrow \frac{7\pi}{12} = \arg(z_3) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow \frac{7\pi}{12} = \arg(z_3) - \frac{\pi}{6}$

$\therefore \arg(z_3) = \frac{3\pi}{4}$

❸ $|z_3| = 4\sqrt{2} = r \quad \arg(z_3) = \frac{3\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad z_3 = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z_3 = 4\sqrt{2}\,(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) \Rightarrow z_3 = -4 + 4i \;\therefore a = -4\,, b = 4 \;\Rightarrow a + b = 0$

❹ $\frac{z_3}{z_1} = \frac{-4 + 4i}{2 - 2i} = \frac{-2(2 - 2i)}{2 - 2i} = -2$

---

7) يحقق العددان المركبان z و w المعادلتين :

$z - 3 = w + 3i \qquad\qquad 2z + 1 = -iw$

حل المعادلتين لإيجاد العدد z والعدد w

الحل :

$2z + 1 = -iw$ ……………. ❶ معادلة

$i \times (z - 3 = w + 3i) \Rightarrow iz - 3i = iw - 3$ ………….. ❷ معادلة

جمع المعادلتين ❶ مع ❷ $\quad (z(2 + i) + 1 - 3i = -3) \Rightarrow z = \frac{-4+3i}{2+i}$

$\therefore z = -1 + 2i \Rightarrow$ عوض $\therefore w = -4 - i$

8) إذا كان $\omega^2 = 3 + 4i$ ، فجد ω ؟

الحل :

$\omega = \sqrt{3+4i} \Rightarrow x + iy = \sqrt{3+4i} \Rightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = 3 + 4i$

$* \; x^2 - y^2 = 3$ ……………………. معادلة ❶

$2xy = 4 \Rightarrow y = \dfrac{2}{x}$ نعوض في ❶

$x^2 - \dfrac{4}{x^2} = 3 \Rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0 \;\therefore x = \mp 2$

$\therefore y = \mp 1 \Rightarrow \quad 2 + i \;, \; -2 - i$ الجذرين هم

---

9) إذا كان $(a + bi) \,,\, (c + 2i)$ ، هما الجذرين التربيعيين للعدد المركب $21 - 20\,i$

فجد قيمة كل من الثوابت الحقيقية $a \,,\, b \,,\, c$ ؟

الحل :

نبدأ بالجذر الأقل مجاهيل يعني $c + 2\,i$

$(c + 2i)^2 = 21 - 20i$

$c^2 - 4 + 4ci = 21 - 20i \qquad \sqrt{21 - 20i} = c + 2i$

التخيلي = التخيلي

$4c = -20 \Rightarrow c = -5 \qquad -5 + 2i$ الجذر الأول

$5 - 2i$ الجذر الثاني

بالمقارنة $a + bi \Leftarrow a = 5 \;,\; b = -2$

---

10) جد العددين المركبين والذين يحققان المعادلتين معا :

$|z-3-2i| = 5$ والمعادلة $\dfrac{|z-6i|}{|z-7+i|} = 1$ ؟

الحل :

$|z-3-2i| = 5 \Rightarrow r = 4$ نصف القطر $\Rightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$

$\dfrac{|z-6i|}{|z-7+i|} = 1 \Rightarrow |z-6i| = |z-7+i| \Rightarrow$ منصف عامودى

$y = x - 1$ المعادلة

$(x-3)^2 + (x-1-2)^2 = 25$ بحل المعادلتين

$2x^2 - 12x - 7 = 0 \Rightarrow \quad x = \dfrac{6 \mp 5\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{4 \mp 5\sqrt{2}}{2}$

العددين هما : $z_2 = \dfrac{6-5\sqrt{2}}{2} + \dfrac{4-5\sqrt{2}}{2}i \qquad z_1 = \dfrac{6+5\sqrt{2}}{2} + \dfrac{4+5\sqrt{2}}{2}i$