أولا قواعد التكامل

1) تكامل الاقترانات الأساسية

إذا كانت k, b, a أعداداً حقيقية وكانت $n \neq -1$ ، فإنَّ :

رقم	القاعدة	لتبسيط وتجهيز المسائل
1	$\int (ax+b)^n \, .dx = \dfrac{(ax+b)^{n-1}}{a(n+1)} + c$	1) $\sqrt[n]{(f(x))^m} = (f(x))^{\frac{m}{n}}$
2	$\int x^n \, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$	2) $\dfrac{1}{(f(x))^m} = (f(x))^{-m}$
3	$\int k \, dx = kx + c$	3) $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ 4) فك الأقواس ، توزيع المقام على البسط. 5) تحليل البسط أو المقام ثم إختصار.
4	$\int \dfrac{f(x)}{g(x)} \, .dx = \int q(x) + \dfrac{r(x)}{g(x)} \, dx$ $f(x), g(x)$ كثيرات حدود	6) قسمة طويلة : درجة البسط $\leq$ درجة المقام الإقتران النسبي = الناتج + $\dfrac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$

2) تكامل الاقترانات الأسّيّة:

إذا كانت k, b, a أعداداً حقيقية وكانت e , $a \neq 0$, $k > 0$, $k \neq 1$ عدد نيبيري ، فإنَّ :

رقم	القاعدة	لتبسيط وتجهيز المسائل
1	$\int e^{(ax\pm b)} \, .dx = \dfrac{e^{(ax\pm b)}}{a} + c$	1) $ln(1) = 0$, $ln(e) = 1$
2	$\int e^x \, dx = e^x + c$	2) $ln(e^x) = x$, $e^{ln(x)} = x$ 3) $ln(x^n) = n \, ln(x)$ 4) $ln(x * y) = ln(x) + ln(y)$
3	$\int k^{ax\pm b} \, dx = \dfrac{k^{ax\pm b}}{a \, ln(k)} + c$	5) $ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = ln(x) - ln(y)$
4	$\int k^x \, dx = \dfrac{k^x}{ln(k)} + c$	

3) تكامل الاقترانات المثلثيّة:

رقم	القاعدة
1	$\int sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}cos(ax+b)+c$
2	$\int cos(ax+b)\ dx = \frac{1}{a}sin(ax+b)+c$
3	$\int sec^2(ax+b)\ dx = \frac{1}{a}tan(ax+b)+c$
4	$\int csc^2(ax+b)\ dx = -\frac{1}{a}cot(ax+b)+c$
5	$\int sec(ax+b)\,tan(ax+b)dx = \frac{1}{a}sec(ax+b)+c$
6	$\int csc(ax+b)\ cot(ax+b)dx = -\frac{1}{a}csc(ax+b)+c$

لتبسيط وتجهيز المسائل

1) استخدام المتطابقات الأساسية:

$sin^2(x)+cos^2(x)=1$

$sin(2x)=2sin(x)*cos(x)$

$cos(2x)=cos^2(x)-sin^2(x)$
$=2cos^2(x)-1$
$=1-2sin^2(x)$

$sec(x)=\frac{1}{cos(x)}\ ,csc(x)=\frac{1}{sin(x)}$

2) إذا كان داخل التكامل $tan^2(x)\ \ or\ cot^2(x)$

$tan^2x=\ sec^2x-1$,
$cot^2x=\ csc^2x-1$

3) إذا كان داخل التكامل
$sin^n(x)\ \ or\ cos^n(x)$ ، حيث n زوجي:

$sin^2x=\frac{1}{2}(\ 1-cos(2x))$

$cos^2x=\frac{1}{2}(\ 1+cos(2x))$

4) إذا كان داخل التكامل حاصل ضرب النسبتين $(sin(x), cos(x))$:

1) $sin(x)*sin(y)=\frac{1}{2}(cos(x-y)-cos(x+y))$

2) $sin(x)*cos(y)=\frac{1}{2}(sin(x-y)+sin(x+y))$

3) $cos(x)*cos(y)=\frac{1}{2}(cos(x-y)+cos(x+y))$

4) $cos(x)*sin(y) = -\frac{1}{2}(sin(x-y)-sin(x+y))$

4) تكامل إقترانات مثلثيّة ينتج منها اقتران لوغاريتمي طبيعي:

إذا كانت b, a أعداداً حقيقية وكانت $a\neq 0$, $f(x)$ اقتران قابل للإشتقاق، فإنَّ :

رقم	القاعدة
1	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ dx = ln\lvert f(x)\rvert+c\ ,f(x)\neq 0$
2	$\int \frac{k}{ax+b}\ dx\ \ ,\ \ k\in R$ $=\frac{k}{a}ln\lvert ax+b\rvert+c\ ,x\neq -\frac{b}{a}$
3	$\int \frac{1}{x}\ dx = ln\lvert x\rvert+c$

استنتاجات مهمّة

1) $\int\ tan(x)dx = -ln\lvert cos(x)\rvert+c$

2) $\int\ cot(x)dx = \ ln\lvert sin(x)\rvert+c$

3) $\int sec(x)\,dx = ln\lvert\ (sec(x)+tan(x))\rvert+c$

4) $\int csc(x)\,dx = -ln\lvert\ (csc(x)+cot(x))\rvert+c$

ثانيا طرق التكامل المتقدمة

إذا وُجِدت عمليتي الضرب والقسمة ويصعب التخلص منهما عندها نلجأ إلى إحدى طرق التكامل المتقدِّمة :

1) التكامل بالتعويض:

خطوات إيجاد التكامل بالتعويض $\int f(g(x)) * g'(x)dx$:

1) نفرض $y = g(x)$.
2) نشتق الفرض : $\frac{du}{dx} \leftarrow dx = \frac{du}{\text{المشتقة}}$
3) نحذف متغيِّر التكامل الأصلي ومشتقته.
4) نكتب التكامل الجديد بأبسط صورة.
5) إيجاد التكامل الجديد.
6) كتابة الإقتران الأصلي باستعمال المتغيِّر الأصلي.

2) التكامل بالأجزاء:

خطوات إيجاد التكامل بالأجزاء:

1) اختار الإقترانين: $u \,.\, v$ مراعياً عند اختيار u أن تكون du أبسط من u ، وأن يكون سهلاً إيجاد تكامل dv.
2) تنظيم خطوات إيجاد $v \,.\, du$ كما يأتي : $\int f(x)\, dx = \int u * dv = u * v - \int v * du$
3) إكمال التكامل لإيجاد $(\int v * du)$.

3) التكامل بالكسور الجزئية:

خطوات إيجاد التكامل بالكسور الجزئية:

1) تحليل المقام تحليلاً كاملاً.
2) تجزئة الكسر " حسب نوع تحليل المقام "
3) توحيد المقامات " بضرب طرفي المعادلة بالمضاعف المشترك الأصغر لمقامي الكسر.
4) إيجاد قيم الثوابت " بتعويض أصفار المقام أو قيم أخرى لـ x ".
5) إعادة كتابة التكامل.
6) إجراء التكامل.

تلخيص حالات التكامل

no	التكامل	الإجراء	ملاحظات
1	$\int e^{g(x)} * g'(x)dx$	$y = g(x)$	إذا كان $g(x)$ غير خطي : نستخدم الفرض
2	$\int f(x) * ln(x)dx$		
	$\int \frac{ln(x)}{x}dx$	$y = ln(x)$	تكامل بالتعويض: إذا كان $f(x) = \frac{1}{x}$
	$\int x\, ln(x)dx$ $\int \frac{ln(x)}{(x-1)^2}dx$	$u = ln(x)$ $dv = x$	تكامل بالأجزاء: إذا كان $f(x)$ أي إقتران آخر شرط أن نفرض: $u = ln(x)\ , dv = f(x)$ ملاحظة: في بعض التكاملات نحتاج أن نستخدم قوانين اللوغاريتمات
3	تكامل الجذور		
	$\int \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} dx$ $\int x^2 \sqrt{\frac{2}{x^2} + \frac{3}{x}}\, dx$	تبسيط الجذر: إخراج عامل مشترك توحيد مقامات متطابقات ضرب بالمرافق	غير جاهز للفرض
	$\int csc^2(x) e^{\sqrt{cot(x)}} dx$	$y = \cot(x)$ أو $y = \sqrt{cot(x)}$	جاهز للفرض : نفرض الجذر كامل ثم تربيع أو تكعيب الطرفين أو نفرض ما بداخل الجذر
2	$\int cos^n(x)dx$. $\int cos^n(x)dx$. $n \in$ عدد صحيح موجب		
	$\int sin^2(x)dx$	n زوجي: نستخدم المتطابقات	$sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - cos(2x))$ $cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + cos(2x))$
	$\int cos^3(x)dx$	n فردي : $y = sin(x)$	$cos^3(x) = cos(x)cos^2(x)$ $= cos(x)\left(1 - sin^2(x)\right)$
3	$\int sin^n(x) \times cos^m(x)dx$		
	$\int cos^5(x)\, sin^2(x)\, dx$	$y = cos(x)$	إحدى القوى زوجية والأخرى فردية : نفرض الزوجية " بدون القوَّة "
	$\int cos^5(x)\, sin^3(x)\, dx$	$y = cos(x)$	كلتا القوّتان فرديّتان: نفرض أيًّا منهما ويفضّل الكبرى " بدون القوَّة ".
	$\int cos(x)\, sin^2(x)\, dx$	$y = sin(x)$	إحدى القوى $= 1$: نفرض الأخرى " بدون القوَّة "
	$\int cos^2(x)\, sin^2(x)\, dx$		كلتا القوّتان زوجيّتان: نستخدم المتطابقات

ملاحظات	الإجراء	التكامل	no
$\int sec^m(x) \times tan^n(x)dx \ . \ \int csc^m(x) \times cot^n(x)dx$			4
m زوجي: نفرض $u = tan(x)$ or $cot(x)$ ، " بدون القوَّة "	$y = tan(x)$	$\int sec^4(x)\, tan^6(x)\, dx$	
$m\ .n$ فرديتان: نفرض $u = sec(x)$ or $csc(x)$ ، " بدون القوَّة "	$y = csc(x)$	$\int csc^3(x)\, cot^3(x)\, dx$	
$\int tan^n(x)\, d\,x \ . \ \int cot^n(x)\, dx$			5
$tan(x) = \dfrac{sin(x)}{cos(x)}\ .\ cot(x) = \dfrac{cos(x)}{sin(x)}$	$= -ln(cos\, x)$ $= ln(sin\, x)$	$\int tan(x)\, dx$ $\int cot(x)\, dx$	
$tan^2(x) = sec^2(x) - 1$ $cot^2(x) = csc^2(x) - 1$	$n = 2$ نستخدم المتطابقات	$\int tan^2(x)\, d\,x$	
$cot^5(x) = cot^3(x)\, cot^2(x)$ $= cot^3(x)(csc^2(x) - 1)$	n أي عدد صحيح	$\int cot^5(x)\, d\,x$	
$\int sec^n(x)\, d\,x \ . \ \int csc^n(x)\, dx$			6
$\int sec\,(x) \times \dfrac{sec(x) + tan(x)}{sec(x) + tan(x)}\, dx$	$ln\lvert sec\, x + tan\, x\rvert$	$\int sec\,(x)\, dx$	
$\int csc\,(x) \times \dfrac{-(csc(x) + cot(x))}{-(csc(x) + cot(x))}\, dx$	$-ln\lvert csc\, x + cot\, x\rvert$	$\int csc\,(x)\, dx$	
تكامل مباشر حسب القواعد	$tan(x) + c$	$\int sec^2(x)\, d\,x$	
تكامل مباشر حسب القواعد	$-cot(x) + c$	$\int csc^2(x)\, d\,x$	
n فردي: تكامل بالأجزاء " دوري " $csc^3(x) = csc(x)csc^2(x)$	$u = csc(x)$ $dv = csc^2(x)$	$\int sec^3(x)\, d\,x$	
n زوجي: تكامل بالتعويض $csc^3(x) = csc^2(x)csc^2(x)$ $= csc^2(x)(tan^2(x) + 1)$	$y = tan(x)$	$\int sec^4(x)\, d\,x$	
$\int \dfrac{\text{كثير حدود}}{\text{كثير حدود}}\, dx$			7
عوامل المقام خطية مختلفة: $\dfrac{A}{ax + b} + \dfrac{B}{cx + d} + \cdots$	خطوات التكامل بالكسور الجزئية	$\int \dfrac{x - 7}{x^2 - x - 6}\, dx$	
عوامل المقام خطية أحدهم مكرَّر: $\dfrac{A}{ax + b} + \dfrac{B}{(ax + b)^2} + \dfrac{c}{(ax + b)^3} + \cdots$		$\int \dfrac{x^3 - 4x^2 - 2}{x^3 + x^2}\, dx$	
أحد عوامل المقام تربيعي لا يمكن تحليله: $\dfrac{A}{ax + b} + \dfrac{Bx + C}{ax^2 + bx + c}$		$\int \dfrac{7x^2 - x + 1}{x^3 + 1}\, dx$	
درجة البسط $\leq$ درجة المقام	قسمة طويلة *	$\int \dfrac{4x^3 - 5}{2x^2 - x - 1}\, dx$	

ثالثا المعادلات التفاضليّة

1) الشرط الأولي:

لإيجاد قاعدة اقتران عُلِمت مشتقته علينا إيجاد قيمة الثابت C ، وذلك من خلال نقطة تُحقّق الإقتران الأصلي .

2) معادلات الحركة:

1) موقع الجسم : $s(t)$ ، السرعة المتَّجهة : $v(t) = s'(t)$ ، التسارع : $a(t) = v'(t) = s''(t)$

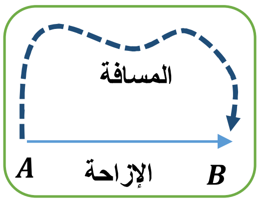
2) المسافة هو الإقتران الأصلي لاقتران السرعة : $s(t) = \int v(t)\, dt$

3) السرعة هي الإقتران الأصلي لإقتران التسارع : $v(t) = \int a(t)\, dt$

إذا تحرَّك جسم في مسار مستقيم وفقا لإقتران الموقع $s(t)$ ، و سرعته المتَّجهة هي: $v(t) = s'(t)$ ، فإنَّ:

1) إزاحته في الفترة الزمنية $[t_1 . t_2]$:

هي تغيير موقع الجسم وقد تكون موجبة أو سالبة أو صفراً تبعاً لإتجاه حركة الجسم.



$$s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt$$

$s(t_1)$: الموقع الإبتدائي ، $s(t_2)$: الموقع النهائي

2) المسافة الكلية في الفترة الزمنية $[t_1 . t_2]$:

هي طول المسار الذي يقطعه الجسم بصرف النظر عن الاتجاه ، وقيمتها ≤ 0.

$$\int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\, dt$$

3) المعادلة التفاضليّة:

هي معادلة جبرية تحوي مشتقة أو أكثر لإقترانٍ ما وقد تحوي الإقتران نفسه ومن أمثلتها:

$$\frac{dy}{dx} = 2x^3 + 5 \quad . \quad \frac{dp}{dt} = kp \quad . \quad \frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} - 7y = \frac{1}{x}$$

ويعدُّ الإقتران $y = f(x)$ حلاً للمعادلة التفاضلية إذا تحققت المعادلة عند تعويض $f(x)$ ومشتقاته فيها.

حل المعادلة التفاضلية بفصل المتغيرات:

إذا كانت المعادلة على شكل $\frac{dy}{dx} = g(x)$ ، تحل بشكل مباشر.

أمَّا إذا كانت المعادلة على شكل $\frac{dy}{dx} = f(x) * g(y)$ فإنَّها تسمَّى " المعادلة القابلة للفصل " وتحل كما يلي:

خطوات الحل:

الخطوة الأولى : فصل dy عن dx : كتابة dx في أحد طرفي المعادلة وكتابة dy في الطرف الآخر.

الخطوة الثانية : نقل جميع الحدود التي تحوي المتغيِّر x إلى الطرف الذي يحوي dx . ونقل جميع الحدود التي تحوي المتغيِّر y إلى الطرف الذي يحوي dy.

الخطوة الثالثة : إيجاد التكامل لكلٍّ من طرفي المعادلة

رابعاً المساحات والحجوم الدورانيّة

3) المساحة:

1) المساحة المحصورة بين منحنى $f(x)$ ومحور x والمستقيمين $x = a \,.\, x = b$

حالة (1): إيجاد المساحة فوق المحور x :

$$A = \int_a^b f(x)\ dx$$

حالة (2): إيجاد المساحة تحت المحور x :

$$A = -\int_a^b f(x)\ dx$$

حالة (3): إيجاد المساحة جزء من المنطقة فوق المحور x وجزء آخر أسفل المحور x:

$$A = -\int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$$

ملاحظة: لإيجاد حدود التكامل : $f(x) = 0$

2) المساحة المحصورة بين منحنى $f(x)$ ومنحنى $g(x)$:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

ملاحظة: لإيجاد حدود التكامل : $f(x) = g(x)$

4) الحجوم الدورانية:

1) حجم المجسَّم الناتج من دوران المنطقة التي تنحصر بين منحنى $y = f(x)$ والمحور x :

$$V = \int_a^b \pi\, y^2\ dx \quad or \quad V = \int_a^b \pi\, \left(f(x)\right)^2\ dx$$

ملاحظة: لإيجاد حدود التكامل : $f(x) = 0$

2) حجم المجسَّم الناتج من دوران المنطقة التي تنحصر بين منحنى $f(x)$ ومنحنى $g(x)$ حول المحور x:

$$V = \int_a^b \pi\, \left(\left(f(x)\right)^2 - \left(g(x)\right)^2\right)\ dx$$

ملاحظة: لإيجاد حدود التكامل : $f(x) = g(x)$

أولاً المتّجهات في الفضاء

أولاً: المتّجهات:

رقم	المفهوم	الرمز	القانون
1	القطعة المستقيمة	$\overline{AB}$	القطعة المستقيمة التي نقطتا نهايتيها A و B. $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ مثال: $O(0,0,0)$ نقطة الأصل ، $A(3,-2,8)$, $B(5,4,2)$
2	طول القطعة المستقيمة	$\overline{AB}$	$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ مثال: $AB = \sqrt{(3-5)^2+(-2-4)^2+(8-2)^2} = 2\sqrt{19}$
3	منتصف القطعة المستقيمة		$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$ مثال: $M = \left(\frac{3+5}{2}, \frac{-2+4}{2}, \frac{8+2}{2}\right) = (4,1,5)$
4	المتجهة في الفضاء	$\overrightarrow{AB}$	متجه نقطة بدايته A ونقطة نهايته B.
5	الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$	$\vec{v} = \overrightarrow{AB}$	$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \langle x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\rangle = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ مثال: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \langle 5-3, 4--2, 2-8\rangle = \langle 2,6,-6\rangle$
6	طرق كتابة المتجهة	الصورة الإحداثية أو بدلالة متّجهة الوحدة الأساسية	$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1\hat{\imath} + v_2\hat{\jmath} + v_3\hat{k}$ مثال: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \langle 2,6,-6\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} = 2\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} - 6\hat{k}$
7	متّجهات الوحدة الأساسية	$i\ hat$: $\hat{\imath}$ $j\ hat$: $\hat{\jmath}$ $k\ hat$: $\hat{k}$	في اتجاه محور x الموجب وصورته الإحداثية : $\hat{\imath} = \langle 1,0,0\rangle$. في اتجاه محور y الموجب وصورته الإحداثية : $\hat{\jmath} = \langle 0,1,0\rangle$. في اتجاه محور z الموجب وصورته الإحداثية : $\hat{k} = \langle 0,0,1\rangle$.
7	مقدار المتّجه $\overrightarrow{AB}$	$\lvert\vec{v}\rvert = \lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	$\lvert\vec{v}\rvert = \lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ $= \sqrt{(v_1)^2+(v_2)^2+(v_3)^2}$ مثال: $\lvert\vec{v}\rvert = \lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{(2)^2+(6)^2+(6)^2} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$
8	متّجهة الموقع للنقطة A	$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$	$\overrightarrow{OA} = \langle x_1, y_1, z_1\rangle - \langle 0,0,0\rangle = \langle x_1, y_1, z_1\rangle$ تحديد موقع النقطة A بالنسبة إلى نقطة الأصل مثال: $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \langle 3,-2,8\rangle - \langle 0,0,0\rangle = \langle 3,-2,8\rangle$

أولاً: العمليّات على المتّجهات:

رقم	المفهوم	الرمز	القانون
1	جمع / طرح المتّجهات " هندسيّاً "	$\vec{a} \pm \vec{b}$	1) أرسم المتجهة $\vec{a}$. 2) ارسم المتجهة $\vec{b}$ ، بحيث تكون نقطة بدايته هي نقطة نهاية $\vec{a}$. 3) أصل بين نقطة بداية المتجهة $\vec{a}$ ونقطة نهاية المتجهة $\vec{b}$ 4) لإيجاد $\vec{a} - \vec{b}$ ، أجمع المتجهة $\vec{a}$ مع معكوس المتجهة $\vec{b}$
2	ضرب المتّجه بعدد ثابت " هندسيّاً "	$k\,\vec{v}$	نرسم متجه موازٍ لـ $\vec{v}$ وطوله $\lvert k\rvert$ مرَّة طول $\vec{v}$ وله الإتجاه نفسه. اذا كان k عدد حقيقي موجب فإنَّ $\vec{v}$ و $k\,\vec{v}$ لهما نفس الإتجاه. اذا كان k عدد حقيقي سالب فإنَّ $\vec{v}$ و $k\,\vec{v}$ لهما عكس الإتجاه.
3	جمع / طرح المتّجهات ضرب المتّجه بعدد ثابت " جبريّاً "	$\vec{a} \pm \vec{b}$ $k\,\vec{v}$	$\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle , \vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ $\vec{a} \pm \vec{b} = \langle (a_1 \pm b_1), (a_2 \pm b_2), (a_3 \pm b_3) \rangle$ $c * \vec{v} = \langle cv_1, cv_1, cv_1\rangle$ مثال: $\vec{e} = \langle -3, 9, -4\rangle , \vec{f} = \langle 5, -3, 7\rangle$ $3\vec{e} + 4\vec{f} =$ $= 3\langle -3, 9, -4\rangle + 4\langle 5, -3, 7\rangle$ $= \langle -9, 27, -12\rangle + \langle 20, -12, 28\rangle = \langle 11, 15, 16\rangle$
4	المتّجهات المتساوية	$\vec{v} = \vec{w}$	$\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle , \vec{w} = \langle w_1, w_2, w_3\rangle$ $\vec{v} = \vec{w}$ إذا وفقط إذا كان : $v_1 = w_1 \,,\; v_2 = w_2 \,,\; v_3 = w_3$ مثال: إذا كان: $\vec{u} = \langle 2, 3a-2, 9\rangle , \vec{v} = \langle 4-b, 10, c\rangle$ ، وكان: $\vec{v} = \vec{u}$ ، جد كلاً من (a, b, c)؟ $4 - b = 2 \rightarrow b = 2 \;, a - 2 = 10 \rightarrow a = 12 \;, 9 = c$
5	متّجه الإزاحة	ناتج طرح متجهي موقع	متّجة الإزاحة من A إلى B هو :$\overrightarrow{AB}$. ويساوي ناتج طرح A من B : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ مثال: إذا كانت : $A(-1, 6, 5), B(0, 1, -4)$ متجه الإزاحة من النقطة B إلى النقطة A. $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \langle -1, 6, 5\rangle - \langle 0, 1, -4\rangle = \langle -1, 5, 9\rangle$
6	المسافة	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	يمثّل مقدار متَّجه الإزاحة $\overrightarrow{AB}$ المسافة بين النقطة A والنقطة B. مثال: إذا كانت : $A(-1, 6, 5), B(0, 1, -4)$ المسافة بين النقطة B والنقطة A $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{(-1)^2 + (5)^2 + (9)^2} = \sqrt{1 + 25 + 81} = \sqrt{107}$
7	إيجاد متّجه وحدة في اتجاه أي متّجه:	$\hat{v} = \dfrac{\vec{v}}{\lvert\vec{v}\rvert}$	لإيجاد متجه وحدة في اتجاه أي متّجه: يتم القسمة على مقدار ذلك المتَّجه مثال: اكتب متَّجه الوحدة في اتجاه المتَّجهة$\langle 5, -4, -2\rangle$؟ " نجد المقدار " $\lvert\vec{v}\rvert = \sqrt{(5)^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{45}$ " $\vec{v}$ متجه وحدة في اتجاه $\vec{v}$ " $\hat{v} =$ $\left\langle \dfrac{5}{\sqrt{45}}, \dfrac{-4}{\sqrt{45}}, \dfrac{-2}{\sqrt{45}} \right\rangle$

ثانياً المستقيمات في الفضاء

رقم	المفهوم	الرمز	القانون
1	المتّجهان المتوازيان	$\vec{u} \parallel \vec{v}$	$\vec{v} \parallel \vec{u}$ إذا وفقط إذاوُجِد عدد حقيقي k بحيث يكون: $\langle v_1, v_2, v_3\rangle = k\,\langle u_1, u_2, u_3\rangle$ مثال: حدِّد إذا كان المتَّجهان متوازيين أم لا في كلٍّ ممَّا يلي: $1)\ \langle 8,12,24\rangle , \langle 15,10,-20\rangle \rightarrow \frac{8}{15} \neq \frac{12}{10} \neq \frac{24}{-20}$ " ليسا متوازيين " $2)\ \langle 27,-48,-36\rangle , \langle 9,-16,-12\rangle \rightarrow \frac{27}{9} = \frac{-48}{-16} = \frac{-36}{-12} = 3$ $\langle 9,-16,-12\rangle = \frac{1}{3}\langle 27,-48,-36\rangle$ " متوازيين "
2	نقاط تقع على إستقامة واحدة		لإثبات أن ثلاثة نقاط في الفضاء تقع على استقامة واحدة ، يكفي إثبات وجود متَّجهين متوازيين بينهما نقطة مشتركة ، وتكون إما نقطة بداية أو نقطة نهاية لهذين المتَّجهين.
3	المعادلة المتّجهة للمستقيم	$\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{v}$	$\overrightarrow{OP} = \vec{r}$: متَّجهة الموقع لنقطة على المتَّجهة. $\overrightarrow{OP_0} = \vec{r_0}$: متَّجهة الموقع لنقطة معلومة على المتَّجهة. $\overrightarrow{P_0\,P} = \vec{V}$: t: المتغيِّر الوسيط ، وتحدد كل قيمة من قيم (t) نقطة وحيدة. مثال: 1) جد معادلة متجهة للمستقيم الذي يوازي المتجه $\vec{a}$ ، ويمرُّ بنقطة متجه الموقع لها $\vec{b}$ ؟ $\vec{a} = \langle 0,-1,3\rangle , \vec{b} = \langle 10,3,-6\rangle$ $\vec{r} = \vec{b} + t\vec{a} \rightarrow \vec{r} = \langle 10,3,-6\rangle + t\,\langle 0,-1,3\rangle$ 2) جد معادلة متجهة للمستقيم المارِّ بالنقطتين $(-30,-6,30), (-26,-12,23)$؟ $\vec{v} = \langle -30 - -26, -6 - -12, 30 - 23\rangle = \langle -4,6,7\rangle$ " نختار أي نقطة ولتكن $(-26,-12,23)$: نجد متجهة الموقع لها " $\vec{r} = \vec{b} + t\vec{a} \rightarrow \vec{r} = \langle -26,-12,23\rangle + t\,\langle -4,6,7\rangle$ " المعادلة "
4	العلاقة بين المستقيمات	1) متوازيين 2) متقاطعين 3) متخالفين	1) إذا كان أحدهما ينتج من ضرب الآخر في عدد حقيقي ← المستقيمين متوازيين. 2) يمكن الحكم إذا كان المستقيمين : $l_1: \vec{r} = \vec{a} + t\,\vec{b}$ و $l_2: \vec{r} = \vec{c} + t\,\vec{d}$ متقاطعين : * مساواة متَّجهي الموقع $\vec{r}$ في معادلتيهما . * حل المعادلات الثلاثة الناتجة لإيجاد قيمة كلٍّ من المتغيِّرين u, t. * إذا تحقَّقت المعادلات الثلاثة لقيمتي هذين المتغيِّرين ← المستقيمين متقاطعين. 3) إذا كان المستقيمين غير متوازيين وغير متقاطعين ← المستقيمين متخالفين.

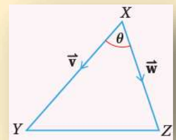
ثالثًا الضرب القياسي

رقم	المفهوم	الرمز	القانون
1	الضرب القياسي "الضرب النقطي"	$\vec{v} \bullet \vec{w}$	إذا كان $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle, \vec{w} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ ، فإنّ : $\vec{v} \bullet \vec{w} = v_1 w_2 + v_2 w_2 + v_3 w_3$ مثال: جد ناتج الضرب القياسي للمتّجهين $\vec{v} = \langle 3, 10, -5 \rangle, \vec{u} = \langle 1, -4, 12 \rangle$؟ $\vec{u}.\vec{v} = 1 * 3 + \ -4 * 10 + 12 * -5 = \ -97$
2	الزاوية بين المتّجهين في الفضاء	$cos(\theta)$ $\vec{v} \bullet \vec{w} < 0 \leftarrow \theta > 90°$ $\vec{v} \bullet \vec{w} > 0 \leftarrow \theta < 90°$ $\vec{v} \bullet \vec{w} = 0 \leftarrow \theta = 90°$	$\vec{v} \bullet \vec{w} = \lvert\vec{v}\rvert * \lvert\vec{w}\rvert * cos(\theta) \rightarrow \theta = cos^{-1}\left(\frac{\vec{v}.\vec{w}}{\lvert\vec{v}\rvert.\lvert\vec{w}\rvert}\right)$ مثال: جد قياس الزاوية θ بين المتّجهين $\vec{w} = \langle 5, 3, -4 \rangle, \vec{v} = \langle 3, -2, 9 \rangle$ ؟ $\vec{v} = \sqrt{9 + 4 + 81} = \sqrt{94}$, $\lvert\vec{w}\rvert = \sqrt{25 + 9 + 16} = \sqrt{50}$ $\vec{v}.\vec{w} = 3 * 5 + \ -2 * 3 + 9 * -4 = -27$ $\theta = cos^{-1}\left(\frac{-27}{\sqrt{94} * \sqrt{50}}\right) = 113.2°$
3	الزاوية بين المستقيمين في الفضاء		1) اتجاه المستقيم في الفضاء يحدّده أي متجه يوازيه. 2) لإيجاد قياس الزاوية بين مستقيمين في الفضاء : من خلال ايجاد الزاوية بين اتجاهيهما باستعمال الضرب القياسي. مثال: يمر المستقيم l_1 بالنقطتين : $(2, -1, 4), (-3, 5, 7)$ ، ويمر المستقيم l_2 بالنقطتين : $(6, -5, 3), (1, 2, -1)$ ، جد قياس الزاوية الحادّة بين المستقيم l_1 و المستقيم l_2 إلى أقرب عُشر درجة؟ " إتجاه l_1: $\vec{u} = \langle -5, 6, 3 \rangle$ ، إتجاه l_2 : $\vec{v} = \langle -5, 7, -4 \rangle$ " $\lvert\vec{u}\rvert = \sqrt{25 + 36 + 9} = \sqrt{70}$ $\lvert\vec{v}\rvert = \sqrt{25 + 49 + 16} = \sqrt{90}$ $\vec{u}.\vec{v} = -5 * -5 + 6 * 7 + 3 * 4$ $= 25 + 42 - 12 = 55$ $\theta = cos^{-1}\left(\frac{55}{\sqrt{70} * \sqrt{90}}\right) = 46.1°$

رقم	المفهوم	الرمز	القانون

4 — مساحة المثلث باستعمال المتّجهات

مساحة المثلث XYZ



1) حدِّد متّجهين يمثّلان ضلعين في المثلث ، لهما نقطة البداية نفسها.
2) جد طولي هذين الضلعين باستعمال صيغة مقدار المتّجه.
3) جد قياس الزاوية بينهما.
4) استعمل قانون مساحة المثلث :

$$A=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{XY}\right|\left|\overrightarrow{XZ}\right|\sin(\theta)\rightarrow A=\frac{1}{2}|\vec{v}|\,|\vec{w}|\sin(\theta)$$

مثال:

جد مساحة المثلث ABC، حيث: $\overrightarrow{AB}=\langle 4,9,1\rangle$, $\overrightarrow{AC}=\langle 9,1,4\rangle$؟

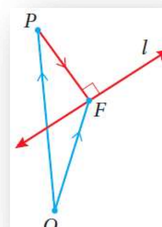
$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{16+81+1}=\sqrt{98}$, $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{81+1+16}=\sqrt{98}$

$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=4*9+9*1+1*4=49$

$\theta=cos^{-1}\left(\frac{49}{\sqrt{98}*\sqrt{98}}\right)=cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=60^{\circ}$

" مساحة المثلث " $A=\frac{1}{2}*\sqrt{98}*\sqrt{98}*sin(60^{\circ})=\frac{1}{2}*98*\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{49\sqrt{3}}{2}$

5 — مسقط العمود على مستقيم من نقطة خارجه



1) افرض أنَّ F هي نقطة مسقط العمود وهي تقع على المستقيم l وتحدِّدها إحدى قيم المتغيِّر الوسيط t.
2) استعمل قاعدة المثلث من خلال : $\overrightarrow{PF}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OF}\rightarrow\overrightarrow{PF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OP}$
3) بما أنَّ $\overrightarrow{PF}$ يعامد المستقيم l نستخدم خاصية : $\overrightarrow{PF}.\langle$ متجهة $l\rangle=0$.
4) ثم جد قيمة المتغيِّر t .
5) بعد معرفة قيمة المتغيِّر t، حدِّد متّجهة موقع F التي تقع على المستقيم l
6) إذا طلب بعد النقطة P عن المستقيم l ← جد : $\left|\overrightarrow{PF}\right|$.

مثال:

إذا كانت : $\vec{r}=2\hat{\jmath}-3\hat{k}+t(-\hat{\imath}+2\hat{\jmath}+5\hat{k})$ معادلة متجهة للمستقيم l ، والنقطة $P(-2,22,5)$ غير واقعة على المستقيم l، أجب عن السؤالين الآتيين تباعا: حدِّد مسقط العمود من النقطة P على المستقيم l" ؟

" نفرض أنَّ F هي مسقط العمود و O نقطة الأصل "

$\overrightarrow{OP}=-2\hat{\imath}+22\hat{\jmath}+5\hat{k}$ ، $\overrightarrow{OF}=(0-t)\hat{\imath}+(2+2t)\hat{\jmath}+(-3+5t)\hat{k}$

من قاعدة المثلث : $\overrightarrow{PF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OP}$

$\overrightarrow{PF}=-t\hat{\imath}+(2+2t)\hat{\jmath}+(-3+5t)\hat{k}-(-2\hat{\imath}+22\hat{\jmath}+5\hat{k})$

$\overrightarrow{PF}=(2-t)\hat{\imath}+(-20+2t)\hat{\jmath}+(-8+5t)\hat{k}$

" $\overrightarrow{PF}\perp\vec{r}$ ← $\overrightarrow{PF}.(-\hat{\imath}+2\hat{\jmath}+5\hat{k})=0$ "

$(2-t)(-1)+(-20+2t)(2)+(-8+5t)(5)=0$

$t-2-40+4t-40+25t=0\rightarrow 30t=82\rightarrow t=\frac{41}{15}$

" تحديد إحداثيات النقطة P بتعويض قيمة t "

$\overrightarrow{OF}=\left(\frac{41}{15}\right)\hat{\imath}+\left(2+2\left(\frac{41}{15}\right)\right)\hat{\jmath}+\left(-3+5\left(\frac{41}{15}\right)\right)\hat{k}$

" احداثيات النقطة " $F(-\frac{41}{15},\frac{112}{15},\frac{32}{3})$

جد البعد بين النقطة P والمستقيم l؟

$\overrightarrow{OP}=\langle -2,22,5\rangle$, $\overrightarrow{OF}=\langle -\frac{41}{15},\frac{112}{15},\frac{32}{3}\rangle$

$$\overrightarrow{PF}=\sqrt{\left(-\frac{41}{15}--2\right)^2+\left(\frac{112}{15}-22\right)^2+\left(\frac{32}{3}-5\right)^2}\cong 15.6$$

أولاً المتغيّر العشوائي المنفصل

	التوزيع الهندسي Geometric Destribution	توزيع ذي الحدّين Binomial Destribution
الشرط	التجارب مستقلة و متكرِّرة / احتمال نجاح ثابت في كلِّ مرَّة (p) / فرز النتائج إلى نجاح أو فشل	
	الوقوف عند أول نجاح	يتم تحديد عدد مرَّات التجربة
التعبير	$X \sim Geo(p)$	$X \sim B(n, p)$
تُقرأ	المتغيِّر العشوائي X يتبع التوزيع الهندسي Geo باحتمال النجاح p	المتغيِّر العشوائي X يتبع توزيع ذات الحدِّين Bin باحتمال النجاح p وعدد المرات n
إقتران التوزيع الإحتمالي	$P(X = x) = p(1-p)^{x-1}$	$P(X = r) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}$
قيم x	$X \in \{1, 2, 3, \ldots\}$	$x \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}$
حالات أخرى للإقتران	1) $P(X > x) = (1-p)^x$ 2) $P(X \geq x) = (1-p)^{x-1}$ 3) $P(X \leq x) = 1 - (1-p)^x$ 4) $P(X < x) = 1 - (1-p)^{x-1}$ 5) $P(a < X \leq b) = (1-p)^a - (1-p)^b$ 6) $P(a \leq X < b) = (1-p)^{a-1} - (1-p)^{b-1}$ 7) $P(a \leq X \leq b) = (1-p)^{a-1} - (1-p)^b$ 8) $P(a < X < b) = (1-p)^a - (1-p)^{b-1}$	1) $P(X \leq r)$: ما احتمال اجراء التجربة على الأكثر (r) مرَّة 2) $P(X > r)$: ما احتمال اجراء التجربة أكثر من (r) مرَّة . 3) $P(X \geq r)$: ما احتمال اجراء التجربة على الأقل (r) مرَّة 4) $P(X < r)$: ما احتمال اجراء التجربة أقل من (r) مرَّة. 5) إذا كانت $r > n$: $P(X = r) = 0$
التوقّع	$E(X) = \frac{1}{p}$	$E(X) = np$
التباين	-----	$Var(X) = \sigma^2 = np(1-p)$ $Var(X) = \sigma^2 = E(X)(1-p$

ثانياً المتغيّر العشوائي المتّصل

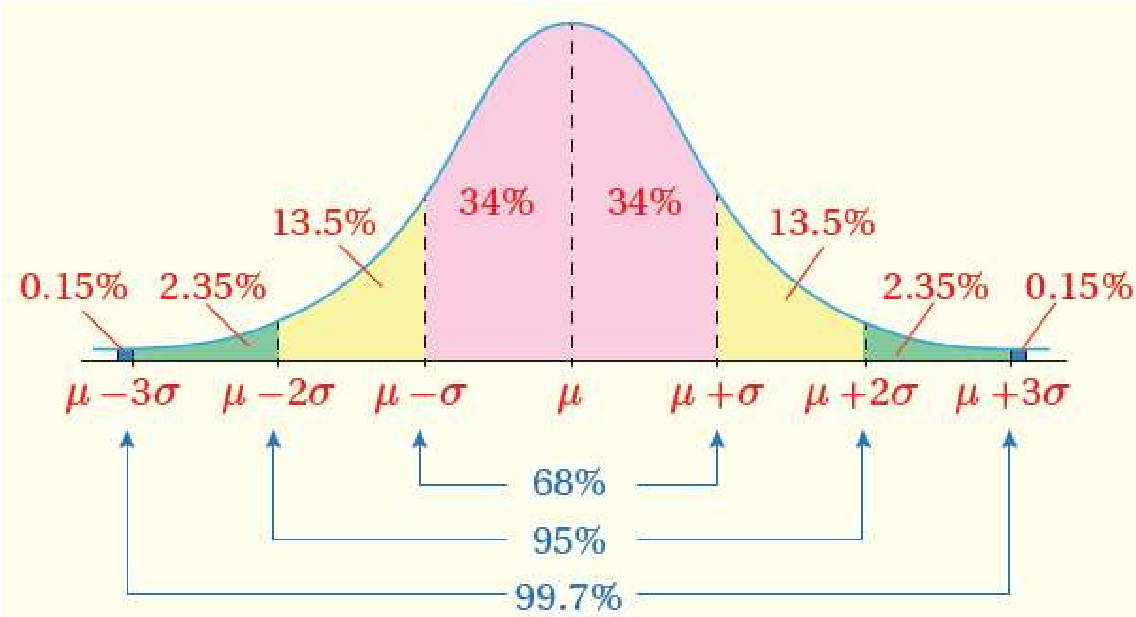
	التوزيع الطبيعي Normal Destribution	التوزيع الطبيعي المعياري Standard Normal Destributions
الشرط	1) منحنى متصل وله شكل الجرس. 2) الوسط الحسابي = الوسيط = المنوال ، وتوسُّط البيانات في كلٍّ منها. 3) تماثل البيانات حول الوسط الحسابي. 4) اقتراب المنحنى عند طرفيه من المحور x من دون أن يمسَّه. 5) المساحة الكليَّة أسفل المنحنى هي 1.	
التعبير	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	$Z \sim N(0, 1)$
تُقرأ	المتغيِّر العشوائي X يتبع التوزيع الطبيعي N بوسط حسابي μ و انحراف معياري σ	المتغيِّر العشوائي Z يتبع التوزيع الطبيعي المعياري N بوسط حسابي $\mu = 0$ و انحراف معياري $\sigma = 1$
طرق إيجاد الإحتمال	القاعدة التجريبية: من خلال شكل المنحنى الطبيعي أسفل الجدول 1) إذا كان المطلوب جد النسبة المئويَّة: بحيث يكون الجواب " نسبة مئويَّة "	من خلال الجدول $P(Z \leq z) = P(Z < z)$ شرط استخدام الجدول: أن تكون z موجبة واتجاه المتباينة $<$
	2) إذا كان المطلوب جد إحتمال: نحوِّل جواب النسبة إلى كسر عشري. مثال: 1) $P(X < \mu) = 0.5$ 2) $P(\mu - 2\sigma < \mu \leq \mu + 3\sigma)$ $= 0.135 + 0.34 + 0.34$ $+ 0.135 + 0.0235 = 0.9735$	1) $P(Z > z) = 1 - P(Z < z)$ 2) $P(Z < -z) = 1 - P(Z < z)$ 3) $P(Z > -z) = P(Z < z)$ 4) $P(z_1 < Z < z_2)$ $= P(Z < z_2) - P(Z < z_1)$
للتحويل بين التوزيعين	لتحويل المتغيِّر العشوائي $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ إلى $Z \sim N(0, 1)$: $z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$	
لإيجاد قيمة المتغيّر العشوائي إذا عُلِم الإحتمال	1) هنا قيمة الإحتمال تكون معلومة ، وقيمة المتغيِّر الشعوائي x أو z هي المجهولة. 2) هنا نستخدم الجدول بطريقة عكسية ومعرفة من خلالها قيمة z. 3) نستعمل الصيغة : $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ ، لتحديد قيمة x التي تقابل القيمة المعيارية z. 4) عند إيجاد قيمة z يجب أن يكون على صورة : $P(Z < z) = a$. 5) لمعرفة إشارة قيمة z ←	

إشارة z	جواب الإحتمال	الإحتمال
+	أكبر من 0.5	$P(Z < z)$
−	أقل من 0.5	$P(Z < z)$
+	أقل من 0.5	$P(Z > z)$
−	أكبر من 0.5	$P(Z > z)$

القاعدة التجريبيَّة (*empirical rule*) :

تُستخدم لتحديد المساحة التي تقع بين بعض القيم من البيانات أسفل المنحنى الطبيعي.

إذا اتخذت مجموعة من البيانات شكل المنحنى الطبيعي ، وكان وسطها الحسابي μ ، واحرافها المعياري σ فإنَّ:



1) 68% من البيانات: تقريباً تقع بين $\mu-\sigma$ و $\mu+\sigma$،
أو 68% من البيانات : لا يزيد البعد بينها وبين الوسط الحسابي على قيمة الإنحراف المعياري.

2) 95% من البيانات: تقريباً تقع بين $\mu-2\sigma$ و $\mu+2\sigma$،
أو 95% من البيانات : لا يزيد البعد بينها وبين الوسط الحسابي على مثلي قيمة الإنحراف المعياري.

3) 99.7% من البيانات: تقريباً تقع بين $\mu-3\sigma$ و $\mu+3\sigma$،
أو 99.7% من البيانات : لا يزيد البعد بينها وبين الوسط الحسابي على ثلاثة أمثال قيمة الإنحراف المعياري.

أ. زكي غنيم
أ.ابراهيم العقرباوي